МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Дипломная Работа

Интегрируемый случай Ковалевской-Яхьи.

студента 5 курса К.Е.Душина

Научный руководитель: академик РАН А.Т.Фоменко

Москва 2009

Содержание

1 Введение **2**

2 Постановка задачи Ковалевской-Яхьи **3**

3 Вычисление бифуркационных диаграмм **7**

4 Лиувиллева классификация известных случаев **8**

5 Продолжение грубой Лиувиллевой классификации с осей на всю плоскость **20**

1 Введение

Мы будем рассматривать задачу о движении тяжёлого гиростата с постоянным гиростатическим моментом, в постановке которой важные результаты принадлежат Н.Е.Жуковскому, П.В.Харламову и другим классикам отечественной и мировой механики. В настоящее время по-прежнему не ослабевает интерес к этой проблеме. Прежде всего это связано с современными методами явного интегрирования уравнений, с качественными исследованиями динамических систем, с интегрируемостью по Лиувиллю.

Гиростату С.В.Ковалевской посвящено не так много работ. П.В.Харламов предложил рассмотреть гиростат, распределение масс которого подчинено условиям С.В.Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Им указано инвариантное соотношение, позволяющее в эллиптических функциях проинтегрировать этот частный случай. Как показал Х.М.Яхья, интеграл С.В.Ковалевской может быть обобщён на гиростат при условиях, указанных П.В.Харламовым. П.Е.Рябовым были вычислены бифуркационные множества интегралов энергии и площадей, и дана их классификация. Также им были построены диаграммы случая Яхьи (нулевая постоянная площадей) с помощью методов компьютерного моделирования. П.В.Морозов в своей работе исследовал глобальные топологические инварианты слоений Лиувилля (инварианты Фоменко-Цишанга) интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи (для случая нулевой постоянной площадей).

В настоящей работе сделано почти полное продолжение грубой Лиувиллевой классификации для любых значений параметров (постоянная площадей и гиростатический момент). А именно, продолжены все семейства торов и все, кроме четырех, типы их перестроек.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям - академику А.Т.Фоменко, доценту А.А.Ошемкову, кандидату ф/м наук П.Е.Рябову, кандидату ф/м наук П.В.Морозову за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.

Работа была проведена совместно с П.П.Андреяновым и Н.С.Логачёвой.

2 Постановка задачи Ковалевской-Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g:

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[,]$ - коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В канонических координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на линейном пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \tag{1}$$

где

$$1 \leqslant i, j, k \leqslant 3, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{1}(i-j)(j-k)(k-i).$$

А матрица $\Omega_{(s,r)}$ скобки Ли-Пуассона выглядит так:

$$\Omega_{(s,r)} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть на $e(3)^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{s_i} = \{s_i, H\}, \quad \dot{r_i} = \{r_i, H\} \tag{2}$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли-Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2). На совместных четырехмерных поверхностях уровня функций f_1 и f_2:

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\},$$

ограничение системы (2) представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2. Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли-Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4, если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$, такая что $\{H, K\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской:

$$H=\frac{s_1^2}{A_1}+\frac{s_2^2}{A_2}+\frac{(s_3+\lambda)^2}{A_3}+a_1r_1+a_2r_2$$

Как впервые указал Х.М.Яхья [1, 2] для него существует дополнительный интеграл четвертой степени:

$$K=(\frac{s_1^2-s_2^2}{2A}+a_2r_2-a_1r_1)^2+(\frac{s_1s_2}{A}-a_1r_2-a_2r_1)^2-$$
$$\frac{2\lambda}{A^2}(s_3+2\lambda)(s_1^2+s_2^2)-\frac{4\lambda r_3}{A}(a_1s_1+a_2s_2)$$

В нашем случае, гиростат подчинён следующим условиям: главные моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1=A_2=2A_3:=2A \quad (*)$, гиростатический момент постоянен и направлен по оси динамической симметрии волчка $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda:=\lambda_3\neq 0 \quad (**)$, параметры a_1 и a_2 задают положение точки подвеса волчка в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, центр масс находится также в этой плоскости. При $\lambda=0$ получаем классический случай Ковалевской.

Линейной заменой координат на $e(3)^*$

$$\begin{cases} s_1=\sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_1\tilde{s_1}+a_2\tilde{s_2}),\\ s_2=\sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_2\tilde{s_1}-a_1\tilde{s_2}),\\ s_3=\sqrt{\frac{A}{2}}\tilde{s}_3,\\ r_1=-\frac{a_1}{\zeta}\tilde{r_1}+\frac{a_2}{\zeta}\tilde{r_2},\\ r_2=-\frac{a_2}{\zeta}\tilde{r_1}-\frac{a_1}{\zeta}\tilde{r_2},\\ r_3=\tilde{r_3},\\ \lambda=\sqrt{\frac{A}{2}}\tilde{\lambda} \end{cases} \tag{3}$$

где $\zeta=a_1^2+a_2^2$, добиваются исключения параметров A, a_1, a_2. В новых переменных $(\tilde{s_1},\tilde{s_2},\tilde{s_3},\tilde{r_1},\tilde{r_2},\tilde{r_3})$, скобка Ли-Пуассона, будет пропорциональна исходной:

$$\Omega_{(\tilde{s},\tilde{r})}=\sqrt{\frac{2}{A}}\Omega_{(s,r)}$$

Интегралы $f_1,\ f_2$ останутся точно такими же, а гамильтониан и дополнительный интеграл K примут упрощенный вид:

$$H=\frac{s_1^2}{4}+\frac{s_2^2}{4}+\frac{(s_3+\lambda)^2}{2}-r_1,$$

$$K=(\frac{s_1^2-s_2^2}{4}+r_1)^2+(\frac{s_1s_2}{2}+r_2)^2-\frac{\lambda}{2}(s_3+2\lambda)(s_1^2+s_2^2)-2\lambda r_3s_1.$$

Здесь и далее мы для простоты используем старые обозначения для новых переменных.

Уравнения (2) в координатах записываются в виде:

$$\dot{s}_1 = -\frac{s_2}{2}(s_3 + 2\lambda), \qquad \dot{r}_1 = \frac{s_2 r_3}{2} - r_2(s_3 + \lambda),$$
$$\dot{s}_2 = -\frac{s_1}{2}(s_3 + 2\lambda) + r_3, \qquad \dot{r}_2 = -\frac{s_1 r_3}{2} + r_1(s_3 + \lambda),$$
$$\dot{s}_3 = -r_2, \qquad \dot{r}_3 = \frac{s_1 r_2}{2} - \frac{s_2 r_1}{2}.$$

Для дальнейших исследований нам будет также удобно пользоваться координатами (ω, ν), в которых уравнения Эйлера-Пуассона (движения произвольного твердого тела с закрепленной точкой) имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_1}{dt} + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + \omega_2\lambda_3 - \omega_3\lambda_2 = (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\gamma, \\ \dfrac{d\nu_1}{dt} = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3. \\ \dfrac{d\omega_3}{dt} + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + \omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1 = (e_1\nu_2 - e_2\nu_1)\gamma, \\ \dfrac{d\nu_3}{dt} = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \\ \dfrac{d\omega_2}{dt} + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 + \omega_3\lambda_1 - \omega_1\lambda_3 = (e_3\nu_1 - e_1\nu_3)\gamma, \\ \dfrac{d\nu_2}{dt} = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь ω - вектор угловой скорости тела-носителя; e - единичный вектор, который направлен из неподвижной точки к центру масс; γ - параметр Пуанкаре, равный произведению веса гиростата на расстояние от его центра масс до неподвижной точки.

Связь между координатами (s, r) и (ω, ν) устанавливает следующая лемма:

Лемма. *(А.О.Ошемков [3]) Отображение* $\varphi : \mathbb{R}^6(s, r) \to \mathbb{R}^6(\omega, \nu)$ *задаваемое формулами*

$$\begin{cases} s_i = -(A_i\omega_i + \lambda_i), \\ r_i = \nu_i, \end{cases} \tag{5}$$

устанавливает изоморфизм системы (2) *и системы* (4).

При этом гамильтониан и функции f_1 и f_2 в координатах (ω, ν) с учетом соотношений $(*), (**)$ примут вид:

$$H = A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + \frac{A\omega_3^2}{2} + a_1\nu_1 + a_2\nu_2,$$

$$f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \quad f_2 = 2A\omega_1\nu_1 + 2A\omega_2\nu_2 + (A\omega_3 + \lambda)\nu_3.$$

А матрица $\Omega_{(\omega,\nu)}$ скобки Ли-Пуассона будет выглядеть так:

$$\Omega_{(\omega,\nu)} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-A\omega_3-\lambda}{4A} & \omega_2 & 0 & -\frac{\nu_3}{2} & \frac{\nu_2}{2} \\ \frac{A\omega_3+\lambda}{4A} & 0 & -\omega_1 & \frac{\nu_3}{2} & 0 & -\frac{\nu_1}{2} \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & -\nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_3}{2} & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_3}{2} & 0 & -\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_2}{2} & \frac{\nu_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выберем подвижные оси так, чтобы центр масс находился на первой из них: $(e_1, e_2, e_3) := (1, 0, 0)$ и сделаем замену (он позволяет избавиться от параметров A, a_1, a_2):

$$\begin{cases} \omega_i = \sqrt{\frac{\gamma}{A}}(\tilde{\omega_i}), \\ \nu_i = \tilde{\nu_i}, \\ \lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{\gamma A}, \\ \tau = t\sqrt{\frac{\gamma}{A}}, \end{cases} \tag{6}$$

здесь $\sqrt{\frac{\gamma}{A}}$ - единица измерения угловой скорости. Обратная величина $\sqrt{\frac{A}{\gamma}}$ - единица измерения времени.

Матрица формы $\Omega_{(\tilde{\omega},\tilde{\nu})}$ имеет вид:

$$\Omega_{(\tilde{\omega},\tilde{\nu})} = \frac{1}{\sqrt{\gamma A}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\tilde{\omega_3}-\tilde{\lambda}}{4} & \tilde{\omega_2} & 0 & -\frac{\tilde{\nu_3}}{2} & \frac{\tilde{\nu_2}}{2} \\ \frac{\tilde{\omega_3}+\tilde{\lambda}}{4} & 0 & -\tilde{\omega_1} & \frac{\tilde{\nu_3}}{2} & 0 & -\frac{\tilde{\nu_1}}{2} \\ -\tilde{\omega_2} & \tilde{\omega_1} & 0 & -\tilde{\nu_2} & \tilde{\nu_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{\nu_3}}{2} & \tilde{\nu_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\nu_3}}{2} & 0 & -\tilde{\nu_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu_2}}{2} & \frac{\tilde{\nu_1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем уравнения движения гиростата в безразмерных величинах $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$, и вернем для новых переменных прежние обозначения (уберем тильдочки):

$$\begin{cases} 2\dot{\omega}_1 = (\omega_3 - \lambda)\omega_2, \\ 2\dot{\omega}_2 = -(\omega_3 - \lambda)\omega_1 - \nu_3, \\ \dot{\omega}_3 = \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 = \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \\ \dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \\ \dot{\nu}_3 = \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1, \end{cases} \tag{7}$$

где точка - дифференцирование по безразмерному параметру $\tau = \sqrt{\frac{\gamma}{A}}t$.

Первые интегралы системы перейдут в следующие функции:

$$f_1 \equiv {\nu_1}^2 + {\nu_2}^2 + {\nu_3}^2 = 1.$$

$$f_2 \equiv \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \frac{(\omega_3 + \lambda)\nu_3}{2} = g,$$

$$H \equiv {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 + \frac{{\omega_3}^2}{2} - \nu_1 = h,$$

$$K \equiv ({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2 + \nu_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \nu_2)^2 +$$

$$+2\lambda(\omega_3 - \lambda)({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) + 4\lambda\omega_1\nu_3 = k,$$

Таким образом у нас есть четыре системы координат, между которыми мы можем свободно перемещаться, пользуясь приведенными выше заменами:

$$\begin{tikzcd}
(s,r) \arrow[r, "(5)"] \arrow[d, "(3)"] & (\omega,\nu) \arrow[d, "(6)"] \\
(\tilde{s},\tilde{r}) & (\tilde{\omega},\tilde{\nu})
\end{tikzcd}$$

На всяком четырехмерном симплектическом многообразии M_g^4 для заданных значений λ, g мы получаем интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы, задаваемую парой $(H_{g,\lambda}, K_{g,\lambda})$.По теореме Лиувилля, которая подробно обсуждается, например, в [4, т.1. 1.5], всякая неособая компактная совместная поверхность уровня интегралов является объединением некоторого числа двумерных торов.

Определение. *Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M_g^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H, K.*

3 Вычисление бифуркационных диаграмм

В этом пункте мы излагаем результаты М.П.Харламова и П.Е.Рябова, которые будут использованы нами в дальнейшем, а также вводим необходимые понятия и обозначения.

Введём отображение момента, которое определяется следующим образом:

$$H \times K : M_g^4 \to \mathbb{R}^2(h,k) \tag{8}$$

Определение. *Образ критических точек при отображении момента называется бифуркционной диаграммой $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$.*

Заметим, что здесь параметры λ и g зафиксированы.

Бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В [5] указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g,\lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм. А также найден явный вид бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$.

Обозначим через $\Theta(g,\lambda)$ множество, которое состоит из тех значений $(g,\lambda) \in R^2(g,\lambda)$, при переходе через которые меняется вид сечения $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$ плоскостью $\{g = const, \lambda = const\}$. Тогда это множество устроено следующим образом:

Теорема 1. *(П.Е.Рябов)* $\Theta(g,\lambda) = \bigcup_{i=1}^{5} \Gamma_i$, *где*

$$\Gamma_1(g,\lambda) = 1 - 4\lambda g = 0,$$
$$\Gamma_2(t) = \left\{ -2t^3, \sqrt{-\frac{4t^4-1}{4t^2}} \right\}, t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right],$$
$$\Gamma_3(s) = \left\{ \sqrt{\frac{s^2-1}{4s}}, \sqrt{-s^3} \right\}, s \in [-1, 0), \ ,$$
$$\Gamma_4(t) = \left\{ \sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{4t^3}}, \sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{t^3}} \right\},$$
$$\Gamma_5(t) = \left\{ \sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{2t^3}}, \sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{2t^3}} \right\}, t \in [-1, 0).$$

Бифуркационное множество $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$, согласно следующим утверждениям, выглядит так:

Теорема 2. *(П.Е.Рябов) Все критические значения отображения момента (8) в задаче С.В.Ковалевской-Х.М.Яхъи принадлежат* $\chi_1 \cup \chi_2$, *т.е.*

$$\Sigma_{h,k}^{\lambda,g} \subset \chi_1 \cup \chi_2,$$

где

$$\chi_1 : \begin{cases} k = 1, \\ h \geq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2, \\ h \geq \frac{\lambda^2}{2}, \end{cases} \quad g = 0; \quad \begin{cases} h = \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{g}{\omega_1}, \\ k = 1 + \omega_1^4 + 2g\omega_1, \end{cases} \quad g \neq 0,$$

$$\chi_2 : \begin{cases} h \geq 0, \\ k = 0, \end{cases} \quad \lambda = 0; \quad \begin{cases} h = 2g^2 - \frac{\lambda^2}{2} - s + \frac{\lambda^2}{2s^2}, \\ k = -4\lambda^2 g^2 + (s + \lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2(\lambda^2+2s^2)}{s^2}, \end{cases} \quad \lambda \neq 0.$$

Теорема 3. *(П.Е.Рябов)* *В случае* $1 - 4\lambda g \geqslant 0$ *для* $s \in (-\infty, s_1)$ *на кривой* χ_2 *отсутствуют критические движения. В случае* $1 - 4\lambda g < 0$ *для* $s \in (-\infty, s_*)$ *на кривой* χ_2 *отсутствуют критические движения. Через* s_* *обозначается одно из значений параметра на кривой* χ_2, *для которого* χ_i *пересекаются,* $s_1 = \frac{-1-\sqrt{1-16\lambda^2 g^2}}{8g^2}$.

4 Лиувиллева классификация известных случаев

Выше у нас описано бифуркационное множество. Оно представляет собой 18 областей, в которых бифуркационные диаграммы гомеоморфны друг другу. Эти области набзовем цифрами $1-9$, и $1'-9'$. Так же будем называть соответствующие им диаграммы. Диаграммы, соответствующие отрезкам осей в плоскости $\mathbb{R}^2_{g,\lambda}$ будем называть $1k, 2k, 6k, 7k$ для случая Ковалевской ($\lambda = 0$) и $1m, 2m, 6m, 7m$

для случая Морозова ($g = 0$). Диаграмму, соответствующую началу координат в $\mathbb{R}^2_{g,\lambda}$ назовем 0 (см. рис.1):

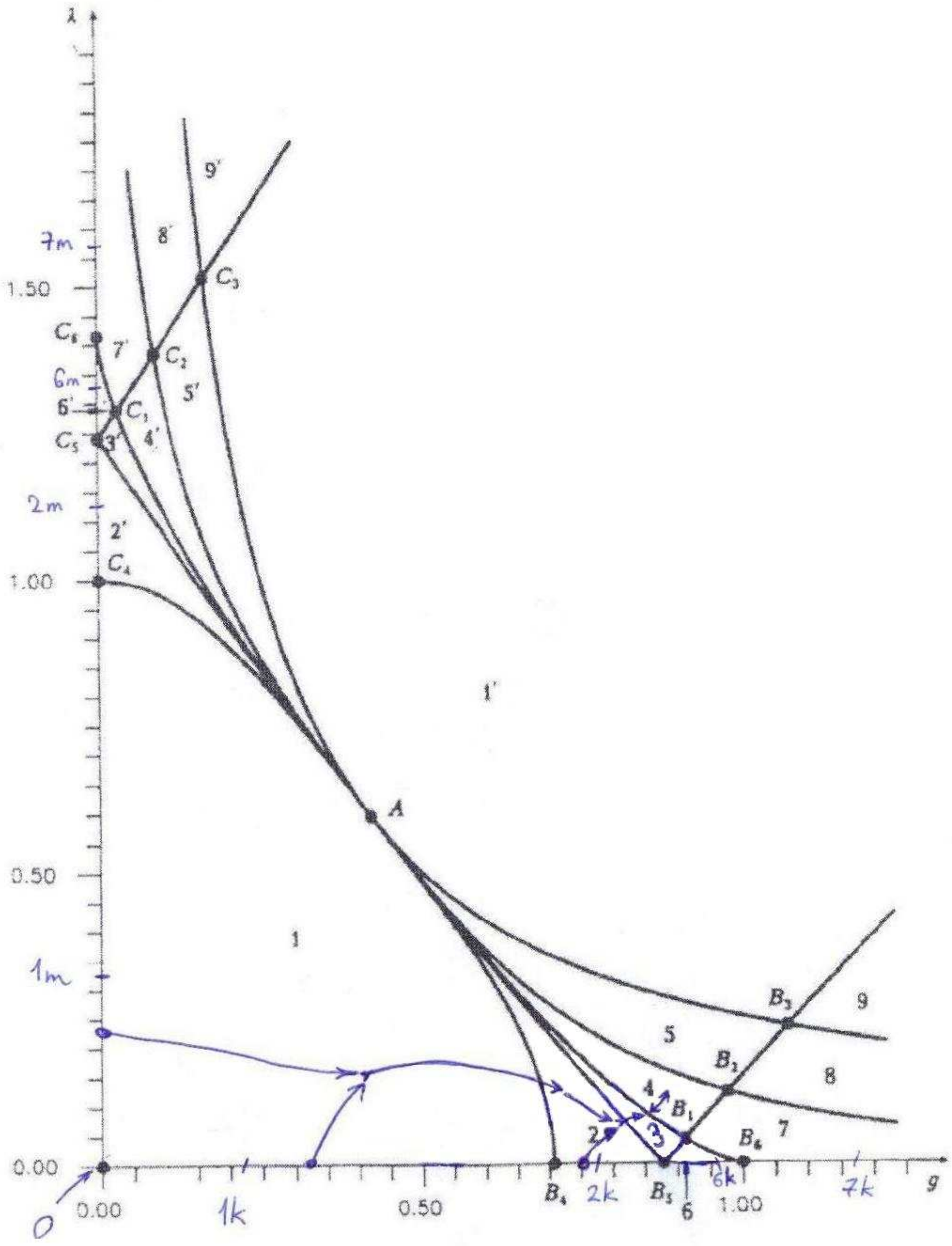


рис. 1

Сговоримся называть области, на которые делит плоскость $\mathbb{R}^2_{g,\lambda}$ множество $\Theta(g, \lambda)$ областями, а области, на которые делит плоскость $\mathbb{R}^2_{h,k}$ бифуркационная диаграмма - камерами. Гладкие куски дуг бифуркационных диаграмм (бифуркационные кривые делятся на такие куски точками касания, пересечения и возврата) будем иногда называть стенками.

