

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

Дипломная работа на тему:
„Новые интегрируемые случаи на алгебрах Ли $so(4)$, $so(3, 1)$ и $e(3)$ “

Выполнил: студент 503 гр.
Новиков Д. В.
Научный руководитель: академик РАН А. Т. Фоменко

Москва 2007

1 Постановка задачи и основные определения.

Пусть \mathfrak{G} – конечномерная алгебра Ли с базисом e_1, \dots, e_n , а \mathfrak{G}^* – соответствующая коалгебра с дуальным базисом $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$, то есть $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$. Пусть x_1, \dots, x_n – координаты на \mathfrak{G}^* , а c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли \mathfrak{G} : $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$.

Определение 1. Скобка Пуассона-Ли на пространстве \mathfrak{G}^* задается следующей формулой:

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где f и g – гладкие функции на \mathfrak{G}^* .

Определение 2. Уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

задающие динамическую систему на \mathfrak{G}^* , где H – гладкая функция (гамильтониан) на \mathfrak{G}^* , называются уравнениями Эйлера на алгебре Ли \mathfrak{G} . Они часто встречаются в механике и физике. Например, различные задачи о движении твердого тела задаются уравнениями Эйлера на алгебре Ли $e(3)$.

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона-Ли:

$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k$, $\{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k$, $\{R_i, R_j\} = \kappa \epsilon_{ijk} S_k$, где S_i и R_i – компоненты трехмерных векторов S и R , ϵ_{ijk} – полностью кососимметрический тензор, а κ – произвольное действительное число. Можно считать, что κ равна 1, -1 или 0. Действительно, замена $R' = \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} R$ и $\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\kappa|}}$ сводит нас к этому случаю. При $\kappa > 0$ ($\kappa = 1$) получаем, что скобка соответствует алгебре Ли $so(4)$, при $\kappa = 0$ – $e(3)$, а при $\kappa < 0$ ($\kappa = -1$) – $so(3, 1)$.

Классические интегрируемые случаи на этом семействе алгебр Ли включают случай Эйлера – $H = \frac{1}{2}(AS, S)$, Лагранжа – $H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \beta S_3^2) + V(R_3)$, Ковалевской – $H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 2S_3^2) + \alpha R_1$.

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = (AS, S) + (b, S \times R),$$

где A – постоянная симметрическая матрица, $b \neq 0$ – постоянный вектор. Подобные гамильтонианы могут представлять интерес, например, в рамках модели Пуанкаре-Жуковского, описывающей движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной вихревой жидкостью [1]. Другие возможные приложения квадратичных гамильтонианов обсуждаются в книге [3].

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым и В. В. Соколовым в работах [4, 6, 7]. Случай Соколова:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1 \\ K_1 &= \alpha Q_3 (\kappa S^2 - R^2) + \kappa (Q_3^2 + Q_2^2) - \alpha^2 (Q_3^2 + Q_1^2) \end{aligned}$$

Случай Борисова-Мамаева:

$$\begin{aligned} H_2 &= \left(\alpha - \frac{\kappa}{4\alpha}\right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1 \\ K_2 &= 4\alpha^2 S_2^2 S^2 + 4\alpha S_2 (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2 R^2, \text{ где } Q = S \times R. \end{aligned}$$

Функции Казимира: $f_1 = \kappa S^2 + R^2$, $f_2 = \langle S, R \rangle$. Как известно (см., например, [8]), ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиты общего положения коприсоединенного представления соответствующей группы

Ли задает гамильтонову систему на $M_{c,g}^4 = \{ (S, R) \mid f_1(S, R) = c, f_2(S, R) = g \}$. Без ограничения общности можно считать, что $c = 1$. Сразу же введем полезное обозначение $M_1^5 = \{ (S, R) \mid f_1(S, R) = 1 \}$.

Лиувиллево слоение интегрируемой системы на алгебре Ли $so(4)$ описано в работе [9]. Поэтому в настоящей работе мы будем изучать строение интегрируемых систем на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $e(3)$. В этой работе мы не исследуем слоение Лиувилля, так как для этих алгебр имеются некомпактные слои. Мы опишем бифуркационные диаграммы отображения $f_2 \times H: M_1^5 \rightarrow \mathbb{R}^2(g, h)$ для широкого класса квадратичных гамильтонианов, охватывающего случаи Соколова и Борисова-Мамаева на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$, а также топологию изоэнергетической поверхности и бифуркационную диаграмму отображения момента для случая Соколова на $e(3)$ и $so(3, 1)$.

Заметим, что случай Борисова-Мамаева на алгебре Ли $e(3)$ разобран в работе [5]. Действительно, замена $S_1 = \bar{S}_2 - \alpha \bar{R}_3$, $S_2 = \bar{S}_3 + \alpha \bar{R}_2$, $S_3 = \bar{S}_1$, $R_1 = 2\alpha^2 \bar{R}_2$, $R_2 = 2\alpha^2 \bar{R}_3$, $R_3 = 2\alpha^2 \bar{R}_1$, сохраняющая скобку, и последующая замена времени сводит нас к системе с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2 + 2\bar{S}_3^2) + \alpha \bar{S}_3 \bar{R}_2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \bar{R}_3^2$, исследованной в этой статье. Ниже мы независимо получаем один из результатов, а именно бифуркационную диаграмму для отображения $f_2 \times H|_{M_1^5}$ для случая Борисова-Мамаева на $e(3)$, входящего в более широкое семейство гамильтонианов, которое мы исследуем. Она совпадает с найденной в работе [5] (см. Замечание 1).

2 Бифуркационная диаграмма отображения $f_2 \times H|_{M_1^5}$.

Рассмотрим класс гамильтонианов $H_{a,b,c} = aS_1^2 + bS_2^2 + cS_3^2 + S_1R_2 - S_2R_1$. Он охватывает случаи Соколова и Борисова-Мамаева. Отметим, что согласно теореме из работы [6], кроме описанных выше случаев для гамильтониана класса $H_{a,b,c}$ может существовать еще только одно семейство интегрируемых систем с интегралом четвертой степени. Мы его не приводим ввиду крайней громоздкости.

Рассмотрим отображение $f_2 \times H|_{M_1^5}: M_1^5 = \{ (S, R) \mid f_1(S, R) = 1 \} \rightarrow \mathbb{R}^2(g, h)$, заданное формулой $(f_2 \times H|_{M_1^5})(S, R) = (f_2(S, R), H(S, R))$.

Определение 3. Критические точки отображения $f_2 \times H|_{M_1^5}$ — это точки, где градиенты f_1 , f_2 и H линейно зависимы, а значение f_1 равно 1.

Определение 4. Бифуркационной диаграммой называется образ критических точек при отображении $f_2 \times H|_{M_1^5}$.

Мы построим бифуркационную диаграмму для гамильтонианов класса $H_{a,b,c}$, $a \neq b$.

Утверждение 1. Бифуркационная диаграмма для гамильтонианов вида $H_{a,b,c} = aS_1^2 + bS_2^2 + cS_3^2 + S_1R_2 - S_2R_1$ для произвольного $\kappa \leq 0$ состоит из следующих кривых:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \kappa h^2 - ah + (\kappa + a^2)g^2 = \frac{1}{4}; \\
2) \quad & \kappa h^2 - bh + (\kappa + b^2)g^2 = \frac{1}{4}; \\
3) \quad & h = \frac{1}{4(c-a)}(1 + 2\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}g), -\frac{\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}}{2(\kappa + 2c(a-c))} \leq g \leq -\frac{\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}}{2(\kappa + 2a(a-c))}, \\
& h = \frac{1}{4(c-a)}(1 - 2\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}g), \frac{\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}}{2(\kappa + 2a(a-c))} \leq g \leq \frac{\sqrt{\kappa + 4c(a-c)}}{2(\kappa + 2c(a-c))}; \\
4) \quad & h = \frac{1}{4(c-b)}(1 + 2\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}g), -\frac{\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}}{2(\kappa + 2c(b-c))} \leq g \leq -\frac{\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}}{2(\kappa + 2b(b-c))}, \\
& h = \frac{1}{4(c-b)}(1 - 2\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}g), \frac{\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}}{2(\kappa + 2b(b-c))} \leq g \leq \frac{\sqrt{\kappa + 4c(b-c)}}{2(\kappa + 2c(b-c))};
\end{aligned}$$

5) $\kappa h^2 - ch + c^2 g^2 = 0$.

