Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет,
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Сложность классов трехмерных многообразий и специальные спайны — аналоги примера Адамса.

Курсовая работа студента 3 курса
Шнурникова И. Н.
научный руководитель:
акад. А.Т. Фоменко

Москва
2007

Введение:

Классификации трехмерных многообразий пока нет, поэтому естественно сортировать многообразия по их сложности. Сложность 3-многообразия определяется как минимально возможное число вершин двумерного скелета (спайна) многообразия, окрестность любой точки которого гомеоморфна конусу над подграфом полного 4-вершинника, см. рис. 1. Окрестность вершины гомеоморфна конусу над 4-вершинником. При полезных свойствах сложности (сложность связной суммы есть сумма сложностей) точный подсчет и даже оценка снизу — трудные задачи. До сих пор из оценок сложности снизу известны работы С. В. Матвеева, Е. А. Первовой, C. Petronio, А. Ю. Веснина, А. Б. Скопенкова: через H_1 для замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий ([1], Если $M^3 \neq S^3, RP^3, L_{3,1}$, то $c(M) \geq 2log_5|Tor(H_1(M))| + rk(H_1(M)) - 1$); через $rk(\pi_1)$ для гомологических сфер ([2], т. 4b, число вершин ложной поверхности не менее $\frac{rk(\pi_1)}{8}$); через объемы для замкнутых ориентируемых гиперболических многообразий ([3], предл. 2.8, $vol(M) < c(M) \cdot v_3$, где $v_3 = 1.014\ldots$); есть оценки для конкретных серий — замкнутых ориентируемых гиперболических многообразий Лобелла и Фибоначчи ([3], $c(L_n) > 10n, c(M_n) > 2n, n \gg 1$). Для незамкнутых многообразий сложность найдена для двух серий: для накрытий над дополнением к узлу "восьмерке"или его "близнецу"[4, 5], и к многообразиям с границей из k торов и поверхности рода $g \geq 2$, допускающим идеальную триангуляцию из $g + k$ тетраэдров [6, 7]. В настоящей работе предложено усиление теоремы 4b из [2] до $rk(\pi_1) - 1$, с помощью доказанной леммы о графах предъявлена оценка сложности через границу для незамкнутых ориентируемых многообразий из некоторого класса, содержащего многообразия из [6], улучшена оценка количества гиперболических многообразий из [6] с 6^n до $(6\sqrt{2})^{n-5}$ (с помощью специального графа), по спайнам этих многообразий совместно с А. Т. Фоменко построена серия полиэдров, обобщающая пример Адамса — не многообразия, ретрагирующегося на свою границу.

Оценка сложности через ранг фундаментальной группы

Двумерный конечный полиэдр P называется *ложной поверхностью*, если для каждой точки из P существует ее окрестность в P, гомеоморфная конусу или над окружностью, или над окружностью с диаметром, или над окружностью с 3 радиусами, см. рис. 2. Точки третьего типа назовем вершинами полиэдра P. Точки второго и третьего типов назовем *особым графом* полиэдра P.

Минимальное число образующих фундаментальной группы полиэдра P назовем *рангом* $\pi_1(P)$ и обозначим за $rk(\pi_1(P))$.

Напомним результат А. Онищенко, D. Repovs, А. Скопенкова 2002 года:

Теорема ([2], 4b). Если P — ложная поверхность с n вершинами и $H_1(P,Z)=0$, то верно неравенство: $n \geq \frac{rk(\pi_1(P))}{8}$.

Пользуясь точно теми же рассуждениями, а именно фактом о ранге свободного произведения групп и теоремой Ван Кампена, усилим неравенство:

Теорема 1. Если P — ложная поверхность с n вершинами и $H_1(P,Z)=0$, то верно неравенство: $n \geq rk(\pi_1(P))-1$.