Дальнейшее исследование бифуркационного множества подразумевает грубую (а затем и тонкую) Лиувиллеву классификацию. Она уже была частично проведена. А именно на двух осях:

$\lambda = 0$ $-$ случай Ковалевской (А.Т.Фоменко и А.В.Болсинов [4]) и
$g = 0$ $-$ (П.В.Морозов [9]).

Приведем ее здесь. Все куски гладких дуги бифуркационных диаграмм мы обозначим малыми греческими буквами с индексами. В их прообразах лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами. Их типы указаны ниже в табл.2. Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(h,k)$ являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Эти торы естественным образом разбиваются на семейства. Мы обозначили их римскими цифрами $I - VIII$ (см табл.1).

семейство	число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2
VIII	2

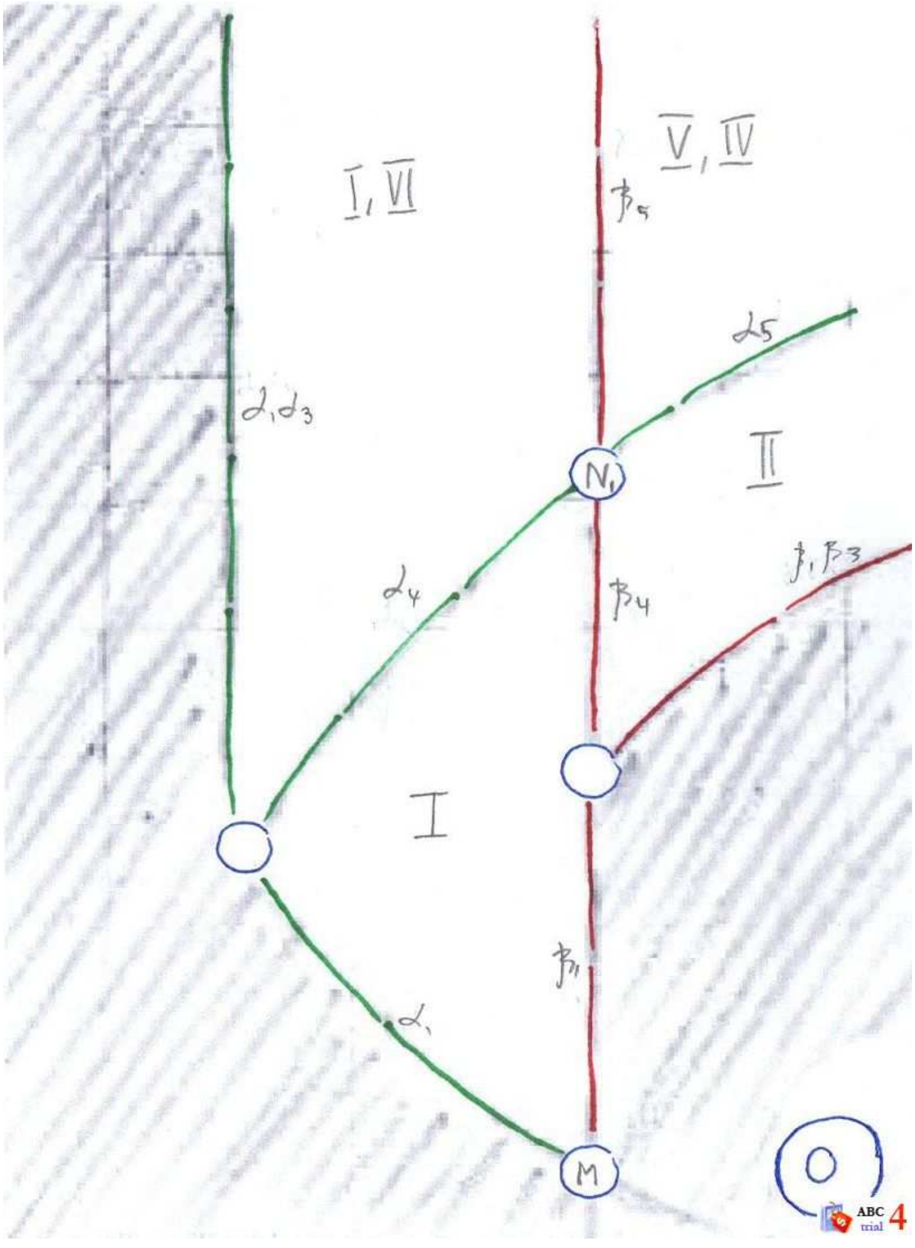
Таблица 1.

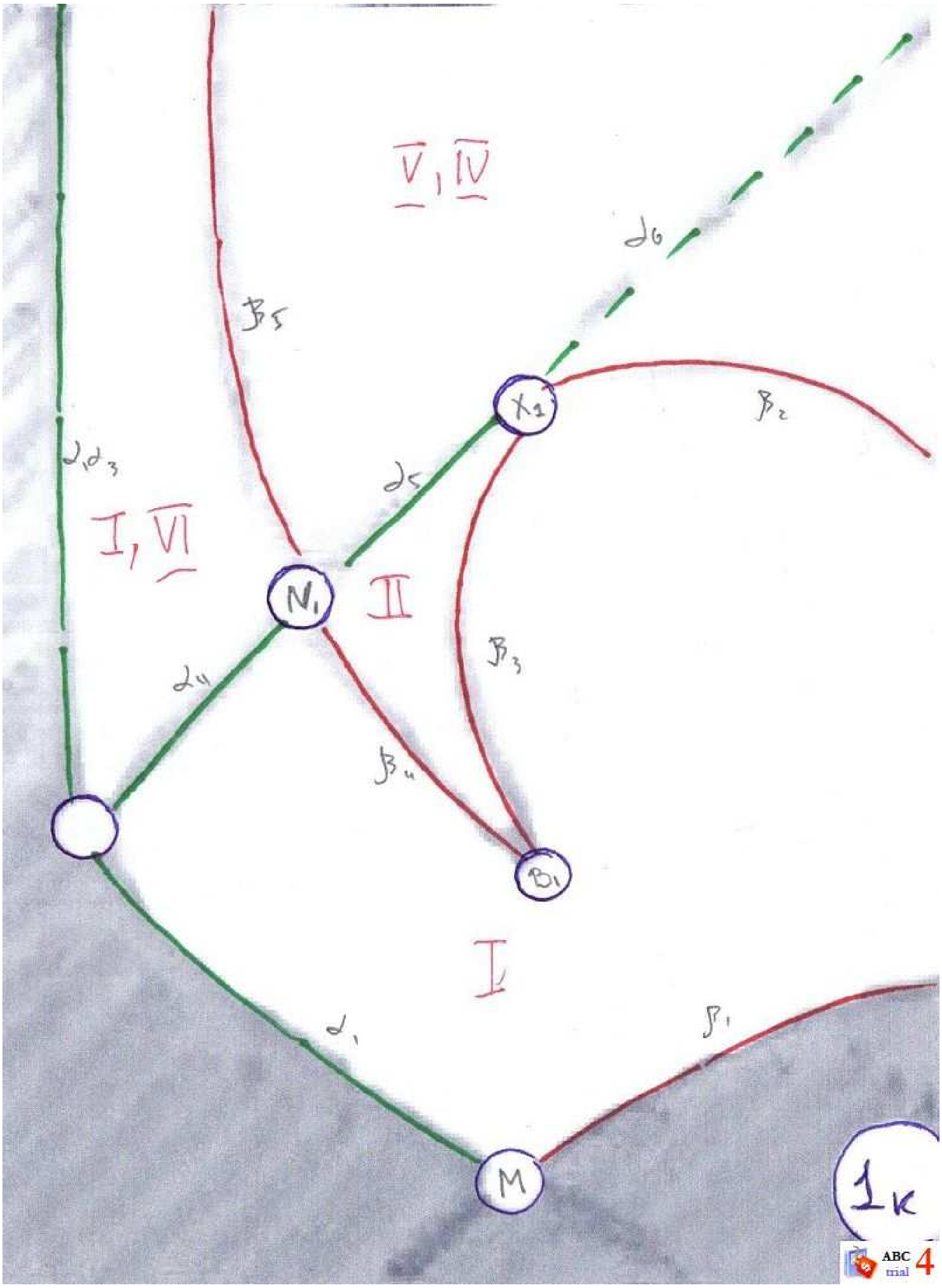
кривая χ_2	кривая χ_1
$\alpha_1 - A$	$\beta_1 - A$
$\alpha_2 - B$	$\beta_2 - B$
$\alpha_3 - A$	$\beta_3 - A$
$\alpha_4 - B$	$\beta_4 - B$
$\alpha_5 - C_2$	$\beta_5 - 2A^*$
α_6 - нет перестройки	$\beta_6 - 2A$
$\alpha_7 - 2A$	$\beta_7 - 2A$
$\delta_1 - 2A$	$\gamma_1 - 2A$
$\delta_2 - 2B$	$\gamma_2 - 2B$
$\delta_6 - 2B$	$\gamma_6 - 2B$
$\alpha_7\delta_5 - 4A$	$\beta_7\gamma_5 - 4A$
$\alpha_1\alpha_3 - 2A$	$\beta_1\gamma_3 - 2A$

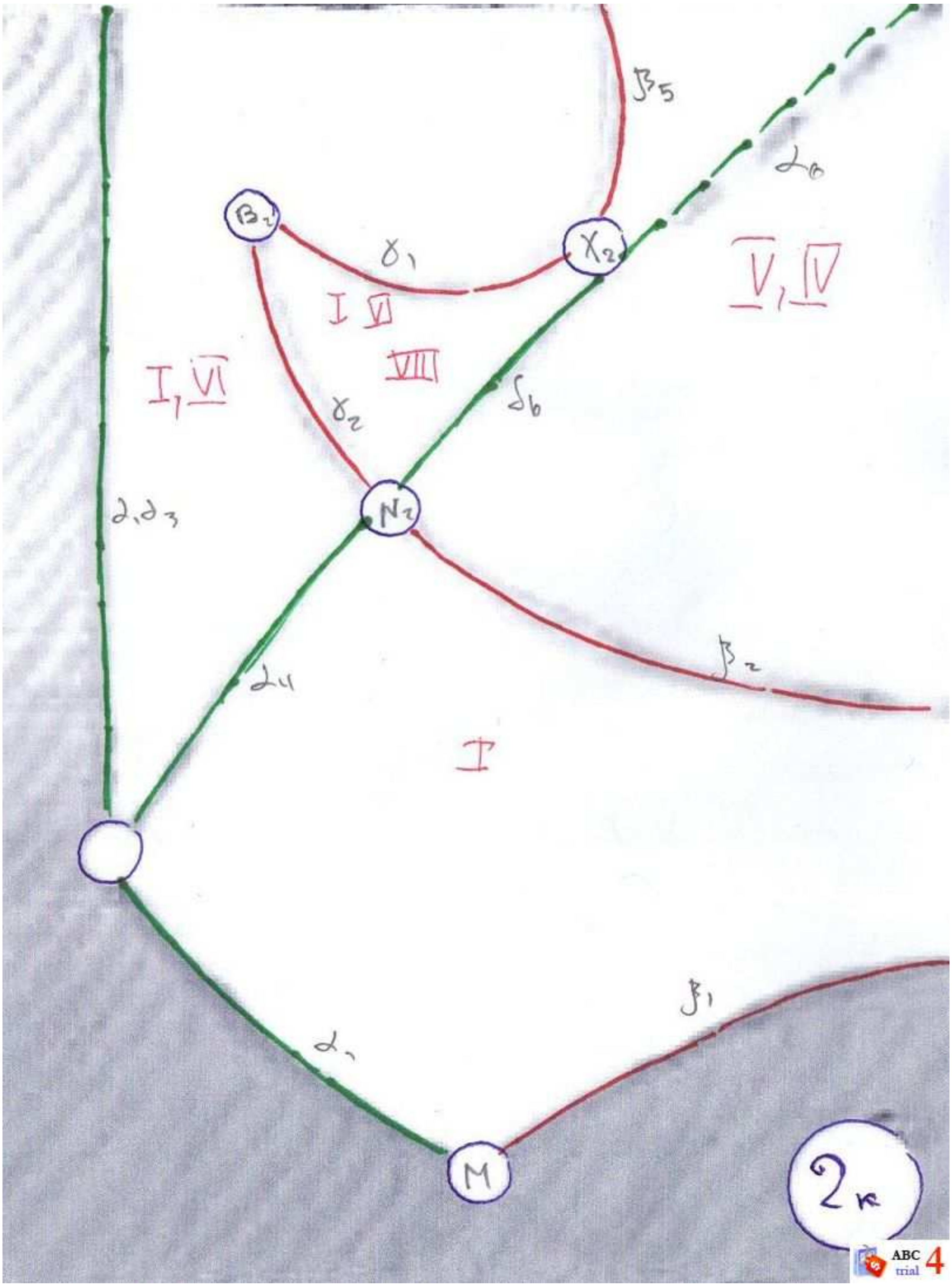
Таблица 2.

Замечание. *Здесь встречаются атомы следующих типов:* A, A^*, B, C_2. *В случаях, когда* $g\lambda \neq 0$ *не появится новых перестроек. Также не появятся новые семейства торов.*

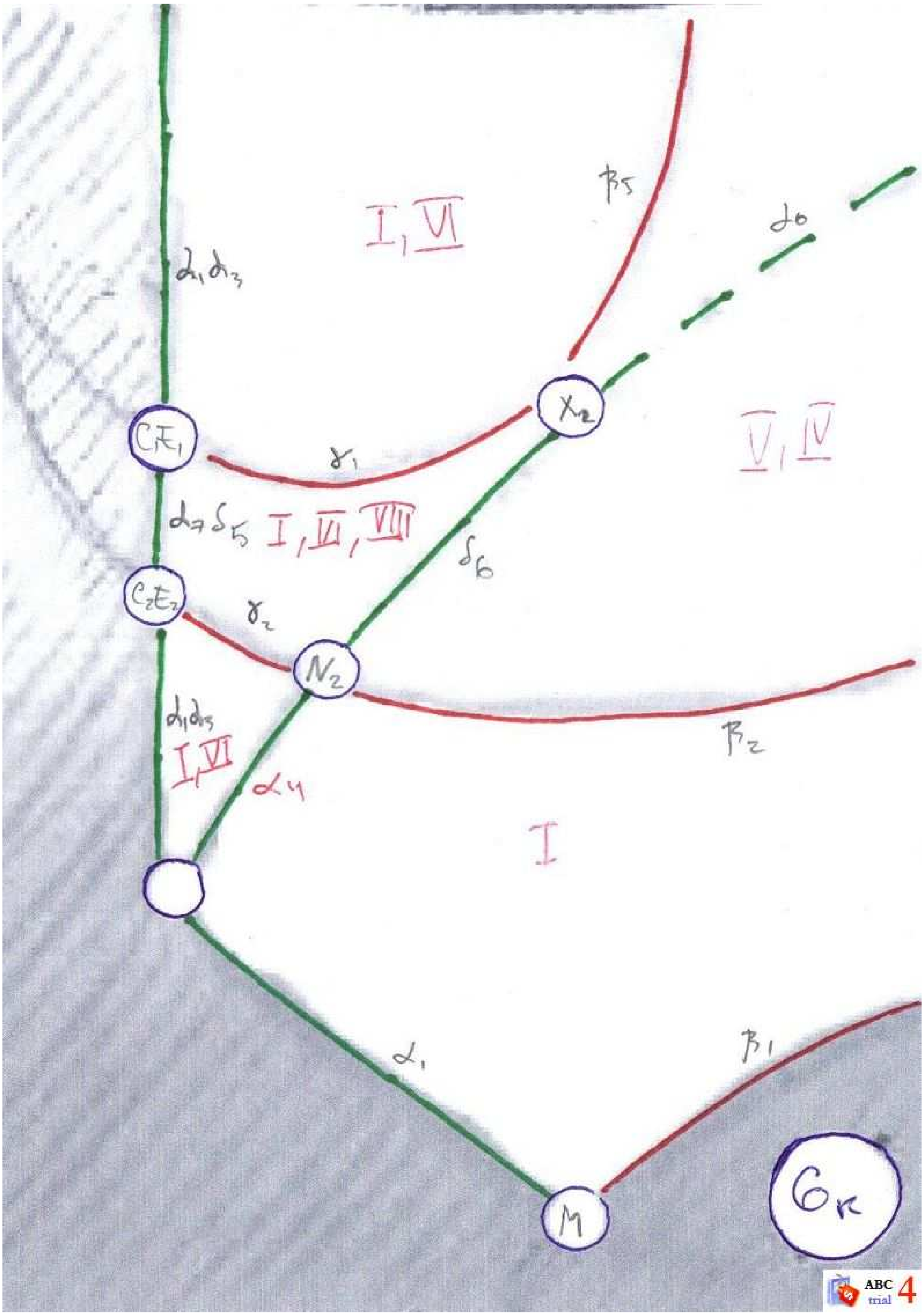
В случаях Ковалевской и Морозова следует различать по 4 бифуркационных диаграммы, также особым является случай $g = \lambda = 0$. Ниже приведены изображения этих девяти диаграмм с расставленными на них семействами и перестройками торов.



