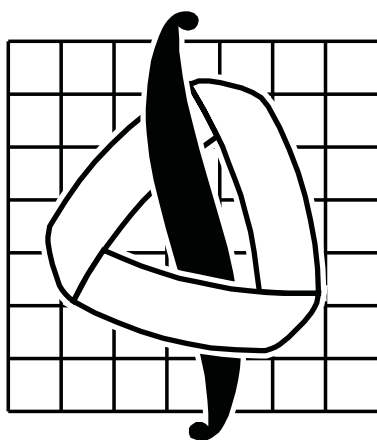


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ



ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Студента 505 группы Крылова Дениса Юрьевича

**"АТОМЫ С БОЛЕЕ ЧЕМ ОДНОЙ УНИКУРСАЛЬНОЙ
КОМПОНЕНТОЙ"**

Научный руководитель – академик РАН А.Т.Фоменко.

1 Введение.

Понятие атома было введено А.Т.Фоменко, [1] для изучения бифуркаций интегрируемых гамильтоновых систем. Атом описывает бифуркацию многообразия в окрестности критического уровня с несколькими критическими точками на нем.

Атомы важны и для изучения топологического типа особенностей функций Морса на двумерных многообразиях и бифуркаций таких функций.

Как оказалось, понятие атома представляет интерес также для теории узлов и комбинаторики [2, 3].

Остов любого атома может быть однозначно представлен в виде объединения некоторого числа *уникурсальных компонент* так, что все точки пересечения являются двойными и при этом ни одна из них не является точкой касания. Кроме этого, оказывается, что ориентируемость атома зависит только от его остова.

Поэтому интересной задачей является нахождение критерия ориентируемости атомов с k уникурсальными компонентами для всех $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ (при $k = 1$ критерий уже известен).

В данной работе доказаны критерии ориентируемости атомов, остов которых представляет собой граф с двумя, тремя и четырьмя уникурсальными компонентами (Теоремы 7, 8 и 9). Доказательство использует на понятие четности для вершин атома, введенное В.О.Мантуровым в [4].

Теоремы 1 – 4 и 6 принадлежат В.О.Мантурову, остальные – автору этой работы.

2 Основная часть.

Рассмотрим гладкое компактное двумерное многообразие P . Пусть Γ – вложенный в P граф степени 4. Граф Γ задает клеточное разбиение поверхности P .

Определение 1. Пара (P, Γ) называется *атомом*, если каждую связную компоненту в $P \setminus \Gamma$ (двумерную клетку) можно раскрасить в один из двух цветов (будем считать, что в черный или в белый) так, чтобы к каждому ребру Γ подходили компоненты $P \setminus \Gamma$ разных цветов.

Определение 2. Граф Γ называется *остовом* атома (P, Γ) .

Мы будем рассматривать атомы с точностью до естественного изоморфизма:

Определение 3. Два атома (P_1, Γ_1) и (P_2, Γ_2) называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $\phi : P_1 \rightarrow P_2$, переводящий остов в остов и согласованное с раскраской.

Определение 4. Атом (P, Γ) называется *ориентируемым*, если поверхность P ориентируема, и *неориентируемым* в противном случае.

Заметим, что остов атома (P, Γ) – четырехвалентный граф со структурой противоположных ребер в каждой вершине, заданной вложением остова в P .

Несложно показать, что класс эквивалентности каждого атома может быть восстановлен по следующим комбинаторным данным:

1. Остов.
2. А-структура (делящая четыре полуребра, инцидентные каждой вершине, на две пары, называемые противоположными. Отношение противоположности определяется в соответствии с расположением ребер на поверхности).
3. В-структура (в каждой вершине выделены две пары соседних полуребер, которые образуют границы черных клеток).

Рассмотрим четырехвалентный граф Γ со структурой противоположных ребер в каждой вершине, все ребра которого ориентированы некоторым образом.

