Московский государственный университет.

Оценка количества вершин n-мерного куба, отсекаемых касательными гиперплоскостями ко вписанной сфере

Дильман Г.В.

Научный руководитель — академик А.Т. Фоменко

1.Введение. Методология *Robust* оптимизации (развитая авторами [2]) получает выпуклые задачи вида

$$\min_{x\in R^n}\{c^T x \quad : \quad Ax-b\in L^N, \forall (A,b,c)\in U_\rho \qquad\qquad (*)\}$$

где

$$L^N=\{x\in R^n \quad : \quad x_N\geqslant\sqrt{x_1^2+\dots+x_{N-1}^2}\},$$

матрицы $A\in R^{N\times n}$, векторы $b\in R^N, c\in R^n$ из множества параметров

$$U_\rho=\left\{(A,b,c)=(A^0,b^0,c^0)+\rho\sum_{l=1}^{L}y_l(A^l,b^l,c^l) \quad : \quad y^TQ_ky\leqslant 1, k=1,\dots,K\right\}$$

для неотрицательно определенных матриц Q_k.

Задача (*) для $\rho=1$ NP трудна (см. [2]), но она аппроксимируется (см. [1]) задачей (*) для $\rho'>1$, которая уже вычислима.

Уровень аппроксимации ρ' ограничивается неравенством

$$\rho'\leqslant\sqrt{2ln\left(\frac{2}{1-2r}\left(\sum_{k=1}^{K}RankQ_k\right)\right)}$$

Константа r — это макисмальное относительное количество вершин n-мерного куба, отсекаемых касательными гиперплоскостями к вписанной сфере. То есть для каждого набора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \quad : \quad \alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2=1$ существует не более $r2^n$ наборов $(a_1,\dots,a_n) \quad : \quad |a_i|=1, i=1,\dots,n$, таких что $\sum_{i=1}^n a_1\alpha_1+\dots+a_n\alpha_n>1$.

В [1] доказано (лемма А.1) что $r\leqslant\frac{1}{3}$ и выдвинута гипотеза, что $r\leqslant\frac{1}{4}$.

Переформулируем гипотезу $r\leqslant\frac{1}{4}$ (и доказанное в [1] неравенство $r\leqslant\frac{1}{3}$) в геометрических терминах.

Пусть B_n - множество вершин n-мерного куба с ребром длины два и центром в начале декартовых координат R^n, а S^{n-1} - вписанная в него $n-1$-мерная сфера единичного радиуса с центром в начале координат:

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in B_n : \forall i \mid x_i \mid = 1$$

$$y=(y_1,\dots,y_n)\in S^{n-1} : \sum_{i=1}^n y_i^2=1$$

Гипотеза 1. *(Немировский, Бен-Таал, Рос.) Для любой точки $N \in S^{n-1}$ множество таких $X \in B^n$, что $(OX, ON) > 1$ имеет мощность, не превосходящую 2^{n-2}, т.е. четверти количества вершин куба.* Иначе говоря, количество вершин куба, отсеченных гиперплоскостью, касающейся вписанной сферы (т.е. лежащих строго по разные стороны с центром) не превосходит четверти общего количества вершин куба

Гипотеза выдвинута в 2001 году.

В дальнейшем, мы будем использовать без пояснений следующие обозначения:

1). n-мерный куб – множество точек, максимум модуля координат которых равен 1.
2). B^n – множество точек вида $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, т.е. вершин куба
3). $N(A)$ – количество вершин куба, отсекаемых гиперплоскостью, касающейся сферы в точке A.
4). N_0^n – количество вершин, отсекаемых плоскостью, касательной ко вписанной сфере в точке, лежащей на отрезке, соединяющем центр куба и вершину. То есть $N_0^n = N(\pm 1/\sqrt{n}, \ldots, \pm 1/\sqrt{n})$
5). Точка куба соответсвует точке сферы, если они лежат на одном луче, исходящем из начала координат.
6). $S_K^n(r)$ – сфера с центром в точке K и радиусом r. Нам понадобится единичная сфера $S_0^n(1)$ с центром в нуле.
7). $\gamma(X)$ – гиперплоскость, перпендикулярная вектору X.