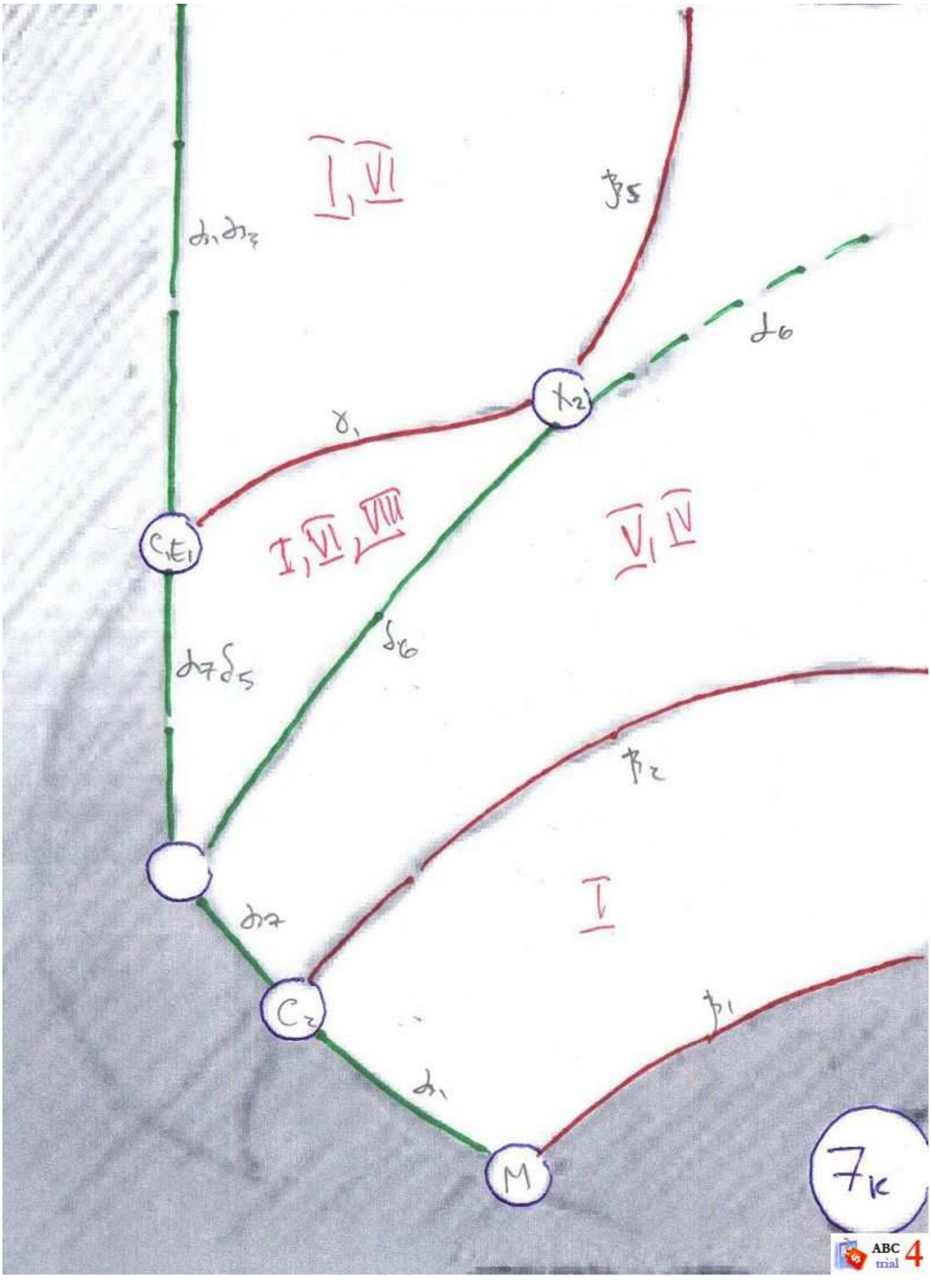

X1
N1
II
B1
I
M

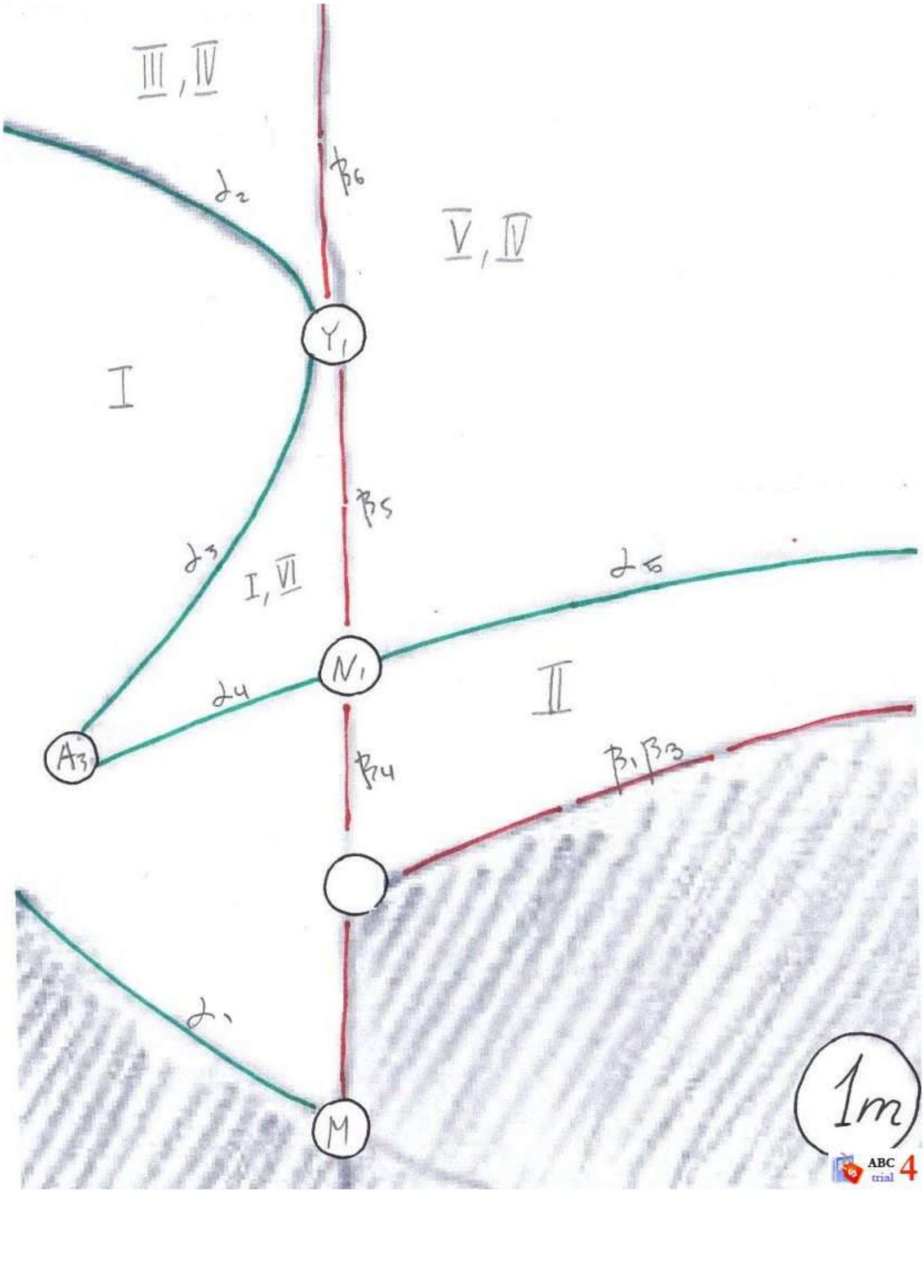


β5
α6
B2
X2
γ1
I VI
VIII
V, IV
I, VI
γ2
δ6
N2
α2α3
β2
α4
I
α1
β1
M
2k

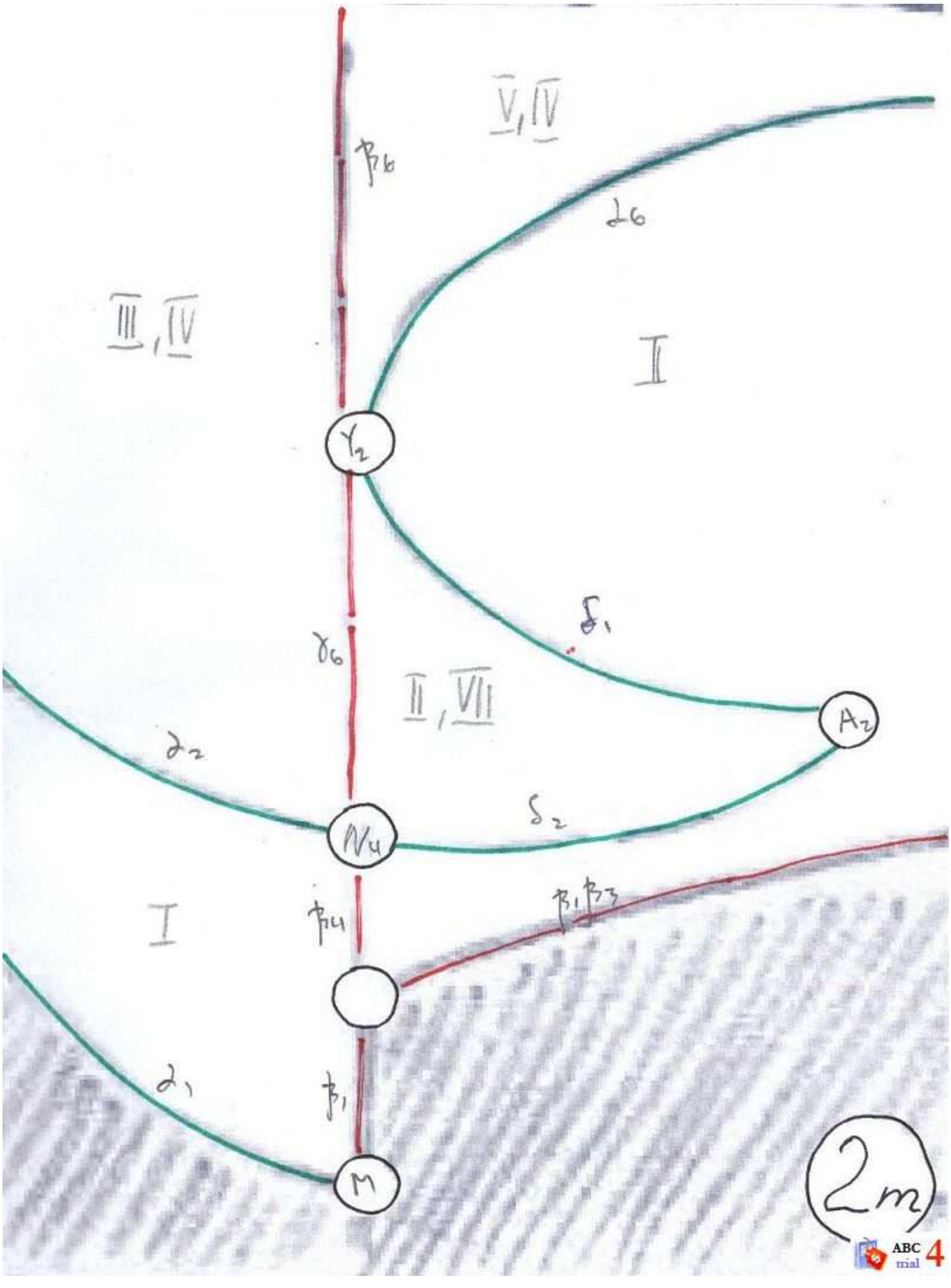


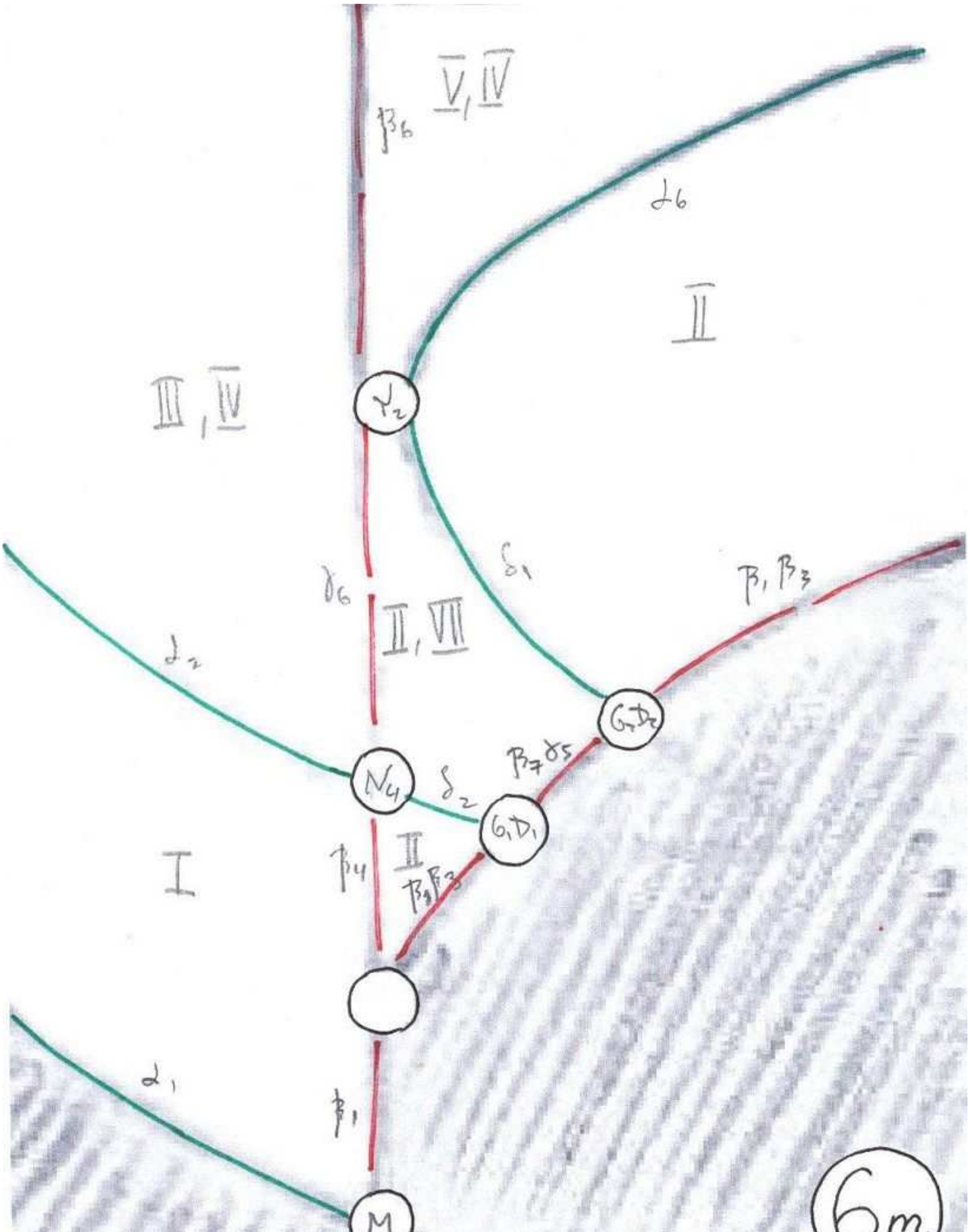
I, VI
β5
α6
α1 α3
X2
V, IV
C1E1
γ1
α7 δ5 I, III, VIII
δ6
C2E2
γ2
N2
β2
α1 α3
I, VI
α4
I
α1
β1
M
Gκ

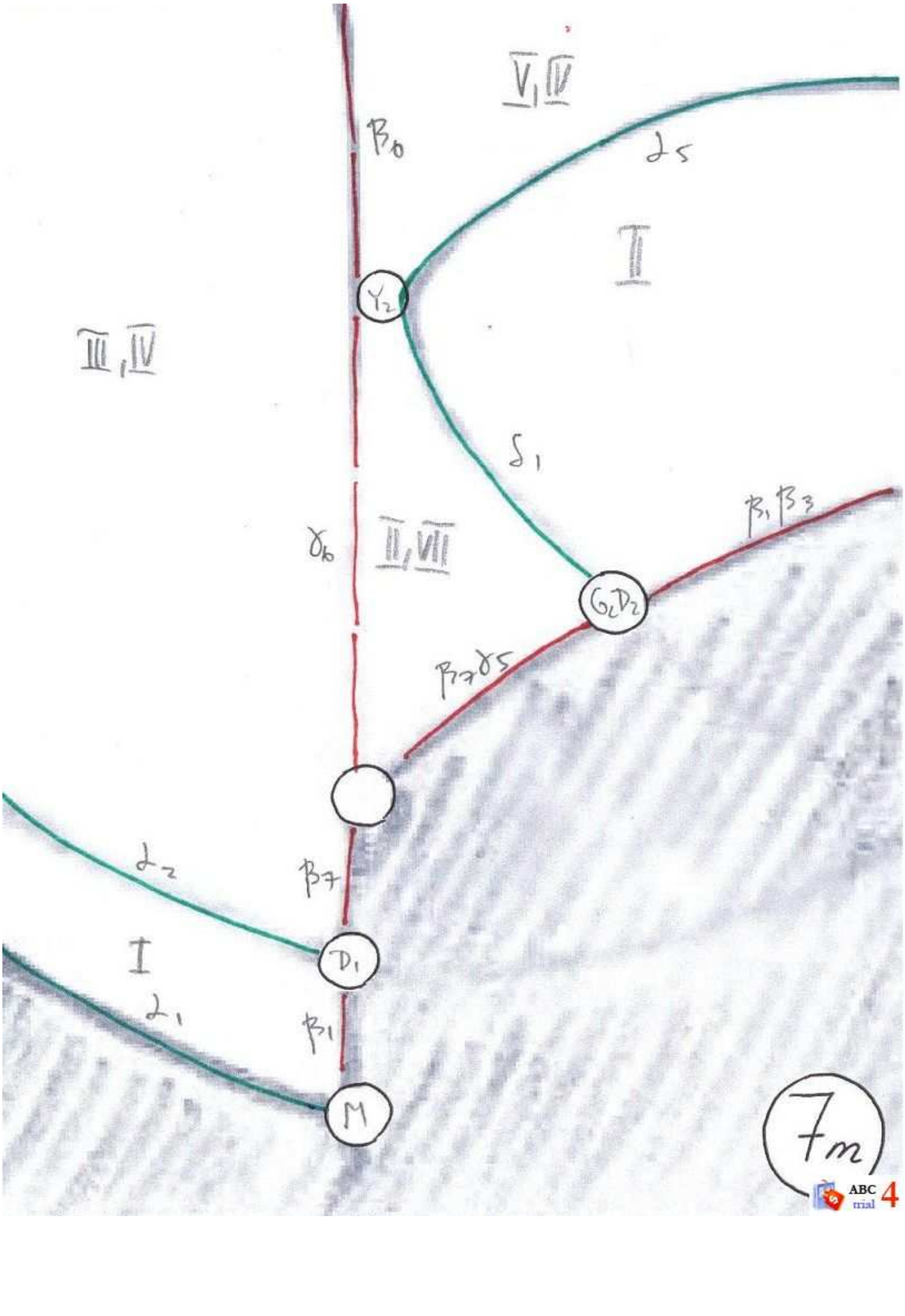

I, VI
I, VI, VIII
V, IV
I
7K



III, IV
β6
α2
V, IV
Y1
I
β5
α3
I, VI
α5
N1
α4
II
A3
β4
β1 β3
α1
M
1m


V, IV
III, IV
I
Y_2
II, VII
A_2
N_4
I
M
2m


β6 V̄, ĪV̄
α6
ĪĪ
ĪĪĪ, ĪV̄
γ2
δ1
γ6 ĪĪ, V̄ĪĪ
β1, β3
α2
G7D2
β7 δ5
N4
δ2
G1D1
I
β4 ĪĪ
β8 β3
α1
β1
M
6m



V, IV
β10
α5
Y2
III, IV
δ1
β1 β3
γ6
II, VII
G2D2
β7γ5
α2
β7
I
D1
α1
β1
M
7m

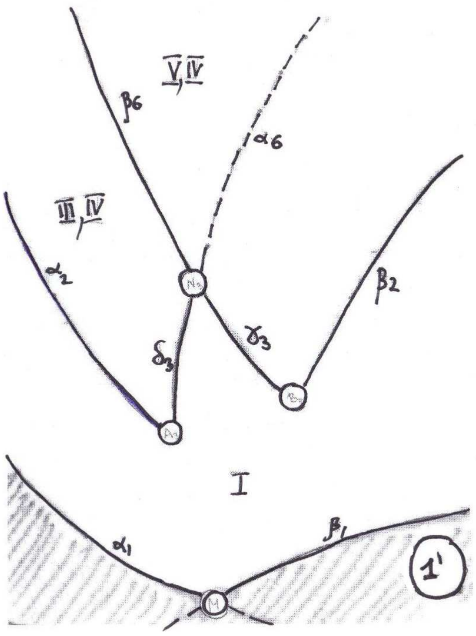
5 Продолжение грубой Лиувиллевой классификации с осей на всю плоскость

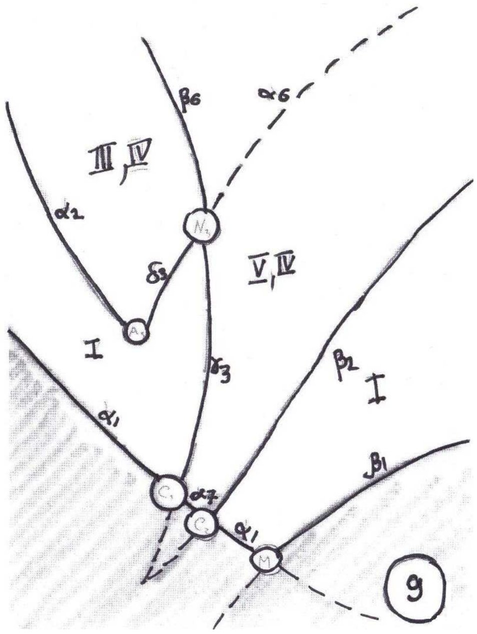
Теорема. *В предположении боттовости нашей системы, можно узнать семейства и перестройки торов Лиувилля на всем квадранте* $\{g > 0, \lambda > 0\}$*, за исключением четырех перестроек* $(\delta_3, \delta_5, \gamma_3, \gamma_5)$*, для этого достаточно информации, имеющейся в уже изученных случаях Ковалевской и Морозова. Все данные отмечены на схематических рисунках бифуркационных диаграмм (см. ниже).*

□ Доказательство.

Покажем здесь наглядно, как расставить на диаграммах семейства и перестройки.