Определение 5. Данная ориентация ребер задает структуру источник-сток в вершине X графа Γ , если некоторые два противоположных ребра в данной вершине являются входящими, а два других — исходящими. В противном случае скажем, что для данной ориентации нарушается условие источник-сток в вершине X . Ориентация всех ребер графа Γ задает структуру источник-сток (на графе Γ), если она задает структуру источник-сток в каждой его вершине. Граф Γ удовлетворяет условию источник-сток, если некоторая ориентация всех его ребер задает структуру источник-сток.

Заметим, что если на графе Γ можно ввести структуру источник-сток, то она полностью определяется выбором ориентации любого одного ребра графа Γ .

Теорема 1. Атом (P, Γ) ориентируем \Leftrightarrow на его остове Γ можно задать структуру источник-сток.

Доказательство. Граница каждой клетки в P — цикл на графе Γ . Будем считать, что границы черных клеток ориентированы против часовой стрелки, а границы белых — по часовой стрелке. Тогда ориентации каждого ребра графа Γ , заданные ориентациями инцидентных ему клеток, совпадают, а в силу B -структуры в каждой вершине графа задана структура источник-сток. Следовательно, остов удовлетворяет условию источник-сток.

Обратно, по структуре источник-сток можно задать разбиение клеток P на черные (граница которых ориентирована структурой источник-сток против часовой стрелки) и белые (граница ориентирована по часовой стрелке). \square

Заметим, что по остову с n вершинами можно построить 2^n атомов (возможно, некоторые из них окажутся изоморфными), выбирая в каждой пары соседних полуребер, образующие границы черных клеток. Непосредственно из Теоремы 1 следует, что все полученные атомы одновременно ориентируемы или одновременно неориентируемы.

Определение 6. *Уникурсальным графом* назовем граф Γ , представляющий собой образ иммерсии окружности S в трехмерное пространство, все особенности которого исчерпываются конечным числом двойных точек самопересечения, ни одна из которых не является точкой касания.

Определение 7. Пусть Γ — уникурсальный граф с n вершинами. Рассмотрим произвольную вершину X в Γ . Зафиксируем произвольную ориентацию l на S . Ей соответствует ориентация γ на Γ . *Хордовой диаграммой* для атома (P, Γ) называется трехвалентный граф с $2n$ вершинами a_1, \dots, a_{2n} , у которого выделен цикл, проходящий через все вершины по одному разу. Этот цикл также называется *окружностью* хордовой диаграммы. Ребра, не принадлежащие выделенному циклу, называются *хордами* хордовой диаграммы. При этом вершины a_i и a_j ($i \neq j$) хордовой диаграммы для (P, Γ) соединены хордой тогда и только тогда, когда найдется вершина Y в Γ , для которой пути XU в ориентированном графе (Γ, γ) содержат $i - 1$ и $j - 1$ ребро.

Заметим, что хордовые диаграммы, различающиеся выбором вершины X в Γ и ориентации l на S , изоморфны (как графы).

Хорду на хордовой диаграмме, соответствующую вершине X , будем обозначать h_X .

Определение 8. Хорду h хордовой диаграммы H назовем *четной*, если количество хорд в H , с которыми h пересекается, четно, и *нечетной* в противном случае.

Для произвольной вершины X остова атома (P, Γ) обозначим через a , b , c и d инцидентные ей полуребра (так, что ребро a противоположно ребру c , ребро b противоположно ребру d). В Γ существует цикл, содержащий наряду с X и a ровно одно из

полуребер b или d и в каждой своей вершине, кроме X , проходящий через пару противоположных ребер. Также есть цикл с теми же свойствами, содержащий X и c . Назовем эти циклы *полуокружностями* для вершины X .

Теорема 2. Атом (P, Γ) с одной уникальной компонентой ориентируем \Leftrightarrow на хордовой диаграмме для (P, Γ) нет нечетных хорд.

