Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Курсовая работа

Частные случаи гипотезы $P(|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}$ для независимых бернуллиевских случайных величин a_i и вектора $\|x\| = 1$.

Выполнил студент 405 группы
Шнурников И.Н.
под рук. академика РАН
Фоменко А.Т.
14 апреля 2008

Обзор работы:

В статье 2001 года А.Бен-Таал, А.Немировский и К.Рос доказали, что для всякого вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ единичной длины $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ и всяких независимых в совокупности случайных бернуллиевских величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ (т.е. $P(a_i = 1) = P(a_i = -1) = \frac{1}{2}$) верно неравенство

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{и выдвинули гипотезу} \quad P(|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}.$$

В настоящей работе доказаны:

Теорема 1 — гипотеза для $n = 4, 5, 6$.

Теорема 2 — гипотеза для $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ для любого $n \geqslant 3$.

Приведена геометрическая интерпретация гипотезы и теорем.

К сожалению, метод линейных и квадратичных оценок в Т.1 и аналог центральной предельной теоремы в Т.2 дальнейших продвижений в гипотезе не дают.

Формулировки и доказательства:

Теорема 1. Пусть $n = 4, 5$ или 6. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — независимые в совокупности случайные величины с распределением $P(a_i = 1) = P(a_i = -1) = \frac{1}{2}$, где $i = 1, 2, \dots n$. Тогда для всяких чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ со свойством $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ верно неравенство

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}.$$

□ При $n = 4, 5$ добавим фиктивные числа $x_5 = x_6 = 0, x_6 = 0$ и сведем Т.1 к случаю $n = 6$. Заменим случайные величины на всевозможные наборы из 6 чисел $+1$ или -1 каждое. Сформулируем, к чему свелась Т.1:

Утверждение 1. Для всяких 6 чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ со свойством $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2 = 1$ количество $N(x)$ наборов 6 чисел $a_1, \dots, a_6$, каждое из которых $+1$ или -1, не превосходит 16.

Доказательство утверждения 1 состоит в фиксировании и упорядочивании чисел $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5 \geqslant x_6$, и в последовательном рассмотрении трех случаев:

Случай а). Верно $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 1$, тогда для всякого набора $a_1, \dots, a_6$, что $\sum_{i=1}^{6} a_i x_i > 1$ верно $a_1 = 1$ и $x_1 + \sum_{i=2}^{6}(-a_i)x_i < 1$, т.к. $2 \geqslant 2x_1 = \left(\sum_{i=1}^{6} a_i x_i\right) + \left(x_1 + \sum_{i=2}^{6}(-a_i)x_i\right)$. Поэтому число $N(x)$ не превосходит половины от количества всевозможных наборов из 5 чисел $+1$ или -1 каждое, т.е. $N(x) \leqslant 16$.

Теперь, исходя из $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1$, получим следующие неравенства.

По неравенству Коши-Буняковского для чисел x_1, x_2, x_3, x_4 : $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4}} \leqslant \frac{1}{2}$, поэтому $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 2$ и $x_2 + x_4 \leqslant 1$. Предположив $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \geqslant 1$ и сложив с $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1$, получим противоречие с $x_2 + x_4 \leqslant 1$, откуда получаем, что $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 < 1$ и что существует не более одного набора $a_1, \dots, a_6$, состоящего из не менее чем трех -1, такого что $\sum_{i=1}^{6} a_i x_i > 1$. Отметим, что таких наборов a_i с не более, чем одной -1, ровно 7, и для оценки $N(x)$ осталось рассмотреть наборы с двумя -1.

Случай б). Верно $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 > 1$ и $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6 \leqslant 1$. Предположив дополнительно $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6 > 1$ и огрубив предположенное до $x_1+x_6 > 1$, перемножим два неравенства, $x_6 > 1 - x_1$ и $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1 + x_1$:

$$1 - x_1^2 = x_2^2 + \dots + x_6^2 \geqslant x_6(x_2 + \dots + x_6) > 1 - x_1^2.$$

Противоречие привело к совокупности $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6 \leqslant 1$ и $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6 \leqslant 1$, откуда искомых наборов a_i с двумя -1 не более 8, и тогда $N(x) \leqslant 7 + 8 + 1 = 16$.