I. Для начала заметим, что многие камеры и стенки на бифуркационных диаграммах из разных областей совпадают (то есть на них можно поставить одинаковые буквы). При переходе из любой области (на которые $\mathbb{R}^2_{\lambda,g}$ делится разделяющими кривыми Γ_i) в соседнюю с ней, бифуркационные диаграммы изменяются лишь локально. То есть большинство камер и стенок в паре соседних диаграмм остаются прежними. Покажем это на примере перехода от диаграммы 1' к диаграмме 9 (см. также рис.1):



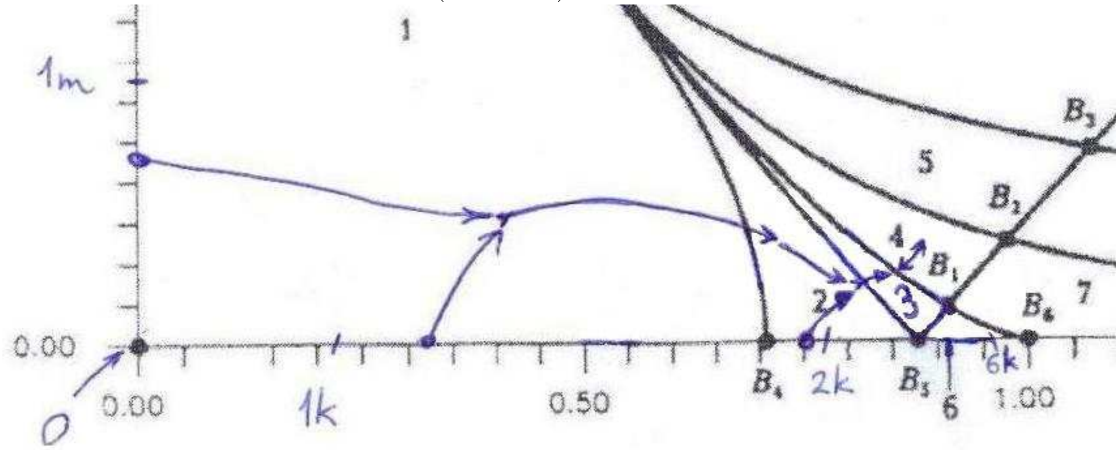


Видим, что произошли только локальные изменения - клюв $\gamma_3\beta_2$ проткнул стенку α_1. Аналогичные <u>локальные</u> изменения, как можно непосредственно убедиться, происходят и во всех других случаях.

Почему эти локальные изменения диаграмм не влекут глобальных изменений в их лиувиллевом устройстве? (∗)

Рассмотрим множество $\Sigma^{\lambda,g}_{h,k}$, как четырехмерное многообразие в $\mathbb{R}^4_{\lambda,g,h,k}$. Одинаковые камеры на соседних диаграммах являются одной камерой в $\Sigma^{\lambda,g}_{h,k}$ (из одной камеры можно попасть в другую при помощи гладкой кривой, зависящей от параметров g и λ). Для того чтобы (∗) было верно, нужна боттовость (невырожденность) нашей системы.

II. Подробнее разберем продолжение перестроек и семейств торов в диаграмму 4, зная устройство диаграмм 1m, 1k и 2k. Для этого мы перейдем в диаграмму 1 ($1k \to 1 \leftarrow 1m$), потом в диаграмму 2 ($1 \to 2 \leftarrow 2k$), потом в диаграмму 3 ($2 \to 3$, и, наконец, в диаграмму 4 (см. рис.)



Сначала мы должны совершить переход от 1m и 1k к 1. Он замечателен тем, что зная отдельно классификацию 1m или 1k, полностью продолжить все в 1 не удалось бы. Но эти два случая так замечательно друг друга дополняют, что продолжение возможно!

Переход от 1k к 1: Эти диаграммы отличаются тем, что крайняя левая стенка $\alpha_1\alpha_3$ разделилась на две - α_1 и α_3 (которые, вообще говоря для этой диаграммы являются новыми, но, как мы увидим потом, они придут из диаграммы 1m) и появилась точка касания стенок β_5 с α_3, образовав две новые - α_2 и β_6 (которые также имеются в диаграмме 1m). Заметим, что при переходе от 1 к 1k, эта точка касания уходит на бесконечность. Далее, в трещину между стенками α_1 и α_3 затекло семейство торов I, а все остальные семейства и перестройки не изменяются в силу боттовости системы.

Переход от 1m к 1: Эти диаграммы отличаются тем, что стенка $\beta_1\beta_3$ разделилась на две - β_1 и β_3 (которые уже есть в 1k) и появилась точка касания стенки α_5 с β_3, образовав две новые - β_2 и α_6 (которые также имеются в диаграмме 1k). Заметим, что при переходе от 1 к 1m, эта точка касания уходит на бесконечность. Далее, в трещину между стенками β_1 и β_3 затекло семейство торов I (все очень похоже на переход от 1k к 1).

Итак, мы продолжили классификацию в нашу первую камеру.

Перейдем теперь от 1 к 2. Эти диаграммы превращаются друг в друга так: точки N_1, B_1, X_1 схлопываются в одну точку в момент перехода через разделяющую кривую в $\mathbb{R}^2_{\lambda,g}$, а затем расходятся обратно, превращаясь в точки N_2, B_2, X_2. На бифуркационной кривой при этом происходит следующее: особые точки были в порядке "пересечение-возврат-касание a становятся - "касание-возврат-пересечение". Клюв $\beta_4\beta_3$ заворачивается внутрь клюва $\alpha_3\alpha_4$, исчезает стенка α_5, появляются δ_6, γ_1 и γ_2 (мы их узнаем из 2k). Область II исчезает, и появляется область I,VI,VIII (которая также есть в 2k). Все остальное неизменно.

Переход от 2k к 2: Абсолютно аналогично переходу от 1k к 1. То есть эта локальная перестройка диаграмм не пересекается с перестройкой между 1 и 2.

Переход от 2 к 3 заключается в том, что клюв $\gamma_1\gamma_2$ пересекает стенку α_3. При этом появляются три новых камеры (ограниченных соответственно стенками (γ_3, β_2, δ_5), (α_3, β_5, γ_1) и (α_3, α_4, γ_2)), и две новых перестройки (γ_3, β_5). Камера с семействами I,VI при переходе от 2 к 3 разделится на две части (две последних новых камеры), но в каждой из них эти семейства сохраняются (из-за того, что из одной части можно попасть в другую при помощи гладкой кривой, зависящей от параметров g и λ). Камера, ограниченная стенками (γ_3, β_2, δ_5) будет содержать семейства V,IV (это будет видно при переходе от 3 к 4). Таким образом, во всех камерах нам стали известны семейства торов. С перестройками на этой диаграмме, к сожалению, метод не помогает. Появляются новые стенки γ_3 и β_5, типы которых мы не можем пока узнать (после доказательства теоремы см. гипотезу на этот счет).

Переход от 3 к 4. Объясним, почему в первой новой камере (для перехода от 2 к 3) будут семейства V,IV. При переходе из 3 в 4, клюв $\delta_5\alpha_3\alpha_4\delta_6$ перестает пересекать стенку $\beta_2\gamma_2\beta_2$ и наша новая камера соединяется с камерой, ограниченной α_6, δ_6 и β_6, в которой как раз и живут эти два семейства торов. Диаграмма 4 менее интересна, чем диаграмма 3, потому что 3 содержит все, что есть в 4.

Итак, цель нашего путешествия достигнута. Мы попали в диаграмму 4.

III. Аналогичными рассуждениями были продолжены перестройки и семейства торов на все 18 диаграмм. Появились четыре новых стенки, которым не удалось приписать какую-либо известную перестройку из случая Ковалевской или Морозова. Новых семейств торов не появилось. Обход камер удобно делать в следующем порядке, за два прохода:

$$0 \to 1 \to 2' \to 3' \to 4' \to 5' \to 1' \to 9' \to 8' \to 7' \to 6',$$

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1' \to 9 \to 8 \to 7 \to 6.$$

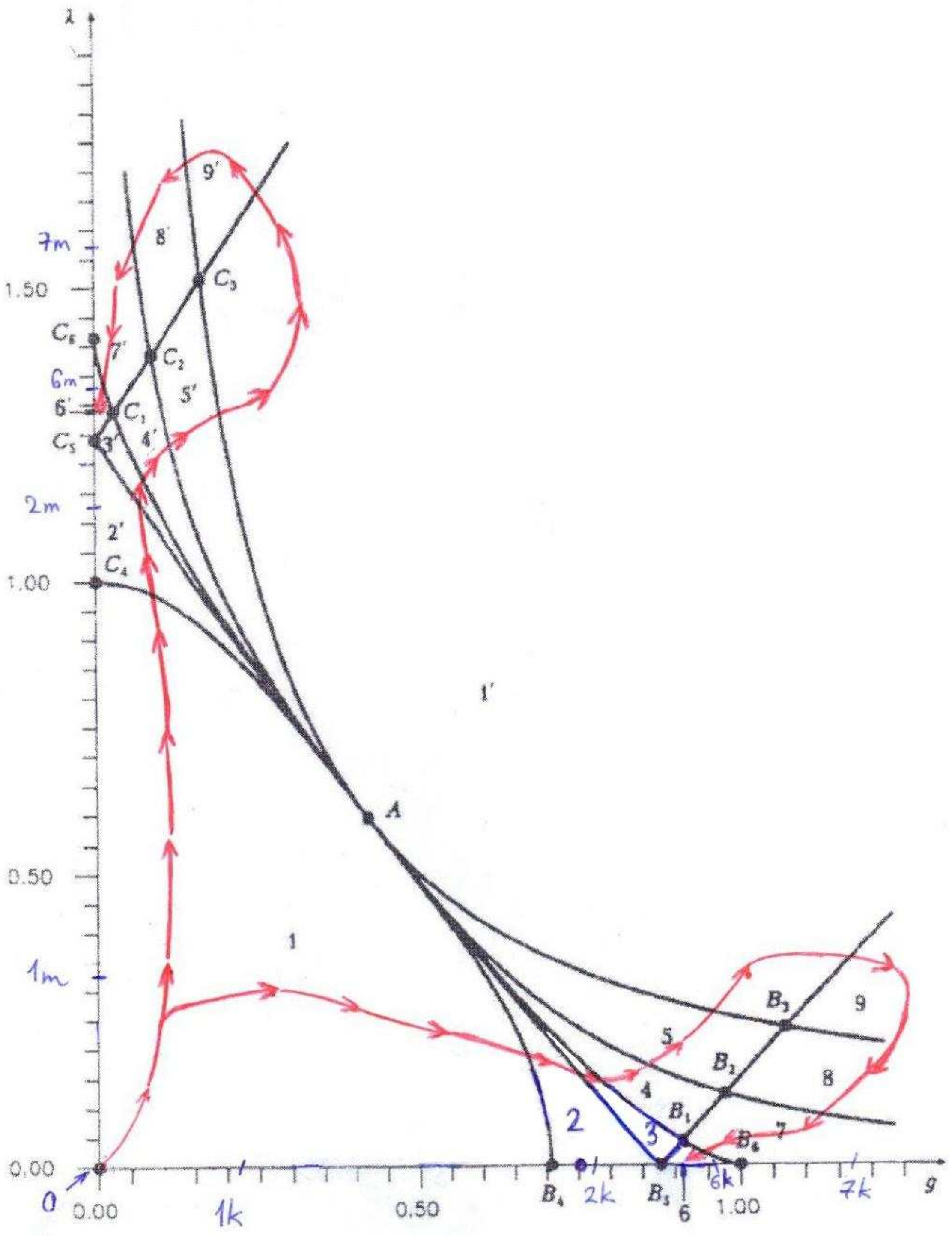
Это наглядно показано на следующих рисунках. На первом нарисованы пути обхождения диаграмм по плоскости $\mathbb{R}^2_{\lambda,g}$, два следующих иллюстрируют связь между соседними диаграммами - картиночки с диаграммами имеют общую сторону, если соответствующие области в $\mathbb{R}^2_{\lambda,g}$ граничат между собой. На этих рисунках хорошо видна локальность в различиях между соседними диаграммами, затем приведен 21 рисунок, на котором в описанном выше порядке расположены наши диаграммы с расставленными на них семействами и перестройками торов Лиувилля.

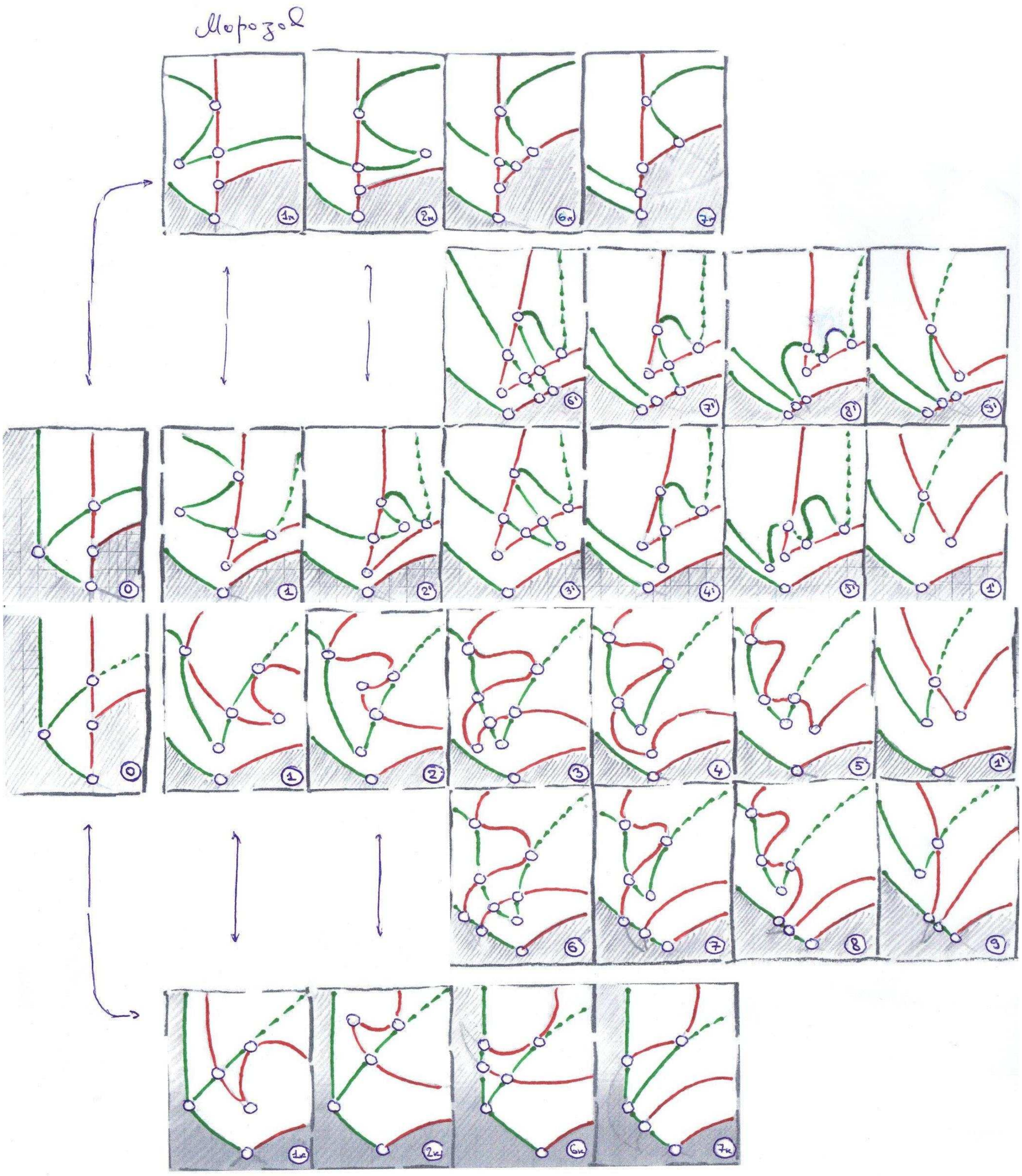
Проверка продолжения в остальные области предоставляется читателю. ■

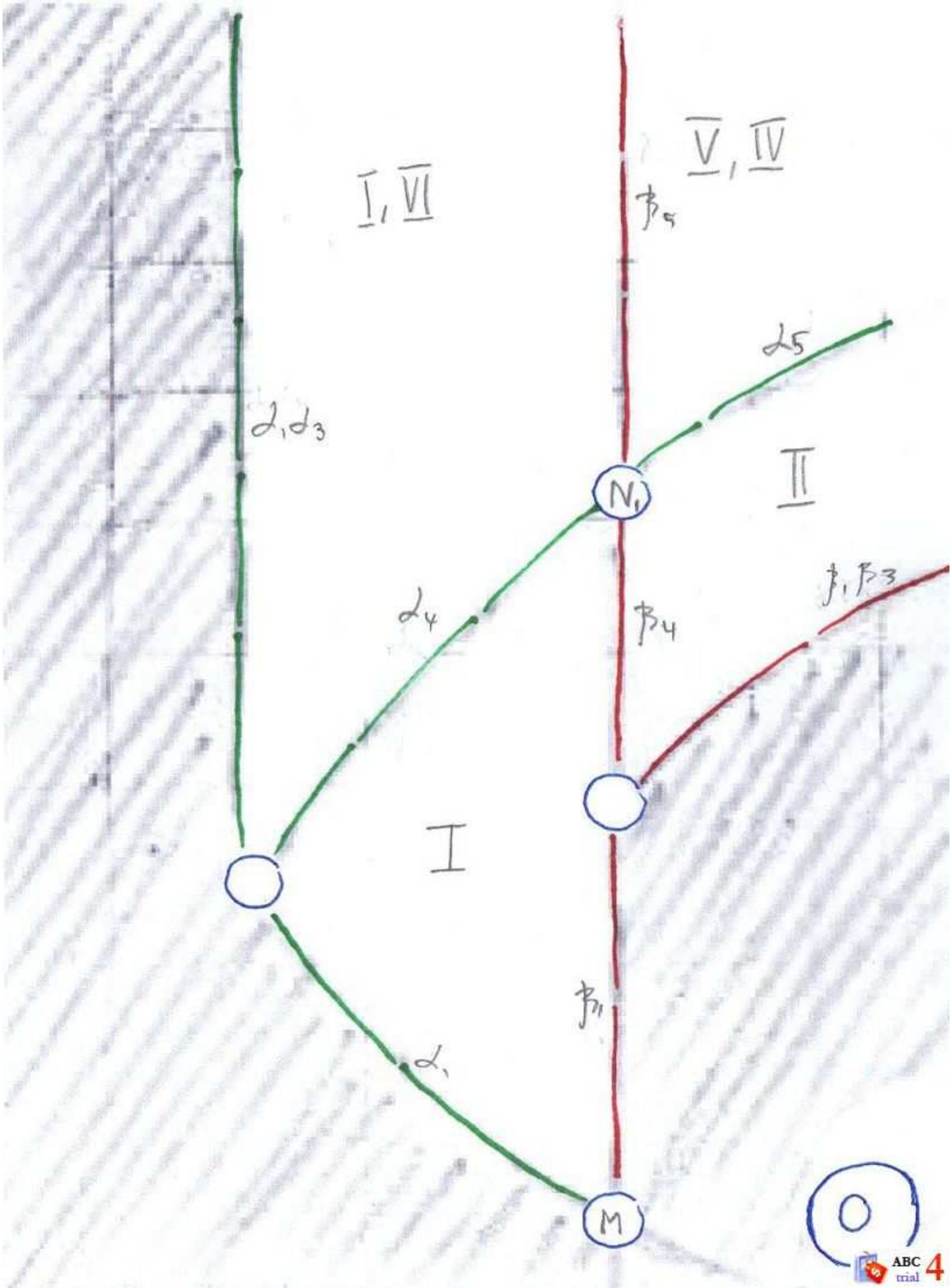
Замечание. *Гипотеза насчет четырех неизвестных перестроек.*

В работе Н.С.Логачевой были вычислены индексы и типы критичеких точек, являющихся положениями равновесия (или, что то же самое, точками пересечения бифуркационных кривых). Каждая стенка, отвечающая неизвестной перестройке, входит одним концом в такую точку. И каждая из этих перестроек оказывается центровой, то есть представляет собой один или несколько атомов A.