Доказательство. Полуокружностям для вершины X остова Γ соответствуют дуги окружности хордовой диаграммы, на которые ее делят концы хорды h_X . Хордам, пересекающим h_X , соответствуют вершины в Γ , для которых пары противоположных полуребер принадлежат разным полуокружностям для X .

Ориентируем каждую дугу хордовой диаграммы между соседними концами хорд таким образом, чтобы ориентации соседних дуг были противоположны. Этой ориентации соответствует ориентация ребер графа Γ . Отсутствие нечетных хорд эквивалентно тому, что дуги, инцидентные вершинам любой хорды, ориентированы как на рис 1. Такая ориентация задает структуру источник-сток в каждой вершине Γ . \square

Вершину, отвечающую четной хорде, в дальнейшем тоже будем называть четной.

Теорема 3. Атом (P, Γ) ориентируем \Leftrightarrow любой цикл на Γ ориентируем.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна.

Докажем достаточность. Предположим, что на поверхности нашелся путь l , перенос репера вдоль которого меняет ориентацию репера. Выберем произвольную ориентацию γ на l . Для каждой клетки D , такой что $D \cap l \neq \emptyset$, рассмотрим часть m пути l между соседними (в смысле γ) точками пересечения с $\partial \bar{D}$.

Обозначим любую из двух дуг, на которые делят $S^1 = \partial \bar{D}$ точки пересечения с m , через m' . Рассмотрим цикл l' , совпадающий с l вне \bar{D} и с m' на \bar{D} .

Перенос репера вдоль любого пути в \bar{D} не меняет ориентацию, поэтому перенос вдоль l' , как и вдоль l , меняет.

Проделав аналогичные преобразования для каждой части l между соседними точками пересечения l с Γ , мы получим часть Γ' остова Γ (Γ' не обязательно является графом). После удаления фрагментов Γ' , проходимых дважды (перенос вдоль них не изменяет ориентацию) получится цикл Γ'' в Γ . Но по условию любой цикл в Γ ориентируем. \square

Под циклом на графе Γ в дальнейшем будем понимать цикл на Γ над \mathbb{Z}_2 (такой набор ребер l , что каждой вершине графа Γ инцидентно 0, 2 или 4 ребра из l). Сложение циклов — булево над \mathbb{Z}_2 .

Теорема 4. Цикл на атоме ориентируем \Leftrightarrow при обходе этого цикла количество вершин, в которых он проходит через противоположные полуребра, четно.

Доказательство. Рассмотрим в произвольной точке цикла репер (e_1, e_2) в (P, Γ) , т.ч. e_1 касается окружности, а e_2 направлен внутрь черной области.

Перенесем репер вдоль цикла. В силу правила приклейки белых и черных клеток в вершинах (B -структуры) ориентация репера при проходе в любой вершине через пару противоположных полуребер изменяется, при повороте в вершине — нет. \square

Рассмотрим теперь атомы, остов которых представляет собой граф Γ с *двумя уникальными компонентами* S_1 и S_2 (точки пересечения разных компонент также являются двойными; ни одна из них не является точкой касания).

Вершины графа Γ , для которых все четыре полуребра, инцидентные им, принадлежат S_1 , будем называть *вершинами компоненты S_1* , аналогично определим вершины компоненты S_2 . Остальные вершины назовем *смешанными*.

Для каждой пары различных смешанных вершин u и v можно рассмотреть путь l_1 в S_1 и путь l_2 в S_2 , соединяющие u и v и в каждой внутренней вершине проходящие через противоположные ребра графа Γ . Цикл, являющийся объединением l_1 и l_2 , будем называть *двуугольником* для пары (u, v) .

Для каждой пары различных смешанных вершин существует 4 двуугольника.

Обозначим M множество циклов в Γ , образованных полуокружностями для каждой вершины S_1 (т.е. циклами в Γ , все ребра которых принадлежат S_1), полуокружностями для каждой вершины S_2 и двуугольниками для каждой пары смешанных вершин.

Если некоторой вершине X цикла (пути) γ в Γ инцидентно 2 полуребра и они не являются противоположными, скажем, что цикл (путь) γ *поворачивает* в X .