Случай в). Верно $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 > 1$ и $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6 > 1$. Предположив $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \geqslant 1$ и сложив с $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1$, получим противоречие с $x_2 + x_4 \leqslant 1$. Поэтому искомых наборов a_i с двумя -1 не более 6, и тогда $N(x) \leqslant 7 + 6 + 1 = 14$ ■

Теорема 2. Пусть $n \geqslant 3$ натуральное число и $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ независимые в совокупности случайные величины с распределением $P(a_i = 1) = P(a_i = -1) = \frac{1}{2}$, где $i = 1, 2, \dots n$. Тогда верно неравенство

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}.$$

□ Заменим случайные величины на всевозможные наборы a_i из n чисел $+1$ или -1 каждое. Если в наборе a_i ровно k чисел -1 и $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sqrt{n}$, то $(n-k)-k > \sqrt{n}$, т.е. $k < \frac{n-\sqrt{n}}{2}$. Количество наборов a_i с ровно k числами -1 равно C_n^k, поэтому

$$2^n \cdot P(\sum_{i=1}^{n} a_i > \sqrt{n}) = \sum_{0 \leqslant i < \frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i.$$

Сформулируем, к чему свелась Т.2:

Утверждение 2. Для всех натуральных $n \geqslant 3$ верно неравенство:

$$\sum_{0 \leqslant i < \frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i < 2^{n-2}$$

План доказательства утверждения 2: Для $3 \leqslant n \leqslant 15$ вычислим обе части неравенства явно. Для $n \geqslant 16$ перепишем неравенство через сумму "центральных" C_n^k, оценим последние по формуле Стирлинга, а их сумму через $\int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Шаг 1. Составим таблицу из обеих частей неравенства и количества участвующих в суммировании C_n^i для $3 \leqslant n \leqslant 15$:

$$\begin{pmatrix} n & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \lceil\frac{n-\sqrt{n}}{2}\rceil & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ \sum C_n^i & 1 & 1 & 6 & 7 & 29 & 37 & 46 & 176 & 232 & 794 & 1093 & 3473 & 4944 \\ 2^{n-2} & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 & 2048 & 4096 & 8192 \end{pmatrix}$$

Для $n \geqslant 16$ пользуясь $C_n^i = C_n^{n-i}$ и $n - \lceil\frac{n-\sqrt{n}}{2}\rceil = \lfloor\frac{n+\sqrt{n}}{2}\rfloor$, перепишем требуемое неравенство:

$$\sum_{i=\lceil\frac{n-\sqrt{n}}{2}\rceil}^{\lfloor\frac{n+\sqrt{n}}{2}\rfloor} C_n^i > 2^{n-1}$$

Шаг 2. Оценим C_n^i, используя формулу Стирлинга $n! = (\frac{n}{e})^n \cdot (\sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}})$, где $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, и функцию энтропии $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \left(\frac{n^n}{i^i \cdot (n-i)^{(n-i)}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi i 2\pi(n-i)}} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n} - \frac{\theta_i}{12i} - \frac{\theta_{n-i}}{12(n-i)}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(2^{nH\left(\frac{i}{n}\right)}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{4i(n-i)}} \cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{4i(n-i)}\right)}\right).$$

Введем величину $t = \frac{i}{n} - \frac{1}{2}$, выразим через нее

$$\frac{4i(n-i)}{n} = \frac{4\left(\frac{n}{2}+nt\right)\left(\frac{n}{2}-nt\right)}{n} = n(1-4t^2) \qquad \text{и оценку} \quad C_n^i \geqslant 2^{nH\left(t+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{3n(1-4t^2)}}}{\sqrt{n(1-4t^2)}}.$$

Определим функцию $$f(t) := 2^{nH\left(t+\frac{1}{2}\right)-n} \cdot \frac{e^{2nt^2 - \frac{1}{3n(1-4t^2)}}}{\sqrt{1-4t^2}}$$ на отрезке $|t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$,