$\square$ В особом графе полиэдра P откинем компоненты связности, не содержащие точек третьего типа, и получим граф $G=\bigsqcup_{i=1}^{l} G_i$ из l компонент связности. Рассмотрим U — регулярную окрестность графа G в полиэдре P. Пусть $\partial U = Cl(U)\bigcap(P\setminus U)$ состоит из N окружностей. Приклеим к P набор $D=\bigsqcup_{i=1}^{N} D_i$ из N дисков границами к этим окружностям и получим полиэдр $\widetilde{P}$. Знаем, что $H_1(\widetilde{P},Z)=0$ и $H_1(D,Z)=0$, и из последовательности Майера-Виеториса для пространств $U\bigcup D$ и $(P\setminus U)\bigcup D$ получим $H_1((P\setminus U)\bigcup D,Z)=0$. Из работы $Lasheras$ [8] следует, что если ложная поверхность $R=(P\setminus U)\bigcup D$ не имеет точек третьего типа и $H_1(R,Z)=0$, то и $\pi_1(R)=0$. Теперь приклеим к P набор $I=\bigsqcup_{i=1}^{N-1} I_i$ из $N-1$ отрезка, соединяющих одну из N граничных окружностей с остальными, см. рис 3. Все образующие $\pi_1((P\setminus U)\bigcup I)$ выражаются через I и через N граничных окружностей ∂U.

Воспользуемся следствием из теоремы Грушко ([9], гл. 10, пар. 39): ранг свободного произведения конечно порожденных групп равен сумме рангов сомножителей. Получим $rk(\pi_1(P\bigcup I)) = rk(\pi_1(P)) + N - 1$. Применим теорему Ван Кампена для пространств $Cl(U)\bigcup I$ и $(P\setminus U)\bigcup I$, получим $rk(\pi_1(P\bigcup I)) \leq rk(\pi_1(U\bigcup I))$. Если граф G_i имеет n_i вершин, то $rk(\pi_1(G_i)) = n_i+1$, поэтому, применяя следствие из теоремы Грушко получим $rk(\pi_1(U\bigcup I)) = \sum_{i=1}^{l} n_i + 1 + (N-1)-(l-1) = n+N$. Итак $rk(\pi_1(P)) + N - 1 \leq n + N$. $\blacksquare$

Заметим, что для специальных спайнов (определение см. ниже) утверждение теоремы тривиально и без $H_1=0$.

Теорему 1 можно рассматривать как оценку сложности некоторого класса многообразий.

Оценка сложности через край многообразия

Ложная поверхность P называется *специальным спайном* незамкнутого многообразия M^3 если выполнено 2 условия:

а)P вложена в M^3 и $M^3 \setminus P$ гомеоморфно $\partial M^3 \times [0,1)$.

б) P без особого графа гомеоморфна несвязному объединению дисков и особый граф без своих вершин гомеоморфен несвязному объединению интервалов.

Теорема 2. Пусть край компактного ориентируемого незамкнутого многообразия M^3 состоит из N сфер с g_i ручками, то есть $\partial M^3 = \bigsqcup_{i=1}^N S^2_{g_i}$. Тогда число вершин n в специальном спайне M^3 (если оно не равно 1 или 2) оценивается снизу: $n \geq |\sum_{i=1}^N (1-g_i) - 1|$

Доказательство состоит из леммы и подсчета эйлеровой характеристики $\chi(M)$.

Лемма. Дан связный граф G с n вершинами степени 4 каждая (возможно с петлями и кратными ребрами). Рассматривается семейство циклов C на графе с свойством:

Каждое ребро графа принадлежит ровно трем циклам и эти три цикла при подходе к вершине переходят на три выходящие из нее ребра, то есть каждый цикл переходит на свое ребро, см. рис 4. Тогда

а) число циклов в любом семействе не превосходит $2n+1$ при $n \geq 3$ и не превосходит $2n+2$ при $n = 1, 2$.

б) Для графов с рис 5а есть семейство из $2n+1$ цикла при $n \geq 3$ и из $2n+2$ цикла при $n = 1, 2$.

$\square$ Рис 5б есть доказательство пункта б) леммы.

