Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Построение инвариантов для полупрямых сумм алгебр Ли.

Дипломная работа.

Автор: А.С.Воронцов

Научный руководитель: А.Т. Фоменко

Москва, 2007 г

1 Введение

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли. Для функций на двойственном пространстве $\mathfrak{G}^*$ можно определить естественную Пуассонову структуру, называемую скобкой Пуассона–Ли. Градиент функции $f\colon \mathfrak{G}^* \to \mathbb{R}$ можно интерпретировать как элемент из $\mathfrak{G}$ и задавать скобку Пуассона следующей формулой:

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df, dg]\rangle. \tag{1}$$

Определение 1. *Функции f и g находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна 0.*

Определение 2. *Набор функций $\{f_k\colon \mathfrak{G} \to \mathbb{R}\}$ называется полным инволютивным набором, если все попарные скобки Пуассона $\{f_i, f_j\} = 0$ и в наборе содержится $\frac{1}{2}(\operatorname{ind}\mathfrak{G} + \dim\mathfrak{G})$ независимых функций.*

Можно переформулировать второе условие в определении следующим образом: набор называется полным, если на градиенты функций из этого набора натянуто максимальное изотропное подпространство.

Гипотеза 1 (А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко ([1])). *Пусть $\mathfrak{G}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли. Тогда на $\mathfrak{G}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали эту гипотезу для полупростых алгебр Ли, затем в ряде работ различных авторов были приведены доказательства для многих других случаев. В общем виде гипотеза была доказана С.Т. Садэтовым [5], это доказательство подробно разобрано в работе [4].

Цель этой работы — изложить некоторые результаты, связанные с построением инвариантов и полных коммутативный наборов для алгебр Ли, имеющих вид полупрямой суммы с коммутативном идеалом. В разделе 3 рассмотрены различные конструкции, позволяющие найти полные коммутативные наборы для Ли имеющих вид полупрямой суммы, в разделе 7 описаны инварианты для алгебр Ли, имеющих вид полупрямой суммы классической полупростой алгебры Ли и коммутативного идеала по представлению минимальной размерности.

2 Обозначения. Явные формулы для ad^* . Формула Раиса

Речь пойдет о построении полных коммутативных наборов и инвариантов для алгебр Ли, имеющих вид полупрямой суммы с коммутативным идеалом. Эту алгебру будем обозначать

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\varphi} V. \tag{2}$$

Элементы алгебры будут обозначаться как пары элементов $(\xi, v), \xi \in \mathfrak{G}, v \in V$, либо в виде суммы $\xi + v$.

Коммутатор для такой алгебры определяется формулой

$$\mathrm{ad}_{(\xi_1,v_1)}(\xi_2, v_2) = [(\xi_1, v_1), (\xi_2, v_2)] = ([\xi_1, \xi_2], \varphi(\xi_1)v_2 - \varphi(\xi_2)v_1). \tag{3}$$

Для двойственного пространства $\mathfrak{R}^*$ имеем естественное разложение в прямую сумму $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{G}^* + V^*$, $\mathfrak{G}^* = V^{\perp}$, $V^* = \mathfrak{G}^{\perp}$. В дальнейшем будет встречаться аннулятор регулярного элемента из V в смысле представления φ. Зафиксируем для него обозначение

$$H_a = Ann_{\varphi}(a) = \{\xi \in \mathfrak{G} | \varphi(\xi)a = 0\}. \tag{4}$$

Из выражения для ad нетрудно получить выражение для ad^*:

$$\mathrm{ad}^*{}_{(\xi,v)}(x, a) = (\mathrm{ad}_{\xi} x + A(a, v), \varphi^*(\xi)a). \tag{5}$$

Здесь A – отображение $A\colon V \times V^* \to \mathfrak{G}^*$, которое определяется условием

$$\langle A(a, v), \xi \rangle = \langle \varphi(\xi)v, a \rangle. \tag{6}$$

Иногда удобнее рассматривать группу Ли $G \times_{\Phi} V$, для которой алгебра Ли $\mathfrak{R}$ является касательным пространством в единице. Умножение в этой группе определяется формулой

$$(g_1, v_1) \circ (g_2, v_2) = (g_1 g_2, v_1 + \Phi(g_1)v_2). \tag{7}$$

Полезна будет также явная формула для Ad^*:

$$\mathrm{Ad}^*{}_{(g,v)}(x, a) = (\mathrm{Ad}^*{}_g x + A(a, v), \Phi^*(\xi)a). \tag{8}$$

Количество инвариантов коприсоединенного действия равно коразмерности орбиты общего положения в $\mathfrak{R}^*$ (то есть индексу алгебры $\mathfrak{R}$). Посчитать индекс для полупрямой суммы алгебры Ли с коммутативным идеалом позволяет теорема Раиса

Теорема 1 (Rais). *Пусть a — элемент общего положения $a \in V$ (в смысле представления φ). Тогда*

$$\operatorname{ind} \mathfrak{R} = \operatorname{ind} H_a + \operatorname{ind} \varphi^*. \tag{9}$$

Представления $\varphi*$ – это представление $\mathfrak{G}$ в V^*, двойственное представлению φ, то есть такое, что

$$\langle \varphi(\xi)v, a \rangle = -\langle v, \varphi^*(\xi)a \rangle. \tag{10}$$

3 Способы построения полных коммутативных наборов

Ниже будут обсуждаться два способа построения полных коммутативных наборов: метод сдвига аргумента и метод цепочек подалгебр.

