Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

Дипломная работа
студента пятого курса
кафедры Дифференциальной Геометрии и Приложений

Кузина Петра

Группы симметрий фокусных особенностей, критерий свободности действия конечных групп Галуа на фокусных особенностях

Научный руководитель: Профессор Болсинов А.В.

Москва, 2008

1 Введение

Пусть (M^{2n}, ω) – симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой $\mathrm{sgrad}\, H$, и $f_1, \dots f_n$ – ее независимые инволютивные интегралы. Этой системе соответствует слоение Лиувилля M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня $f_1, \dots f_n$. Мы будем предполагать, что все слои слоения Лиувилля компактны.

Определение 1.1. Гладкое отображение $F : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$, где $F(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$ называется отображением момента.

Определение 1.2. Точка $x \in M$ называется особой точкой отображения момента F если ранг $dF(x)$ меньше n.

Пусть K – совокупность всех особых точек отображения момента в M.

Определение 1.3. Бифуркационной диаграммой называется образ K при отображении момента, т.е. множество $\Sigma = F(K) \subset \mathbb{R}^n$.

Слой лиувиллева слоения называется неособым, если на нем нет ни одной особой точки отображения момента. Окрестность неособого слоя симплектоморфна прямому произведению тора на диск. В окрестности неособого слоя все слоения Лиувилля устроены одинаково. Поэтому структура слоения Лиувилля в основном определяется его особенностями.

Дадим определение невырожденной особой точки: Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему $\mathrm{sgrad}\, H$ на симплектическом многообразии M^{2n}, и особую точку x ранга i. Рассмотрим пространство, линейно порожденное функциями $f_1, \dots, f_n$, как комутативную алгебру Ли. И рассмотрим в ней стационарную подалгебру K_x состоящую из f таких, что $df(x) = 0$. Пусть L - касательное подпространство к орбите в точке x, т.е. подпространство, порожденное векторами $\mathrm{sgrad}\, f_1, \dots, \mathrm{sgrad}\, f_n$, а L' – его косоортогональное дополнение.

Определение 1.4. Особая точка x ранга i называется невырожденной, если:

1. Для любой $f \in K_x$, отличной от нуля, квадратичная форма $d^2 f(x)$ не равна тождественно нулю на L'
2. существует f из K_x такая, что $P(\mu) = det(d^2 f(x) - \mu\Omega)|_{L'}$ имеет $2(n-i)$ различных ненулевых корней

Теорема 1.1 (Eliasson, [2]). *Пусть дана интегрируемая система с n степенями свободы, на симплектическом многообразии M^{2n}. Тогда всякое слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга i локально симплектоморфно некоторому модельному слоению L_{can} симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ определяемому числами (m_1, m_2, m_3) и функциями:*

$F_j = p_j^2 + q_j^2$, при $j = 1, \dots, m_1$, – эллиптический тип
$F_k = p_k q_k$, при $k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$, – гиперболический тип
$F_l = p_l q_{l+1} - p_{l+1} q_l$, $F_{l+1} = p_l q_l + p_{l+1} q_{l+1}$, – тип фокус-фокус
при $i = m_1 + m_2 + 1,\ m_1 + m_2 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 2m_3 - 1$,
$F_s = p_s$, при $s = m_1 + m_2 + 2m_3, \dots, n$. – регулярный множитель без особенности

Определение 1.5. Тройка чисел (m_1, m_2, m_3) называется типом особой точки.

Таким образом, всякая невырожденная особенность локально распадается в прямое произведение простейших особенностей - эллиптической, гиперболической и типа фокус-фокус, а так же диска без особенности.
Ответ на вопрос, как устроена окрестность особого слоя был дан, но для более узкого класса особенностей - особенностей удовлетворяющих условию нерасщепляемости.

Определение 1.6. Невырожденная особенность слоения Лиувилля удовлетворяет условию нерасщепляемости, если ее бифуркационная диаграмма приводится некоторым диффеоморфизмом к бифуркационной диаграмме модельного слоения Лиувилля, соответствующего типа (m_1, m_2, m_3) и ранга i.

Опишем теперь способ конструирования многомерных особенностей слоения Лиувилля. Рассмотрим прямое произведение нескольких простейших особенностей эллиптического, гиперболического типа и типа фокус-фокус. Домножим его на "тривиальный сомножитель" $T^i \times D^i$. На произведении определена симплектическая структура как сумма симплектических структур на каждом сомножителе. Слоями Лиувилля являются прямые произведения слоев элементарных слоений на сомножителях. Функции естественным образом продолжаются с прямых сомножителей до полного набора коммутирующих функций на прямом произведении. Полученная особенность $U^{2n} = V_1 \times \dots \times V_k$ называется особенностью типа прямого произведения. Предположим теперь, что на ней действует конечная группа G, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Действие свободное.
2. Действие покомпонетное, т.е. группа G переводит в себя каждый из прямых сомножителей V_i. Иначе говоря, если g – элемент G, а ϕ – действие на $U^{2n} = V_1 \times \dots \times V_k$, то $\phi(g)(x_1, \dots, x_k) = (\phi_1(g)x_1, \dots, \phi_k(g)x_k)$.
3. На каждом прямом сомножителе действие симплектическое и тождественное на базе слоения Лиувилля.
4. На каждом эллиптическом сомножителе действие тривиально.