Мы докажем это утверждение отдельно для $\kappa = 0$ и $\kappa = -1$. Мы показали выше, что такое сведение всегда возможно.

Утверждение 2. а) При $a \neq b$ для $so(3, 1)$ получаем следующие виды бифуркационных диаграмм:

I. При $c \neq 0$ получаем одну из ветвей гиперболы Γ_c : $(h + \frac{c}{2})^2 - c^2 g^2 = \frac{c^2}{4}$ (ту, где $h \cdot c \geq 0$), а именно $h = c \left(\sqrt{\frac{1}{4} + g^2} - \frac{1}{2} \right)$. При $c = 0$ получаем горизонтальную прямую $h = 0$.

II. Если $|a| > 1$, то получаем верхнюю, а при $|a| < 1$ — нижнюю ветвь ветвь гиперболы Γ_a : $\left\{ (g, h) \mid \left(h + \frac{a}{2} \right)^2 + (1 - a^2)g^2 = \frac{a^2 - 1}{4} \right\}$.

III. Если $1 + 4c(c - a) \leq 0$, то возможны следующие случаи:

1) $1 + 2c(c - a) < 0$. Получаем два отрезка O_{a1} и O_{a2} , симметричных относительно прямой $g = 0$:

$$h = \frac{1}{4(c-a)} [1 + 2\sqrt{-1 - 4c(c-a)}g], \quad g \in \left[\frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2c(c-a)]}, \frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2a(c-a)]} \right],$$

$$h = \frac{1}{4(c-a)} [1 - 2\sqrt{-1 - 4c(c-a)}g], \quad g \in \left[-\frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2a(c-a)]}, -\frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2c(c-a)]} \right].$$

2) $1 + 2c(c - a) = 0$. Два луча L_{a1} и L_{a2} : $h = -\frac{c}{2} - cg, g \in (-\infty, -c^2]$, и $h = -\frac{c}{2} + cg, g \in [c^2, \infty)$.

3) $1 + 2c(c - a) > 0$ и $1 + 2a(c - a) < 0$. Два луча L_{a3} и L_{a4} :

$$h = \frac{1}{4(c-a)} [1 + 2\sqrt{-1 - 4c(c-a)}g], \quad g \in \left[-\infty, \frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2a(c-a)]} \right],$$

$$h = \frac{1}{4(c-a)} [1 - 2\sqrt{-1 - 4c(c-a)}g], \quad g \in \left[-\frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2[1 + 2a(c-a)]}, \infty \right).$$

IV и **V** получаются из **II** и **III** заменой a на b .

б) При $a \neq b$ для $e(3)$ получаем следующие виды бифуркационных диаграмм:

I. При $c \neq 0$ получаем параболу $h = cg^2$, а при $c = 0$ вертикальную прямую $h = 0$.

II. Если $a \neq 0$, то бифуркационная диаграмма содержит параболу $h = \frac{4a^2 g^2 - 1}{4a}$.

III. При $c(a - c) \geq 0$ получаем два случая:

1) Если $a - c < 0$ и $c \leq 0$, то диаграмма содержит два отрезка O_{a1} и O_{a2} , симметричных относительно прямой $g = 0$:

$$h = \frac{1}{4(c-a)} + \sqrt{\frac{c}{a-c}}g, \quad g \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{c(a-c)}}, \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{c}{a-c}} \right],$$

$$h = \frac{1}{4(c-a)} - \sqrt{\frac{c}{a-c}}g, \quad g \in \left[-\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{c}{a-c}}, \frac{1}{2\sqrt{c(a-c)}} \right].$$

2) $a - c > 0, c \geq 0$. Получаем два отрезка O_{a1} и O_{a2} , симметричных относительно прямой $g = 0$:

$$h = \frac{1}{4(c-a)} + \sqrt{\frac{c}{a-c}}g, \quad g \in \left[\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{c}{a-c}}, \frac{1}{2\sqrt{c(a-c)}} \right],$$

$$h = \frac{1}{4(c-a)} - \sqrt{\frac{c}{a-c}}g, \quad g \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{c(a-c)}}, -\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{c}{a-c}} \right].$$

IV и **V** получаются из **II** и **III** заменой a на b .

Замечание 1. В случае Борисова-Мамаева на алгебре Ли $\epsilon(3)$ бифуркационная диаграмма совпадает с найденной в работе [5].

Доказательство. Критические точки удовлетворяют условиям

$$\text{grad } H = \lambda \text{grad } f_1 + \mu \text{grad } f_2$$

или

$$\lambda \text{grad } f_1 + \mu \text{grad } f_2 = 0.$$

Последний случай невозможен. Действительно, если градиенты f_1 и f_2 линейно зависимы, то все миноры матрицы $\begin{pmatrix} 2\kappa S_1 & 2\kappa S_2 & 2\kappa S_3 & 2R_1 & 2R_2 & 2R_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & S_1 & S_2 & S_3 \end{pmatrix}$ должны быть равны 0. Отсюда $S_i = R_i = 0$, что невозможно, так как $\kappa S^2 + R^2 = 1$.

Рассмотрим матрицу

$$G = G_H - \lambda G_{f_1} - \mu G_{f_2} = \begin{pmatrix} 2a - 2\kappa\lambda & 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 2b - 2\kappa\lambda & 0 & -1 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2c - 2\kappa\lambda & 0 & 0 & -\mu \\ -\mu & -1 & 0 & -2\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\mu & 0 & 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Критические точки удовлетворяют условию $G \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix} = 0$. Поменяв 3 и 5 строки, а затем 3 и 5 столбцы

(одновременно поменяв S_3 и R_2), получаем:

$$\begin{pmatrix} 2a - 2\kappa\lambda & 0 & 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2b - 2\kappa\lambda & -\mu & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mu & -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -1 & 0 & -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c - 2\kappa\lambda & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ R_2 \\ R_1 \\ S_3 \\ R_3 \end{pmatrix}.$$

Будем приводить матрицу к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2b - 2\kappa\lambda & -\mu & -1 \\ 0 & -1 - \mu^2 & -2\lambda\mu & -2\lambda \\ 0 & 2\mu(a - \kappa\lambda) & 1 + 4\lambda(a - \kappa\lambda) & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & -\mu \\ 0 & -1 & -\mu & 2b - 2\kappa\lambda \\ 0 & -2\lambda & -2\lambda\mu & -1 - \mu^2 \\ 0 & -\mu & 1 + 4\lambda(a - \kappa\lambda) & 2\mu(a - \kappa\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & -\mu \\ 0 & 1 & \mu & -2b + 2\kappa\lambda \\ 0 & 0 & 1 + \mu^2 - 4\kappa\lambda^2 + 4a\lambda & 2\mu(a - b) \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \mu^2 + 4\kappa\lambda^2 - 4b\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta_a = 1 + \mu^2 - 4\kappa\lambda^2 + 4a\lambda$, $\Delta_b = 1 + \mu^2 - 4\kappa\lambda^2 + 4b\lambda$, $\Delta_c = \mu^2 - 4\kappa\lambda^2 + 4c\lambda$.

Рассмотрим случаи, когда $a \neq b$ и $c \neq 0$:

I. $\Delta_c = 0$, $\Delta_a \cdot \Delta_b \neq 0$. Получаем вектор $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$, где $S_3 = -\frac{2\lambda}{\mu}R_3$.

