

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

Дипломная работа на тему:

**Топология слоений Лиувилля интегрируемого случая
Матвеева-Дуллина**

Выполнил: студент 5 курса
Москвин Андрей Юрьевич
Группа 503

Научный руководитель: профессор МГУ
Фоменко Анатолий Тимофеевич

Москва, 2007

§1. Введение

В работах [1], [2], [3] А.Т. Фоменко, Х. Цишангом, А.В. Болсиновым, А.А. Ошемковым была развита теория о топологической классификации интегрируемых случаев с двумя степенями свободы. Был построен инвариант, который помогает классифицировать интегрируемые случаи с двумя степенями свободы с точностью до лиуиллеовой эквивалентности. В [12] В.С. Матвеевым и Х.Р. Дуллиным найден новый интегрируемый случай.

В данной работе для случая Матвеева-Дуллина найдено множество критических точек и множество критических значений отображения момента, топология изоэнергетических поверхностей, особые точки векторного поля и их тип, количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы. На компьютере посчитаны индексы критических окружностей, и сделан вывод о типе грубых молекулах интегрируемого случая.

§2. Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях

2.1. Основные понятия симплектической геометрии. Ознакомьтесь с доказательствами утверждений из этого раздела можно в любой книге по симплектической геометрии. Допустим в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скобкой Пуассона на многообразии M^n называется отображение $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M^n) \times C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ со свойствами:

- 1) $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — линейность,
- 2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ — кососимметричность,
- 3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ — тождество Якоби.

Многообразии, снабженное скобкой Пуассона, будем называть пуассоновым.

Таким образом, все гладкие функции на пуассоновом многообразии со структурой скобки образуют алгебру Ли. Скобка Пуассона относительно каждой из переменных является оператором дифференцирования в пространстве функций $C^\infty(M^n)$. Поэтому в локальных координатах она принимает упрощенный вид:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В любых локальных координатах (x^1, x^2, \dots, x^n) скобка Пуассона-Ли может быть записана в виде: $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \{x^i, x^j\}$.

Нетрудно проверить, функции $\pi^{ij} = \{x^i, x^j\}$, определяемые в локальных координатах на многообразии, образуют кососимметрический тензор типа $(2, 0)$. Этот тензор называется *тензором Пуассона*. И, фактически, определить скобку Пуассона означает определить тензор Пуассона. Только следует понимать, что не всякий кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ может быть тензором Пуассона некоторой скобки. Этому препятствует тождество Якоби. Кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ на многообразии является тензором Пуассона некоторой скобки тогда и только тогда, когда

$$\pi^{ij} \frac{\partial \pi^{qr}}{\partial x^j} + \pi^{rj} \frac{\partial \pi^{iq}}{\partial x^j} + \pi^{qj} \frac{\partial \pi^{ri}}{\partial x^j} = 0. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Симплектической структурой на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма ω , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$
- 2) ω не вырождена в каждой точке многообразия, т.е. в любых локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ — матрица формы.

Многообразии, снабженное симплектической структурой, называется *симплектическим*.

Очевидно, что при таких ограничениях симплектическое многообразие может быть лишь четномерно. Коэффициенты матрицы 2-формы ω образуют кососимметрический тензор типа $(0, 2)$ с двумя нижними индексами. Поскольку симплектическая форма невырождена, ее можно обратить и получить кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ уже с двумя верхними индексами ω^{ij} . Следовательно, на симплектическом многообразии можно ввести скобку следующим образом: $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \omega^{ij}$. Несложно показать, что условие замкнутости симплектической формы в точности совпадает с условием (1). Таким образом, любое симплектическое многообразие является пуассоновым.

Примером пуассонова многообразия может служить любая коалгебра алгебры Ли. Если (x_1, x_2, \dots, x_n) — координатные функции в коалгебре, а c_{ij}^k — структурные константы алгебры, то скобку Пуассона можно ввести вполне естественным образом: $\{f, g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$. Тожество Якоби выполняется автоматически, поскольку c_{ij}^k — структурные константы некоторой алгебры Ли (не будем приводить здесь все выкладки). Тензор Пуассона коалгебры будет $c_{ij}^k x_k$. Вообще говоря, тензор Пуассона должен иметь два верхних индекса, но в коалгебре принято координатные функции писать с нижними индексами, поэтому и получился тензор с двумя нижними индексами.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями алгебр Ли. Хотя бы с такими, как присоединенное, коприсоединенное действие группы, орбиты действия, форма Кириллова. Выше был приведен классический пример пуассонова многообразия. Следующее утверждение помогает ввести некоторый полезный для приложений класс симплектических многообразий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Орбиты коприсоединенного действия группы Ли на своей коалгебре G^* все являются симплектическими многообразиями с канонической 2-формой ω — формой Кириллова. Форма Кириллова есть ограничение тензора Пуассона коалгебры на орбиту. Скобку Пуассона на этих многообразиях можно считать следующим образом: если f, g — две гладкие функции на орбите, продолжаем их произвольным образом до гладких функций \tilde{f}, \tilde{g} на всей коалгебре, тогда $\{f, g\}(x) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(x)$*