Теорема 5. $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ порождается множеством M .

Доказательство. Рассмотрим произвольный цикл γ на графе Γ (над \mathbb{Z}_2) и связную компоненту τ в γ . Выберем произвольный порядок обхода цикла τ и разделим τ на пути l_1, \dots, l_{2k} таким образом, чтобы все ребра в l_{2i-1} принадлежали S_1 , все ребра в l_{2i} принадлежали S_2 , $1 \leq i \leq k$, и конец пути l_j совпадал с началом пути l_{j+1} , $1 \leq j \leq 2k$ (считаем, что $l_{2k+1} = l_1$). В частном случае, когда цикл τ содержит только ребра из S_1 или S_2 , получим один путь.

Обозначим начало и конец пути l_{2i} через e_i и f_i соответственно (возможно, e_i совпадает с f_i). Вершина e_i принадлежит также пути l_{2i-1} , а вершина f_i – пути l_{2i+1} для $1 \leq i \leq k-1$ и пути l_1 для $i = k$. Значит, существует путь l'_{2i} в S_1 , начинающийся в e_i , заканчивающийся в f_i и в каждой не смешанной вершине на S_1 проходящий через противоположные ребра (если $e_i \neq f_i$, таких путей 2, тогда выберем любой из них).

Далее, в каждой смешанной вершине путь l_{2i} проходит через противоположные ребра Γ ; в некоторых вершинах из S_2 , возможно, поворачивает. Для каждой такой вершины X (пусть ей инцидентны полуребра a, b, c и d , ребро a противоположно ребру c , ребро b противоположно ребру d , и l_{2i} проходит через полуребра a и b), добавим в l_{2i} полуокружность для X , проходящую через c и d . Заметим, что каждый раз мы прибавляли к l_{2i} элемент из M .

Выполнив эту процедуру во всем l_{2i} , получим путь \bar{l}_{2i} в S_2 с началом в вершине e_i и концом в вершине f_i , в каждой внутренней вершине проходящий через противоположные полуребра.

Отметим, что цикл $\bar{l}_{2i}l'_{2i}$ принадлежит M .

Рассмотрим путь $l_{2i-1}l'_{2i}$. Его начало и конец совпадают с началом и концом соответственно в $l_{2i-1}l_{2i}$, кроме того, все ребра $l_{2i-1}l'_{2i}$ принадлежат S_1 .

Проделав аналогичные замены для всех $1 \leq i \leq k$, получим цикл $s = l_1l'_1 \dots l_{2k}l'_{2k}$, все ребра которого принадлежат S_1 .

В каждой смешанной вершине цикл s проходит через противоположные ребра Γ ; в некоторых вершинах из S_1 , возможно, поворачивает. Добавлением к s элементов из M можно получить цикл s' в S_1 , каждой вершине проходящий через пары противоположных ребер (аналогично построению цикла \bar{l}_{2i}). Цикл s' также является суммой элементов из M .

Рассуждения для остальных связных компонент в γ аналогичны. \square

Теорема 6. Пусть в атоме (P, Γ) уникальные компоненты S_1 и S_2 пересекаются в нечетном количестве точек. Тогда (P, Γ) неориентируем.

Доказательство. Предположим, что (P, Γ) ориентируем. Рассмотрим произвольную вершину X компоненты S_1 . Т.к. на S_1 нечетное число смешанных точек, то на одной из полуокружностей s для X в S_1 их количество также нечетно.

Из вложимости графа Γ в P следует, что подграф Γ' , вершинами которого являются вершины компоненты S_1 , а ребрами — дуги в S_1 между соседними вершинами, также вложим в P . Значит, согласно Теореме 2, вершина X в Γ' четная, т.е. на каждой полуокружности для X в Γ' количество точек четно.

Вершины компоненты S_1 , лежащие на s — это в точности вершины одной из полуокружностей для X в Γ' .