а) $f_1 = -S_3^2 + R_3^2 = 1$, $\Delta_c = \mu^2 + 4\lambda^2 + 4c\lambda = 0 \Rightarrow (1 - \frac{4\lambda^2}{\mu^2})R_3^2 = 1$, $R_3^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2}$.

$$h = H = cS_3^2 = c \frac{4\lambda^2}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{4c\lambda^2}{-8\lambda^2 - 4c\lambda} = -\frac{c\lambda}{2\lambda + c}$$

$$g = f_2 = -\frac{2\lambda}{\mu}R_3^2 = -\frac{2\lambda}{\mu} \frac{\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{-2\lambda\mu}{-8\lambda^2 - 4c\lambda} = \frac{\mu}{4\lambda + 2c}$$

$$h^2 + ch - c^2g^2 = \frac{4c^2\lambda^2 - 4c^2\lambda^2(2\lambda + c) + c^2(4\lambda^2 + 4c\lambda)}{4(2\lambda + c)^2} = 0.$$

$$(h + \frac{c}{2})^2 - c^2g^2 = \frac{c^2}{4}, \text{ где } h \cdot c \geq 0.$$

$$\text{б) } f_1 = R_3^2 = 1, g = S_3R_3 = -\frac{2\lambda}{\mu}R_3^2 = -\frac{2\lambda}{\mu}, h = cS_3^2 = \frac{4c\lambda^2}{\mu^2}R_3^2 = \frac{4c\lambda^2}{\mu^2} = cg^2.$$

II. $\Delta_a = 0, \Delta_b \cdot \Delta_c \neq 0, S_2 = 0$, так как $\Delta_b \neq 0, \Delta_c \neq 0 \Rightarrow S_3 = R_3 = 0, S_1 - 2\lambda R_2 = 0, R_1 + \mu R_2 = 0$.
Получаем вектор $(2\lambda R_2, 0, 0, -\mu R_2, R_2, 0)$.

а) $\Delta_a = 1 + \mu^2 + 4\lambda^2 + 4a\lambda = 0 \Rightarrow |a| \geq 1$. Но при $|a| = 1$ получаем вектор $(\pm R_2, 0, 0, 0, R_2, 0)$ и $f_1 = 0 \Rightarrow |a| > 1$.

$$f_1 = (1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_2^2 = 1 \Rightarrow R_2^2 = \frac{1}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{1}{-8\lambda^2 - 4a\lambda}.$$

$$\text{Пусть } a > 1. R_2^2 = -\frac{1}{8\lambda^2 + 4a\lambda} \geq 0 \Rightarrow \lambda \in (-\frac{a}{2}, 0). \text{ При } a < -1 \quad \lambda \in (0, -\frac{a}{2}).$$

$$g = f_2 = -2\lambda\mu R_2^2 = \frac{2\lambda\mu}{8\lambda^2 + 4a\lambda} = \frac{\mu}{4\lambda + 2a}$$

$$h = H = (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 = -\frac{4a\lambda^2 + 2\lambda}{8\lambda^2 + 4a\lambda} = -\frac{2a\lambda + 1}{4\lambda + 2a}$$

$$\text{При } a > 1 \quad h \in (-\frac{1}{2a}, \infty), \text{ при } a < -1 \quad h \in (-\infty, -\frac{1}{2a}).$$

$$\begin{aligned} h^2 + ah + (1 - a^2)g^2 &= \frac{(2a + 1)^2 - 2a(2\lambda + a)(2a\lambda + 1) - (1 - a^2)(4\lambda^2 + 4a\lambda + 1)}{4(2\lambda + a)^2} = \\ &= \frac{4a^2\lambda^2 + 4a\lambda + 1 - 8a^2\lambda^2 - 4a\lambda - 2a^2 - 4a^3\lambda - 4\lambda^2 - 4a\lambda + 4a^2\lambda^2 + 4a^3\lambda}{4(4\lambda^2 + 4a\lambda + a^2)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(h + \frac{a}{2})^2 + (1 - a^2)g^2 = \frac{a^2 - 1}{4}.$$

$$\text{б) } f_1 = (1 + \mu^2)R_2^2 = 1 \Rightarrow R_2^2 = \frac{1}{1 + \mu^2} = -\frac{1}{4a\lambda}, g = -2\lambda\mu R_2^2 = \frac{\mu}{2a}, h = (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 = -\frac{4a\lambda^2 + 2\lambda}{4a\lambda} = -\frac{2a\lambda + 1}{2a}, 4a^2g^2 = \mu^2 = -1 - 4a\lambda = 4ah + 1.$$

$$4a^2g^2 = 4ah + 1.$$

III. $\Delta_b = 0, \Delta_a \cdot \Delta_c \neq 0, \Delta_b = 0 \Rightarrow |b| \geq 1, \Delta_a = 4\lambda(a - b) \neq 0, S_3 = R_3 = 0$, так как $\Delta_c \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & -\mu \\ 0 & 1 & \mu & -2b + 2\kappa\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda(a - b) & 2\mu(a - b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_2 \end{pmatrix}.$$

\Rightarrow Получаем вектор $(0, -2\lambda R_1, 0, R_1, \mu R_1, 0)$.

$f_1 = (1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_1^2 = 1, \Delta_b = 1 + \mu^2 + 4\lambda^2 + 4b\lambda = 0 \Rightarrow R_1^2 = \frac{1}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2} = -\frac{1}{8\lambda^2 + 4b\lambda}$. Аналогично второму случаю получаем:

$$(h + \frac{b}{2})^2 + (1 - b^2)g^2 = \frac{b^2 - 1}{4}.$$

IV. $\Delta_a = \Delta_c = 0$. $S_3 = -\frac{2\lambda}{\mu}R_3$, так как $\Delta_c = 0$. $S_1 = -2\lambda R_2$, $S_2 = 0$, $R_1 = -\mu R_2$ аналогично I.

Имеем вектор $(2\lambda R_2, 0, -\frac{2\lambda}{\mu}R_3, -\mu R_2, R_2, R_3)$.

а) $\Delta_a = 1 + \mu^2 + 4\lambda^2 + 4a\lambda = 0 \Rightarrow |a| \geq 1$, $\Delta_c = \mu^2 + 4\lambda^2 + 4c\lambda = 0 \Rightarrow 1 + 4a\lambda - 4c\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{4(c-a)}$,

$$\mu^2 = -4\lambda^2 - 4c\lambda = -\frac{1}{4(c-a)^2} - \frac{c}{c-a} = -\frac{1+4c(c-a)}{4(c-a)^2} \Rightarrow 1+4c(c-a) \leq 0.$$

Из условия $f_1 = 1$ получаем:

$$(1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_2^2 + \frac{\mu^2 - 4\lambda^2}{\mu^2}R_3^2 = 1 \Rightarrow R_3^2 = \frac{[1 - (1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_2^2]\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2}.$$

$$g = f_2 = -2\lambda\mu R_2^2 - \frac{2\lambda}{\mu}R_3^2 = -2\lambda\mu R_2^2 - \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2}[1 - (1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_2^2] = -\frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2} + \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2$$

$$\begin{aligned} h = H &= (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2}R_3^2 = (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 + \frac{4c\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 - 4\lambda^2)\mu^2}[1 - (1 + \mu^2 - 4\lambda^2)R_2^2] = \\ &= \frac{(4a\lambda^2 + 2\lambda) - 4c\lambda^2(\mu^2 - 4\lambda^2 + 1)}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{4\lambda^2(\mu^2 - 4\lambda^2)(a - c) + 2\lambda(\mu^2 - 4\lambda^2) - 4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \\ &= \frac{-\lambda(\mu^2 - 4\lambda^2) + 2\lambda(\mu^2 - 4\lambda^2) - 4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{\lambda(\mu^2 - 4\lambda^2 - 4c\lambda)}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \frac{2\lambda\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2}R_2^2 + \\ &+ \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \mu g + \frac{2\lambda\mu^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2 - 4\lambda^2} = \lambda + \mu g \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, в каких пределах меняется g . Сначала заметим, что μ определено с точностью до знака. Если $\mu = \frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2(c-a)}$, то $\lambda \cdot \mu = \frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{8(c-a)^2} \geq 0$. При $\mu = -\frac{\sqrt{-1 - 4c(c-a)}}{2(c-a)} \Rightarrow \lambda \cdot \mu \leq 0$.