2.Общие факты. Этот раздел содержит основные определения и некотрые несложные, но важные утверждения.

Лемма 1. *Существует $A \in S_0^{n-1}(1)$, такое что $N(A) = 2^{n-2}$, т.е. предполагаемая оценка неулучшаема.*
Доказательство
□ Достаточно рассмотреть гиперплоскость, касающуюся нашей сферы в точке $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \ldots, 0)$ Тогда отрезанными будут вершины вида $(1, 1, \pm1, \ldots, \pm1)$, а их как раз 2^{n-2} штук.■

Определение 1. *Отсекаемое множество для точки $N \in S^{n-1}$ - это множество таких $X \in B^n$, что* $(OX, ON) > 1$. Иначе говоря, это подмножество вершин куба, которые оказались с центром сферы по разные стороны от гиперплоскости, касающейся сферы в точке N.

Определение 2. *Область постоянства – множество точек сферы, отсекаемые множества которых совпадают.*

Замечание 1. *Каждая область постоянства является открытым множеством, а касательная гиперплоскость к любой точке на его границе проходит хотя бы через одну вершину куба.*
Это утверждение сразу следует из определений.

Определение 3. *Сферой влияния или шапочкой вершины X куба назовем подмножество точек сферы, для которых точка X лежит в отсекаемом множестве*
Все сферы влияния устроены очень просто и однообразно. Этому посвящена

Лемма 2. *Каждая сфера влияния является пересечением исходной сферы и полуплоскости. Границей сферы влияния является $(n-2)$-мерная сфера с радиусом $\frac{\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n)}}$*
Доказательство
□ Рассмотрим точку границы исследуемой области — сферы влияния. Тогда касательная гиперплоскость будет проходить через вершину куба. Рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через эту вершину куба, центр куба (и сферы) и точку касания гиперплоскости. См. Рис.1. Кроме того, вектор из центра куба в центр граничной сферы сонаправлен с вектором, идущим в вершину и имеет длину $1/\sqrt{n}$ ■

Замечание 2. $N(A)$ *– это количество шапочек, накрывающих A.*

Замечание 3. *Область постоянства - это пересечение сфер влияния отсеченных вершин и внутренностей дополнений до сфер влияний всех остальных вершин.*

Лемма 3. *(о взаимном расположении сфер влияния) Рассмотрим две вершины и их сферы влияния.*
Случай 1. *В случае, если различны все координаты, сферы влияния симметричны относительно центра сферы и общих точек не имеют*
Случай 2. *Сферы влияния касаются, тогда и только тогда, когда отвечают вершинам, у котроых $(n-1)$ координата различны.*
Доказательство
□
Случай 1: Сферы влияния симметричны относительно центра куба, параллельны и общих точек не имеют. Случай 2: Без ограничения общности можно считать, что две рассматриваемых вершины имеют вид: $B_1(1, 1, \ldots, 1)$ и $B_2(1, -1, \ldots, -1)$. Требуется доказать, что существует ровно одна точка X на сфере, для которой выполняются одновременно два неравенства:

$$(OX, OB_1) \geq 1$$

$$(OX, OB_2) \geq 1$$

Причем, оба неравенства в ней обращаются в равенства.
Итак, сложим наши неравенства и получим, что первая координата OX должна быть не меньше единицы. Следовательно, она равна единицы и оба неравнества обращаются в равенства. Кроме того, остальные координаты OX определены однозначно и все равны нулю. Лемма доказана.

Следующая лемма интуитивно очевидна, но мы приведем строгое доказательство. В ней говориться о том, что любую кривую можно немного пошевелить, чтобы она не проходила через точки, касательные гиперплоскости в которых проходят не менее чем через две вершины.