Докажем пункт а):

Рассмотрим остовное дерево графа G и его окрестность D в графе G, см. рис 6. Рассмотрим пересечение семейства циклов с графом D — это семейство I из $3n+3$ отрезка. Рассмотрим тройку циклов, имеющих общую висячую вершину остовного дерева. Хотя бы 2 из них содержат по крайней мере по 2 отрезка из семейства I. Пусть a — число циклов, содержащих ровно один отрезок из семейства I, тогда $a \leq n+1$. Оценим общее число циклов: $a + \frac{3n+3-a}{2} = \frac{3n+3+a}{2} \leq 2n+2$. Перебрав несколько вариантов (см. рис 7) получим, что при $n \geq 3$ число циклов не превосходит $2n+1$. $\blacksquare$

Теперь выведем теорему, найдя $\chi(M^3)$: Рассмотрим полные сферы с g_i ручками $S^3_{g_i}$. Так как сфера S^3 допускает разбиение Хегора любого рода, то $\chi(S^3_{g_i}) = \frac{\chi(S^2_{g_i})}{2} = 1-g_i$. Заклеим границу M^3 полными сферами, многообразие $M^3 \bigcup_{i=1}^N S^3_{g_i}$ замкнуто, поэтому $\chi(M^3) = \sum_{i=1}^N (1-g_i)$. Специальный спайн M^3 гомотопически эквивалентен M^3, а значит $\chi(M^3) = n - 2n + c$, где c — количество двумерных граней у спайна, оно же количество циклов и по лемме $1 \leq c \leq 2n+1$, поэтому $1 - n \leq \chi(M^3) \leq n+1$, откуда и следует теорема.

Число вершин в специальном спайне, вообще говоря, не совпадает со сложностью многообразия, но для некоторого класса многообразий, содержащего многообразия из [6], это верно, и для них оценка в Теореме 2 получается точной.

Оценка количества многообразий заданной сложности

Для оценки числа гиперболических многообразий сложности n оценим количество спайнов с заданным количеством вершин n:

Специальный спайн называется *ориентируемым*, если он может быть утолщен до ориентируемого многообразия.

Многообразие однозначно утолщается по своему специальному спайну.

Для четного $n \geq 2$ построим на плоскости R^2 граф G_n из n вершин степени 4, см. рис 8. Рассмотрим $\frac{n}{2}+2$ окружностей единичного радиуса с центрами в точках $(2k, 0)$, где $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}+2$ и $\frac{n}{2}-1$ окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в точках $(2k+4, \frac{3}{2})$, где $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$.

Лемма. Для любого четного $n \geq 4$ существует как минимум $3 \cdot (6\sqrt{2})^{n-4}$ ориентируемых спайнов с особым графом G_n и с одной двумерной клеткой.

$\Box$ Докажем лемму индукцией по n. Будем рассматривать не сами спайны, а окрестности их особого графа G_n, т.е. проколем двумерную клетку. На рис 9 изображена окрестность G_2. Для G_2 возьмем полученную граничную окружность и ее три отрезка, проходящих вдоль дуги $(5,0) \to (6,-1) \to (7,0)$. Перейдем к $n = 4$, то есть добавим к G_2 еще 2 окружности. Продолжим эти три отрезка граничной S^1 вдоль добавленных окружностей: на каждую из них один продолженный отрезок намотается 2 раза, и еще один намотается 1 раз, см рис 10. На каждую добавленную окружность окрестность графа продолжается 6 способами (с сохранением ориентируемости и единственности двумерной клетки.) Выбор трех отрезков неоднозначен (их можно переставить между собой 6 способами, и дугу $(5,0) \to (6,-1) \to (7,0)$ можно перепутать с дугой $(5,0) \to (6,1)$), поэтому для $n = 4$ найдено $\frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 2} = 3$ спайна. Полученные спайны не гомеоморфны друг другу, так как если у гомеоморфных спайнов выделенные отрезки совпадут, то дальше все продолжения совпадут.