Тензор Пуассона π^{ij} является тензором с верхними индексами, а для тензоров с верхними индексами, вообще говоря, нет естественного определения ограничения с многообразия на подмногообразии. В отличие от тензоров с нижними индексами. Но в случае пуассоновых многообразий есть общий метод, который все же позволяет провести ограничение тензора Пуассона на симплектические листы этого пуассонова многообразия. В нашем случае — на орбиты. Причем это ограничение является невырожденным кососимметрическим тензором ω^{ij} типа $(2, 0)$ уже на орбите, а 2-форма, заданная матрицей ω_{ij} , является замкнутой. Сам метод ограничения тензора Пуассона на орбиту описан в [5]. В дальнейшем в этой работе понадобится лишь знание о том, как устроена скобка Пуассона на орбитах. Причем утверждение 2 вполне достаточно, то есть сам метод ограничения тензора Пуассона с коалгебры на орбиту не потребуется.

2.2. Коалгебра Ли $e(3)^*$. Применим все введенные выше конструкции к коалгебре Ли $e(3)^*$ группы движений трехмерного пространства. Это шестимерная коалгебра. В ней можно ввести уже стандартные координаты L_x, L_y, L_z, x, y, z , в которых тензор Пуассона примет вид:

$$\|\pi^{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y & 0 & z & -y \\ -L_z & 0 & L_x & -z & 0 & x \\ L_y & -L_x & 0 & y & -x & 0 \\ 0 & z & -y & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Переменные L_x, L_y, L_z принято называть *импульсами*. По тензору Пуассона можно понять, как устроена

скобка Пуассона на этой коалгебре. На коалгебре $e(3)^*$ есть две функции Казимира, то есть функции, коммутирующие относительно скобки со всем гладкими функциями на коалгебре. Это $I_1 = x^2 + y^2 + z^2$ — ее принято называть геометрическим интегралом, и $I_2 = xL_x + yL_y + zL_z$ — интеграл площадей. А также для коалгебры $e(3)^*$ верно следующее утверждение, показывающее, как она расслаивается на симплектические многообразия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При $c_1 > 0$: $M_{c_1, c_2}^4 = \{I_1 = c_1, I_2 = c_2\}$ — орбита коприсоединенного действия группы.

Многообразия M_{c_1, c_2}^4 , $c_1 > 0$ являются четырехмерными симплектическими многообразиями, диффеоморфными кокасательному расслоению к двумерной сфере T^*S^2 .

2.3. Интегрируемость по Лиувиллю. Рассмотрим динамические уравнения на пуассоновых многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Векторное поле v на многообразии M^n , снабженном структурой скобки Пуассона, называется гамильтоновым с гамильтонианом $H \in C^\infty(M^n)$, если для любой $f \in C^\infty(M^n)$: $\{f, H\} = v(f)$. В этом случае пишут $v = \text{sgrad } H$.

Или в локальных координатах

$$v^i = \pi^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} = \{x^i, H\}.$$

Гамильтонова динамическая система на многообразии, снабженном пуассоновой структурой, имеет вид $\dot{x} = \text{sgrad } H$. Или в локальных координатах $\dot{x}^i = \{x^i, H\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для интегралов гамильтоновых векторных полей верно следующее: F является интегралом гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$. В таком случае гамильтониан гамильтонова векторного поля всегда является интегралом этого поля. При этом скобка двух интегралов опять будет интегралом. Действительно, из тождества Якоби $\{\{G, F\}, H\} = \{F, \{H, G\}\} + \{G, \{F, H\}\} = 0$. Таким образом, множество интегралов гамильтонова векторного поля является подалгеброй алгебры Ли гладких функций. Эта подалгебра является максимальной, то есть непополняемой, и определяется одним гамильтонианом.