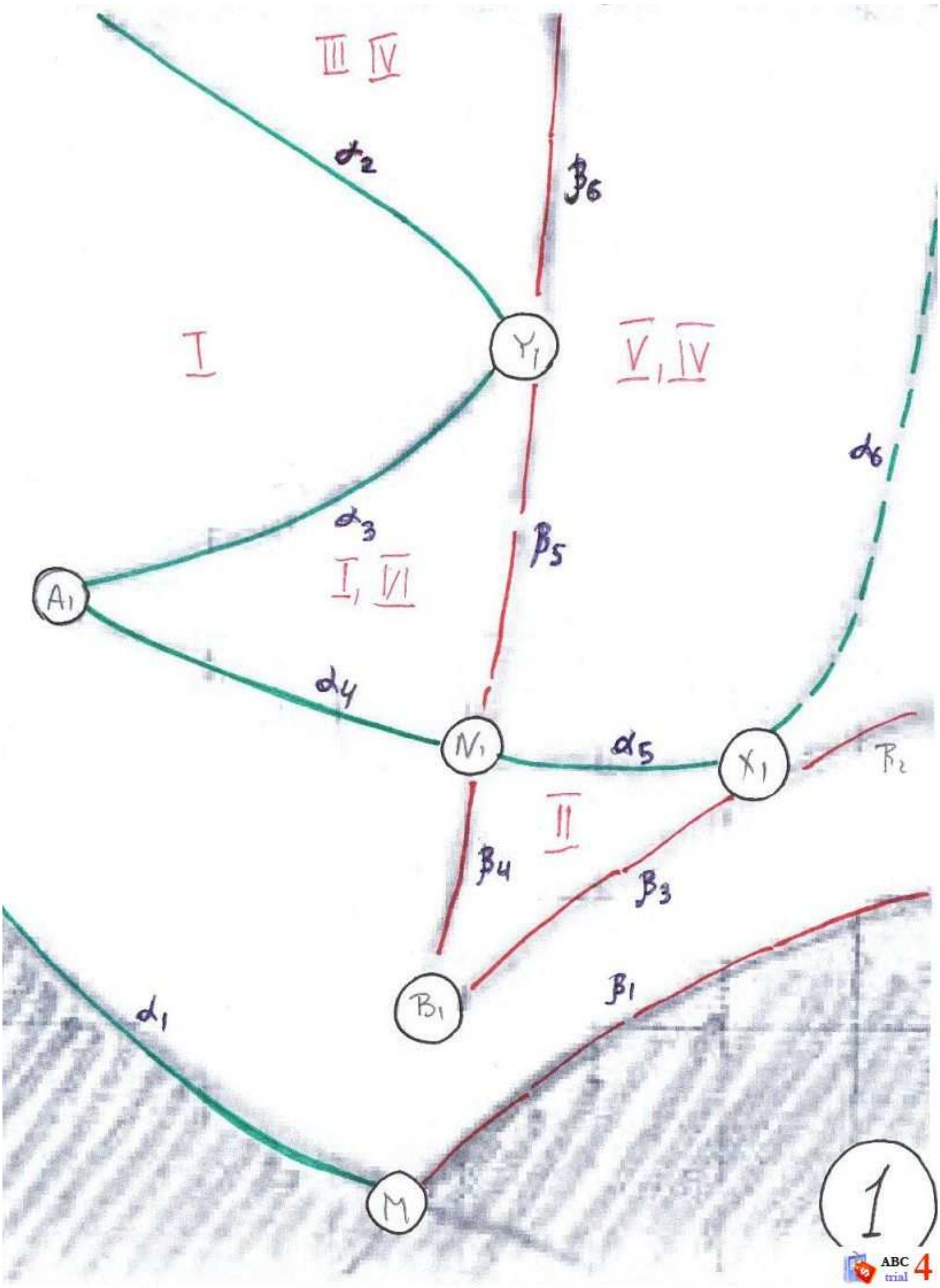
Если типа критической точки действительно достаточно для определения перестройки, то тогда грубая Лиувиллева классификация случая Ковалевской-Яхьи может считаться завершенной.


λ
7m
1.50
C_6
7'
6m
6'
C_5
3'
4'
2m
2'
1.00
C_4
8'
9'
C_3
C_2
C_1
5'
1'
A
0.50
1
1m
0.00
0
0.00
1k
0.50
B_4
2k
B_5
6
6k
1.00
7k
g
2
3
4
5
B_1
B_2
B_3
B_6
7
8
9

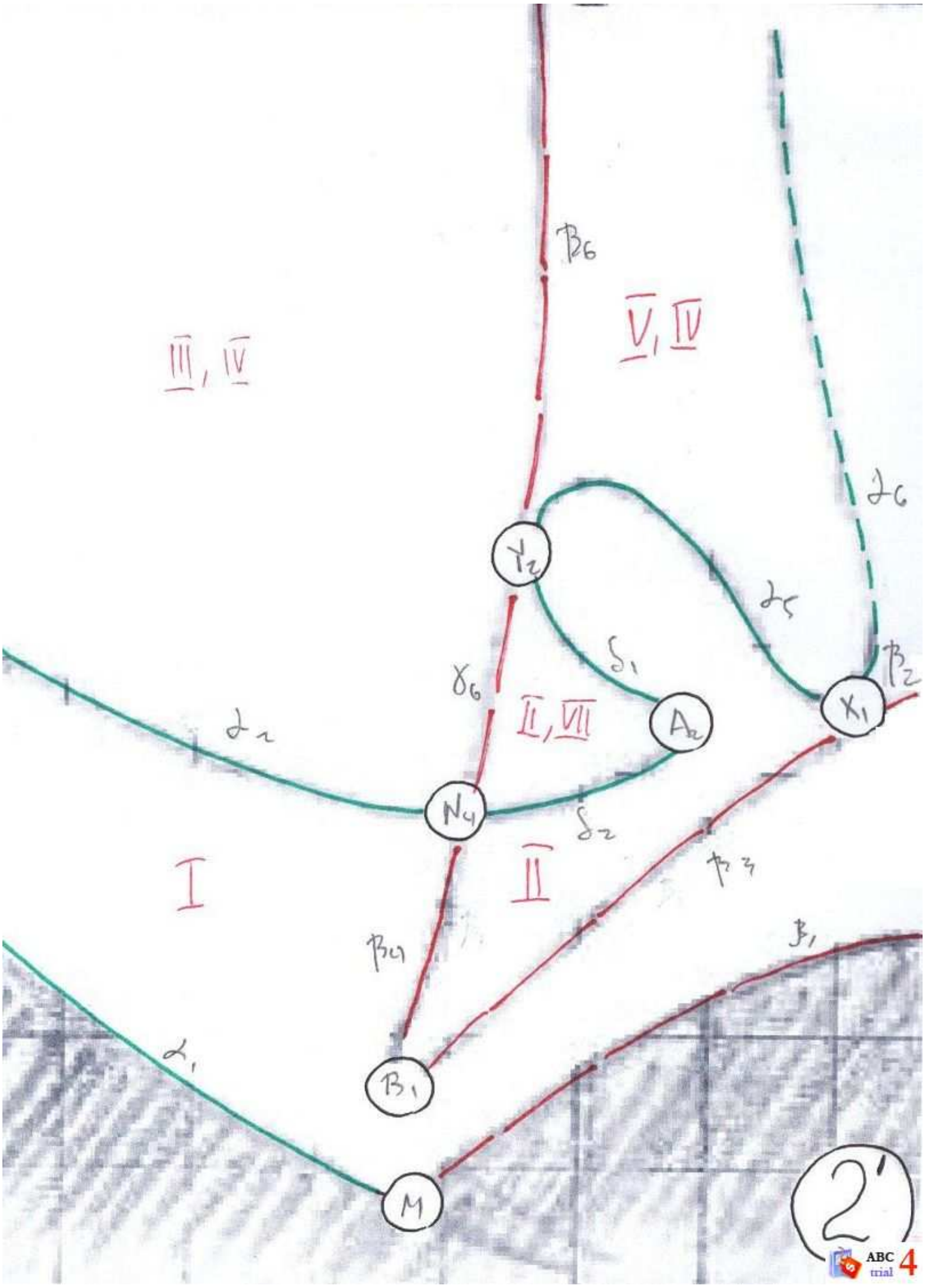

Морозов
Ковалевская



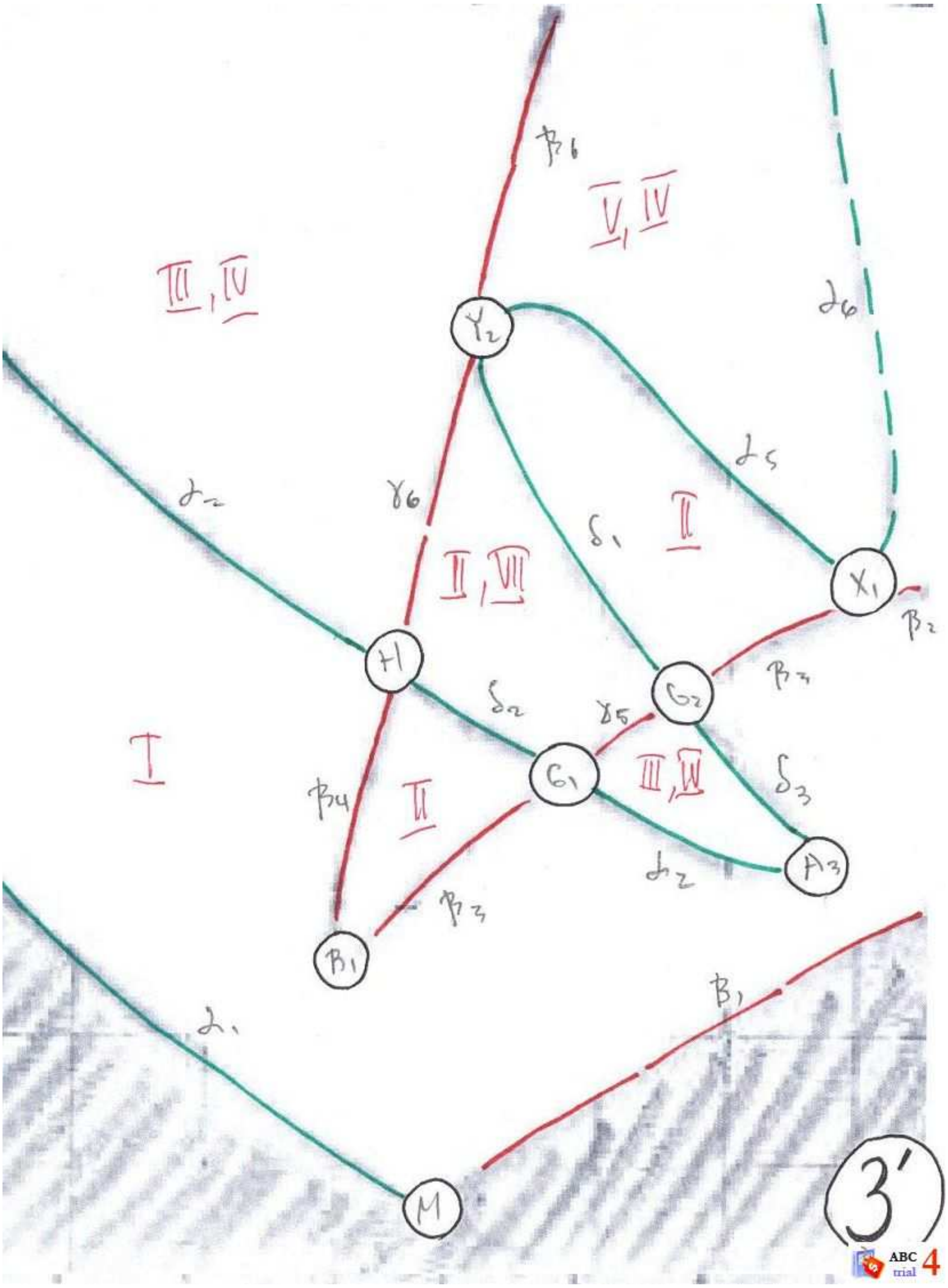
V, IV
I, VI
β5
α5
α1 α3
N1
II
β1 β3
α4
β4
I
β1
α1
M
O

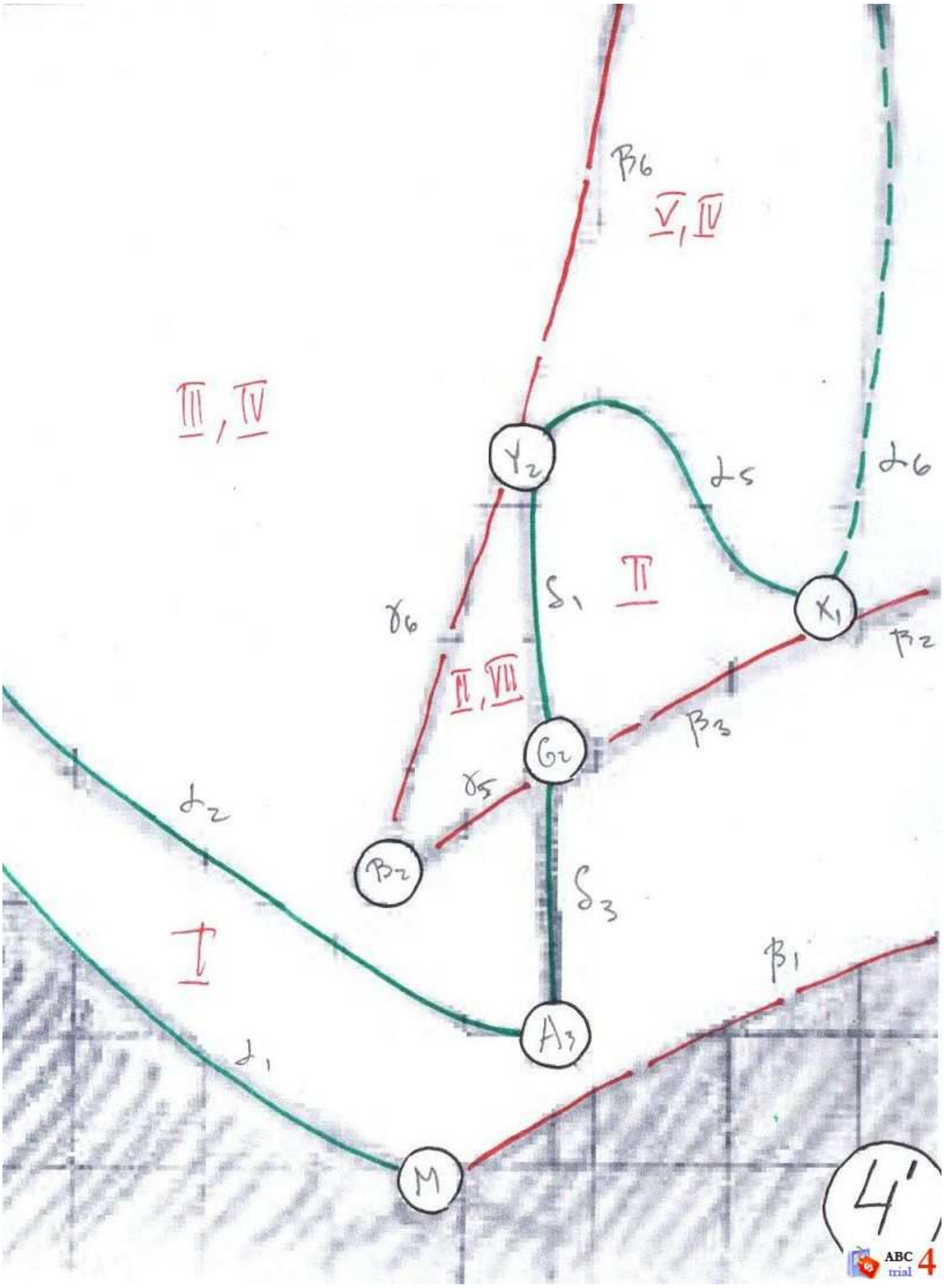


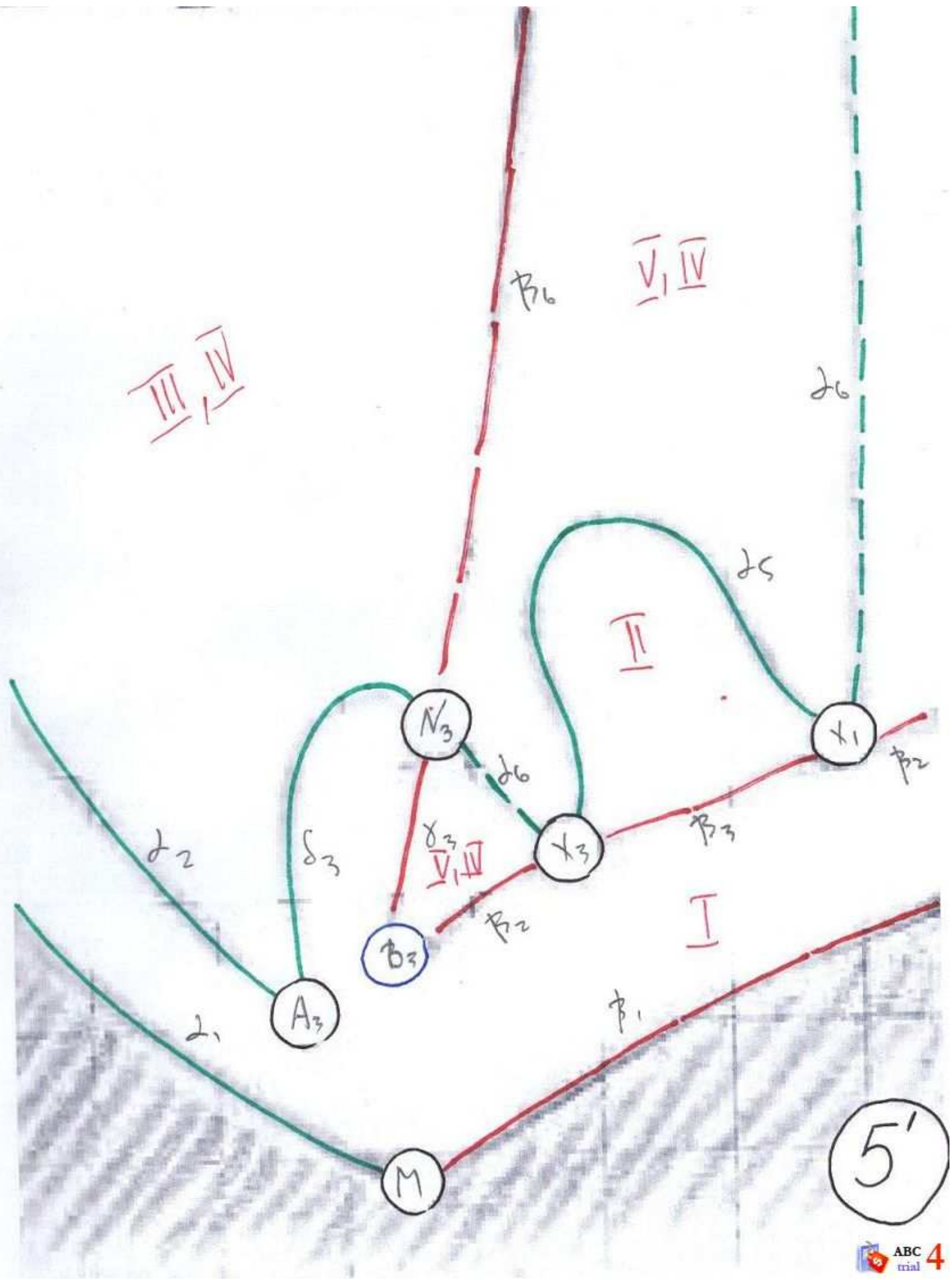
III IV
α_2
β_6
I
Y_1
$\overline{V}, \overline{IV}$
α_6
α_3
β_5
I, $\overline{VI}$
A_1
α_4
N_1
α_5
X_1
B_2
II
β_4
β_3
B_1
β_1
α_1
M
1