3.1 Метод цепочек подалгебр

Метод цепочек подалгебр основан на следующей лемме [2].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ — подалгебра. Тогда существует естественное отображение $\pi\colon \mathfrak{G}^* \to \mathfrak{H}^*$. Если функции f_1 и f_2 находятся в инволюции на $\mathfrak{H}^*$, то $\pi^* f_1$ и $\pi^* f_2$ находятся в инволюции на $\mathfrak{G}^*$.*

Если мы умеем каким либо образом строить полный коммутативный набор $h_1, \ldots, h_k$ на $\mathfrak{H}$, то полный коммутативный набор на $\mathfrak{G}^*$ можно пытаться строить следующим образом: "поднять" функции g_i на $\mathfrak{G}^*$ и дополнить набор инвариантами коприсоединенного представления. Полученный набор заведомо будет коммутативным (функции $\pi^* g_i$ находятся в инволюции согласно лемме, а инварианты коприсоединенного представления лежат в ядре скобки Пуассона) но может не быть полным.

В случае полупрямой суммы

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_\varphi V \tag{11}$$

имеется следующая естественная цепочка: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Сформулируем критерий, показывающий, в каком случае набор построенный с помощью такой цепочки будет полным.

Теорема 2. *Набор функций на $\mathfrak{R}^*$, получаемый с помощью цепочки $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$, будет полным, если полным будет набор функций на $\mathfrak{G}^*$, получаемый из цепочки $H_a \subset \mathfrak{G}$ (H_a — стабилизатор регулярного элемента $a \in V^*$ в смысле представления φ).*

Это утверждение можно доказать используя теорему Раиса и вычисляя количество функций, которые войдут в набор, но этом случае придется дополнительно заботиться об их независимости. Вместо этого мы приведем доказательство этого утверждения в других, более инвариантных терминах.

Рассмотрим полный набор функций на $\mathfrak{G}^*$ и поднимем их на $\mathfrak{R}^*$. В каждой точке $\mathfrak{R}^*$ рассмотрим подпространство P, натянутое на градиенты этих функций. Его косоортогональное дополнение в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{R}^*$ содержит в себе подпространство P и подпространство, натянутое на градиенты инвариантов алгебры $\mathfrak{R}$, то есть ядро скобки Пуассона. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы набор, получаемый добавлением к исходному набору был полным является точное равенство

$$P^{\perp} = P + Ker(\{,\}). \tag{12}$$

Это равенство должно выполняться в каждой точке $\mathfrak{R}^*$.

Можно заменить это равенство следующим включением:

$$\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + Ker(\{,\}). \tag{13}$$

Здесь $\mathfrak{G}$ обозначает подпространство, натянутое на градиенты координатных функций на $\mathfrak{G}$. Это условие эквивалентно равенству 12 в следующем смысле. Если мы выберем в $\mathfrak{G}$ полный набор функций и обозначим пространство, порождаемое их градиентами P, то из 13 будет следовать 12. Обратное (13 из 12) очевидно, поскольку справедливы включения $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq P^{\perp}$ и $P \subseteq \mathfrak{G}$. Включение 13 должно выполняться почти во всех точках $\mathfrak{R}^*$.

В этих терминах теорема может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_{\rho} V$. Обозначим H_a – стабилизатор элемента общего положения из V. Если для H_a справедливо включение $H_a^{\perp} \subseteq H_a + \mathfrak{G}^{\perp}$ (здесь косоортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{G}$), то справедливо включение $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + \mathfrak{R}^{\perp}$ (здесь косоортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{R}^*$).*

Доказательство. Запишем выражение для скобки Пуассона в $\mathfrak{R}$ в точке (x, a):

$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x\rangle + \langle \rho(\xi)v - \rho(\eta)u, a\rangle. \tag{14}$$

Возьмем функцию из косоортогонального дополнения к $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{R}$ и обозначим ее градиент (η, v). Для ее градиента справедливо соотношение

$$\{(\xi, 0), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x\rangle + \langle \rho(\xi)v, a\rangle = 0 \quad \forall \xi. \tag{15}$$

Выбирая $\xi \in \operatorname{Ann} a$ получаем, что для всех таких ξ выполняется соотношение
$$\langle [\xi, \eta], x\rangle = 0. \tag{16}$$

Это означает, что η принадлежит к косоортогональному дополнению $(\operatorname{Ann} a)^{\perp}$. По нашему предположению это означает, что либо $\eta \in \operatorname{Ann} a$ либо η – лежит в ядре скобки Пуассона для алгебры $\mathfrak{G}$.