Перейдем к рассмотрению симплектических многообразий и гамильтоновых векторных полей на них.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гамильтонова система v на симплектическом многообразии M^{2n} называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, f_2, \dots, f_n таких, что:

- 1) f_1, f_2, \dots, f_n — первые интегралы v ,
- 2) они функционально независимы на M^{2n} , то есть почти всюду на M^{2n} градиенты линейно независимы,
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ для любых i и j ,
- 4) векторные поля полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Оказывается, если на симплектическом многообразии M^{2n} есть вполне интегрируемая гамильтонова система, то в "компактном" случае это симплектическое многообразие может быть расслоено на n -мерные торы и особые слои. Об этом говорит нам следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Лиувилля). Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и $T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ — регулярная неособая поверхность уровня интегралов f_1, f_2, \dots, f_n . Тогда:

- 1) Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.

2) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

Ознакомиться с более подробной формулировкой и доказательством теоремы Лиувилля можно, допустим, в [3, том 1, глава 1].

2.4. Основные интегрируемые случаи. Вернемся к четырехмерным симплектическим многообразиям $M_{c_1, c_2}^4, c_1 > 0$ из раздела 2.2. При рассмотрении гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, т.е. при $n = 2$, для интегрируемости по Лиувиллю достаточно существование еще одного дополнительного, не зависящего от гамильтониана, интеграла.

Уравнения Эйлера-Пуассона движения твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести могут быть записаны в гамильтоновом виде на симплектических многообразиях вида $M_{c_1, c_2}^4, c_1 > 0$. Как известно из классической механики, в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой фазовое пространство шестимерно. Ввиду того, что такая задача всегда имеет два интеграла — геометрический и интеграл площадей — фазовое пространство может быть редуцировано до четырехмерного. Более подробно процесс сведения задачи от шестимерной до четырехмерной можно прочитать в [3, том 2, глава 5]. Известно, что задача о движении твердого тела с закрепленной точкой в центре масс и с разными моментами инерции, что соответствует известному из классической механики случаю Эйлера (1750 год), может быть записана в гамильтоновом виде на симплектическом многообразии $M_{1, g}^4$, где $g \in \mathbb{R}$. Гамильтониан при этом будет иметь вид

$$H = \frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C},$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$ все положительны и попарно различны. В случае Эйлера имеется дополнительный интеграл $F = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Функции H и F коммутируют относительно объемлющей скобки Пуассона на $e(3)^*$. Ввиду утверждений 2 и 3 ограничения $H|_{M_{1, g}^4}$ и $F|_{M_{1, g}^4}$ коммутируют уже на симплектическом многообразии $M_{1, g}^4$. То есть мы получили пример вполне интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. При этом совместные поверхности уровня интегралов H и F на $M_{1, g}^4$ компактны. Более того, даже *изоэнергетические поверхности* $Q_h^3 = \{\xi \in M_{1, g}^4 | H(\xi) = h\}$ компактны. А потому верны предположения теоремы Лиувилля, и поэтому многообразия $M_{1, g}^4$ расслаиваются на торы и на особые слои.

Случай Лагранжа (1788 год) на $M_{1, g}^4$. Движение осесимметричного твердого тела в поле силы тяжести с точкой крепления на оси симметрии.

$$H = \frac{L_x^2}{2A} + \frac{L_y^2}{2A} + \frac{L_z^2}{2B} + az, \quad F = L_z.$$

Случай Ковалевской (1899 год) на $M_{1, g}^4$. Движения твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии.

$$H = \frac{L_x^2}{2A} + \frac{L_y^2}{2A} + \frac{L_z^2}{A} + a_1x + a_2y,$$

$$F = \left(\frac{L_x^2 - L_y^2}{2A} + a_2y - a_1x \right)^2 + \left(\frac{L_x L_y}{A} - a_1y - a_2x \right)^2.$$

Здесь интеграл F — четвертой степени по импульсам. В этом случае моменты инерции тела A_1, A_2, A_3 удовлетворяют условию $A_1 = A_2 = 2A_3$, и центр масс тела расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела.

Случай Горячева-Чаплыгина (1899 год) имеет место лишь на $M_{1, 0}^4$.

$$H = \frac{L_x^2}{2A} + \frac{L_y^2}{2A} + \frac{2L_z^2}{A} + a_1x + a_2y,$$

$$F = L_z(L_x^2 + L_y^2) - Az(a_1L_x + a_2L_y).$$

Здесь F — третьей степени. В этом случае $A_1 = A_2 = 4A_3$, и центр масс расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела. Скобка Пуассона функций H и F выглядит так:

$$\{H, F\} = (xL_x + yL_y + zL_z)(a_2L_x - a_1L_y).$$

Отсюда видно, что функции H и F не находятся в инволюции на всех 4-многообразиях $M_{1,g}^4$, поэтому система интегрируема лишь на одной специальной 4-поверхности $\{I_1 = 1, I_2 = 0\}$, то есть на $M_{1,0}^4$. Это — случай так называемой частной интегрируемости, отвечающий нулевому значению интеграла площадей I_2 .