1) Пусть $\mu^2 - 4\lambda^2 > 0$. Тогда R_2^2 меняется в пределах $\left[0, \frac{1}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}\right]$. При этом $g = \frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2}(R_2^2 - 1)$ меняется на отрезке $\left[-\frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2}, -\frac{2\lambda\mu}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}\right]$ ($\lambda \cdot \mu \geq 0$) или $\left[-\frac{2\lambda\mu}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}, -\frac{2\lambda\mu}{\mu^2 - 4\lambda^2}\right]$ при $\lambda \cdot \mu \leq 0$.

2) $\mu^2 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow R_2^2 = 1$, $g = -2\lambda\mu - \frac{2\lambda}{\mu}R_3^2$, $h = 4a\lambda^2 + 2\lambda + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2}R_3^2 \Rightarrow h = \lambda - \frac{2c\lambda}{\mu}g$. Если $\lambda \cdot \mu \geq 0$, то $g \in (-\infty, -2\lambda\mu]$. При $\lambda \cdot \mu \leq 0$ $g \in [-2\lambda\mu, \infty)$.

3) $1 + \mu^2 - 4\lambda^2 > 0$, $\mu^2 - 4\lambda^2 < 0$. При этом R_2^2 меняется на полуинтервале $[\frac{1}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}, \infty)$, а g пробегает полуинтервал $(-\infty, -\frac{2\lambda\mu}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}]$ ($\lambda \cdot \mu \geq 0$) или $[-\frac{2\lambda\mu}{1 + \mu^2 - 4\lambda^2}, \infty)$ ($\lambda \cdot \mu \leq 0$).

4) $1 + \mu^2 - 4\lambda^2 \leq 0$ невозможно.

б) $(1 + \mu^2)R_2^2 + R_3^2 = 1$

$$g = f_2 = -2\lambda\mu R_2^2 - \frac{2\lambda}{\mu}R_3^2 = -2\lambda\mu R_2^2 - \frac{2\lambda}{\mu}[1 - (1 + \mu^2)R_2^2] = -\frac{2\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda}{\mu}R_2^2$$

$$h = H = (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2}R_3^2 = (4a\lambda^2 + 2\lambda)R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2}[1 - (1 + \mu^2)R_2^2] =$$

$$= 4(a - c)\lambda^2 R_2^2 + (2\lambda - \frac{4c\lambda^2}{\mu^2})R_2^2 + \frac{4c\lambda^2}{\mu^2} = \lambda + \mu g$$

V. $\Delta_b = \Delta_c = 0$. Аналогично получаем $h = \lambda + \mu g$. Здесь также $|b| \geq 1$ и $1 + 4c(c - b) \leq 0$.

VI. $\Delta_a = \Delta_b = 0$ возможно только, если $a = b$.

Пусть теперь $c = 0$, $a \neq b$.

В первом случае получаем прямую $h = 0$, во втором и третьем гиперболы $(h + \frac{a}{2})^2 + (1 - a^2)g^2 = \frac{a^2 - 1}{4}$ и $(h + \frac{b}{2})^2 + (1 - b^2)g^2 = \frac{b^2 - 1}{4}$ соответственно. Третий и четвертый случай невозможны, так как $1 + 4c(c - a) = 1 + 4c(c - b) = 1 > 0$ \square

Замечание 2. Случай $a = b$ нами не рассматривается.

Окончательно имеем следующую зависимость бифуркационной диаграммы от параметра a для $so(3, 1)$:

1) При $1 + 2c(c - a) < 0$ получаем ветвь гиперболы Γ_a , ветвь гиперболы Γ_c и два отрезка O_{a1} и O_{a2} , касающихся гипербол.

2) При $1 + 2c(c - a) = 0$ получаем ветвь гиперболы Γ_a , ветвь гиперболы Γ_c и два луча L_{a1} и L_{a2} , касающихся первой гиперболы и являющихся асимптотами второй.

3) Если $1 + 4c(c - a) \leq 0$, $1 + 2a(c - a) > 0$ и $1 + 2a(c - a) < 0$, то получаем ветви гипербол Γ_a и Γ_c , а также два луча L_{a3} и L_{a4} , касающихся Γ_a .

4) В случае $1 + 4c(c - a) > 0$, $|a| > 1$ и $c \neq 0$ будут ветви гипербол Γ_a и Γ_c .

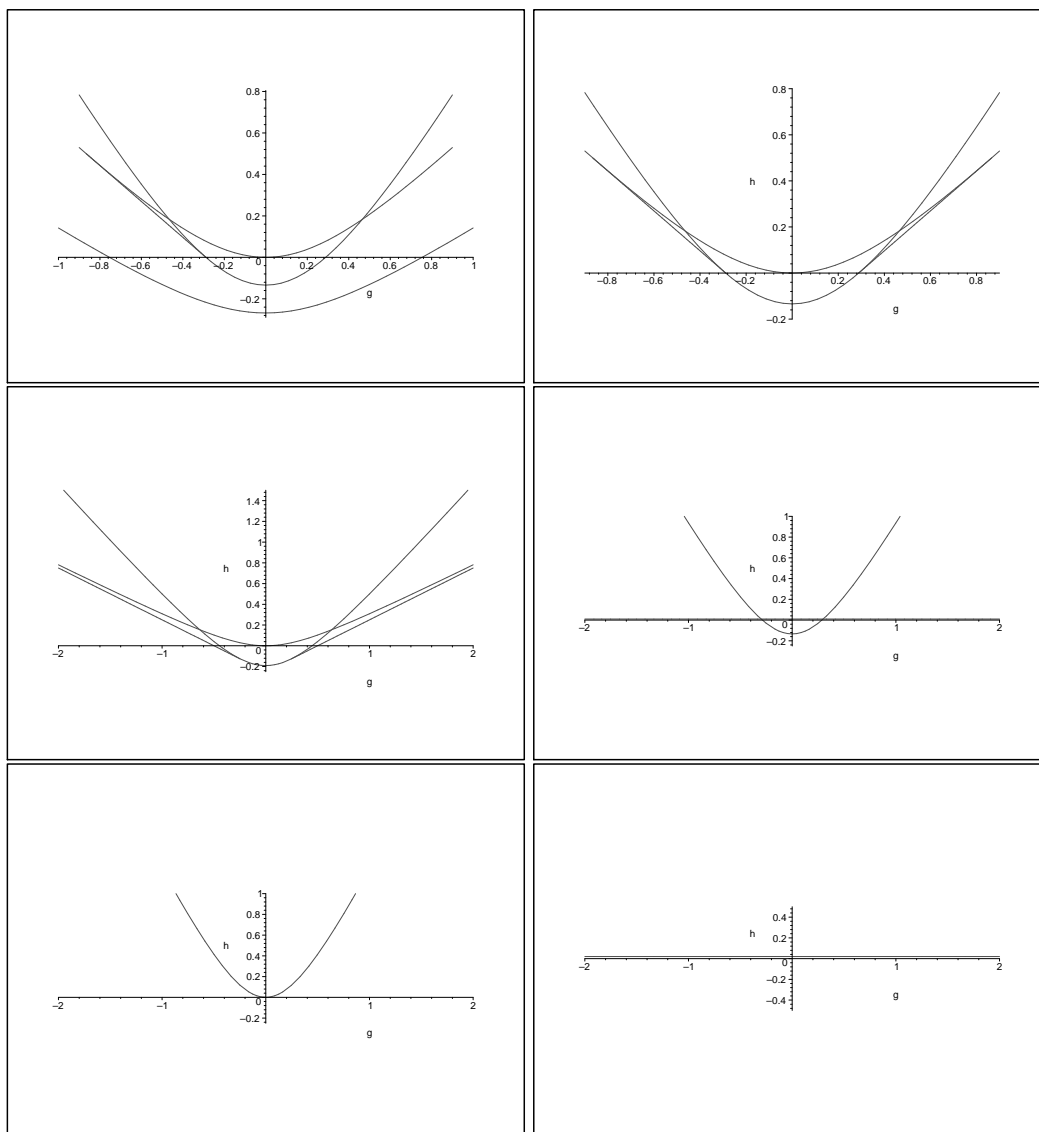
5) При $|a| > 1$ и $c = 0$ получаем ветвь гиперболы Γ_a и горизонтальную прямую $h = 0$.