В первом случае мы получаем, что из 15 и $\eta \in \operatorname{Ann} a$ следует, что
$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = 0, \tag{17}$$
то есть (η, v) лежит в ядре скобки Пуассона для $\mathfrak{R}$. Во втором случае из 15 получаем
$$\langle \rho(\xi)v, a\rangle = 0. \tag{18}$$
Это означает, что $(0, v)$ лежит в ядре скобки Пуассона, откуда следует включение $\mathfrak{G}^{\perp} \subseteq \mathfrak{G} + \mathfrak{R}^{\perp}$. □

Нетрудно убедиться, что описанная конструкция может быть применена для алгебр Ли $so(n)+\mathbb{R}^n$, $sl(n)+\mathbb{R}^n$ и $sp(n)+\mathbb{R}^{2n}$. Для алгебр Ли вида $\mathfrak{G}+_{\varphi^k} V^k$, $k \geq 2$ (где $\mathfrak{G}$ – одна из классических алгебр Ли, а φ – представление минимальной размерности) эта конструкция не работает.

3.2 Метод сдвига аргумента

Одним из эффективных способов построения полных коммутативных наборов является метод сдвига аргумента. Его применение основано на следующей лемме [2]

Лемма 2. *Пусть f и g инварианты коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда для любого вектора $a \in \mathfrak{G}^*$ функции $f_\lambda = f(x + \lambda a)$ и $g_\mu = g(x + \mu a)$ находятся в инволюции.*

Во многих случаях метод сдвига аргумента позволяет построить полный коммутативный набор. В частности имеет место следующая теорема [2]

Теорема 4 (А.В. Болсинов). *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_\varphi V$, и a – регулярный элемент пространства V. Если 1) $\mathfrak{G} = sl(n)$, $\varphi = \rho_0^k$, где ρ – представление минимальной размерности, $n \neq 0 mod p$; 2) $\mathfrak{G} = so(n)$, $\varphi = \rho_0^k$; 3) $\mathfrak{G} = sp(n, \mathbb{C})$, $\varphi = \rho_0^k$ и k нечетно, либо $k > n$, то семейство сдвигов* *инвариантов на ковектор a полное. Если ограничения на число слагаемых не выполнены, то семейство сдвигов не полное.*

Кроме того имеется следующее утверждение, позволяющее расширить применимость метода сдвига аргумента [3]:

Теорема 5 (Браилов). *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} +_\varphi V$ – полупрямая сумма. Тогда сдвиги инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{R}$ на элемент $y \in \mathfrak{G}^*$ коммутируют с координатными функциями на идеале $\mathfrak{G}.s$*

Доказательство. Пусть $f_\lambda = f((x, a) + \lambda(y, 0))$, а g – функция на идеале, то есть $dg \in V$. Запишем по определению скобку Пуассона этих функций:

$$\{f_\lambda, g\} = \langle (x, a), [d_{(x+\lambda y, a)} f, dg] \rangle = \langle (x+\lambda y, a), [d_{(x+\lambda y,a)} f, dg] \rangle - \langle (\lambda y, 0), [df, dg] \rangle. \tag{19}$$

Первое слагаемое равно нулю, поскольку f является инвариантом, а второе – поскольку V идеал и следовательно $[df, dg] \in V$. Заметим, что в доказательстве нигде не используется коммутативность V. □

Границы применимости этого метода показывает следующая теорема [3].

Теорема 6 (Браилов). *Набор, полученный добавлением координатных функций на идеале к сдвигам инвариантов на элемент из $\mathfrak{G}$ будет полным тогда и только тогда, когда сдвиги инвариантов образуют полное семейство в H_a.*

Наконец, можно использовать следующий метод, являющийся некоторой комбинацией метода сдвига аргумента и метода цепочек подалгебр [2].

Лемма 3. *Пусть h – функция на H_a^*, $\pi^* h$ – ее поднятие до функции на $\mathfrak{R}$. Тогда сдвиги инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{R}$ на элемент a коммутируют с $\pi^* h$.*

4 Сравнение методов построения коммутативных наборов

Приведенные в предыдущем разделе методы дают, вообще говоря, разные результаты. Продемонстрируем это на простейшем примере. Рассмотрим алгебру Ли $e(3) = so(3) + \mathbb{R}^3$. Обозначим координаты на $so(3)$ (a, b, c), а координаты на $\mathbb{R}^3$ (x, y, z). Инварианты для этой алгебры Ли хорошо известны:

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$I_2 = ax + by + cz.$$

Для того, чтобы получить полный коммутативный набор нужно выбрать еще две функции. Если следовать методу цепочек подалгебр мы должны взять полный набор функций на $so(3)$. Одним из возможных наборов является следующий: $f_1 = a,\ f_2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Метод Браилова дает другой результат. В данном случае нам не нужно даже рассматривать сдвиги инвариантов, достаточно добавить к ним координаты на коммутативном идеале. В этом случае полный коммутативный набор будет состоять из функций

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$I_2 = ax + by + cz,$$
$$f_1 = x,$$
$$f_2 = y.$$

Следуя методу сдвига инвариантов мы должны рассмотреть сдвиги инвариантов на элемент общего положения. В зависимости от того, как выбирать элемент, на который будут сдвигаться инварианты можно получить (сдвигая на элемент $e_x + e_a$) набор

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$I_2 = ax + by + cz,$$
$$f_1 = x,$$
$$f_2 = a,$$

либо (сдвигая на элемент $e_x + e_b$) набор

$$I_1 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$I_2 = ax + by + cz,$$
$$f_1 = x,$$
$$f_2 = a + y.$$

Интересно отметить, что метод цепочек подалгебр, хотя и является наименее универсальным, дает наиболее интересный физически набор. Орбита коприсоединенного представления группы $e(3)$ представляет собой кокасательное расслоение к сфере, на котором вместо канонической симплектической структуры задана структура $\omega = dp \wedge dq + \varepsilon\omega_0$, где ω_0 – форма объем на сфере, а ε – некоторый параметр, который можно выразить через I_1 и I_2.