Эти четыре интегрируемых случая в задаче о движении твердого тела являются классическими. Они допускают разного рода обобщения, но описание таких случаев не входит в задачи данной работы.

§3. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

3.1. Лиувиллева эквивалентность. В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматриваются несколько типов их изоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Две интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) ((Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2)) *Лиувиллево эквивалентны*, если существует диффеоморфизм $\varphi : M_1^4 \rightarrow M_2^4$ ($\varphi : Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$), переводящий слой Лиувилля одной системы в слой другой.

Это отношение эквивалентности можно несколько ослабить. В результате возникает понятие грубой лиувиллевой эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две интегрируемые гамильтоновы системы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) ((Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2)) называются *грубо лиувиллево эквивалентны*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

3.2. Изоэнергетические поверхности. Изоэнергетическими поверхностями называются трехмерные многообразия вида $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$. Сразу ограничимся рассмотрением лишь тех h , при которых, во-первых, Q_h^3 компактно и, во-вторых, $dH \neq 0$ всюду на Q_h^3 . Тем самым мы гарантируем, что Q_h^3 является гладким компактным подмногообразием в M^4 , а векторное поле $v = \text{sgrad } H$ нигде не обращается в нуль.

Поскольку гамильтониан является интегралом гамильтонова векторного поля, вектор косоградиента $v = \text{sgrad } H$ направлен вдоль изоэнергетической поверхности. В интегрируемом случае на изоэнергетической поверхности можно рассмотреть поток косоградиента дополнительного интеграла $w = \text{sgrad } F$. Это векторное поле опять же сохраняет Q_h^3 , поскольку в локальных координатах $w(H) = (\omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j}) \frac{\partial H}{\partial x^i} = \{H, F\} = 0$. Таким образом, на неособых изоэнергетических поверхностях можно рассматривать два векторных поля, а именно $v = \text{sgrad } H$ и $w = \text{sgrad } F$. Причем, во-первых, первое векторное поле нигде на Q_h^3 не обращается в нуль, во-вторых, критическим точкам отображения момента будут соответствовать те точки, где зависимы векторные поля v и w , то есть $w = \lambda v$. *Отображением момента* называется отображение $H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$. Для топологического исследования интегрируемого случая с двумя степенями свободы полезно следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 [3, том 1, глава 1]. *Интеграл F не может иметь изолированных критических точек на неособой Q_h^3 . В случае компактной Q_h^3 критические точки F организованы в критические окружности. Каждая критическая окружность проектируется в одну точку на бифуркационной диаграмме. Параметр λ пропорциональности $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен вдоль критической окружности.*

Пусть $x \in Q_h^3$ — критическая точка дополнительного интеграла F на изоэнергетической поверхности. Тогда $d^2F(x)$ — квадратичная форма, вырожденная в направлении $v = \text{sgrad } H$. Поэтому предполагать, что дополнительный интеграл F является функцией Морса, бессмысленно. Однако в случае динамических систем существует аналог этого понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Дополнительный интеграл F называется *интегралом Ботта* на данной изоэнергетической поверхности Q^3 , если в каждой его критической точке гессиан имеет ранг, равный двум.

Для каждой невырожденной критической окружности отображения момента можно ввести понятие индекса. Возьмем точку на критической окружности, и рассмотрим сигнатуру квадратичной формы дополнительного интеграла F как функции на изоэнергетической поверхности. Эта сигнатура не зависит от выбора точки на окружности и может принимать одно из следующих трех значений: $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ или $(-1, -1, 0)$. Как уже было замечено, квадратичная форма F вырождена. *Индексом невырожденной критической окружности* называется количество отрицательных собственных значений квадратичной формы d^2F .

3.3. Бифуркации торов Лиувилля. Изоэнергетическая поверхность Q^3 представляет собой однопараметрическое семейство совместных поверхностей уровня T_ξ интегралов системы H и F , параметризованное значением второго интеграла F . Если стянуть каждую компоненту связности в точку, то мы получим некоторый однопараметрический граф — базу слоения Лиувилля (см. Рис. 1). Причем вершинам графа будут соответствовать критические слои слоения.

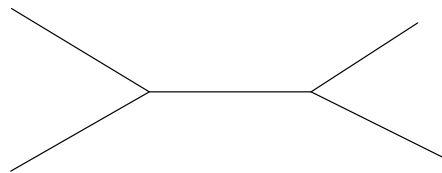


Рисунок 1.

Прообразом каждого открытого ребра графа является многообразие, диффеоморфное $T^2 \times (0, 1)$. Вершинам графа соответствуют сингулярные слои. Типичной является ситуация, когда при переходе через критический уровень число компонент связности T_ξ меняется.