6) Если $|a| \leq 1$ и $c \neq 0$ будет ветвь гиперболы Γ_c .

7) При $|a| \leq 1$ и $c = 0$ будет прямая $h = 0$.

Заметим, что диаграмма симметрична относительно прямой $g = 0$.

Аналогичная зависимость имеет место и от параметра $b \neq a$. Таким образом, существует 25 видов различных бифуркационных диаграмм.



В частности, для случая Соколова на $e(3)$ бифуркационная диаграмма состоит из следующих кривых:

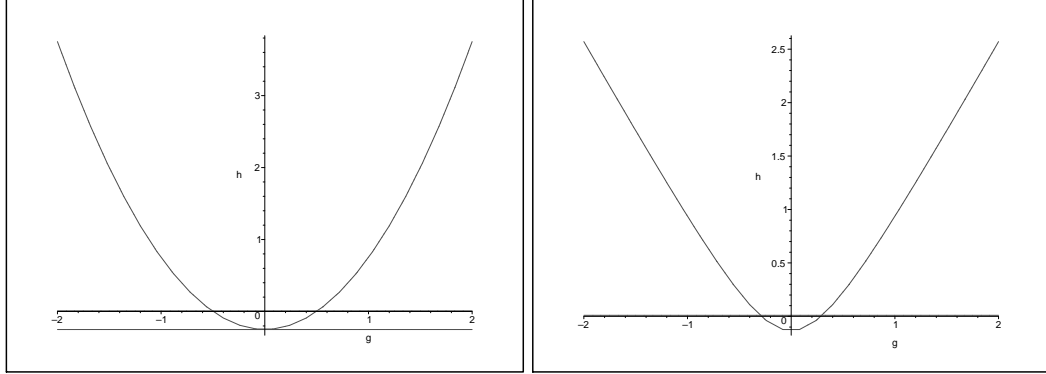
1. $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$;
2. $h = 0$;
3. $h = -\frac{1}{4\alpha}$.

Бифуркационная диаграмма случая Соколова при $\kappa = -1$ и $\alpha > 1$ на $so(3,1)$ состоит из следующих кривых:

1. $h = -\alpha/2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}$;

2. $h = 0$.

На рисунках изображены бифуркационные диаграммы для $\epsilon(3)$ и $so(3, 1)$ соответственно.



3 Топология изоэнергетической поверхности случая Соколова.

Будем теперь искать топологию изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3 = \{ (S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g, H(S, R) = h \}$ для случая Соколова при $\alpha > 1$ и при регулярных значениях (g, h) , т.е. (g, h) не принадлежащих бифуркационной диаграмме. Фиксируем значение вектора $S = (S_1, S_2, S_3)$ и рассмотрим относительно R систему:

$$\begin{cases} S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ S_2 R_1 - S_1 R_2 = -\frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 + \alpha S_2^2 - h. \end{cases}$$

Она задает прямую l в пространстве $\mathbb{R}^3(R)$, если векторы (S_1, S_2, S_3) и $(S_2, -S_1, 0)$ линейно независимы. А они зависимы только, если $S = 0$. В этом случае $g = h = 0$. Но точка $(0, 0)$ всегда принадлежит бифуркационной диаграмме. Прямая l пересекает сферу $R^2 = 1 - \kappa S^2$ не более чем в двух точках. Множество точек S , для которых существует решение системы, есть образ поверхности $Q_{g,h}^3$ при проекции на плоскость S . Обозначим его через $P_{g,h}^3$. Прямая l пересекает сферу тогда и только тогда, когда

$$(\rho(0, l))^2 = \frac{g^2}{S^2} + \frac{(\alpha S_2^2 - \frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2}{S_1^2 + S_2^2} \leq 1 - \kappa S^2.$$

Следовательно, множество $P_{g,h}^3$ задается неравенством $S^2(\alpha S_2^2 - \frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 - h)^2 + (\kappa S^4 - S^2 + g^2)(S_1^2 + S_2^2) \leq 0$, причем равенство соответствует случаю, когда прямая пересекает сферу в одной точке, а строгое неравенство - в двух.

Обозначим $x = \alpha S_2^2 - \frac{\kappa}{\alpha} S_1^2 - h$, $u = S_1^2 + S_2^2$ и $z = S_3^2$. В новых переменных неравенство переписется в виде:

$$\kappa u z^2 + (2\kappa u^2 - u + x^2)z + u(x^2 + g^2 + \kappa u^2 - u) \leq 0.$$

Пусть теперь $\kappa = 0$. Во-первых, посмотрим, что будет, когда $x^2 - u = 0$. В этом случае получаем $u g^2 = 0$. Получаем $u = x = 0$, откуда $S_1 = S_2 = 0$ и $h = 0$. Мы уже знаем, что прямая $h = 0$ принадлежит бифуркационной диаграмме, но оказывается, что эта прямая не влияет на тип $Q_{g,h}^3$. То есть тип $Q_{g,h}^3$

точек (g, h) , лежащих в одной камере относительно других кривых, с $h > 0$ и $h < 0$ совпадает. Дальше считаем, что $x^2 - u \neq 0$.

При $\kappa = 0$ предыдущее квадратичное по z неравенство упрощается и превращается в линейное по z :

$$z \leq -\frac{u(x^2 - u + g^2)}{x^2 - u}.$$

Рассмотрим теперь множество точек, прообраз которых состоит из одной точки. Это те точки, где в неравенстве равенство. Поскольку $z, u \geq 0$, то отсюда следует, что

$$\begin{cases} x^2 - u < 0, \\ x^2 - u + g^2 \geq 0. \end{cases}$$

Вернемся теперь к переменным S_1, S_2 и посмотрим, как эта система переписывается в них.

$$\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 > (\alpha S_2^2 - h)^2, \\ S_1^2 + S_2^2 \leq (\alpha S_2^2 - h)^2 + g^2. \end{cases}$$

То есть $(\alpha S_2^2 - h)^2 - S_2^2 < S_1^2 \leq (\alpha S_2^2 - h)^2 - S_2^2 + g^2$.

Заметим, что если (S_1, S_2) – решение этой системы неравенств, то и $(-S_1, S_2), (S_1, -S_2), (-S_1, -S_2)$ – тоже решения. Поэтому достаточно рассматривать $S_1, S_2 \geq 0$.

Обозначим $y = S_2^2$. Тогда вид области, заданной предыдущим неравенством, однозначно определяется квадратными уравнениями $(\alpha y - h)^2 - y$ и $(\alpha y - h)^2 - y + g^2$.

Возможны следующие существенно различные расположения графиков этих функций:

1) Дискриминант уравнения $\alpha^2 y^2 - (2\alpha h + 1)y + h^2 + g^2$ положителен. $D = (2\alpha h + 1)^2 - 4\alpha^2(h^2 + g^2) = 4\alpha h + 1 - 4\alpha^2 g^2$. Мы получили уравнение уже известной нам параболы, принадлежащей бифуркационной диаграмме, $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$. Так как $y_1 y_2 = \frac{h^2 + g^2}{\alpha^2} > 0$, а $y_1 + y_2 = \frac{2\alpha h + 1}{\alpha^2} > \frac{4\alpha^2 g^2 + 1}{2\alpha} > 0$, то уравнение имеет 2 положительных корня.