Инвариант I_1 можно трактовать как геометрический интеграл, интеграл I_2 как интеграл площадей. Функция $f_2 = a^2 + b^2 + c^2$ – квадрат импульса, именно ее естественно рассматривать как гамильтониан системы. Наборы, построенный по методу Садэтова (или методу Браилова) включат в себя только линейные функции, которые не задают никакой интересной динамики на орбитах коприсоединенного действия.

Эта ситуация достаточно общая. Для любой алгебры Ли вида 2 ее орбита общего имеет вид произведения кокасательного расслоения к орбите действия Φ и орбиты коприсоединенного действия в аннуляторе регулярного элемента. В методе Садэтова в качестве основы коммутативного набора используются координаты на орбите, лежащей в V. В предельном случае, когда аннулятор элемента общего положения в смысле представления φ коммутативен, этих координат оказывается достаточно для того, чтобы построить полный набор и мы получаем набор состоящий из инвариантов коприсоединенного представления и координатных функций на идеале.

5 Инварианты

Все методы, описанные в разделе 3 для применения требуют знания инвариантов. Ниже будут описаны инварианты для алгебр вида $\mathfrak{G} +_{\varphi^k} V^k$, где $\mathfrak{G}$ – одна из классических полупростых алгебр Ли, а φ – представление минимальной размерности.

5.1 Группы $sp +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ и $so(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$ (общая конструкция)

Приведем общую конструкцию, из которой можно получить инварианты для $sp +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ и $so(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейное пространство V размерности n и невырожденную билинейную форму Λ на нем. Предположим, что Λ является либо симметричной либо кососимметричной.

Обозначим G группу линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму Λ. Эту группу можно считать вложенной в $SL(n)$. Для G определено естественное действие на V, поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $R = G \otimes V$, операция в котором определяется как

$$(g, u) \circ (h, v) = (gh, u + gv). \tag{20}$$

Здесь gv обозначает действие g на вектор v.

В дальнейшем будет удобно рассматривать матичную реализацию такого полупрямого произведения:

$$\begin{pmatrix} & u^1 \\ C & \vdots \\ & u^n \\ 0\dots0 & 1 \end{pmatrix}, C \in G, u \in V. \tag{21}$$

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{R}$ группы R в матричном виде имеют вид

$$\begin{pmatrix} & u^1 \\ \xi & \vdots \\ & u^n \\ 0\dots0 & 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathfrak{G}, u \in V. \tag{22}$$

Элементы коалгебры удобно представлять в виде матриц

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & X & \vdots \\ & & 0 \\ a_1 \dots a_n & & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathfrak{G}^*, a \in V^*. \tag{23}$$

Здесь $\mathfrak{G}^*$ обозначает ортогональное дополнение к V, а V^* – ортогональное дополнение к $\mathfrak{G}$. Спаривание элементов алгебры и коалгебры – след произведения соответствующих матриц.

Для того, чтобы работать в координатах удобно использовать тензорные обозначения. Элементы V – векторы, элементы V –ковекторы, элементы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ – линейные операторы на V, то есть тензоры типа $(1,1)$. Действие элемента $C \in \mathfrak{G}$ на вектор $u \in V$ – просто свертка $C_i^j u^i$.

В этих обозначениях нетрудно установить, каким условиям удовлетворяют матрицы из G и $\mathfrak{G}$. Условие, что операторы из G сохраняют форму Λ записывается в виде

$$\Lambda_{ij} C_\alpha^i C_\beta^j = \Lambda_{\alpha\beta}. \tag{24}$$

Ясно, что для алгебры $\mathfrak{G}$ это условие переписывается в виде

$$\Lambda_{i\beta} \xi_\alpha^i + \Lambda_{\alpha i} \xi_\beta^i = 0. \tag{25}$$

Наша цель – описать инварианты коприсоединенного действия группы Ли R в инвариантных терминах. Для этого нам понадобится явное выражение для Ad^* в выбранных нами координатах. Для сокращения обозначений будем матрицу 21 записывать в виде пары элементов (C,u). (Соответственно матрицы и 23 в виде пар (ξ,u) и (X,a)).

Теорема 7. *Пусть Λ^{ij} – тензор обратный к Λ_{ij}, то есть такой, что $\Lambda_{ij}\Lambda^{jk} = \delta_i^k$. Тогда*

$$\mathrm{Ad}^*{}_{(C,u)}(X,a) = (CXC^{-1} + \frac{1}{2}(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha} a_\alpha \Lambda_{i\beta} u^\beta), C_i^j a_j) \tag{26}$$

Доказательство. Чтобы выписать явную формулу для Ad^* можно воспользоваться общей формулой для Ad^* для полупрямых сумм вида $\mathfrak{G} +_\varphi V$ (см. [2]):

$$\mathrm{Ad}^*{}_{(C,u)}(X,a) = (\mathrm{Ad}^*_C X + A(u,a), \varphi(C)a). \tag{27}$$

A в этой формуле обозначает отображение $A\colon V\times V^*\to\mathfrak{G}^*$, определяемое равенством

$$\langle A(u,a),\xi\rangle = \langle\varphi(\xi)u,a\rangle. \tag{28}$$

В нашем случае получаем

$$\langle A(u,a),\xi\rangle = \xi_i^j u^i a_j = \langle \xi, u^i a_j\rangle. \tag{29}$$

Матрица $u^i a_j$ вообще говоря не лежит в $\mathfrak{G}^*$. Для того, чтобы получить выражение для $A(u,v)$ нужно спроектировать эту матрицу на $\mathfrak{G}^*$ ортогонально $\mathfrak{G}$.