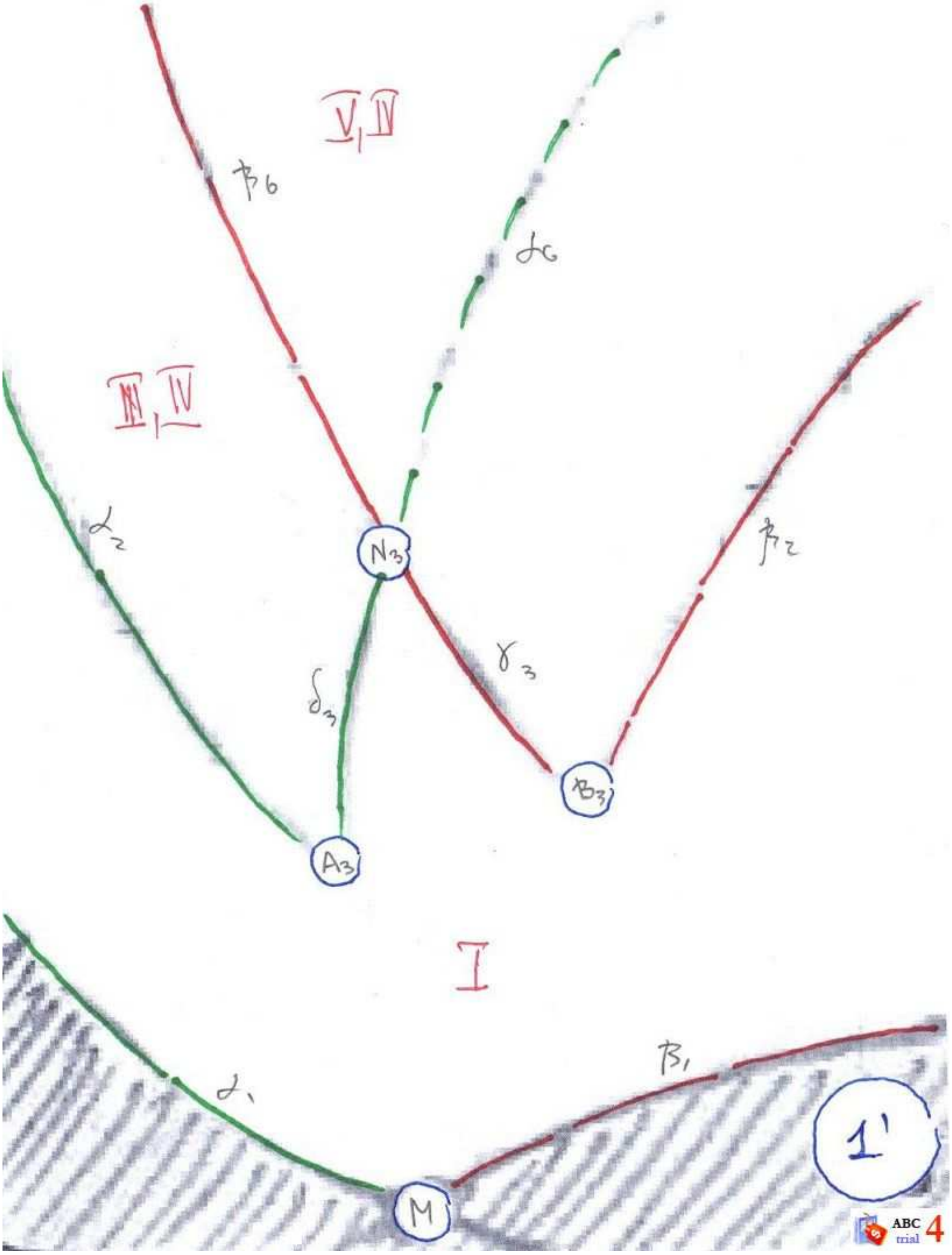
β_6
$\overline{V}, \overline{IV}$
$\overline{III}, \overline{IV}$
α_6
Y_2
α_5
δ_1
β_2
γ_6
$\overline{II}, \overline{VII}$
X_1
A_2
α_2
N_4
δ_2
β_3
$\overline{I}$
$\overline{II}$
β_1
β_4
α_1
B_1
M
$2'$

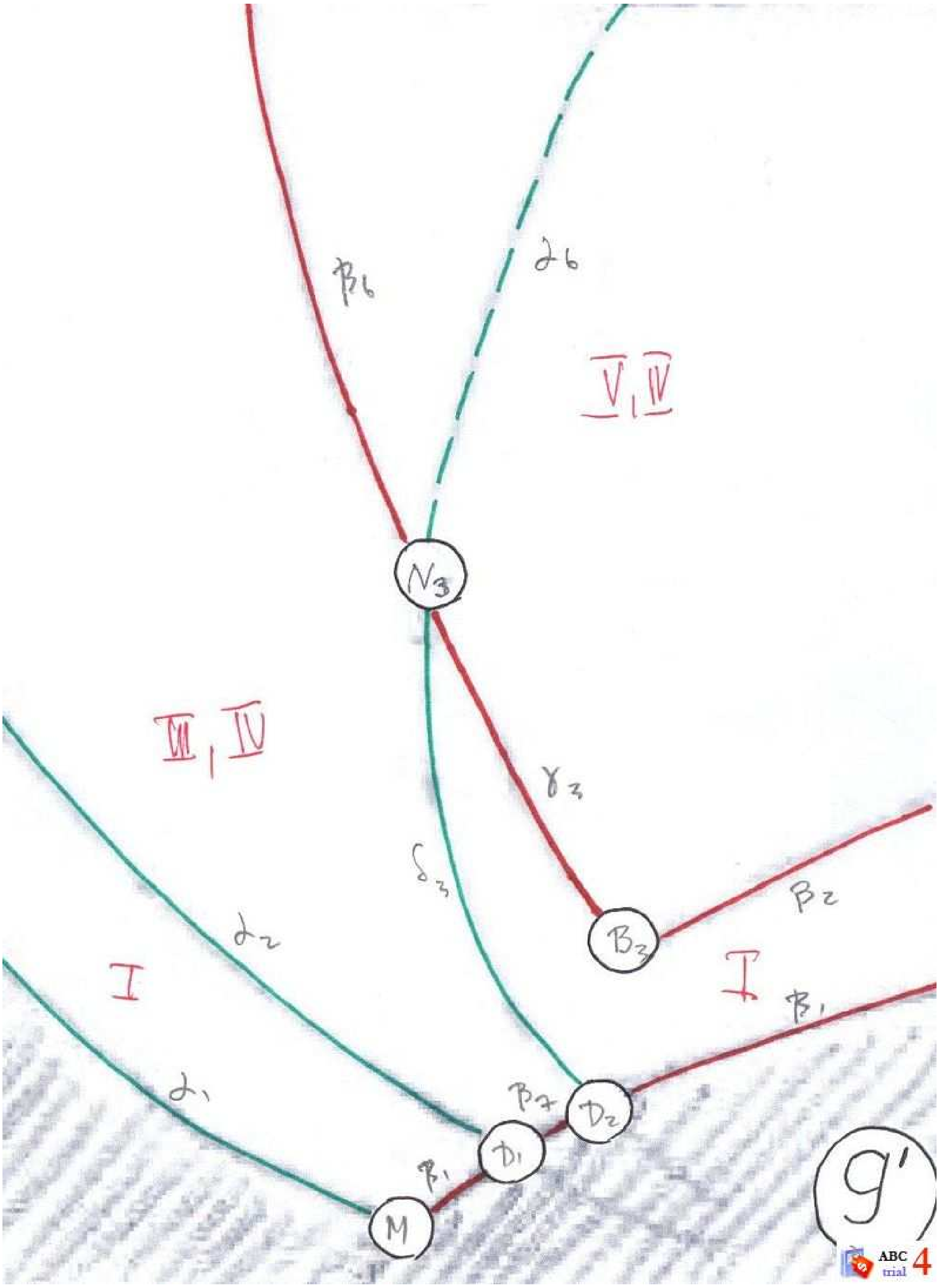

Y2
X1
H
G1
G2
A3
B1
M
3'

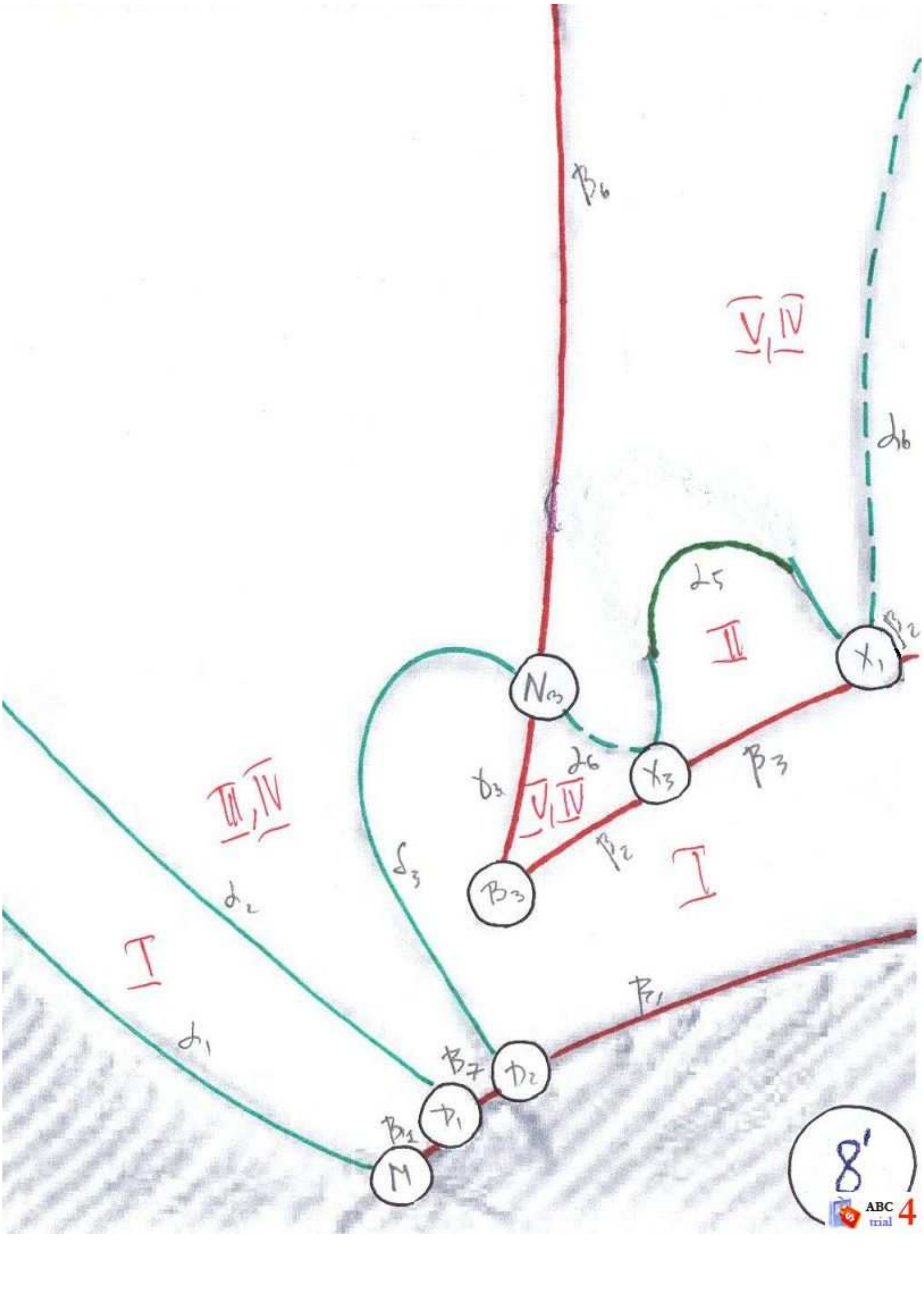

β6
V, IV
III, IV
Y2
α5
α6
X1
δ1
II
γ6
β2
II, VII
G2
β3
γ5
α2
β2
δ3
I
β1
A3
α1
M
4'

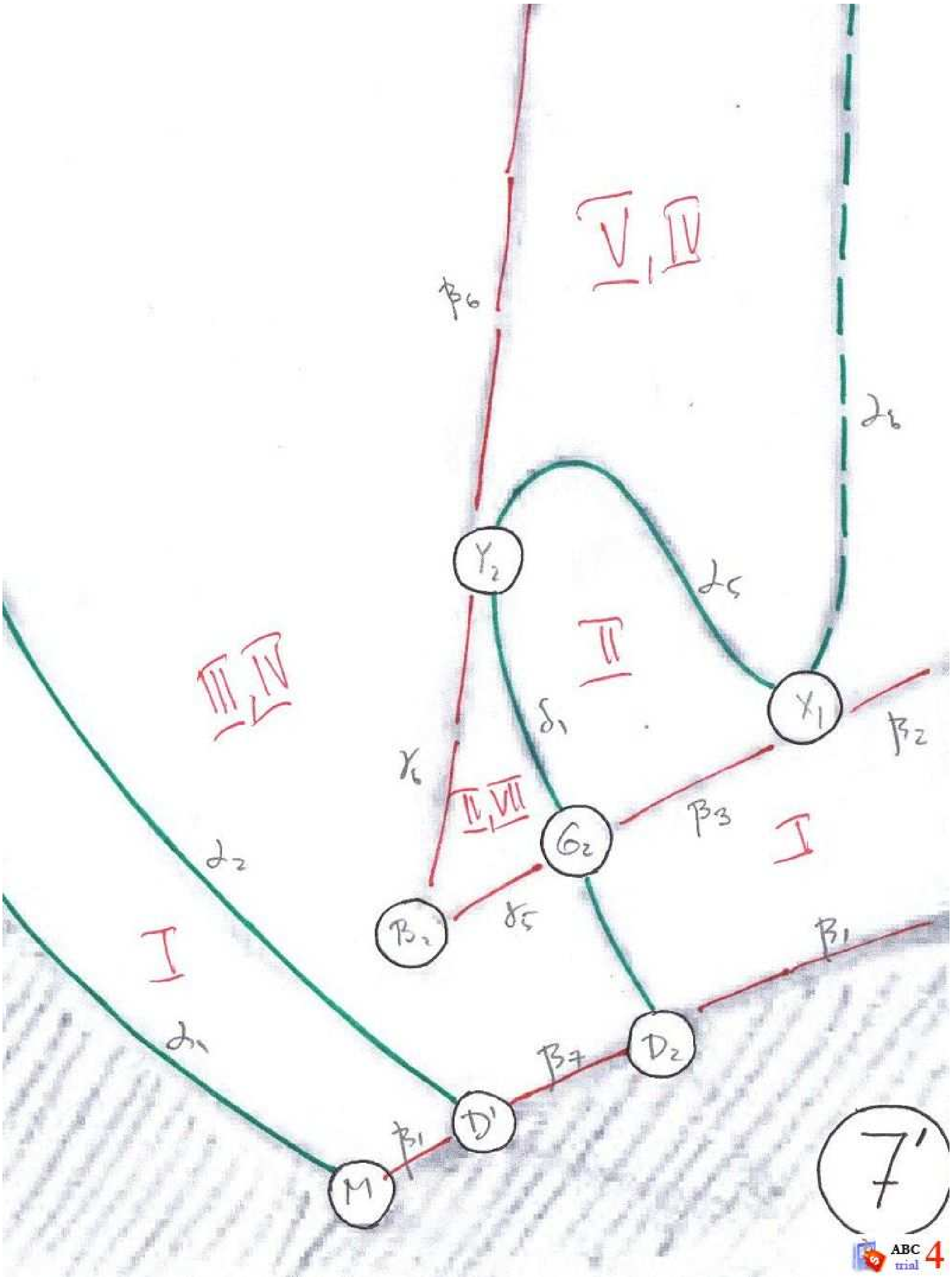


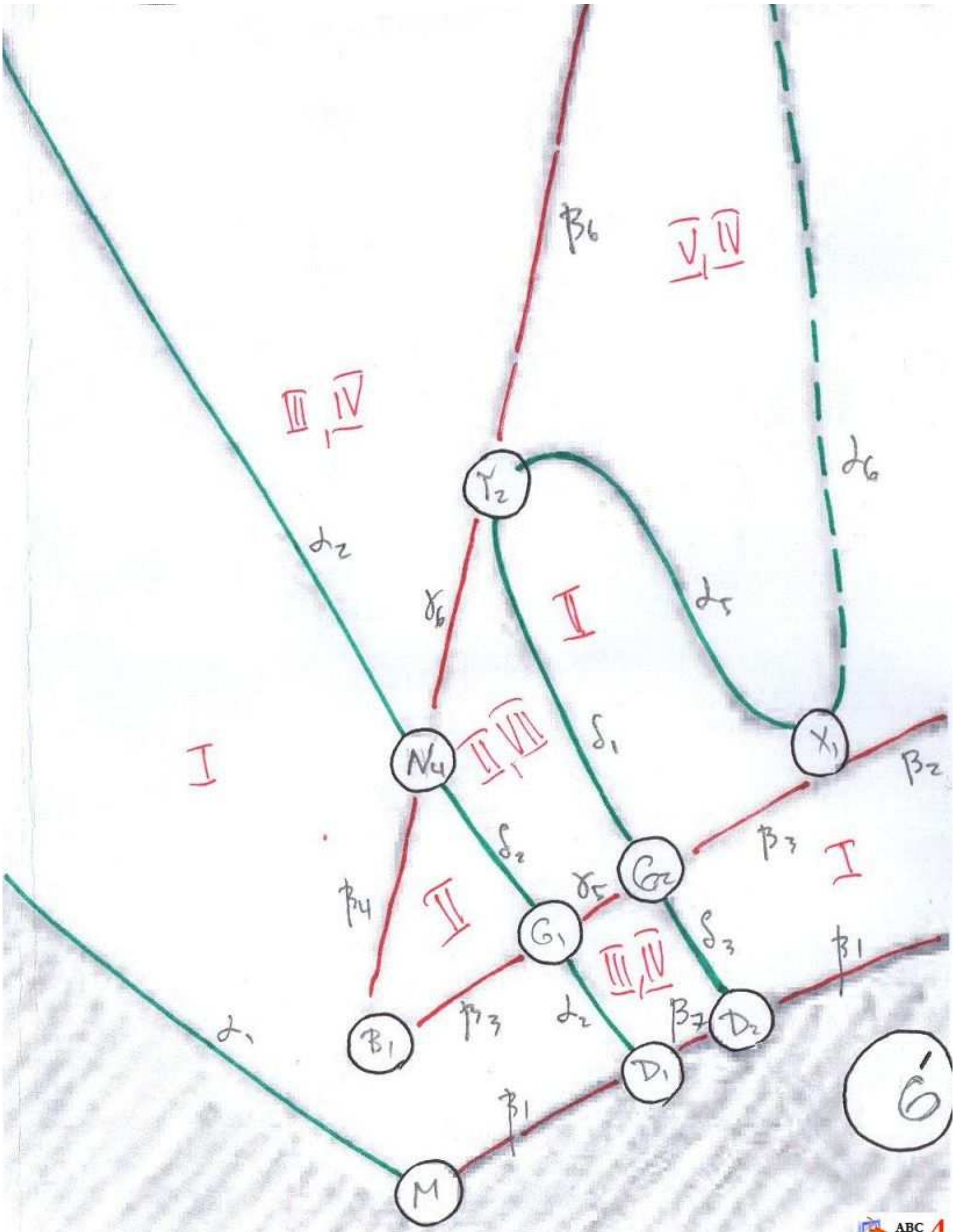
$\overline{V}, \overline{IV}$
$\overline{III}, \overline{IV}$
$\overline{II}$
$\overline{I}$
$\overline{V}, \overline{IV}$
N_3
X_1
X_3
B_3
A_3
M
5'


V, VI
III, IV
N3
A3
B3
M
I
1'