Лемма 4. *(лемма о хорошей кривой) Пусть есть две точки A и B на сфере. Тогда существует кривая AB, такая, что значение функции $N(A)$ вдоль кривой имеет скачки вдоль кривой не больше, чем на 1.*
Доказательство$\square$
1). Соединим наши точки кратчайшей кривой $\alpha(t), t \in [0,1], \alpha(0) = A, \alpha(1) = B$. Рассмотрим функцию $N'(t) = N(\alpha(t))$. В силу лемм 2 и 4, границу каждой сферы влияния эта кривая пересекает лишь конечное число раз. Это означает, что объединение границ сфер влияния пересекается с нашей кривой лишь в конечном числе точек. Следовательно, функция $N'(t)$ имеет лишь конечное число разрывов. На всех участках непрерывности она постоянна и неотрицательна.
2). $N'(t)$ принимает только натуральные значения или ноль и является кусочно-постоянной. Каждая точка разрыва функции соответсвует точке $N(\alpha(t))$ сферы, касательная гиперплоскость в которой проходит через вершину куба. Итак, пусть в $\alpha(t_0)$ имеется разрыв больше чем на 1. Следовательно, в этой точке пересекаются как минимум две границы сфер влияния. Рассмотрим маленькую окрестность точки $N'(t_0)$ на сфере. Она высекает на кривой α некоторый участок $[t_1, t_2]$. Окрестность выберем так, чтобы $N'(t)$ имела на $[t_1, t_2]$ единственный разрыв в точке t_0. Эта окрестность гомеоморфна $(n-1)$-мерному диску. Границы сфер влияния гомеоморфны $(n-2)$-мерным дискам, а их пересечение гомеоморфно $(n-1-k)$-мерному диску, где k – количество границ сфер влияния. Применим гомеоморфизм, который нашу окрестность переводит в диск $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1$ с центром в нуле, а пересечение границ сфер влияния в диск меньшей размерности, задаваемый уравнениями $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0, x_{k+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1$. Кривая α перешла в кривую α'. Пусть кривая пересекает границу диска в точках A' и B'. Окрестность была выбрана так, чтобы эти точки не лежали на образах сфер влияния. В частности, ни одна из этих точек не лежит на втором диске. Сейчас мы научимся соединять ломанной точку A' с точкой B' не проходя через маленький диск. Проведем отрезок из A' в A_1, которая совпадает с A' во всех ненулевых разрядах A' и не имеет своих ненулевых разрядов. Этот отрезок лежит внутри большего диска и не пересекает маленький диск. Точку B' аналогичным образом соединим с точкой B_1. Точку A_1 будем изменять по одной координате, постепенно превращая в B_1. $\blacksquare$

Определение 4. *Области постоянства называются соседними, если их границы имеют пересечение размерности $n-2$, то есть наибольшей возможной размерности.*

Замечание 4. *Касательная гиперплоскость в точках такого множества проходит ровно через одну вершину.*

Определение 5. *Область постоянства называется локально максимальной, если все соседние по участку границы максиальной размерности области имеют меньшее значение функции N.*

Лемма 5. *Проведем прямую из центра сферы в центр $(n-2)$-мерной грани куба. Она пересечёт сферу в точке A ($N(A) = 2^{n-2}$ — см. Лемму 1). Тогда область, в которой лежит точке A является локально максимальной.*

Доказательство

$\square$ Предположим, что это не так. Тогда перейдем в соседнюю область постоянства, где функция N имеет большее значение. В этой области отрезанными являются все вершины $(n-2)$-мерного куба и ещё какая-то вершина X. Это означает, что среди вершин $(n-2)$-мерного куба найдчтся вершина Y, отличающаяся от нашей как минимум в $n-1$ координате. Касательная гиперплоскость делит куб на две выпуклых фигуры, значит отрезок XY целиком лежит внутри отрезанной фигуры. Середина отрезка XY так же отрезана и имеет как минимум $n-1$ нулевую координату, значит это центр $(n-1)$-мерной грани или центр куба. Противоречие. $\blacksquare$