Лемма 4. *Матрица $Y_1 = u^i a_j - \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{\beta j}u^\beta$ лежит в $\mathfrak{G}^*$, а матрица вида $Y_2 = u^i a_j + \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{\beta j}u^\beta$ лежит в $\mathfrak{G}^\perp$.*

Оба утверждения проверяются непосредственно. Для того, чтобы проверить, что Y_1 лежит в $\mathfrak{G}^*$ нужно проверить, что для матрицы $\bar{Y}_1\in\mathfrak{G}$, которая имеет те же координаты, что и Y_1 выполняется соотношение 25:

$$\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j = \Lambda_{ik}(u^i a_j - \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{\beta j}u^\beta). \tag{30}$$

Если поменять порядок индексов у Λ_{ik} и у $\Lambda_{\beta j}$ выражение не изменится, но после всех сверток получим

$$\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j = \Lambda_{ki}u^i a_j - a_k\Lambda_{j\beta}u^\beta. \tag{31}$$

Аналогично для $\Lambda_{ji}(Y_1)^i_k$ получаем

$$\Lambda_{ji}(Y_1)^i_k = \Lambda_{ij}u^i a_k - a_j\Lambda_{k\beta}u^\beta, \tag{32}$$

а значит $\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j + \Lambda_{ji}(Y_1)^i_k = 0$.

Остается проверить, что Y_2 ортогонален $\mathfrak{G}$. Пусть $\xi\in\mathfrak{G}$. Тогда

$$\langle Y_2,\xi\rangle = \xi_i^j(u^i a_j + \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{\beta j}u^\beta). \tag{33}$$

Пользуясь 25 получаем

$$\langle Y_2,\xi\rangle = \xi_i^j u^i a_j - \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{ji}\xi^j_\beta u^\beta = 0. \tag{34}$$

Доказанная лемма означает, что проекцию $a_i u^j$ на $\mathfrak{G}$ можно записать в виде $\frac{1}{2}(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha}a_\alpha\Lambda_{i\beta}u^\beta)$, что и требовалось. □

Для того, чтобы получить выражение для инвариантов Ad^* сопоставим каждому элементу $(X, a) \in \mathfrak{G}^*$ матрицу следующего вида:

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} & & \Lambda^{1i} a_i \\ & X & \vdots \\ & & \Lambda^{ni} a_i \\ a_1 \dots a_n & & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

То есть в последней строке запишем координаты a, а в последнем столбце запишем координаты вектора, который получится, если у a поднять индекс с помощью Λ.

Посмотрим, что происходит с матрицей $M_{(X,a)}$ если мы действуем на (X, a) с помощью Ad^*. Нетрудно проверить, что

$$M_{\mathrm{Ad}^*{}_{(C,0)}(X,a)} = \bar{C} M \bar{C}^{-1}, \tag{36}$$

где $\bar{\mathrm{C}}$ обозначает матрицу

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & C & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \dots 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Это означает, что при действии элементов вида $(C, 0)$ инварианты матрицы M не меняются. Посмотрим, что происходит при действии элементов вида (E, u). Из явного вида для Ad^* ясно, что последние строка и столбец остаются неизменными, а к каждой строке (столбцу) матрицы X прибавляется с некоторым весом последняя строка (столбец).

Ясно, что при такой операции остаются неизменными диагональные миноры матрицы M, содержащие последнюю строку и последний столбец. Напомним, что коэффициенты характеристического многочлена любой матрицы могут быть записаны как суммы ее диагональных миноров. Для того, чтобы получить сумму диагональных миноров матрицы M, содержащих последнюю строку и столбец нужно из суммы всех ее диагональных миноров вычесть сумму миноров матрицы X соответствующего порядка.

Приведенные выше рассуждения показывают, что коэффициенты многочлена

$$\det(M - \lambda E) + \lambda \det(X - \lambda E) \tag{38}$$

являются инвариантами коприсоединенного действия группы R.

Из доказательства ясно, что ответ не сильно изменится, если вместо действия $\mathfrak{G}$ на V рассмотреть несколько его "копий":

$$\mathfrak{R}_k = \mathfrak{G} +_{\varphi^k} V^k. \tag{39}$$

В этом случае удобно считать, что у векторов a и ковекторов u есть дополнительный индекс ζ, меняющийся от 1 до k. Действие $\langle a, u\rangle$ теперь будет записываться в виде $u^{i\zeta}a_{i\zeta}$. Соответственно в формуле для $A(u,v)$ (29) получим

$$\langle A(u,a), \xi\rangle = \xi_i^j u^{i\zeta} a_{j\zeta} = \langle \xi, u^{i\zeta} a_{j\zeta}\rangle. \tag{40}$$

Далее нужно описать проекцию последней матрицы на $\mathfrak{G}$, но поскольку приведенные выше выкладки справедливы для каждого слагаемого в сумме по ζ, то они справедливы и для всей суммы в целом.