2) Дискриминант отрицательный. Здесь становится важным расположение графика второй функции $\alpha^2 y^2 - (2\alpha h + 1)y + h^2$, а именно знак функции в вершине параболы. $y_{ver} = \frac{2\alpha h + 1}{2\alpha^2}$. Значение функции в вершине равно $\alpha^2 \left(\frac{2\alpha h + 1}{2\alpha^2}\right)^2 - \left(\frac{2\alpha h + 1}{2\alpha^2}\right)^2 + h^2 = -\frac{4\alpha h + 1}{4\alpha^2}$

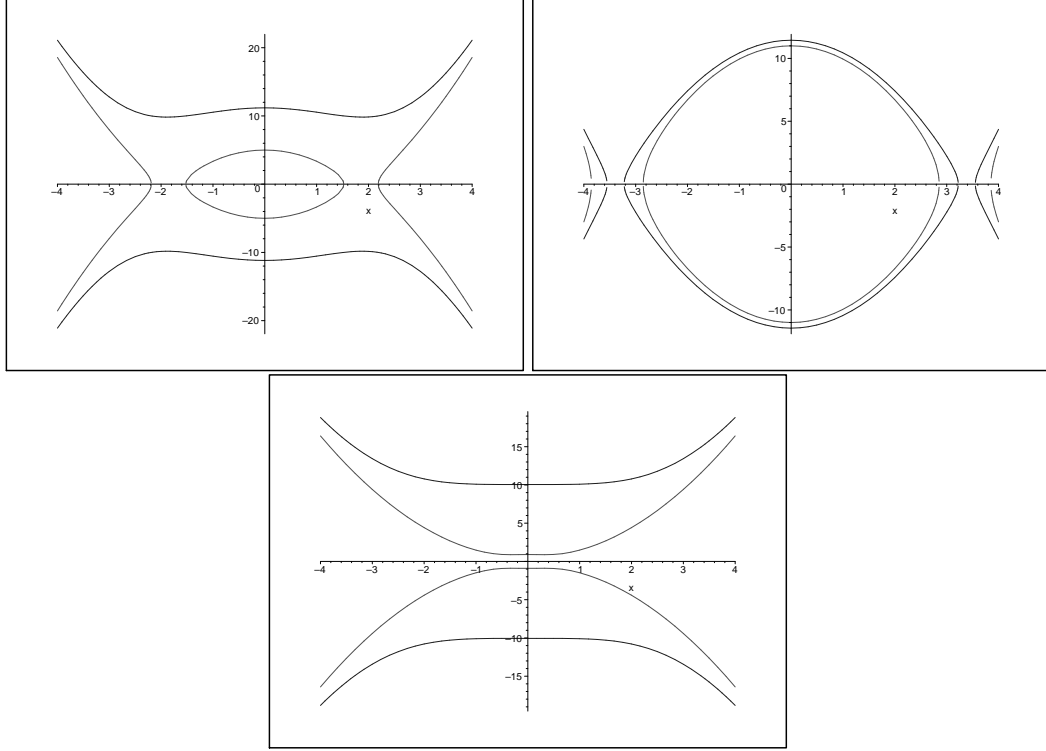
Здесь могут быть следующие возможности:

- а) $y_{ver} > 0$ и значение в вершине положительно. Этот случай будет при $2\alpha h + 1 > 0$ и $4\alpha h + 1 < 0$.
- б) $y_{ver} > 0$ и значение в вершине отрицательно. Здесь $2\alpha h + 1 > 0$ и $4\alpha h + 1 > 0$.
- в) $y_{ver} < 0$. В этом случае $2\alpha h + 1 < 0$.

Как легко понять, расположение графиков относительно оси абсцисс в случаях а) и в) совпадает. То есть на самом деле вид проекции зависит только от знака $4\alpha h + 1$, что не должно нас удивлять, так как именно эта кривая и принадлежит бифуркационной диаграмме.

На рисунках изображены проекции $P_{g,h}^3$ на плоскость S_2, S_1 . Множество возможных S_1, S_2 располагается между двумя кривыми. Прообразом любой внутренней точки $(S_1, S_2) \in P_{12}(P^3)$ при проекции $P^3 \rightarrow \mathbb{R}_{S_1, S_2}^2$ является отрезок $(S_1, S_2) \times [-\sqrt{z(S_1, S_2)}, \sqrt{z(S_1, S_2)}]$, где $z(S_1, S_2) = -\frac{u(x^2 - u + g^2)}{x^2 - u}$. Чтобы окончательно получить Q^3 , мы должны склеить 2 экземпляра P^3 по границе. При этом получают следующие многообразия, отвечающие рисункам:

1. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ при h , лежащих под параболой $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$, но над прямой $h = -\frac{1}{4\alpha}$.
2. $2\mathbb{R}^3$ в объединении с $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ при h , лежащих над параболой $h = \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.
3. $2\mathbb{R}^3$ при h , лежащих под прямой $h = -\frac{1}{4\alpha}$.



Пусть теперь $\kappa < 0$.

Для удобства вычислений полагаем $\kappa = -1$. Тогда квадратичное по z неравенство переписется следующим образом:

$$uz^2 + (2u^2 + u - x^2)z + u(u^2 + u - x^2 - g^2) \geq 0.$$

Во-первых, нужно рассмотреть случай, когда $u = 0$. Поскольку $u = S_1^2 + S_2^2$, то из равенства u нулю следует, что $S_1 = S_2 = 0$, откуда в свою очередь следует, что $h = 0$. Но как мы уже знаем, прямая $h = 0$ принадлежит бифуркационной диаграмме. При этом здесь также оказывается, что сама эта прямая не влияет на $Q_{g,h}^3$, то есть регулярным точкам на плоскости $\mathbb{R}_{g,h}$, находящимся в одной камере относительно других кривых бифуркационной диаграммы (в нашем случае находящимся под или над ветвью гиперболы), отвечает один и тот же тип $Q_{g,h}^3$. Такая же ситуация была и на $e(3)$ (см. выше) и $so(4)$ (см. [9]). Далее считаем, что $u > 0$.

Заметим, что дискриминант $D = (2u^2 + u - x^2)^2 - 4u^2(u^2 + u - x^2 - g^2) = (x^2 - u)^2 + 4u^2g^2 > 0$.

Поскольку $z \geq 0$, то нужно понять, когда это неравенство имеет неотрицательные решения. Для этого надо рассмотреть знаки решений уравнения. Заметим, что для ненулевых корней знаки однозначно определяются знаками суммы и произведения корней.

1) Оба корня положительные. Это невозможно, так как система $z_1 \cdot z_2 > 0$, $z_1 + z_2 > 0$ имеет только решение $u = x = z = 0$.

2) Оба корня отрицательные. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 2u^2 + u - x^2 > 0, \\ u^2 + u - x^2 - g^2 > 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему:

$$\begin{cases} x^2 < 2u^2 + u, \\ x^2 < u^2 + u - g^2. \end{cases}$$

Но заметим, что $u^2 + u - g^2 \leq 2u^2 + u$, поэтому эта система превращается в одно неравенство $u^2 + u - x^2 - g^2 > 0$. При этом для любого $z \geq 0$ выполнено строгое неравенство.

3) Один корень отрицательный, второй положительный. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $u^2 + u - x^2 - g^2 < 0$. В этом случае неравенство выполнено при $z \geq z_+$, причем равенство будет тогда и только тогда, когда $z = z_+$, где z_+ — положительный корень.

4) Один из корней нулевой. Тогда $u^2 + u - x^2 - g^2 = 0$. И неравенство превращается в следующее:

$$uz^2 + (u^2 + g^2)z \geq 0.$$

Это неравенство выполнено для любого $z \geq 0$. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Нам осталось определить при различных (g, h) , не принадлежащих бифуркационной диаграмме, вид области на плоскости \mathbb{R}_{S_1, S_2} , задаваемой неравенством $u^2 + u - x^2 - g^2 < 0$. В переменных S оно переписывается следующим образом:

$$(S_1^2 + S_2^2)^2 + S_1^2 + S_2^2 - \left(\frac{1}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 - h\right)^2 - g^2 \leq 0.$$

Неравенство эквивалентно следующему:

$$-\alpha \left(\sqrt{\left(S_2^2 + \frac{1+2\alpha h}{2(1-\alpha^2)}\right)^2 + \frac{4g^2+1}{4(\alpha^2-1)} + \frac{\alpha+2h}{2(\alpha^2-1)}} \right) \leq S_1^2 \leq \alpha \left(\sqrt{\left(S_2^2 + \frac{1+2\alpha h}{2(1-\alpha^2)}\right)^2 + \frac{4g^2+1}{4(\alpha^2-1)} - \frac{\alpha+2h}{2(\alpha^2-1)}} \right).$$

Заметим, что левая часть всегда < 0 . Правая часть будет > 0 при всех $S_2 \Leftrightarrow (h + \frac{\alpha}{2})^2 > (\alpha^2 - 1)g^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{4}$.