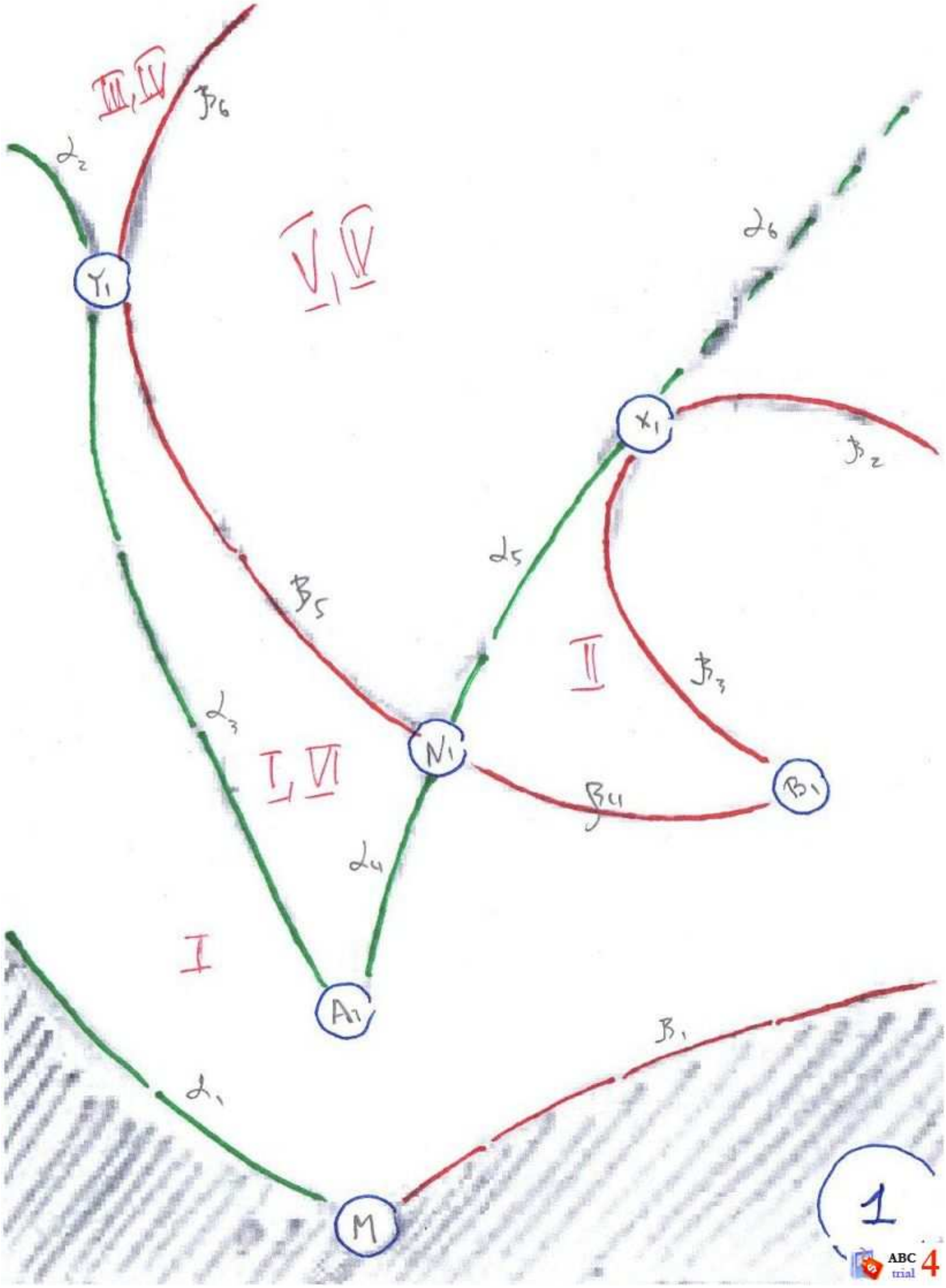

β6
α6
V, IV
N3
III, IV
γ3
δ3
α2
B3
β2
I
I
β1
α1
β7
D2
D1
β1
M
g'

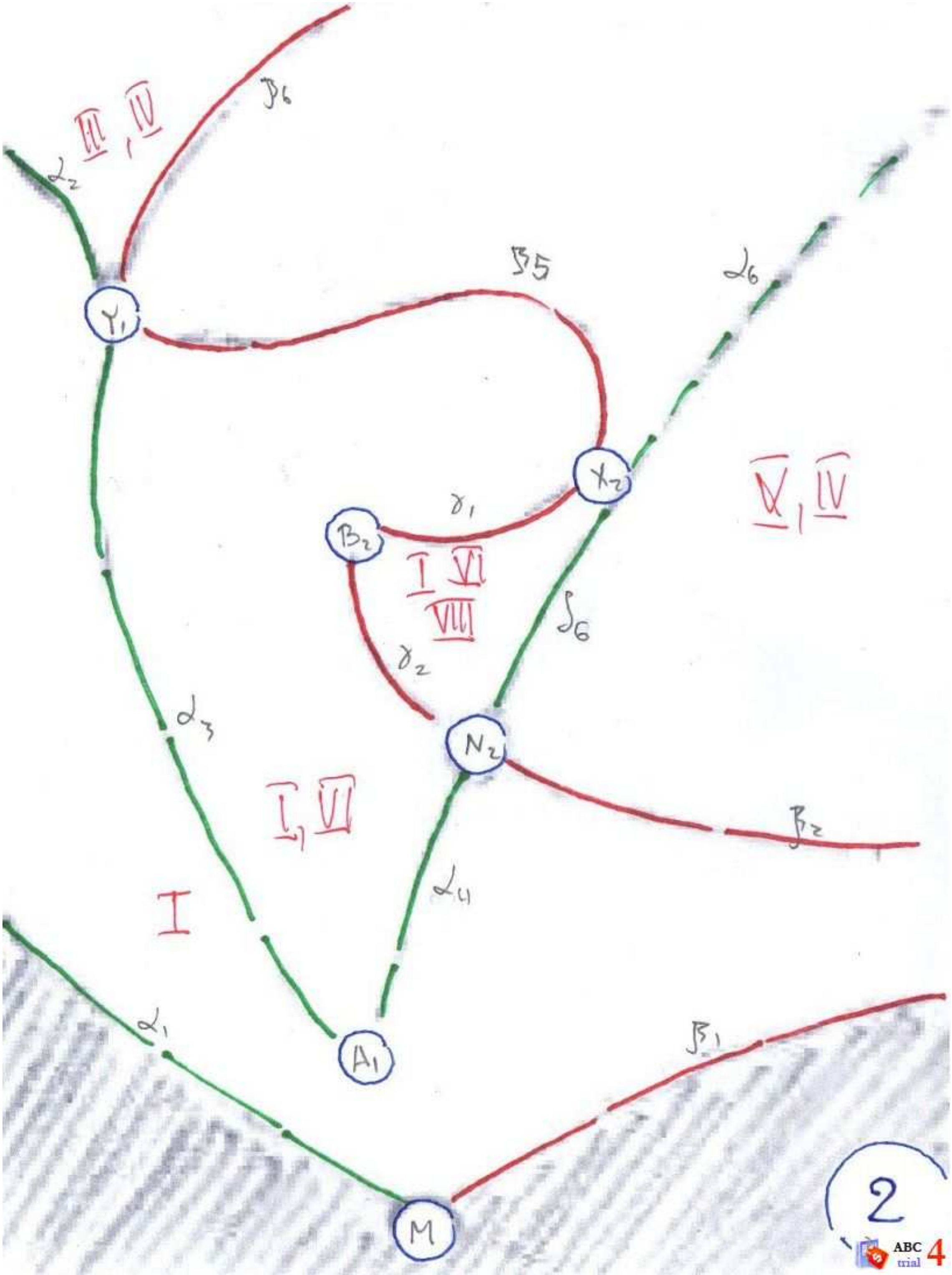

β6
V, IV
α6
α5
II
X1
X3
β3
β2
I
B3
δ3
III, IV
α2
I
α1
β1
β7
M
8'


V, IV
β6
α6
Y2
α5
II
X1
β2
III, IV
δ1
γ6
II, VII
G2
β3
I
α2
B2
γ5
β1
I
α1
D2
β7
D'
β1
M
7'
ABC trial 4

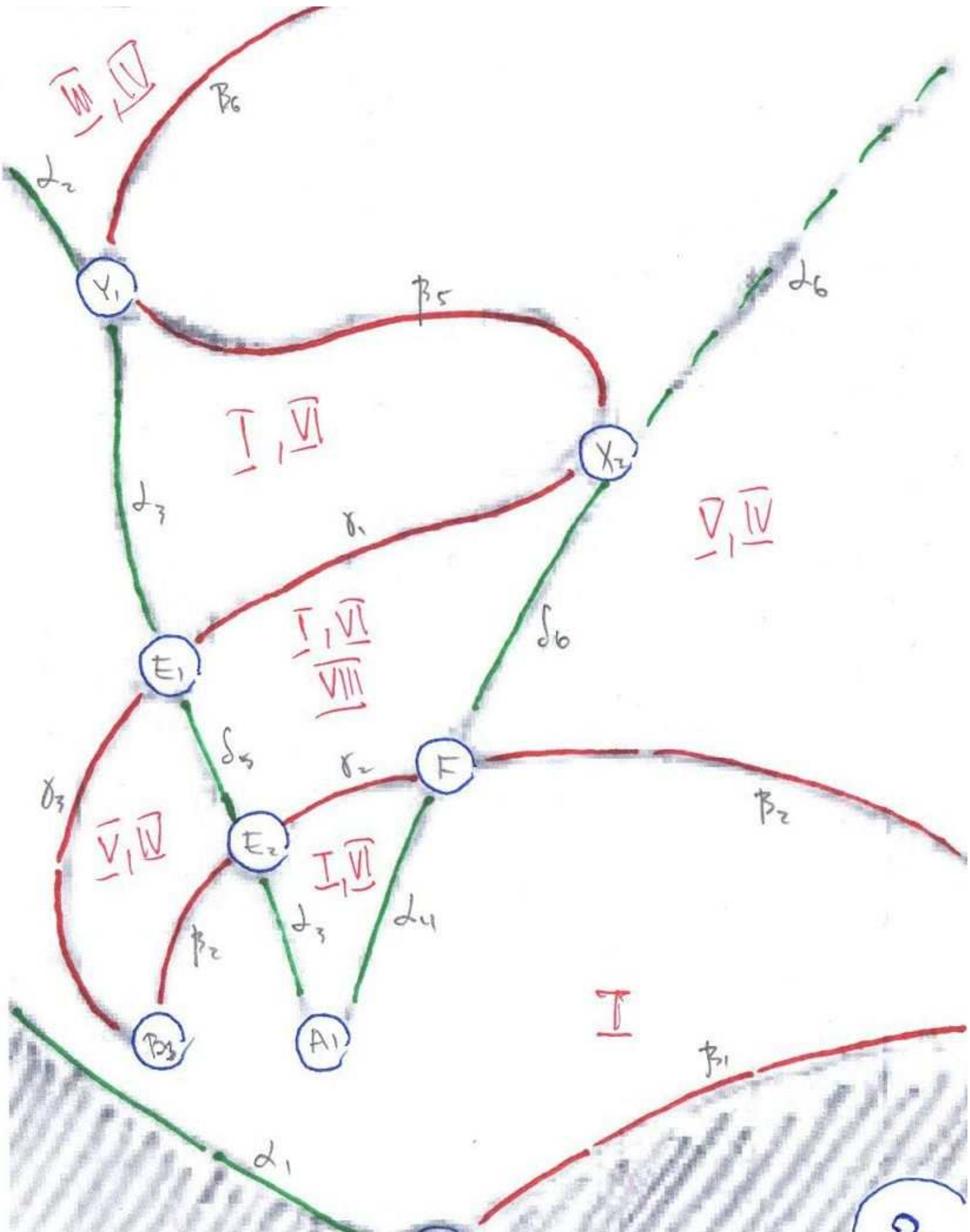


β6
V, IV
III, IV
Y2
α6
α2
γ6
II
α5
X1
I
N4
II, VII
δ1
β2
δ2
G2
β3
I
β4
II
γ5
G1
δ3
β1
III, IV
B1
β3
α2
β7
D2
α1
D1
6′
β1
M

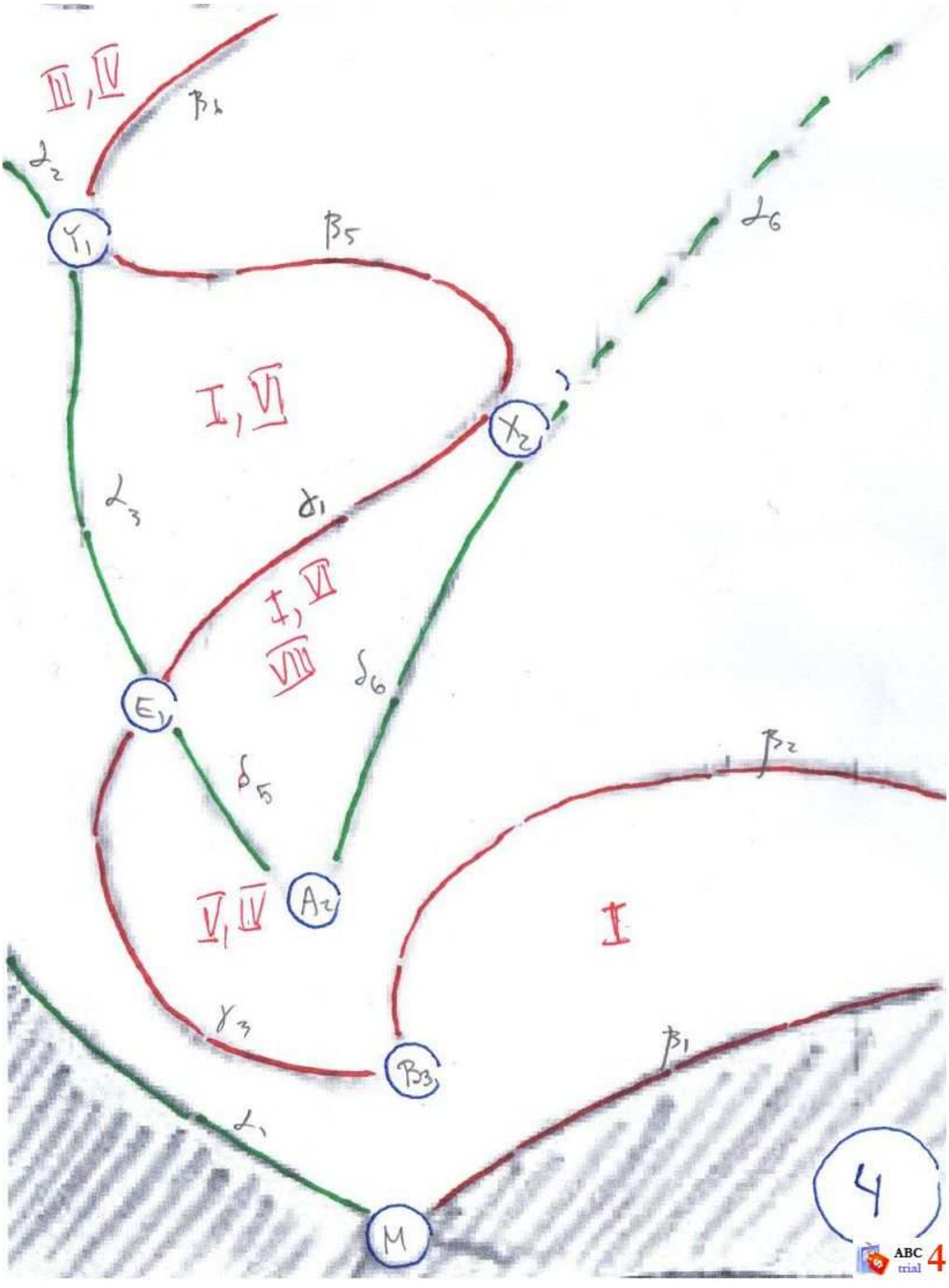

III, IV
β6
α2
V, VI
Y1
α6
X1
β2
α5
β5
II
β3
α3
N1
I, VI
β4
B1
α4
I
A1
β1
α1
M
1

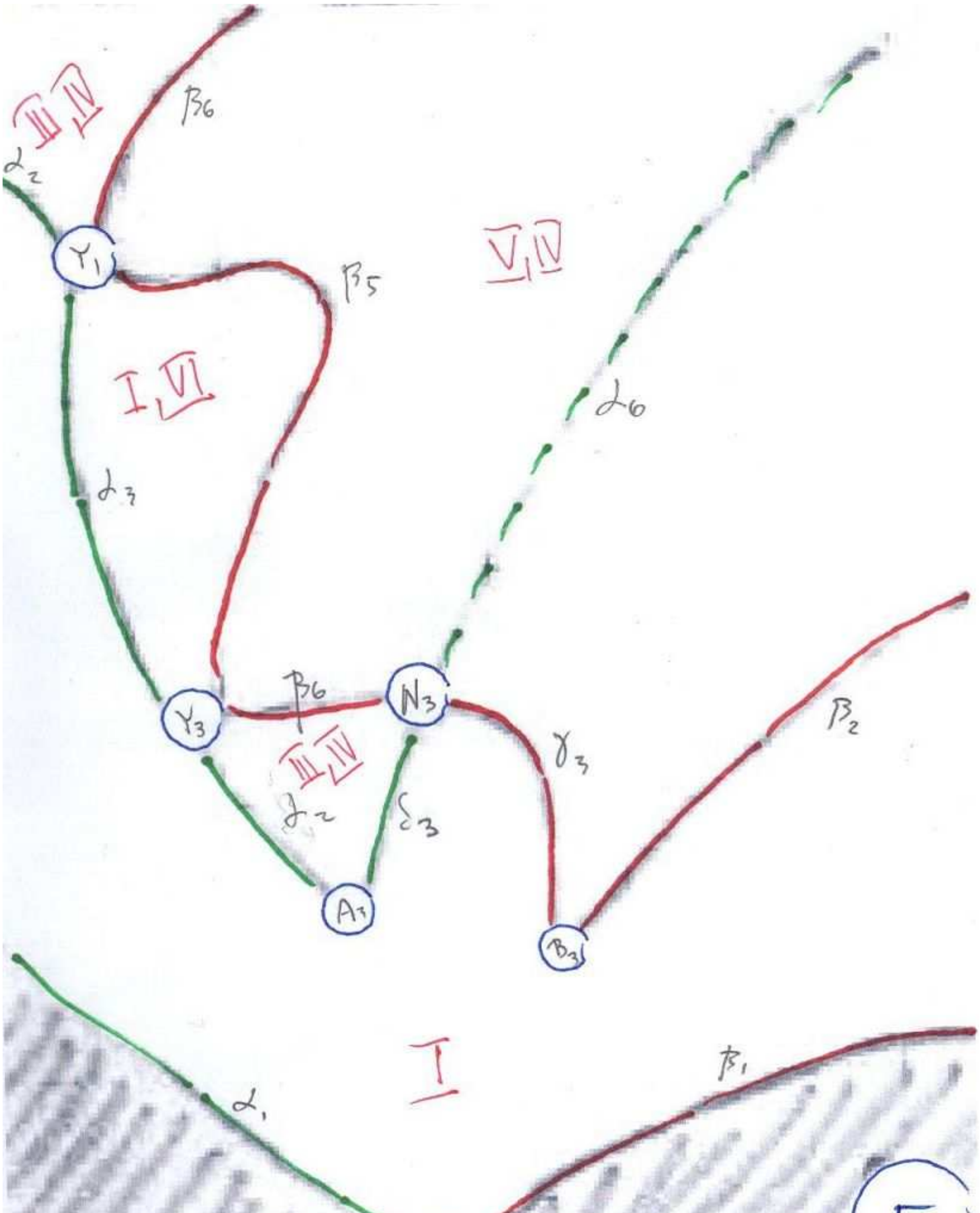


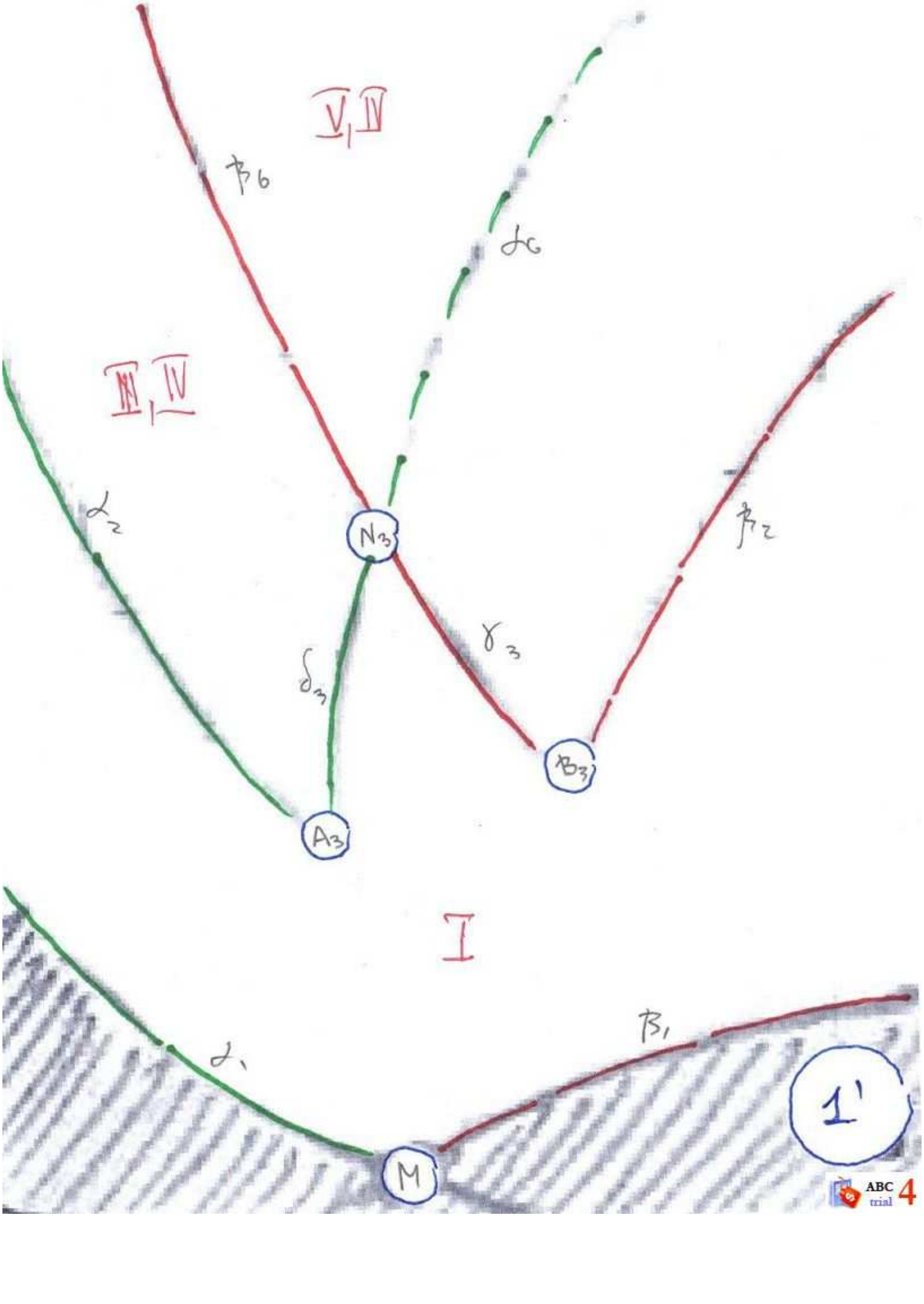
α_2
III, IV
β_6
β_5
α_6
Y_1
X_2
V, IV
γ_1
B_2
I VI
VIII
δ_6
γ_2
α_3
N_2
I, VI
β_2
α_4
I
α_1
A_1
β_1
M
2