Факторпространство $V_1 \times \dots \times V_k / G$, будет симплектическим многообразием, поскольку действие G – свободное. На U^{2n}/G переносится структура слоения Лиувилля с одним особым слоем.

Определение 1.7. Особенности вида U^{2n}/G называются особенностями типа почти прямого произведения.

Группы G называются группами Галуа.

Теорема 1.2 (Nguyen Tien Zung, [5])**.** *Любая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости, послойно диффеоморфна особенности типа почти прямого произведения в окрестности особого слоя.*

2 Структура особенности типа фокус-фокус

Определение 2.1. Невырожденная особая точка x ранга 0 отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы называется особой точкой типа фокус-фокус, если в окрестности x существуют локальные координаты (p_1, q_1, p_2, q_2) такие, что гамильтониан H и f могут быть представлены в виде:

$$H = H(f_1, f_2),$$
$$f = f(f_1, f_2),$$

где $f_1 = p_1q_1 + p_2q_2$, $f_2 = p_2q_1 - p_1q_2$.

Замена $(H, f) \to (f_1, f_2)$ является регулярной и слоение задаваемое H и f совпадает со слоением задаваемым f_1 и f_2.

Рассмотрим особый слой L лиувиллева слоения, содержащий n особых точек типа фокус-фокус. Обозначим эти точки через $x_1, \ldots, x_n$. Перейдем к комплексным переменным в окрестности особой точки x_i:

$$z = q_1 + iq_2,$$
$$w = p_1 - ip_2.$$

Тогда $f_1 = \mathrm{Re}\,(zw)$ а $f_2 = \mathrm{Im}\,(zw)$. Особый слой устроен как пара трансверсально пересекающихся лагранжевых дисков, задаваемых уравнениями $z = 0$ и $w = 0$.
Отметим, что функция f_2 задает в окрестности особой точки гамильтоново S^1-действие. Это легко следует из явного вида векторного поля $\mathrm{sgrad}\, f_2$, которое в координатах w и z записывается так:

$$\dot{w} = iw,$$
$$\dot{z} = -iz.$$

Поэтому действие окружности задается простой формулой:

$$(z, w) \to (e^{-i\phi}z, e^{i\phi}w).$$

Изучим теперь структуру особого слоя в целом. На нем лежит n особых точек типа фокус-фокус. В окрестности каждой из них особый слой представляет собой трансверсальное пересечение двух дисков.

Лемма 2.1. *[1] Особый слой L гомеоморфен двумерному тору с n перетяжками, где n – число точек типа фокус-фокус лежащих на слое L.*

Мы будем рассматривать чисто фокусные особенности, то есть особенности вида $F_{m_1} \times \cdots \times F_{m_k}/G$, где все сомножители F_{m_i}, $i = 1 \dots k$ будут особенностями типа фокус-фокус. Возникает вопрос, какие группы G могут действовать в операции почти прямого произведения на чисто фокусных особенностях?

3 Группа симметрий фокусной особенности

Пусть F_n - особенность типа фокус-фокус сложности n. Рассмотрим ее симплектоморфизмы в себя, тождественные на базе слоения Лиувилля. Обозначим группу таких симплектоморфизмов как Sym. Вообще говоря эта группа будет различна для разных фокусных особенностей сложности n, т.к. в общем случае они гомеоморфны, но не симплектоморфны.

Теорема 3.1. *Наибольшая группа $Sym \cong \mathbb{Z}_n \times (\mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^2)/\{2\pi k f_2\})$.
В общем случае $Sym \cong \mathbb{Z}_q \times (\mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^2)/\{2\pi k f_2\})$, где q делит n.*

Доказательство. Рассмотрим в Sym подгруппу $\widetilde{Sym}$ оставляющую на месте особые точки. Очевидно, что любой элемент из $\widetilde{Sym}$ переводит в себя кольца - лагранжевы сферы из которых "склеен"особый слой с выкинутыми особыми точками. Каждый из таких колец является орбитой пуассонова действия.