Перейдем теперь от n к $n+2$: добавление еще двух окружностей дает $6 \cdot 6$ вариантов продолжения окрестности бывшего особого графа на новый особый граф (аналогично переходу $G_2 \to G_4$). Однако на прошлом шаге $n-2 \to n$ добавляемые окружности были одинаковы, а теперь на одной из них висят еще 2 окружности, значит на шаге $n-2 \to n$ получаем удвоение числа вариантов от того, на какую из 2 несимметричных окружностей будет начато продолжение окрестности особого графа. $\blacksquare$

В случае нечетного n надо начинать с цепочки четырех касающихся окружностей (см. рис 11) и добавлять окружности аналогично четному случаю. В итоге получится $3 \cdot (6\sqrt{2})^{n-5}$ ориентируемых спайнов с одной двумерной клеткой при $n \geq 5$.

Следствие леммы и теорем из [6]: Для любого натурального $n \geq 5$ существует как минимум $3 \cdot (6\sqrt{2})^{n-5}$ компактных незамкнутых ориентируемых гиперболических многообразий сложности n с геодезической границей.

Обобщения примера Адамса

Теорема 3. Рассмотрим регулярные окрестности особых графов G в спайнах, имеющих одну двумерную клетку. Все эти окрестности ретрагируются на свою граничную окружность S^1_0 (то есть на границу диска, выброшенного из двумерной клетки).

$\square$ Используем теорию препятствий: если граница диска отображается на окружность S^1_0 со степенью 0, то отображение продолжается до отображения всего диска.

Сжимая P — окрестность G, получим отображение $f : S^1_0 \to G$. Выберем какую-нибудь вершину графа G, тогда на хотя бы одно из 4 выходящих из нее ребер (пусть на e) окружность S^1_0 отображается со степенью +1 или -1, см. рис 12. Теперь все $G \setminus e$ отображаем в точку $x_0 \in S^1_0$, а ребро e отображаем со степенью +1 или -1 на S^1_0 соответственно. А S^1_0 отобразим на S^1_0 тождественно. Соединим x_0 с точкой из $G \setminus e$ путем m и отобразим m в точку x_0, см. рис 13. Теперь граница диска $\partial(P \setminus (G \cup S^1_0 \cup m) = (S^1_0 - e) + G \setminus e$ отображается со степенью 0 на S^1_0, поэтому отображение можно продолжить на весь спайн. $\blacksquare$

Адамс рассматривал тройной лист Мебиуса, соединенный ленточкой с обычным листом (то есть ложную поверхность) и ретрагировал ее на границу.

Если компактная поверхность с особенностями ретрагируется на свою границу — подмногообразие, то при ретракции особенности отобразятся на границу сюрьективно. Поэтому все двумерные аналоги примера Адамса должны иметь какой-то граф особенностей.

Литература

[1] С. В. Матвеев, Е. А. Первова, " Нижние оценки для сложности трехмерных многообразий ", ДАН 63(3) 2001,

[2] A. Onischenko, D. Repovs, A. B. Skopenkov, "Resolutoin of 2-Polyhedra by Fake surfaces and Embedding into R^4 ", Contemporary Nathematics, volume **(288)**, (2001)

[3] S. V. Matveev, C. Petronio, A. Yu. Vesnin, " Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic 3-manifolds " math.GT/0602372 v1 (2006).

[4] S. Anisov, "Complexity of torus bundles over the circle with monodromy $(2,1,1,1)^n$ " preprint math.GT/0203215

[5] S. V. Matveev, "Algorithmic topology and classification of 3-manifolds", ACM-monographs, Vol. 9, Springer-Verlag 2003

[6] R. Frigerio, B.Martelli, C. Petronio, "Complexity and Heegard genus of an infinite class of compact 3-manifolds", math.GT/0206156 v1 2002; Pasific J. Math. (2003)

[7] R. Frigerio, B.Martelli, C. Petronio, "Dehn filling of cusped hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary", J. Differential Geometry **64** (2003)

[8] F. F. Lasheras "Universal covers and 3-manifolds", J. Pure Appl. Alg. **151** (2000) 163-172.

[9] А. Г. Курош "Теория групп" Лань, Москва-С.Петербург-Краснодар (2005)