отрезок получился из $|i - \frac{n}{2}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$. Преобразуем

$$2^{nH\left(t+\frac{1}{2}\right)-n} = 2^{n\left(-\left(\frac{1}{2}+t\right)log_2(1+2t) - \left(\frac{1}{2}-t\right)log_2(1-2t)\right)} = e^{-\frac{n}{2}ln(1-4t^2) - ntln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right)},$$ для определения функции

$$h(t) := ln(f(t)) = 2nt^2 - \frac{1}{3n(1-4t^2)} - ntln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right) - \frac{n+1}{2}ln(1-4t^2), \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Функция $h(t)$ четная и $h(0) = -\frac{1}{3n}$, покажем $h'(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$, сгруппировав слагаемые и разложив вторую группу в ряд по степеням $2t$:

$$h'(t) = \left(\frac{2t}{1-4t^2} - \frac{8t}{3n(1-4t^2)^2}\right) + \left(\frac{2t}{1-4t^2} + 4nt - nln(\frac{1+2t}{1-2t})\right) =$$

$$\left(\frac{2t}{1-4t^2}(1 - \frac{4}{3n(1-4t^2)})\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^{2k+1} - 2n\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2t)^{2l+1}}{2l+1}\right) \geqslant \left(\frac{2t}{1-4t^2}\frac{41}{45}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^{2k+1}\left(1 - \frac{2n(2t)^2}{2k+3}\right)\right) \geqslant 0,$$

так как $n \geqslant 16$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{8}$ и $n(2t)^2 \leqslant 1$. Из четности $h(t)$ и неотрицательности $h'(t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$ получим $h(t) \geqslant h(0) = -\frac{1}{3n}$ и $f(t) \geqslant f(0) = e^{-\frac{1}{3n}}$ для $|t| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$, откуда следует

$$C_n^i \geqslant 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}e^{-2nt^2 - \frac{1}{3n}}, \quad \text{при} \quad n|t| = |i - \frac{n}{2}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Шаг 3. Из $(e^{-\frac{x^2}{2}})'' = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ получим выпуклость вверх функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $|x| < 1$. Для любого отрезка $[a,b]$, где $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$, верно $\int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant (b-a)e^{-\frac{(a+b)^2}{8}}$, поскольку криволинейная трапеция $\left((x,y)|a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ в силу выпуклости содержится в трапеции, отсекаемой касательной к графику $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ в точке $\left(\frac{a+b}{2}, e^{-\frac{(a+b)^2}{8}}\right)$ от полуполосы $(a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y)$. Аналогично получим для $-1 \leqslant a < \frac{a+b}{2} < 1 < b$ неравенство $\int_a^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant (b-a)e^{-\frac{(a+b)^2}{8}}$. Обозначим множество целых чисел отрезка $[\lceil\frac{n-\sqrt{n}}{2}\rceil, \lfloor\frac{n+\sqrt{n}}{2}\rfloor]$ за I_n и для каждого $i \in I_n$ обозначим число $2\sqrt{n}(\frac{i}{n} - \frac{1}{2})$ за x_i, тогда по шагу 2 получим:

$$\sum_{i \in I_n} C_n^i \geqslant 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}e^{-\frac{1}{3n}}\sum_{i \in I_n} e^{-\frac{x_i^2}{2}}.$$

Оценивая $e^{-\frac{x_i^2}{2}}$ снизу через $\frac{\sqrt{n}}{2}\int\limits_{max(x_i - \frac{1}{\sqrt{n}}, -1)}^{min(x_i + \frac{1}{\sqrt{n}}, 1)} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, замечая $max_{i \in I_n}x_i > 1 - \frac{2}{\sqrt{n}}, min_{i \in I_n}x_i < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$:

$$\sum_{i \in I_n} C_n^i \geqslant 2^n\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{1}{3n}}\int\limits_{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Шаг 4. Используя $e^{-x} \geqslant 1 - x$ при $0 \geqslant x \geqslant 1$, $\pi < \frac{22}{7}$ и $n \geqslant 16$ получим: $e^{-\frac{1}{3n}} \geqslant 1 - \frac{1}{3n} \geqslant \frac{44}{45}$ и

$$\int\limits_{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \geqslant \int\limits_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} 1 - \frac{x^2}{2}dx = \frac{87}{64}$$