Утверждение 3.1. *Пусть $g \in \widetilde{Sym}$, и $f(f_1, f_2)$. Рассмотрим сдвиг h на время $t = 1$ вдоль траекторий $\mathrm{sgrad}\, f$. Тогда $gh = hg$.*

Доказательство. По условию g сохраняет симплектическую структуру, а также сохраняет f_1 и f_2, следовательно g сохраняет f и $g(\mathrm{sgrad}\, f) = \mathrm{sgrad}\, f$. Значит g коммутирует с h. □

Рассмотрим образ неособой точки x на особом слое - $g(x)$. Выберем α и β гладко зависящие от слоя такие, что сдвиг h_1 на $t = 1$ вдоль $h = -\alpha(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_1 - \beta(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_2$ переводит $g(x)$ в x в окрестности особого слоя. Докажем, что $g = h_1^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку y лежащую на том же слое что и x, а в случае особого слоя лежащую на том же кольце. Выберем α' и β', такие, что сдвиг h_1' на $t = 1$ вдоль $h' = -\alpha'(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_1 - \beta'(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_2$ переводит x в y .
$h_1 g(x) = x$, по доказаному ранее h_1,h_1' и g коммутируют, поэтому имеем:
$h_1 g(y) = h_1 g h_1'(x) = h_1 h_1' g(x) = h_1' h_1 g(x) = h_1'(x) = y$. □

Отсюда следует, что g это сдвиг на $t = 1$ вдоль $f' = \alpha(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_1 + \beta(f_1, f_2)\mathrm{sgrad}\, f_2$.

В доказательстве Теоремы Дарбу [1] используется Лемма, гласящая, что, если в окрестности точки x существуют попарно комутирующие независимые функции p_1 и p_2, то их можно дополнить до канонической системы координат p_1, p_2, q_1', q_2' в которых форма ω принимает канонический вид $\omega = dp_1 \wedge dq_1' + dp_2 \wedge dq_2'$. Возьмем в качестве p_1 функцию f_1, а в качестве $p_2 - f_2$. Рассмотрим проходящее через x лагранжево сечение $q_1' = 0, q_2' = 0$, назовем его L, $g(L) = L'$. Так как g - симплектоморфизм, то $\omega|_{L'=0}$. Теперь выберем другие координаты: (f_1, f_2, q_1, q_2), q_1 и q_2 - естественные параметры на траекториях $\operatorname{sgrad} f_1$ и $\operatorname{sgrad} f_2$, с условием, что в этих координатах $x = (f_1, f_2, 0, 0)$.

Утверждение 3.2. *Форма ω в этих координатах имеет канонический вид.*

Доказательство. f_i и f_j коммутируют, значит $\{f_i, f_j\} = 0$, $\{q_i, q_j\} = 0$ т.к. сечение $q_i = c_1, q_j = c_2$ получается из лагранжева сечения L сдвигами вдоль $\operatorname{sgrad} f_1$ и $\operatorname{sgrad} f_2$. $\{f_i, q_j\} = \{\operatorname{sgrad} f_i, q_j\} = \delta_i^j$ □

Пусть точка x имеет координаты $(f_1, f_2, 0, 0)$, тогда $g(x) = (f_1, f_2, \alpha, \beta)$. $\omega|_{L'=0}$, значит $0 = \omega|_{L'} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = df_1 \wedge (\alpha_{f_1} df_1 + \alpha_{f_2} df_2) + df_2 \wedge (\beta_{f_1} df_1 + \beta_{f_2} df_2) = (\alpha_{f_2} - \beta_{f_1}) df_1 \wedge df_2$ значит $\alpha_{f_2} = \beta_{f_1}$. В выбранных нами координатах $f' = \alpha(f_1, f_2)\operatorname{sgrad} f_1 + \beta(f_1, f_2)\operatorname{sgrad} f_2 = \Omega^{-1}(\alpha df_1 \wedge \beta df_2) = \Omega^{-1} df(f_1, f_2) = \operatorname{sgrad} f$.

Таким образом доказана

Лемма 3.1. *Группа $\widetilde{Sym}$ порождается сдвигами вдоль траекторий* $\operatorname{sgrad} f$*, где $f(f_1, f_2)$ - гладкая функция на M^2.*

Операция sgrad осуществляет гомоморфизм из $(\mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^2)$ в группу гамильтоновых полей $\mathcal{H}$, ядром гомоморфизма являются константы. В свою очередь из $\mathcal{H}$ в $(\widetilde{Sym})$ осуществляется гомоморфизм с ядром $2\pi k f_2$, $k \in \mathbb{Z}$. Т.к. все группы абелевы, то $\widetilde{Sym} \cong \mathrm{C}^\infty(\mathrm{D}^2)/2\pi k f_2 + C$. Вернемся к описанию группы Sym. Рассмотрим произвольный элемент $g \in Sym$ переставляющий особые точки. Очевидно, что порядок обхода особых должен сохраниться с точностью до знака. Пронумеруем особые точки по часовой стрелке от 1 до k. Как действует g на множестве особых точек? Рассмотрим любой интеграл системы, функционально независимый с f_2. Траектории его косого градиента задают некоторое направление обхода особых точек. Поскольку g симплектоморфно и тождественно на базе, оно сохраняет наш интеграл и траектории его косого градиента, а значит и направление обхода особых точек. Значит g на этом множестве действует поворотами, т.е. переводит особую точку i в точку $i+r$, r - фиксированно.