Таким образом, на полуокружности s нечетное число вершин графа Γ . Несложно проверить, что в вершине X нарушается условие источник-сток. \square

Как мы видели выше, для атомов, остов которых состоит из одной уникарсальной компоненты, можно определить четность вершин. Оказывается, в случае двух уникарсальных компонент также можно ввести понятие четности.

Пусть S_1 и S_2 пересекаются в четном числе точек. Тогда следующие два определения корректны:

Определение 9. Для v — вершины в S_1 (соответственно, в S_2) определим *четность* как четность количества вершин в полуокружности для v в S_1 (соответственно, в S_2).

Определение 10. Скажем, что две смешанные вершины u и v остова атома с двумя уникарсальными компонентами имеют *одинаковую относительную четность*, если количество вершин в двуугольнике (u, v) четно.

Докажем главный результат этой работы — теоремы, дающие критерии ориентируемости атомов, остов которых представляет собой граф с двумя, тремя и четырьмя уникарсальными компонентами.

Теорема 7. Атом с двумя уникарсальными компонентами ориентируем \Leftrightarrow выполнены следующие условия:

1. на каждой компоненте S_1 и S_2 все вершины четные,
2. каждая пара смешанных вершин имеет одинаковую относительную четность.

Доказательство. Согласно теореме 5, каждый цикл l в Γ является суммой циклов из M . Каждый цикл из M проходит через противоположные ребра в четном количестве вершин. Значит, l также проходит через противоположные ребра в четном количестве вершин. Это условие в силу Теоремы 4 равносильно ориентируемости l . Т.к. l изначально предполагался произвольным, то из Теоремы 3 получаем ориентируемость (P, Γ) . \square

Рассмотрим теперь атомы с тремя уникарсальными компонентами S_1, S_2, S_3 . Аналогично случаю двух уникарсальных компонент можно разделить вершины остова на *вершины компоненты* S_i ($i = 1, 2, 3$) и *смешанные* вершины. Множество смешанных вершин, для которых пары противоположных полуребер принадлежат компонентам S_1 и S_2 , обозначим V_{12} . Аналогично определим множества V_{23} и V_{13} .

Для каждой тройки смешанных вершин v_{12}, v_{23} и v_{13} ($v_{ij} \in V_{ij}$) можно рассмотреть пути l_1 в S_1 , l_2 в S_2 и l_3 в S_3 , соединяющие пары точек и в каждой внутренней вершине проходящие через противоположные полуребра остова. Цикл, являющийся объединением l_1, l_2 и l_3 , будем называть *треугольником* для тройки (v_{12}, v_{23}, v_{13}) .

Определение 11. Скажем, что тройка смешанных вершин v_{12}, v_{23} и v_{13} имеет *одинаковую относительную четность*, если количество вершин в треугольнике (v_{12}, v_{23}, v_{13}) четно.

Теорема 8. Атом с тремя попарно пересекающимися уникарсальными компонентами ориентируем \Leftrightarrow выполнены следующие условия:

1. на каждой компоненте S_1, S_2 и S_3 все вершины четные,
2. каждая пара смешанных вершин имеет одинаковую относительную четность,
3. каждая тройка смешанных вершин (v_{12}, v_{23}, v_{13}) имеет одинаковую относительную четность.

Доказательство. Доказательство того, что $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ порождается множеством циклов, состоящим из полуокружностей для каждой вершины S_i , двуугольников для каждой пары смешанных вершин и всевозможных треугольников, проводится аналогично доказательству Теоремы 5.

Далее, четность переходов через противоположные в вершине полуребра для произвольного цикла l в Γ доказывается так же, как в Теореме 7.

Можно показать, что третье условие равносильно существованию для каждой пары вершин (v_{12}, v_{23}) одной вершины v_{13} такой, что тройка вершин (v_{12}, v_{23}, v_{13}) имеет одинаковую относительную четность $(v_{ij} \in V_{ij})$.