Лемма 6. *(О множестве значений.)*
Если в каких-то точках X и Y достигаются значения n и m, $n > m$,то для любого $n > k > m$ существует точка H, такая что $N(H) = k$
Доказательство

□ Из леммы о хорошей кривой следует, что существует кривая γ , на которой значение функции ■

Замечание 5. *Сфера влияния выпукла во внутренней метрике сферы.*

Лемма 7. *область постоянства выпукла тогда и только тогда, когда функция N достигает на этой области локального максимума*
Доказательство
□ Всякая область постоянства представляет собой пересечение некоторого числа сфер влияний и дополнений сфер влияния. Рассмотрим пресечение сфер влияния α, соотвествующих нашей области и пересечение дополнений сфер влияния, соответсвующих нащей области ω. Тогда наша область - это $\alpha \bigcap \omega$. α - пересечение нескольких сфер влияния, являющихся выпуклыми множествами. Значит и α - выпукло.

1).Пусть функция достигает локального максимума на области. Рассмотрим $X \in (\alpha \setminus \omega)$. Тогда касательная гиперплоскость к X Любая точка из этого множества Тогда $\alpha \in \omega$, то есть $\alpha \bigcap \omega = \alpha$.

2). Пусть область выпукла. Ее граница - это объединение конечного числа подмножеств сфер влияния и их дополнений. Но если есть хотя бы одно подмножество, являющеейся эдементом дополнения, то есть две точки, которые соединяются отрезком, лежащим вне нашей области.■

3.Графовый подход, решение задачи для размерности 4,5,6. Пусть $\gamma(X)$ не проходит ни через одну вершину куба и отсекает множество вершин E. Построим граф, вершинами которого будут являться вершины E, ребра между двумя вершинами будем проводить в том и только в том случае, когда соответсявющие вершины куба соединены ребром куба. Фактически, мы отрезали часть куба и сохранили только те ребра, которые оказались отсечены целиком.

Определение 6. *Назовём расстоянием между вершинами A и B в графе - это минимальное количество ребер в пути, соединяющем их. Будем обозначать его через $dist(A, B)$*

Замечание 6. *Эта функция $dist(A, B)$, задает метрику на множестве вершин графа.* Проверку аксиом предоставляем читателю.

Определение 7. *Диаметром графа G называется $max(dist(A, B))$, где $A, B \in G$*

Определение 8. *Будем говорить, что вершина $P(p_1, \ldots, p_n)$ меньше либо равна вершине $Q(q_1, \ldots, q_n)$, если $\forall i : p_i \leq q_i$*

Лемма 8. *Пусть гиперплоскость $\gamma(X)$ с единичным нормальным вектором X отрезала граф G. Пусть пространственные координаты вершин $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ отличаются в k разрядах ($A, B \in G$). Тогда в G существует путь из A в B, который имеет длину k.*

□ Без ограничения общности можно считать, что все координаты $X(x_1, \ldots, x_n)$ — положительны. Вершина $R(r_1, \ldots, r_n)$ лежит в графе G тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n}(r_i x_i) > 1$. Следовательно, если вершина лежит в G, то всякая вершина, больше либо равная ей тоже лежит в G. Рассмотрим вершину $M(max(a_1, b_1), \ldots, max(a_n, b_n))$. $A \leq M$ и $B \leq M$, так что M тоже отрезана. Рассмотрим путь из A в M, каждая следующая вершина которого больше предыдущей (см. Рис.2). Все вершины этого пути будут лежать в G. Рассмотрим аналогичный путь из B в M. Объединение этих путей будет состоять из k ребер и будет являться путем из A в B.■