Выберем элемент g из Sym поворачивающий множество особых точек на минимальную ненулевую величину r. Этот элемент действует на множестве особых точек циклически, причем r делит число особых точек n. Докажем это:

Доказательство. Пусть r не делит k, поделим k на r с остатком: $n = rq+r_1$. Тогда g^{r+1} поворачивает множество особых точек на $r - r_1$ что меньше r - противоречие. $\square$

Элемент g^q оставляет на месте особые точки, следовательно он лежит в $\widetilde{Sym}$, а значит g^q это сдвиг вдоль $\operatorname{sgrad} f$. Домножим g^q на h^{-q} где h – сдвиг вдоль $1/q(\operatorname{sgrad} f)$: $h^{-q}g^q = (h^{-1}g)^q = id$. Элемент $h^{-1}g$ порождает группу $\mathbb{Z}_q$, действующую на F_k поворотами на r по ϕ. Так как $g = h(h^{-1}g)$, то любой элемент Sym представляется в виде композиции элементов из $\widetilde{Sym}$ и $\mathbb{Z}_q$. Все элементы $\mathbb{Z}_q$ коммутируют с элементами $\widetilde{Sym}$, $\mathbb{Z}_q \cap \widetilde{Sym} = id$. Значит $Sym = \mathbb{Z}_q \times \widetilde{Sym}$.

$\square$

Т.к. группа Sym абелева, то группа Sym_0 элементов конечного порядка имеет вид:

Теорема 3.2. *$Sym_0 \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Доказательство. В группе $\widetilde{Sym}$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ в группе сдвигов по траекториям $\operatorname{sgrad} f_2$. В группе сдвигов вдоль траекторий $\operatorname{sgrad} f_1$ не существует элементов конечного порядка. $\square$

4 Группы Галуа фокусных особенностей, критерий свободности действия

Рассмотрим прямое произведение фокусных особенностей $\mathcal{F} = F_{m_1} \times \cdots \times F_{m_k}$. Пусть теперь у нас есть многомерная чисто фокусная особенность. Она представима в виде прямого произведения $F_{m_1} \times \cdots \times F_{m_k}/G$. Действие G симплектическое, свободное и покомпонентное.

Утверждение 4.1. *G естественно вкладывается в $\widetilde{S}_0 = (\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Рассмотрим все возможные подгруппы в $\widetilde{S}_0$. При каких условиях подгруппа действует на прямом произведении фокусных особенностей свободно?

Утверждение 4.2. *G действует свободно тогда и только тогда, когда она не пересекается с подгруппой $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (k раз).*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть какой-то нетривиальный элемент $g \in G$ принадлежит $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (k раз). Возьмем на каждом сомножителе F_{m_i} особую точку x_i, $g(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k)$ значит действие не свободно.

$\Longleftarrow$ Значит хотя бы на одном сомножителе F_{m_i} действует нетривиальный элемент из $\mathbb{Z}_q$, который не оставляет неподвижных точек на этом сомножителе. $\square$

Имеется программа, проверяющая критерий свободности действия группы на G на $\mathcal{F}$. Механизм работы программы следующий: Рассматривается пересечение образующих G с группой $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$. Далее программа перебирает все линейные комбинации действия образующих, до тех пор, пока не найдет ненулевую линейную комбинацию образующих пересекающуюся с группой $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ по тривиальному элементу. Если такой ненулевой элемент был найден, то он автоматически лежит в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (k раз). Значит действие не свободно. Если такой элемент не был найден, то группа действует свободно.

Так как действие G на множестве особых точек свободно и замкнуто, то верно следующее:

Утверждение 4.3. *Пусть s - сложность особенности $\mathcal{F}/G$. Тогда*

$$|G| = \frac{m_1 \ldots m_k}{s}.$$

Список литературы

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегруируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация. Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика издательский дом "Удмуртский университет 1999

[2] Eliasson L.H., Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case, Comm. Math. Helv., 65(1990), 4-35

[3] Nguyen Tien Zung, A note on focus-focus singularities, Differential geomerty and applications, 7: 123-130, 1997

[4] Nguyen Tien Zung, Another note on focus-focus singularities, Lett. Math. Phys. 60(2002), no. 1, 87-99

[5] Nguyen Tien Zung, Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities, Compositio Mathematica, 101(1996), 179-215

[6] Williamson J., On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems, Amer. J. Math., 58:1(1936), 141-163