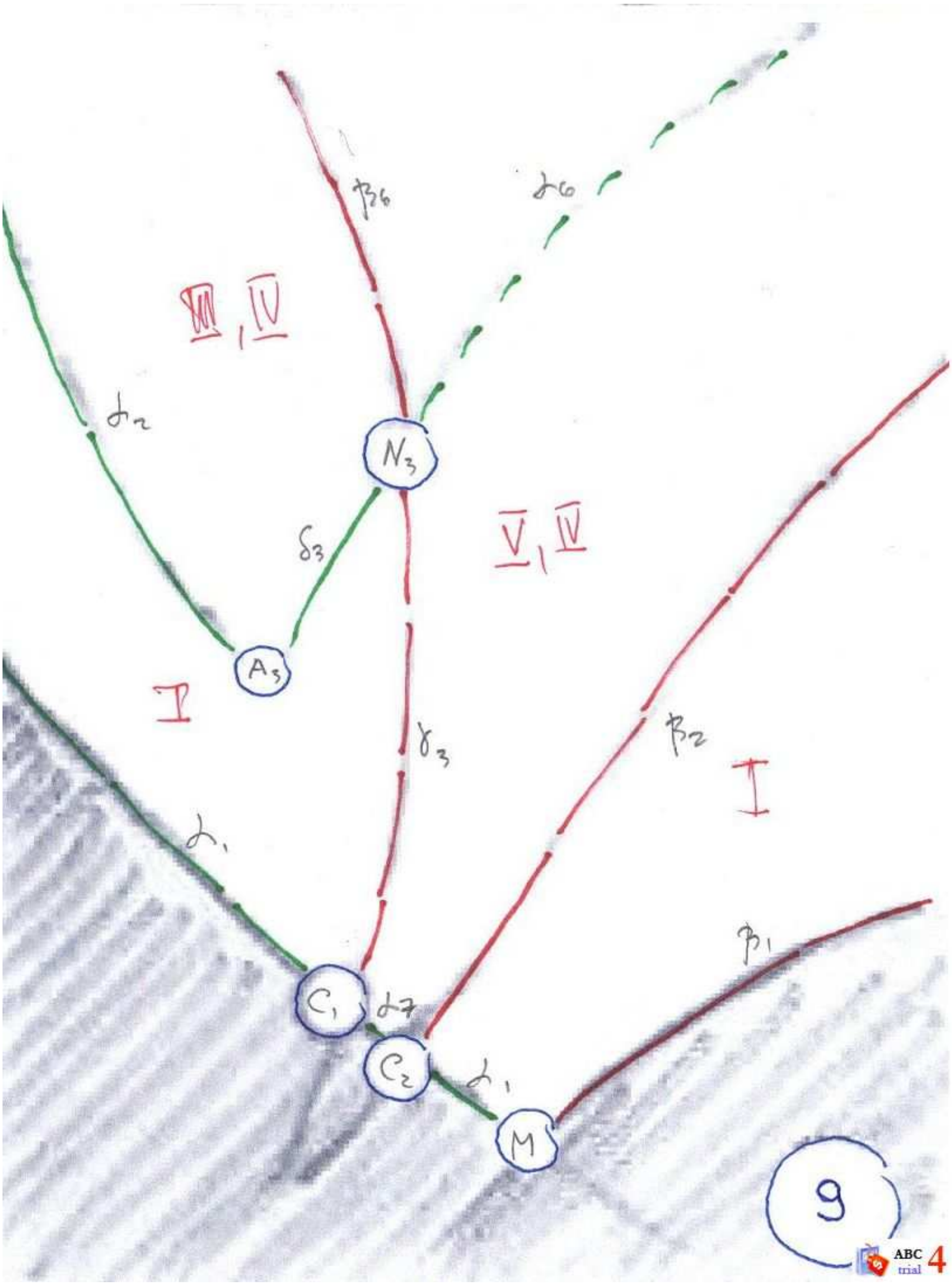
$\overline{\mathrm{III}}, \overline{\mathrm{IV}}$
β_6
α_2
Y_1
β_5
α_6
$\overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{VI}}$
X_2
α_3
γ_1
$\overline{\mathrm{V}}, \overline{\mathrm{IV}}$
δ_6
$\overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{VI}}$
$\overline{\mathrm{VIII}}$
E_1
δ_5
γ_2
F
γ_3
β_2
$\overline{\mathrm{V}}, \overline{\mathrm{IV}}$
E_2
$\overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{VI}}$
β_2
α_3
α_4
$\overline{\mathrm{I}}$
B_3
A1
β_1
α_1
M
3


III, IV
I, VI
I, VI
VIII
V, IV
I
4

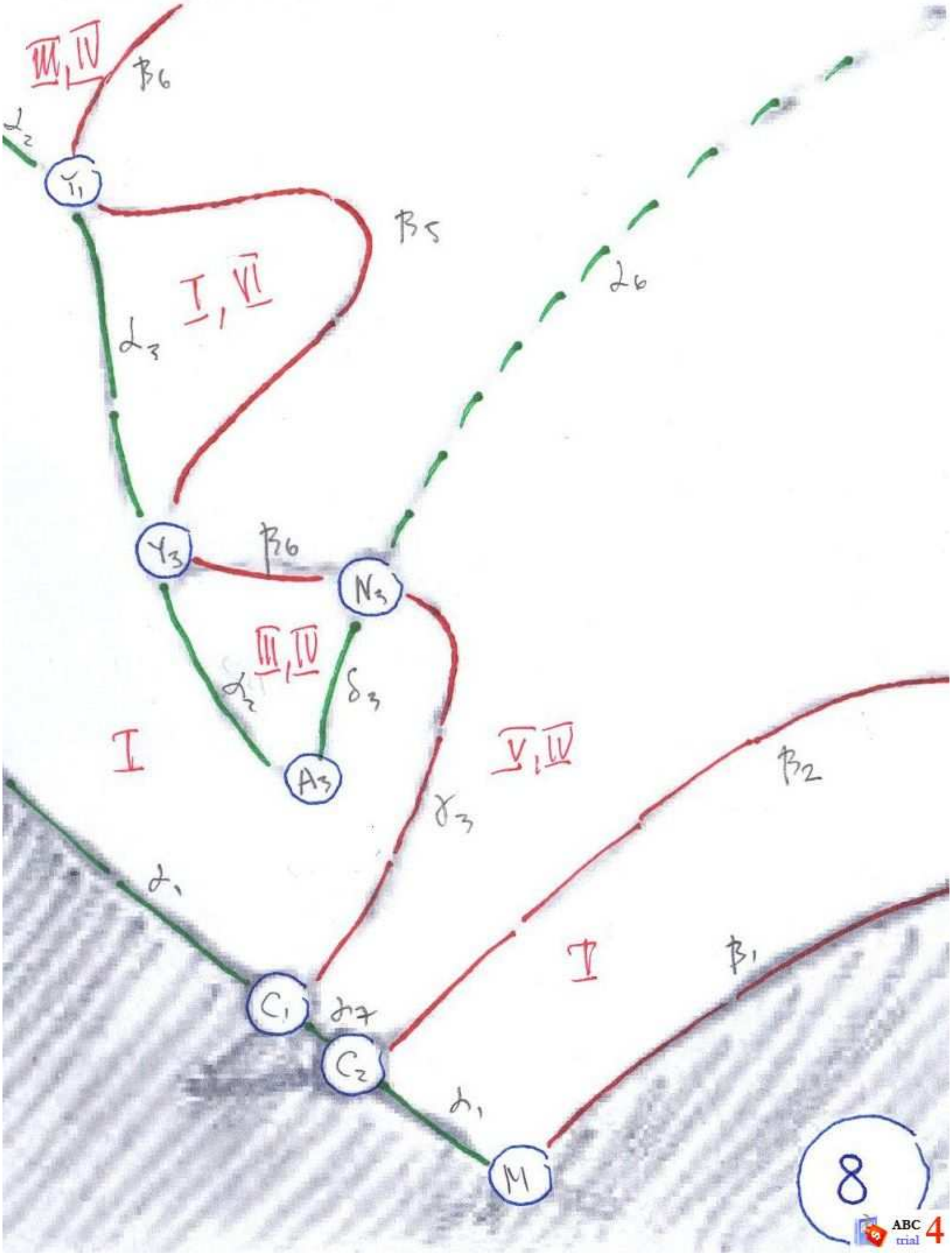

β6
β5
β2
β1
α6
α3
α1
γ3
δ3
A3
B3
N3
M
5

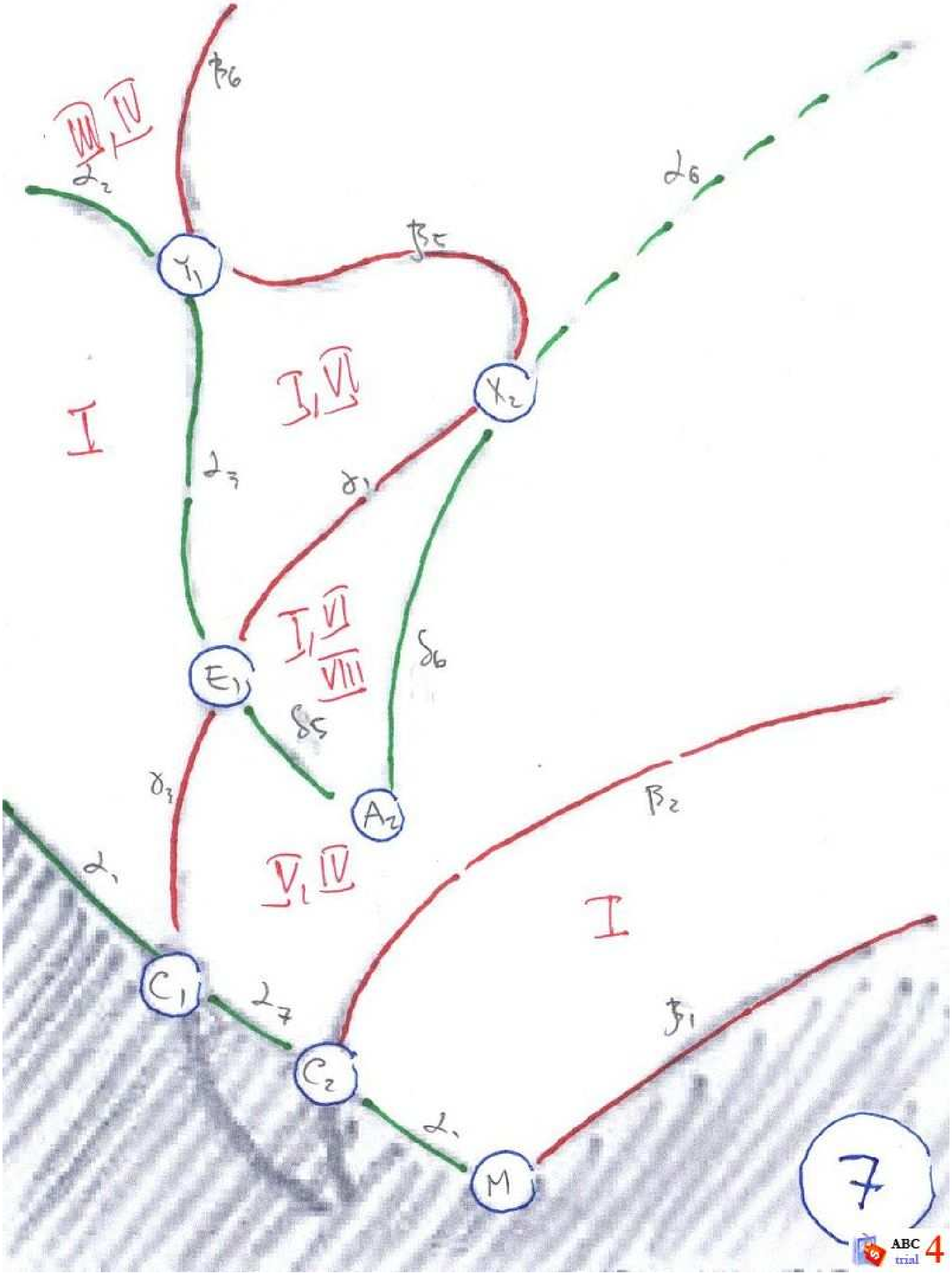


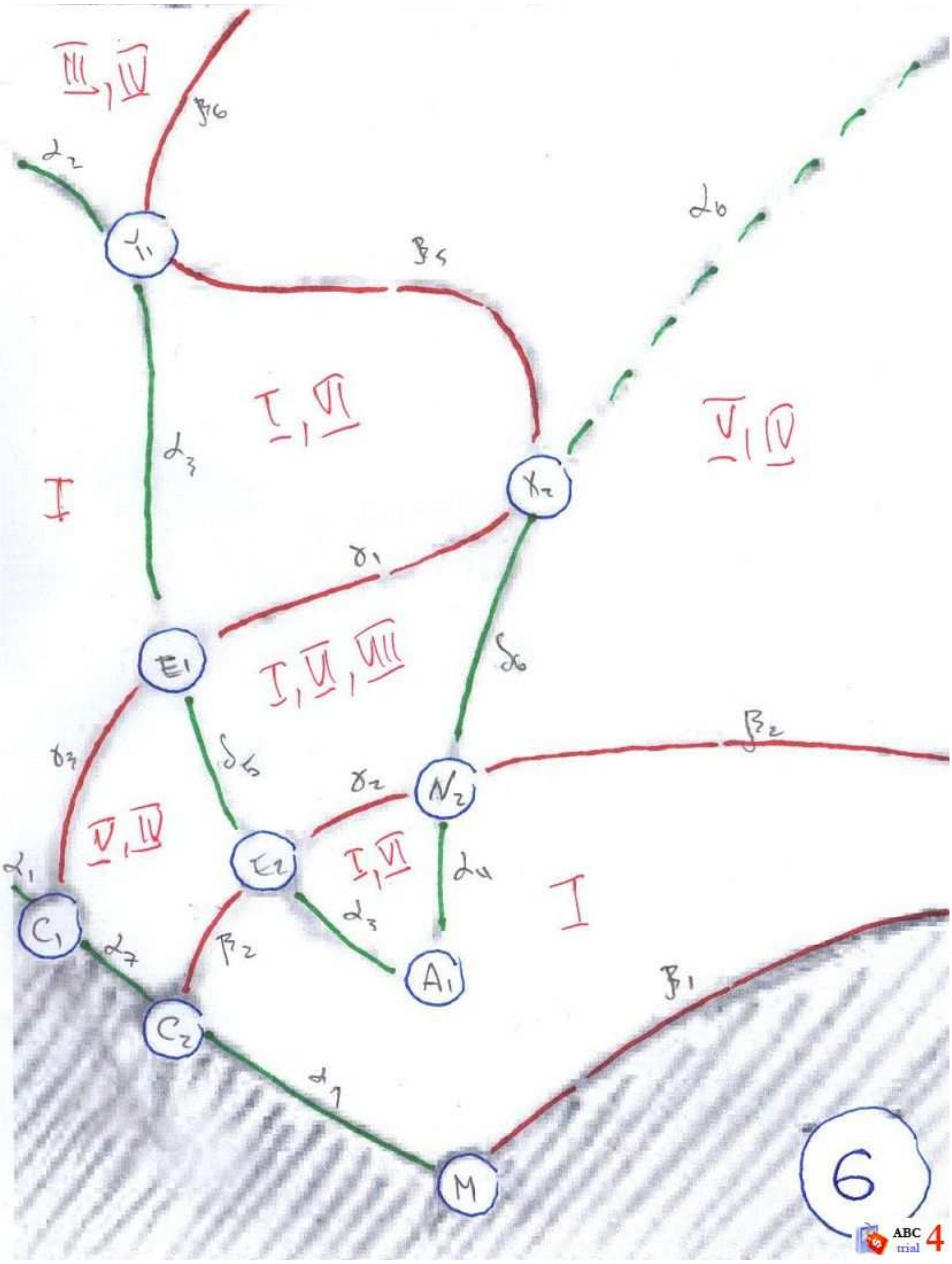
V, IV
β_6
α_6
III, IV
α_2
N_3
β_2
δ_3
γ_3
B_3
A_3
I
β_1
α_1
1'
M



β_6
α_6
III, IV
α_2
N_3
δ_3
V, IV
A_3
I
γ_3
β_2
I
α_1
C_1
α_7
C_2
α_1
β_1
M
9


III, IV
β6
α2
Y1
β5
I, VI
α6
α3
Y3
β6
N3
III, IV
α2
δ3
I
A3
V, IV
γ3
β2
α1
V
β1
C1
α7
C2
α1
M
8




Y1
X2
E1
E2
N2
C1
C2
A1
M
6

Список литературы

[1] Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. - Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp.169-172.

[2] Яхья Х.М. Новые uнтегрuруемые случаu задачu о двuженuu гuростата. Вестник МГУ сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90

[3] А.А.Ошемков "Труды Семинара по векторному и тензорному анализу вып. 25 часть 2." Издательство Московского Ун-та, 1993.

[4] Болсuнов А.В., Фоменко А. Т. Интегрuруемые гамuльтоновы сuстемы. Геометрuя. Топологuя. Классuфuкацuя. - Изд-во УдГУ 1999.

[5] П.Е.Рябов "Бифуркационное множество задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи".Дисс.Волгоград 1997.

[6] Харламов М.П, Рябов ПЕ. Бuфуркацuu первых uнпегралов в случае Ковалевскоq-Яхьи. - Регулярная u хаотuческая динамика, 1997, т.2, №2.

[7] Г.Г.Аппельрот "Не вполне симметричные тяжёлые гироскопы // Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки." М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940.С.61-155.

[8] М.П.Харламов "Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела". Л.:Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.

[9] П.В.Морозов "Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела" Москва - 2006.

[10] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075. Объем 0,3 п.л.

[11] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307. Объем 2 п.л.

[12] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем// Известия АН СССР, 1988, т.52, No.2, с.378-407. Объем 2 п.л.

[13] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51. Объем 1 п.л.

[14] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем// УМН, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173. Объем 2 п.л.

[15] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.

[16] Болсинов А.В., Рихтер П, Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. - Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42.

[17] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. - Матем. сборник, 1996, т. 187, И3, с. 143-160.