Если $(h + \frac{\alpha}{2})^2 < (\alpha^2 - 1)g^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{4}$, то правая часть будет > 0 при $|S_2| > const$, зависящей от g и h . В случае $(h + \frac{\alpha}{2})^2 = (\alpha^2 - 1)g^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{4}$ правая часть будет > 0 при $S_2 \neq 0$ и равна 0 при $S_2 = 0$. Образом проекции будут следующие множества: при $h \neq 0 - \mathbb{R}^3(S)$ с вырезанным из него "гиперболоидом" и прямой $S_1 = S_2 = 0$, при $h = 0$ эта прямая "вклеивается". Значит, над ветвью гиперболы получаем склейку пространства без прямой с вырезанным "двулостным гиперболоидом" по границе гиперболоида. Это многообразие, как легко заметить, гомеоморфно кольцу $S^1 \times R^2$ с высверленной из него прямой. Под

гиперболой имеем склейку пространства без прямой с вырезанным "однополостным гиперboloидом" без двух точек, являющихся пересечением прямой с "гиперboloидом по границе "гиперboloида".

Другими словами, прообраз регулярной точки всегда \mathbb{R}^3 с тремя дырками. И так, топология изоэнергетической поверхности описана полностью.

4 Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова.

Рассмотрим теперь отображение момента $H \times K: \{(S, R) \mid f_1(S, R) = 1, f_2(S, R) = g\} \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, заданное формулой $(H \times K)(S, R) = (H(S, R), K(S, R))$. Точка (S, R) будет критической $\Leftrightarrow sgrad H$ и $sgrad K$ будут линейно зависимыми. Опять же мы везде считаем, что $\alpha > 1$. Удобно перейти от переменных S и R к переменным S и Q . При этом скобка переписывается следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, Q_j\} = \epsilon_{ijk} Q_k, \quad \{Q_i, Q_j\} = q \epsilon_{ijk} S_k, \quad \text{где } q = \kappa S^2 - R^2 = 2\kappa S^2 - 1.$$

Мы также будем использовать следующее полезное тождество:

$$Q^2 = S^2 R^2 - g^2 = \frac{1 - q^2}{4\kappa} - g^2.$$

Обозначим $2\alpha Q_3 - q$ через A , $\alpha q + 2\kappa Q_3$ через B .

Найдем координаты $sgrad H$ и $sgrad K$:

$$sgrad H = \left(2\alpha S_2 S_3 - Q_2, \frac{2\kappa}{\alpha} S_1 S_3 + Q_1, -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} + \alpha\right) S_1 S_2, S_2 A, \frac{S_1 B}{\alpha}, -2\left(\frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 + \alpha S_2 Q_1\right) \right)$$

$$\{S_1, K\} = \alpha Q_2 A$$

$$\{S_2, K\} = Q_1 B$$

$$\{S_3, K\} = -2(\kappa + \alpha^2) Q_1 Q_2$$

$$\{Q_1, K\} = [2\kappa(S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + \alpha q S_2] A$$

$$\{Q_2, K\} = [2\alpha(S_3 Q_1 - S_1 Q_3) + q S_1] B$$

$$\{Q_3, K\} = 4\alpha\kappa Q_3(S_1 Q_2 - S_2 Q_1) - 2q(\alpha^2 S_2 Q_1 + \kappa S_1 Q_2)$$

Сначала мы перечислим случаи, когда куски бифуркационной диаграммы отображения момента состоят из кривых порядка не выше 2, причем то, что в этом случае косые градиенты линейно зависимы, будет проверено непосредственно. Затем будет показано, что все возможности, когда косые градиенты линейно зависимы, сводятся к этим или же приводят к точке $(0, 0)$.

1) $S_1 = S_3 = 0$. Отсюда следует что $Q_2 = S_3 R_1 - S_1 R_3 = 0$. При этом матрица приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_1 & 0 & S_2 A & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 \\ 0 & Q_1 B & 0 & S_2 A B & 0 & -2\alpha S_2 Q_1 B \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $sgrad H$ и $sgrad K$ в этом случае линейно зависимы, так как они просто пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, равным B .

Легко проверить, что зависимость h и k выражается следующим образом:

$$k = \alpha^2 g^2 - \alpha h + \kappa h^2$$

Выясним, в каких пределах меняется h при $\kappa > 0$. Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} S_2 R_2 = g, \\ \alpha S_2^2 - S_2 R_1 = h, \\ \kappa S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases}$$

Она имеет решение $\Leftrightarrow \frac{g^2}{S_2^2} + \frac{(h - \alpha S_2^2)^2}{S_2^2} \leq 1 - \kappa S_2^2$.

Обозначим S_2^2 через y . Нужно, чтобы следующее неравенство имело неотрицательные решения:

$$(\alpha^2 + \kappa)y^2 - (2\alpha h + 1)y + g^2 + h^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D = (2\alpha h + 1)^2 - 4(\alpha^2 + \kappa)(g^2 + h^2) \geq 0, \\ 2\alpha h + 1 \geq 0. \end{cases}$$

При $\kappa > 0$: $\frac{1}{2\kappa}(\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4g^2\kappa)}) \leq h \leq \frac{1}{2\kappa}(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4g^2\kappa)})$. В пределе при $\kappa \rightarrow +0$ получаем: $h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}$.

При $\kappa = -1$ имеем: $h \geq -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}}{2}$.

2) $S_2 = S_3 = 0$. Отсюда следует, что $Q_1 = S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0$. Матрица косых градиентов переписется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_1 B}{\alpha} & -2\frac{\kappa}{\alpha} S_1 Q_2 \\ \alpha Q_2 A & 0 & 0 & 0 & -S_1 B A & 2\kappa \frac{\alpha}{S_1} Q_2 A \end{pmatrix}.$$

При этом k выражается через h следующим образом:

$$k = -\alpha^2 h^2 - \alpha h - \kappa g^2$$

При $\kappa > 0$: $-\frac{1}{2\alpha\kappa}(\sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4g^2\kappa)} + 1) \leq h \leq \frac{1}{2\alpha\kappa}(\sqrt{(\alpha^2 + \kappa)(1 - 4g^2\kappa)} - 1)$. При $\kappa \rightarrow +0$ правая и левая часть стремятся к $\pm\infty$, т.е. h – любое. Аналогично получаем, что при $\kappa < 0$ h – любое.

3) $Q_1 = 0$, $A = 2\alpha Q_3 - q = 0$. В этом случае $sgrad K = 0$.

$$k = \frac{1}{4} - \kappa g^2$$

При $\kappa = 0$ имеем: $q = -1 \Rightarrow Q_3 = -\frac{1}{2\alpha}$. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} Q_2^2 + Q_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - g^2, \\ S_2 Q_2 - \frac{1}{2\alpha} S_3 = 0. \end{cases}$$

Выясним, в каких пределах меняется h .

$h = \alpha S_2^2 + Q_3 = \alpha S_2^2 - \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow h \geq -\frac{1}{2\alpha}$.

4) $Q_2 = 0$, $B = \alpha q - 2Q_3 = 0$

$$k = \alpha^2(g^2 - \frac{1}{4\kappa})$$

$$Q_1^2 + \frac{\alpha^2 q^2}{4} = \frac{\alpha^2 - 1}{4} - g^2 \Rightarrow Q_1 = q^2 \frac{1 - \alpha^2}{4} - \frac{1}{4} - g^2 < 0. \text{ Что невозможно.}$$

5)

$$\begin{cases} (2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 = S_1 S_2 A, \\ (2\kappa S_1 S_3 + \alpha Q_1)Q_2 = S_1 S_2 B, \\ S_1 S_2 AB \neq 0. \end{cases}$$

При $\kappa = 0$ эта система превращается в следующую:

$$\begin{cases} S_1 S_2 + Q_1 Q_2 = 0, \\ S_1 Q_3 + S_3 Q_1 = 0 \\ S_1 S_2 AB \neq 0. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения Q_2 , из второго $-S_3$ и подставляя в тождество $\langle S, Q \rangle = 0$, получаем: $S_2^2 = Q_1^2 + Q_3^2$. Отсюда $k = -\alpha h$ и $h \geq -\frac{1}{4\alpha}$.