и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{11}}$, поэтому $\sum_{i \in I_n} C_n^i > 2^{n-1}\sqrt{\frac{77}{81}}\frac{87}{80} > 2^{n-1}$ ■

Замечание 1. При $n \to \infty$ верно

$$2^{-n}\sum_{0 \leqslant i < \frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \approx 0.158 < 0.25$$

Замечание 2. В книге А.Н. Ширяева "Вероятность" том 1, пар. 11 задача 2: Пусть a_k независимые одинаково распределенные случайные величины с $Ea_k = 0, Da_k = \sigma^2, E|a_k|^3 < \infty$. Тогда

$$\left| P(\frac{a_1 + \dots + a_n}{\sigma\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leqslant \frac{cE|a_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}(1+|x|)^3}$$

Что доказывает теорему 2 при условии малой константы c.

Переформулировка гипотезы:

Определение. Дан n-мерный куб с координатами вершин $(\pm1, \pm1, \dots, \pm1) \in \mathbb{R}^n$ и вписанная в него единичная сфера $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Будем писать, что касательная к сфере гиперплоскость α *отсекает* вершину A куба, если точка A и центр сферы находятся строго по разные стороны от гиперплоскости α.

Пример. Гиперплоскость $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$, касающаяся сферы в точке $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots, 0)$, отсекает 2^{n-2} вершины, в точности те, у которых первые две координаты равны 1.

Утверждение 1(Фольклор). Дана точка $x = (x_1, \dots, x_n)$ на единичной сфере $\|x\| = 1$. Пусть a_i независимые случайные величины с распределением $P(a_i = 1) = P(a_i = -1) = \frac{1}{2}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $P(|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}$ эквивалентно утверждению, что касательная гиперплоскость в точке x вписанной сферы отсекает не более чем 2^{n-2} вершин n-мерного куба.

□ Условие отсечения имеет вид $\sum_{i=1}^n a_i x_i > 1$, где a_i — координаты отсекаемой вершины. Из симметрии множества вершин куба относительно замены знака всех координат вершины, получим

$$P(|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leqslant 1) = 1 - 2P(\sum_{i=1}^n a_i x_i > 1).$$

Отсечение не более чем 2^{n-2} вершин n-мерного куба равносильно $2P(\sum_{i=1}^n a_i x_i > 1) \leqslant \frac{1}{2}$ ■

Следствие 1(утверждения 1). Пусть a_i, где $i = 1, \dots, n$ независимые случайные величины с распределением $P(a_i = 1) = P(a_i = -1) = \frac{1}{2}$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда условие $P(|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leqslant 1) \geqslant \frac{1}{2}$ для любого вектора x такого, что $\|x\| = 1$, эквивалентно утверждению, что любая касательная гиперплоскость к вписанной сфере отсекает не более чем 2^{n-2} вершин n-мерного куба.

Следствие 2(теорем 1,2).

а) Любая касательная гиперплоскость к вписанной в 6-мерный куб сфере отсекает не более 16 его вершин.

б) Гиперплоскость $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sqrt{n}$, касающаяся сферы в точке $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$, отсекает не более, чем 2^{n-2} вершин куба.

Утверждение 2(Дильман Глеб). Гиперплоскость $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sqrt{n}$, касающаяся вписанной в куб единичной сферы в точке $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$, отсекает ровно $\sum_{i<\frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i$ вершин куба.

□ Пусть координаты отсекаемой вершины куба состоят из k единиц и $n-k$ минус единиц, тогда $k - (n-k) > \sqrt{n}$, то есть $n - k < \frac{n-\sqrt{n}}{2}$. Осталось заметить, что существует C_n^{n-k} вершин куба с ровно $n-k$ отрицательными координатами. ■

Таким образом, гипотеза и теоремы 1 и 2 имеют геометрическую интерпретацию.

Литература.

1) А.Н. Ширяев «Вероятность»

2) Журавлев Ю.И. «Об отделимости подмножеств вершин n-мерного куба.» Труды МИАН СССР (51) М.1958 с 143-157

3) A. Ben-Tal, A. Nemirovski, C. Ros, 11.06.2001. «»