Ясно, что если рассмотреть матрицу

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} & & \Lambda^{1i}a_{i1} & & \Lambda^{1i}a_{ik} \\ & X & \vdots & \dots & \vdots \\ & & \Lambda^{ni}a_{i1} & & \Lambda^{ni}a_{ik} \\ a_{11} & a_{n1} & & & \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & & 0 & \\ a_{1k} & a_{nk} & & & \end{pmatrix} \tag{41}$$

для нее будут справедливы те же рассуждения, что и для матрицы $M_{(X,a)}$, а именно, суммы ее диагональных миноров, содержащих последние k столбцов будут инвариантами.

Таким образом мы получаем следующее выражение для инвариантов $\mathfrak{R}_k$:

Теорема 8. *Инвариантами группы $\mathfrak{R}_k$ являются коэффициенты многочлена*

$$\det(M - \lambda E) - (-1)^k \lambda^k \det(X - \lambda E) \tag{42}$$

Отказаться от условия на форму Λ не удается. Если группа G сохраняет произвольную билинейную форму Λ на V, то она сохраняет одновременно ее симметричную часть и кососимметричную части, поскольку они выражаются через Λ. Это значит, что интересующая нас группа является пересечением двух групп и проекция на ее алгебру устроена, вообще говоря, более сложно.

Можно записать эти же инварианты в виде многочлена от матрицы X:

$$I_k = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{i_0} \Lambda^{i_{\sigma(0)\alpha} a_{\alpha}} X_{i_1}^{i_{\sigma(1)}} \dots X_{i_k}^{i_{\sigma(k)}} \tag{43}$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам верхних индексов с учетом их знака, по каждому индексу i_k предполагается суммирование. Такая форма записи удобна, например, если нужно записать сдвиги инвариантов.

6 Индексы некоторых алгебр Ли

Для того, чтобы определить, являются ли найденные нами наборы полными, нужно знать индексы соответствующих алгебр Ли. Это легко сделать с помощью теоремы Раиса. Во всех случаях, рассмотренных ниже, вычисление аннулятора регулярного элемента не представляет большой сложности, поэтому теорема Раиса дает ответ.

Алгебра $\mathfrak{R}$	$\operatorname{ind}\varphi^*$	H_a	$\operatorname{ind} H_a$	$\operatorname{ind}\mathfrak{R}$
$so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$	1	$so(n-1)$	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$1+\left[\frac{n-1}{2}\right]$
$sl(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$	0	$sl(n-1) +_\varphi \mathbb{R}^{n-1}$	1	1
$sp(n) +_\varphi \mathbb{R}^{2n}$	0	$sp(n-1) + \mathfrak{h}_2 m$	n	n
$gl(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$	0	$gl(n-1) +_\varphi \mathbb{R}^{n-1}$	0	0
$so(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$	$\frac{k(k+1)}{2}$ при $k \le n$ $kn - \frac{n(n-1)}{2}$, если $k > n$	$so(n-k)$ при $k \le n$ 0 при $k > n$	$\left[\frac{n-k}{2}\right]$ при $k \le n$ 0 при $k > n$	$\frac{k(k+1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right]$, при $k \le n$ kn, при $k > n$
$sl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$	0, при $k < n$ $kn - n^2 + 1$, при $k \ge n$	$sl(n-k) +_\varphi \mathbb{R}^{n-k}$ при $k < n$ 0 при $k \ge n$	вычисляется по индукции	$kr - r^2 + 1, \text{где} r = n mod k$
$sp(n) +_{\varphi^{2k}} (\mathbb{R}^{2n})^{2k}$	$k(2k-1)$ при $k < n$ $4kn - n(2n+1)$ при $k \ge n$	$sp(n-k)$ при $k < n$ 0 при $k \ge n$	$(n-k)$ при $k < n$ 0 при $k \ge n$	$2k^2 - 2k + n$ при $k < n$ $4kn - 2n^2 - n$ при $k \ge n$
$sp(n) +_{\varphi^{2k-1}} (\mathbb{R}^{2n})^{2k-1}$	$(k-1)(2k-1)$ при $k \le n$ $4kn - 2n^2 - 3n$ при $k > n$	$sp(n-k) + \mathfrak{h}_{2(n-k)}$ при $k < n$ $\mathbb{R}$ при $k = n$ 0 при $k > n$	$(n-k+1)$ при $k \le n$ 0 при $k > n$	$2k^2 - 4k + n + 1$ при $k \le n$ $4kn - 2n - n(2n+1)$ при $k > n$
$gl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$	0 при $k \le n$ $kn - n^2$ при $k > n$	$gl(n-k) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{n-k})^k$ при $k < n$ 0 при $k \ge n$	0 при $k \le n$ $kn - n^2$ при $k > n$	$kr - r^2, \text{где} r = n mod k$

7 Инварианты коприсоединенного представления

7.1 Алгебра $so(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$

Посмотрим, какой результат дает формула, полученная в предыдущем разделе. Инварианты для этих алгебр этого вида были описаны в работе [6].