Лемма 9. *Диаметр графа G, отрезанного гиперплоскостью $\gamma(X)$ не превосходит $(n-2)$*

□ Пусть нашлись две вершины M и N на расстоянии как минимум $(n-1)$. Из предыдущей леммы следует, что эти две вершины отличаются в $(n-1)$ разряде. Фигура, которую отрезает $\gamma(X)$ - выпукла, так как это пересечеине двух выпуклых фигур: полупространства и куба. Итак, весь отрезок MN отрезан. Середина отрезка MN отрезана и имеет по крайней мере $(n-1)$ нулевую координату. Значит это центр куба или центр $(n-1)$-мерной грани. Ни одна из этих точек отрезана быть не может, так как лежит на сфере или внутри нее. ■

Теорема 1. *В размерности* 4 *гипотеза верна. То есть касательная гиперплоскость ко вписанной в четырехмерный куб сфере отсекает не более 4 вершин.*

□ Степень каждой вершины отрезанного графа G не превосходит 4. Кроме того, в таком графе не должно быть треугольников, т.к. это подгаф куба. По той же причине у любой пары вершин не должно быть больше двух общих смежных вершин. Единственный связный граф, удовлетворяющий этим свойствам, содержащий как минимум 5 вершин и имеющий диаметр $n - 2 = 2$ состоит из одной вершины степени четрые и и смежных с ней вершин степени один. Получается, что отрезанный граф - это вершина и все ее соседи. Можно считать, что отрезана вершина $(1, 1, 1, 1)$ и четыре смежных с ней: A, B, C, D. Так как отрезанная фигура - выпукла, то M - центр масс точек A, B, C, D тоже отрезан. M имеет координаты $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Эта точка удалена от центра на расстояние 1 — то есть лежит на вписанной сфере, а не внутри отрезанной гиперсферы и отрезанной быть не может. ■

Перейдем к доказательству утверждения гипотезы в больших размерностях.
Без ограничения общности, можно считать, что все координаты точки сферы в которой проводится касательная гиперплоскость положительны.

Определение 9. *Будем называть двойкой вершину куба у которой две отрицательные компоненты. Аналогично, тройкой будем называть вершину с тремя отрицательными компонентами и т.д. Будем так же обозначать вершину с n отрицательными компонентами через "n".*

Лемма 10. *Если набор вершин отрезан, то любая точка его выпуклой оболочки отрезана. В частности, отрезан центр масс.*
□ Отрезанное множество является пересечением полупространства и куба, то есть двух выпуклых множеств. Следовательно, оно само выпукло. Выпуклая оболочка нескольких точек выпуклого множества содержится в нем. ■

Лемма 11. *Если в размерности n хотя бы одна вершина вида "1" не отрезана, то $N(A) \leq 2^{n-2}$*
□ Если, например, вершина $(-1, 1, \ldots, 1)$ не отрезана, то любая вершина у которой первая координата отрицательна тоже не может быть отрезанной. Из остальных вершин отрезано не более половины, так как две вершины с противоположными координатами не могут быть обе отрезаны.
■

Лемма 12. *Если в размерности $n > 4$ отрезана хотя бы одна вершина вида "$n-2$", то $N(A) \leq 2^{n-2}$*
□ Не ограничивая общности, будем считать, что это вершина $(-1, \ldots, -1, 1, 1)$. Точки $(1, \ldots, 1, -1, 1), (1, \ldots, 1, 1, -1)$ отрезаны. Тогда точка $((-1, \ldots, -1, 1, 1) + (-1, \ldots, -1, 1, 1) + (1, \ldots, 1, -1, 1) + (1, \ldots, 1, 1, -1))/4 = (0, \ldots, 0, 1/2, 1/2)$ отрезана. Но она лежит внутри сферы. ■