Кроме того, третье условие не следует из первых двух, см. рис. 2. \square

Несложно показать, что случай, когда в атоме с четырьмя уникальными компонентами не все компоненты попарно пересекаются, сводится к уже рассмотренным.

Теорема 9. Атом с четырьмя попарно пересекающимися уникальными компонентами ориентируем \Leftrightarrow выполнены следующие условия:

1. на каждой компоненте S_1, S_2, S_3 и S_4 все вершины четные,
2. каждая пара смешанных вершин имеет одинаковую относительную четность,
3. все тройки вершин (v_{12}, v_{23}, v_{13}) (v_{13}, v_{34}, v_{14}) и (v_{23}, v_{24}, v_{34}) имеют одинаковую относительную четность.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна.

Докажем достаточность. Обозначим через M множество циклов, указанных в условиях 1–3.

Покажем, что при выполнении условий 1–3 каждая тройка вершин (v_{12}, v_{24}, v_{14}) $(v_{ij} \in V_{ij})$ также имеет одинаковую относительную четность (то, что относительная четность корректно определена, следует из условий 1-2).

Рассмотрим произвольный треугольник для (v_{12}, v_{24}, v_{14}) , состоящий из путей k_1, k_2 и $k_4, k_j \in S_j$ (здесь и далее все рассматриваемые пути в каждой внутренней вершине проходят через противоположные полуребра остова).

Так как все уникальные компоненты в Γ попарно пересекаются, найдется вершина M_{13} , в которой пары противоположных полуребер принадлежат компонентам S_1 и S_3 . Рассмотрим путь m_1 в S_1 , соединяющий вершины v_{12} и M_{13} . Аналогично выберем вершины $M_{23}, L_{23}, L_{24}, N_{24}, N_{13}$ и пути $m_2, m_3, l_2, l_3, l_4, n_1, n_3, n_4, p_1, p_2, p_4$ (см. рис. 3; индекс у каждого пути совпадает с номером компоненты).

Тройки вершин (v_{12}, L_{13}, L_{23}) , (v_{24}, M_{23}, M_{34}) и (v_{14}, N_{13}, N_{34}) по условию имеют одинаковую относительную четность, значит, количество вершин в каждом из циклов $m_1 m_2 m_3, l_2 l_3 l_4$ и $n_1 n_3 n_4$ четно.

Рассмотрим цикл $s = k_1 n_1 p_1 m_1$. Все ребра в нем принадлежат компоненте S_1 . Количество вершин в s нечетно, т.к. прибавив к s полуокружности для вершин v_{14}, N_{13} и M_{13} , получим цикл, в каждой вершине, кроме v_{12} , проходящий через пары противоположных полуребер. В полученном цикле нечетное число вершин в силу условия 1.

Аналогично, в циклах $k_2l_2p_2m_2$ и $k_4l_4p_4n_4$ нечетное число вершин, поэтому четность количества вершин в цикле $k_1k_2k_4$ совпадает с четностью числа вершин в цикле $t = p_1m_3p_2l_3p_4n_3$.

Цикл t является суммой элементов из M , и из условий 1-2 следует, что он проходит через противоположные полурёбра остова в четном количестве вершин. Но по построению в цикл t поворачивает в 6 вершинах. Значит, в t четное количество вершин.

Так же как доказательстве Теоремы 5 проверяется, что $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ порождается множеством M . Далее доказательство повторяет доказательство Теоремы 7. \square

Список литературы

- [1] А.Т.Фоменко (1991), The theory of invariants of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom, Amer. Math. Soc., 6, P. 1-35.
- [2] V.O.Manturov, On Free Knots And Links, ArXiv:Math.GT/0902.0127.
- [3] В.О.Мантуров (2005), Доказательство гипотезы В.А.Васильева о планарности сингулярных зацеплений, Изв. РАН. Сер. Матем., т.69 №5, С. 169–178.
- [4] V.O.Manturov, On Free Knots, ArXiv:Math.GT/0901.2214.