Оказывается, что половина из инвариантов, полученных в предыдущем разделе для алгебры $so(n) + \mathbb{R}^n$ равны нулю. Действительно, матрица M кососимметрична:

$$M_(X, a) = \begin{pmatrix} & -a_i \\ X & \vdots \\ & -a_n \\ a_1 \dots a_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

а коэффициенты характеристического многочлена при λ^k равны нулю, если $(n-k)$ нечетно. Кроме того ясно, что все миноры размера меньше $2k$, содержащие последние k строк равны 0. Это означает, что мы получаем $\left[\frac{n-k}{2}\right]$ инвариантов. Добавляя к ним тривиальные инварианты – попарные произведения векторов a_i получаем набор из $\left[\frac{n-k}{2}\right] + \frac{k(k+1)}{2}$ инвариантов, что равно индексу алгебры.

Рассмотрим коммутативные наборы, которые могут быть получены из этих инвариантов. Выпишем несколько инвариантов $so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$:

$$I_0 = (a, a),$$
$$I_2 = 2(a, X^2 a) - \mathrm{tr} X^2 (a, a)$$
$$I_4 = 4(a, X^4 a) - 2\mathrm{tr} X^2 (a, X^2 a) + (\mathrm{tr} X^2)^2 (a, a) - \mathrm{tr} X^4 (a, a).$$

Следуя методу Браилова 6, мы можем рассмотреть сдвиги этих инвариантов на элемент $M \in \mathfrak{G}^*$ и получить полные наборы для для алгебры. Например, для $so(4) + \mathbb{R}^4$ получим следующий набор:

$$I_0 = 2(a, X^2 a) - \mathrm{tr} X^2 (a, a)$$
$$f_0 = -2(Xa, Na) - \mathrm{tr} NX(a, a) f_i = x_i,\ i = 1, \dots, 4$$

Интересно, что именно такой набор получается, если следовать методу Садэтова. В работе М.М. Ждановой [7] в явном виде построен методом Садэтова полный коммутативный набор для алгебры Ли $so(4)+\mathbb{R}^4$. Он также совпадает с набором, получаемым методом Браилова. Есть следующая гипотеза:

Гипотеза 2. *Для всех алгебр Ли $so(n)+_\varphi \mathbb{R}^n$ полный набор, построенный методом Садэтова совпадает с набором, построенным методом Браилова.*

7.2 Алгебра Ли $sp(n)+_\varphi \mathbb{R}^{2n}$

Как и в предыдущем случае, среди инвариантов, которые дает формула 42 многие обращаются в 0. Можно проверить (например для формулы 43), что коэффициенты при λ^k равны нулю, если $2n-k$ четно. Таким образом мы получаем ровно n инвариантов.

Явные вычисления дают следующие выражения для инвариантов:

$$I_1 = \omega(a, aX),$$
$$I_3 = 2\omega(a, aX^3) - \omega(a, aX)\mathrm{tr}X^2,$$
$$I_5 = 4\omega(a, aX^5) - 2\omega(a, aX^3)\mathrm{tr}X^2 + \omega(a, aX)((\mathrm{tr}x^2)^2 - \mathrm{tr}X^4).$$

Теперь нетрудно выписать полные коммутативные наборы. Сделаем это, например, для алгебры $Sp(2)+\mathbb{R}^4$. Если воспользоваться методом цепочек подалгебр получим

$$I_1 = \omega(a, aX),$$
$$I_3 = 2\omega(a, aX^3) - \omega(a, aX)\mathrm{tr}X^2,$$
$$f_1 = \mathrm{tr}X^2,\ f_2 = \mathrm{tr}X^4,\ f_3 = \mathrm{tr}XN,$$
$$f_4 = \mathrm{tr}X^3N,\ f_5 = 2\mathrm{tr}X^2N^2 + \mathrm{tr}(XN)^2,\ f_6 = \mathrm{tr}XN^3$$

Метод Браилова дает следующий ответ:

$$I_1 = \omega(a, aX),$$
$$I_3 = 2\omega(a, aX^3) - \omega(a, aX)\mathrm{tr}X^2,$$
$$f_1 = a_1,\ f_2 = a_2,\ f_3 = a_3,\ f_4 = a_4, f_5 = (a, aN),$$
$$f_6 = 2\omega(a, a(X^2N + XNX + NX^2)) - 2\omega(a, aX)\mathrm{tr}XN - \omega(a, aN)\mathrm{tr}X^2.$$

7.3 Алгебра $sl(n)+_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$

Для того, чтобы описать инварианты для алгебры $sl(n)+_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$ нужно найти явный вид Ad^* для этой алгебры Ли. Как и в предыдущих случаях будем считать, что группа $SL(n) +_\varphi (\mathbb{R}^n)^k$ вложена в $sl(n+k)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} C & u_1 \dots u_k \\ 0, \dots, 0 & E \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$C \in SL(n)$, $u_i \in \mathbb{R}^n$. Коалгебру удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix} X & 0 \dots 0 \\ a_1 & \\ \dots & 0 \\ a_k & \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\mathrm{Ad}^*{}_{(C,u)}(X,a) = (\mathrm{Ad}^*{}_C X + ua - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(ua)E, aC^{-1}). \tag{47}$$