Лемма 13. *Если в размерности n отрезано хотя бы две вершины вида "$n-3$", то $N(A) \leq 2^{n-3}$*
□ Пойдём отпротивного. Пусть отрезаны такие вершины B', B''
1. Если множества отрицательных координат этих вершин дают в объединении все множество координат, то середина отрезка $B'B''$ имеет все непложительные координаты и не может быть отрезана гиперплоскостью, касающейся сферы в точке, все координаты которой неотрицательны. Противоречие.
2. Если множества отрицательных координаты дают в объединении все множество координат, кроме одной, то отрезана точка $((-1, -1, -1, \ldots, -1, 1, 1, 1) + (-1, -1, -1, \ldots, -1, 1, 1, 1) + (1, 1, -1, \ldots, -1, -1, 1) + (1, \ldots, 1, -1))/4 = (0, 0, -1/2, \ldots, -1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ отрезана. Значит точка $(0, \ldots, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ тоже отрезана. Но она лежит внутри сферы. Противоречие.
3. Если множества отрицательных координат дают в объединении все множество коодинат, кроме двух, то отрезана точка $((-1, \ldots, -1, 1, 1, 1) + (-1, \ldots, -1, 1, -1, 1, 1) + (1, \ldots, 1, -1, 1) + (1, \ldots, 1, 1, -1)) = (0, \ldots, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Но эта точка, как уже отмечалось, отрезана быть не может. Противоречие. ■

Теорема 2. *В размерности 6 гипотеза верна, то есть $N(A) \leq 16$*
□
Будем проводить доказательство от противного. Предположим, удалось отрезать по крайней мере 17 вершин.
1. Отрезанных четверок нет. В силу леммы 11.
2. Отрезанных троек не более одной. В силу леммы 12
3. Отрезанных троек нет.
Действительно, без ограничения общности, можно считать, что отрезанная тройка — это вершина $B_3(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$.
3.1. Если есть двойка, не пересекающаяся по отрицательным координатам с B_3, например $(1, 1, 1, -1, -1, 1)$, тогда точка $((-1, -1, -1, 1, 1, 1) + (-1, -1, -1, 1, 1, 1) + (1, 1, 1, -1, -1, 1)(1, 1, 1, 1, 1, -1))/4 = (0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ тоже отрезана. Но эта точка лежит внутри сферы. Противоречие.
3.2. Согласно предположению, всего отрезано, как минимум, 17 вершин. Из них двоек не меньше, чем $17 - 1 - 6 - 1 = 9$. Из этих двоек только три имеют обе отрицательные координаты на тех позициях, на которых у B_3 отрицательные координаты. Значит, по меньшей мере, шесть имеют отличные от первых трех отрицательные координаты. Эти вершины и будут нас интересовать. Рассмотрим граф, вершинами которого являются будем считать координатные оси, а ребра будем проводить в том случае, если из интересующих нас шести вершин есть такая, у которой по этой паре координатных осей отрицательная

координата. Получится двудольный граф на 6 вершиных с равными долями. В нем 6 ребер. Очевидно, среди них найдутся два ребра не имеющих общего конца. Рассмотрим соответсвующие этим ребрам вершины куба. Можно считать, что их координаты $(-1,1,1,-1,1,1),(1,-1,1,1,-1,1)$. Тогда точка $((-1,-1,-1,1,1,1)+(-1,1,1,-1,1,1)+(1,-1,1,1,-1,1)+(1,1,1,1,1,-1))/4=(0,0,1/2,1/2,1/2,1/2)$ тоже отрезана. Но она лежит на сфере. Противоречие. Таким образом, доказано, что троек нет.
4. По предположению, число отрезанных вершин не меньше 17. По доказанному, все эти вершины имеют не более двух отрицательных координат. Значит среди них, как минимум, $17-1-6=10$ двоек. Построим граф, вершинами которого являются координатные оси, ребро будем проводить в том случае, если отрезана вершина, у которой все заданные координаты отрицательны. Получится граф с шестью вершинами и десятью ребрами. Теперь докажем лемму:

Лемма 14. *В любом графе с шестью вершинами и десятью ребрами вершины выполнено одно из двух условий:*
1). Можно разбить на три пары, каждая из которых соединена ребром.
2). Имеется две связных компоненты, одна из которых состоит из единственной вершины, а вторая образует полный граф на пяти вершинах.
□
Обозначим вершины нашего графа A,B,C,D,E,F.
Случай 1: Есть вершина стпени ноль. Тогда на остальных пяти вершинах не более десяти ребер. Следовательно, их ровно десять. Получается конфигурация из второго пункта теоремы.
Случай 2: Есть вершина степени пять. Будем считать, что это вершина A. На остальных вершинах пять ребер. Будем искать из этих рёбер пару, не имеющую общих вершин. Если мы её найдем, то такая пара вместе с оставшимимся двумя вершинами образует нужный набор (так как среди оставших двух верши одна вершина A, смежная со всеми вершинами).
Итак, осталось доказать, что в графе с пятью вершинами и пяттью рёбрами есть два ребра, не имеющие общих вершин. Граф у которго количества рёбер и вершин совпадают имеет цикл. Предположим, что три из пяти рёбер образуют цикл (треугольник). Тогда любое другое ребро имеет с треугольником не более одной общей вершины и образет требуемую пару вместе с одной из сторон треугольника. Если же треугольника нет, то есть цикл длины четрые или пять. В каждом из жтих циклов явно указывается требуемая пара.
Случай 2 разобран. Случай 3: Степень каждой вершины не меньше однго и не больше четырех. Рассмотрим вершину наименьшей степени. Сумму степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер, то есть двадцати. По приниципу Дирихле, найдется вершина, степени не больше трёх. Пусть, это вершина A, смежная с вершиной B. Тогда граф, образованный вершинами B,C,D,E,F имеет не менее $10-3=7$ рёбер. Степень B не максимальна, поэтому B не смежна с какой-то из вершин C,D,E,F и у этого четырыехвершинного графа по меньшей мере $7-3=4$ ребра. Это означает, что в какой-то из трех пар ребер EF и CD, AE и FD, ED и FC присутствуют оба ребра. Эти два ребра вместе с ребром AB образуют требуемую тройку ребер. ■
Если ребер в шестивершинном графе девять, то аналогичное утверждение уже неверно.
Итак, в силу леммы 13, мы имеем три отрезанных двойки, множества отрицательных координат которых попарно не пересекаются, либо пять координат, каждая двойка из которых отрезана. Разберем сначала первый случай. Без ограничения общности, можно считать, что это вершины $(-1,-1,1,1,1,1),(1,1,-1,-1,1,1),(1,1,1,1,-1,-1)$.
Тогда точка $(2(-1,-1,1,1,1,1)+(1,1,-1,-1,1,1)+(1,1,1,1,-1,-1))/4=(0,0,1/2,1/2,1/2,1/2)$ тоже отрезана. Но эта точка лежит на сфере. Противоречие.
Осталось разобраться со случаем, когда есть пять координат и любая пара из них образует двойку. Рассмотрим центр масс этих десяти двоек. Он имеет координаты $((-1,-1,1,1,1,1)+\cdots+(1,1,1,-1,-1,1))/10=(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5,1)$. В то же время вершина $(1,1,1,1,1,-1)$ является отрезнной, так как все вершины с одной отрицательной координатой отрезаны. Получается, что любая точка с координатами $\alpha(1,1,1,1,1,-1)+(1-\alpha)(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5,1)$ так же отрезана. Возьмем $\alpha=1/6$ и получим точку $(1/3,1/3,1/3,1/3,1/3,2/3)$, которая лежит на сфере (т.к. $5\cdot(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2=1$.) и, следовательно, не может быть отрезана. Противоречие. Теорема полностью доказана. ■