В случае $\kappa = -1$ $(k + \alpha h)^2 + 4g^2 \alpha^2 h^2 = 0$, что невозможно.

Теперь докажем, что мы перечислили все нетривиальные случаи, когда косые градиенты H и K линейно зависимы. Остальные (тривиальные) случаи линейной зависимости приводят к точке $(0, 0)$.

Обозначим через Δ_{ij} миноры 2×6 матрицы $\begin{pmatrix} sgrad H \\ sgrad K \end{pmatrix}$.

Приравняв миноры Δ_{13} и Δ_{23} к нулю, получаем следующее:

$$\Delta_{13} = 0 \Rightarrow (\kappa^2 + \alpha)Q_2[(2\alpha S_2 S_3 - Q_2)Q_1 - S_1 S_2 A] = 0$$

$$\Delta_{23} = 0 \Rightarrow (\kappa^2 + \alpha)Q_1[(2\kappa S_1 S_3 + \alpha Q_1)Q_2 - S_1 S_2 B] = 0.$$

Мы получили следующую альтернативу: либо Q_1 или Q_2 равно 0, либо выполнено 5). Разберемся теперь с тем, что происходит, когда Q_1 или Q_2 равно 0.

I. $Q_1 = 0, A \neq 0$ (случай $Q_1 = 0, A = 0$ разобран в 3). Из $\Delta_{36} = 0$ следует, что $S_1 S_3 Q_2 = 0$ (если $B = 0$ и $Q_2 \neq 0$, то $S_1 = 0$). Рассмотрим различные случаи:

1) $S_1 = 0, S_3 \neq 0$ ($S_1 = S_3 = 0$ соответствует 1). В этом случае ненулевым может быть только минор Δ_{13} . $Q_3 = -S_2 R_1, Q_2 = S_3 R_1$.

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} 2\alpha S_2 S_3 - Q_2 & S_2 A \\ \alpha Q_2 A & A(2(S_3 Q_2 - S_2 Q_3) + \alpha q S_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_3(2\alpha S_2 - R_1) & S_2(2\alpha Q_3 - q) \\ \alpha S_3 R_1 & 2R_1(S_3^2 + S_2^2) + \alpha q S_2 \end{vmatrix} = \\ &= (2\alpha S_2 - R_1)(2R_1(S_2^2 + S_3^2) + \alpha q S_2) + \alpha S_2 R_1(2\alpha S_2 R_1 + q) = -2(S_2^2 + S_3^2)(R_1 - \alpha S_2)^2 - 2\alpha^2 S_1^2(R_2^2 + R_3^2) = 0 \end{aligned}$$

а) $S_2 = 0, R_1 = 0. Q_1 = 0 \Rightarrow R_2 = 0, h = k = 0.$

б) $R_1 - \alpha S_2 = 0, R_2 = R_3 = 0 \Rightarrow h = k = 0.$

2) $S_3 = 0, S_1 \neq 0, S_2 \neq 0 \Rightarrow Q_2 = 0$ и $B = 0$. Этот случай уже разобран нами.

3) $Q_2 = 0, \Delta_{25} = 0, \Delta_{15} = 0 \Rightarrow S_1 S_3 = 0, S_2 S_3 = 0$. Одновременно из равенства нулю минора Δ_{35} следует, что $S_1 S_2 = 0$. Но случаи $S_1 = S_3 = 0$ и $S_2 = S_3 = 0$ нами уже исследовались. Значит, $S_1 = S_2 = 0$. $Q_1 = S_2 R_3 - S_3 R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 2, Q_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 0$. Следовательно, $Q_3 = 0$ и $h = k = 0$.

II. $Q_2 = 0, B \neq 0$ ($Q_2 = B = 0$ соответствует 4). Аналогично **I** получаем 2 возможности:

1) $S_2 = 0, S_3 \neq 0$ ($S_2 = S_3 = 0$ разобран в 2).

а) $S_1 = R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 0, h = k = 0,$

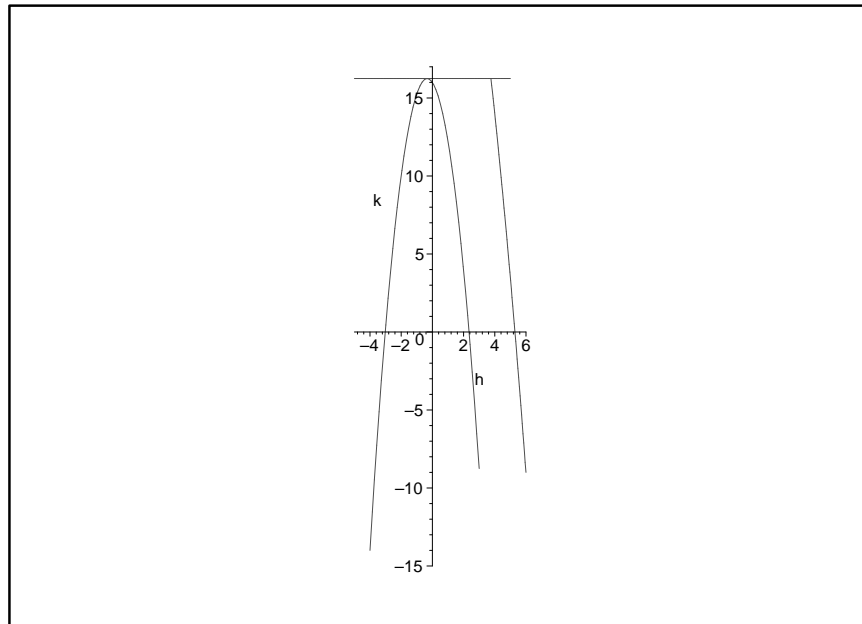
б) $S_1 + \alpha R_2 = 0, R_1 = R_3 = 0 \Rightarrow h = k = 0.$

2) $S_3 = 0, S_1 \neq 0, S_2 \neq 0 \Rightarrow Q_1 = 0$ и $A = 0$. Этот случай уже разобран нами.

Итак, бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова на $so(3, 1)$ при $\kappa = -1$ и $\alpha > 1$ состоит из прямой $k = g^2 + \frac{1}{4}$, параболы $k = -\alpha^2 h^2 - \alpha h + g^2$ и куска параболы $k = -h^2 - \alpha h + \alpha^2 g^2$ при $h \geq -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha^2 - 1)(4g^2 + 1)}}{2}$.

Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова на $e(3)$ состоит из лучей $k = \alpha^2 g^2 - \alpha h, h \geq \frac{4\alpha^2 g^2 - 1}{4\alpha}, k = \frac{1}{4}, h \geq -\frac{1}{2\alpha}, k = -\alpha h, h \geq -\frac{1}{4\alpha}$ и параболы $k = -\alpha^2 h^2 - \alpha h$.

На рисунке изображена бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Соколова на $so(3, 1)$.



Список литературы

- [1] Poincare H. Bull. Astr, 1910, V.27, 321-356.
- [2] Болсинов А. В. , Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Ижевск, 1999.
- [3] Борисов А. В. , Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [4] Борисов А. В. , Мамаев И. С. , Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на $so(4)$. Доклады РАН, 2001, 381(5), 614-615.

- [5] Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова. Теоретическая и математическая физика, 2003, 134(2), 207-226.
- [6] Соколов В. В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$. Доклады РАН, 2004, 69(1), 108-111.
- [7] Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа. Теоретическая и математическая физика, 2001, 129(1), 31-37.
- [8] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Факториал, 1995.
- [9] Хагигатдуст Г. Топология слоения Лиувилля для новых интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2005.