Для проверки этой формулы нужно просто убедиться, что матрица λE ортогональна $sl(n)$:

$$\langle \lambda E, X \rangle = \mathrm{tr}\lambda E X = \lambda \mathrm{tr} X = 0. \tag{48}$$

Теорема 9. *Единственным инвариантом коприсоединенного действия группы $SL(n) +_\phi \mathbb{R}^n$ является определитель матрицы M, составленной из строк a, aX, aX^2, …, aX^{n-1}, то есть объем параллелепипеда, натянутого на эти векторы.*

Доказательство. Сначала проверим, что $\det M$ не меняется при сопряжении элементом $(C, 0)$. При сопряжении этим элементом элемент коалгебры (X, a) переходит в элемент (CXC^{-1}, aC^{-1}). При этом в матрице M каждая строка умножается справа на C^{-1}. Это означает, что матрица M переходит в MC^{-1}, но $\det MC^{-1} = \det M \det C^{-1} = \det M$.

Теперь рассмотрим, что происходит при сопряжении элементом $(0, u)$. Ковектор (X, a) при этом переходит в $(X + va - \mathrm{tr}(va)E)$. Посмотрим, как при этом изменяется матрица M. Первая строка матрицы остается неизменной. Вторая строка имеет вид $a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)$. Удобно записать это выражение, используя тензорные обозначения:

$$a_i(X^i_j + v^i a_j - \frac{1}{n} v^i a_i \delta^i_j) = a_i X^i_j + \frac{n-1}{n} a_i v^i a_j. \tag{49}$$

Далее не трудно по индукции проверить, что в k-ой строке матрицы M будет стоять линейная комбинация первых k строк предыдущей матрицы, и при этом k-ая строка исходной матрицы входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом 1.

$$a(X + va - \operatorname{tr}(va)E)^k = a(X + va - \operatorname{tr}(va)E)^{k-1}(X + va - \operatorname{tr}(va)E). \quad (50)$$

Пользуясь предположением индукции, получаем, что $a(X+va-\operatorname{tr}(va)E)^{k-1} = aX^{k-1} + b$, где b – линейная комбинация первых $k-2$ строк. Отсюда

$$a(X + va - \operatorname{tr}(va)E)^k = (aX^{k-1} + b)(X + va - \operatorname{tr}(va)E) = aX^k + c, \quad (51)$$

где c – линейная комбинация первых $k-1$ строк исходной матрицы. Это означает, что определитель матрицы не меняется.

То, что инвариант единственен легко показать из теоремы Раиса. □

Теорема 10. *Пусть $n = kd+r$, $r < k$. Тогда для группы $SL(n)+_\varphi(\mathbb{R}^n)^k$ инвариантами коприсоединенного представления будут определители матриц $M_{i_1\dots i_r}$, составленных из следующих строк: $a_1, \dots, a_k$, $a_1X, \dots a_kX, \dots, a_1X^{d-1}, \dots$ и r строк вида $a_{i_r}X^d$. Эти инварианты не будут независимы, но из них можно выбрать полный набор независимых инвариантов.*

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство для случая $SL(n) + \mathbb{R}^n$. При действии элемента вида $(C, 0)$ матрица $M_{\bar{i}}$ умножается справа на C^{-1}, что не меняет ее определителя.

При действии элемента вида $(0, u)$ строки вида a_iX^q заменяются на строки $a_iX^q + \sum \dots$, где под суммой стоит линейная комбинация векторов a_kX^s, $0 \le s < q$. Такая замена не меняет определителя матрицы. □

8 Результаты

В работе предложен критерий применимости метода цепочек подалгебр для алгебр, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом. Этот критерий сводит вопрос полноты набора, полученного методом цепочек подалгебр к аналогичному вопросу для алгебр меньшей размерности.

Предложена общая конструкция, которая позволяет описать инварианты для алгебр $\mathfrak{G} +_{\phi^k} V^k$, где $\mathfrak{G}$ – одна из алгебр $so(n)$, $so(p,q)$, $sp(n)$, а ϕ – представление минимальной размерности.

Описаны инварианты для алгебр $sl(n)+_{\phi^k}(\mathbb{R}^n)^k$, $sp(n)+\mathbb{R}^{2n}$. Явный вид инвариантов позволяет в явном виде предъявить полные коммутативные наборы для этих алгебр Ли.

Список литературы

[1] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли. Изв. АН СССР. сер. матем. 1978. **42**, №2. 396-415.

[2] В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448с.

[3] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрия скобок Пуассона н методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах. ВИНИТИ, Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Том 29, 1986 г.

[4] А.В. Болсинов, Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах:доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко// Тр. семинара по вект.и тенз.анализу.Вып.26. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ. 2005.

[5] *С.Т. Садэтов*, Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Докл. РАН. 2004. **397**. №6. 751-754.

[6] А. Гусейнов Дипломная работа. Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли $so(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$, $so(n) +_{\varphi} (\mathbb{R}^n)^k$, $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$.

[7] М.М. Жданова Дипломная работа. Построение полных коммутативных наборов для полупрямых сумм методом Садэтова.