Будем рассматривать трехмерную окрестность особого слоя в Q^3 . Оказывается, что в боттовском случае с точностью до лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировать количество критических окружностей на сингулярном слое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется *3-атомом*.

По сути, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой лиувиллева слоения, содержащего ровно один сингулярный слой. Край такого многообразия состоит из некоторого числа торов Лиувилля. Количество критических окружностей на сингулярном слое атома называется *сложностью 3-атома*. В [3] изложен алгоритм, позволяющий явно перечислить все атомы заданной сложности. Принято 3-атомы обозначать заглавными латинскими буквами с натуральными индексами и звездочками. Три наиболее простых и наиболее типичных 3-атома (A , A^* и B) изображены на Рис. 2.

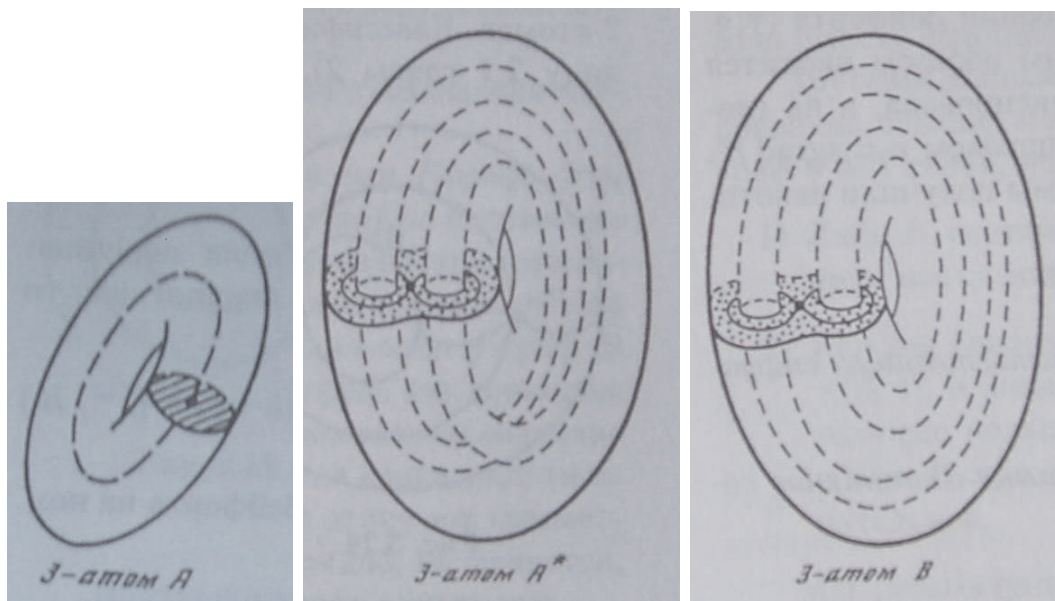


Рисунок 2

Если теперь в вершинах графа на Рис.1 поставить подходящий 3-атом, то мы получим так называемую *грубую молекулу*. Грубая молекула несет информацию о базе слоения Лиувилля, а также позволяет локально восстановить его структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев. Справедлива

ТЕОРЕМА 2 (А.Т. Фоменко [3]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) с ботовскими дополнительными интегралами F_1 и F_2 грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

Полное и последовательное доказательство фактов, изложенных в этом пункте, можно найти в [3].

3.4. Бифуркационная диаграмма отображения момента. Рассмотрим бифуркационную диаграмму на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ некоторой интегрируемой по Лиувиллю системы. Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость на несколько камер. В прообразе каждой точки камеры лежит несколько торов Лиувилля, если у точки, конечно же, есть прообразы. Для точек бифуркационной диаграммы, отвечающим критическим точкам отображения момента, в прообразе лежат сингулярные слои. Под *рангом отображения момента в точке* принято понимать ранг дифференциала отображения момента в этой точке.

Поскольку многообразие M_{c_1, c_2}^4 является алгебраическим при $c_1 > 0$, как поверхность уровня двух многочленов I_1 и I_2 , множество критических точек отображения $H \times F$ на M_{c_1, c_2}^4 можно найти следующим образом. Находим точки, в которых зависимы градиенты функций I_1, I_2, H и F как функций в $e(3)^*$. Потом получившееся множество точек ограничиваем на M_{c_1, c_2}^4 , тем самым получаем множество критических точек отображения $H \times F$ на M_{c_1, c_2}^4 . Обоснование этого метода можно прочитать в [3, том 2, глава 5]. Множество критических значений отображения — это просто образ множества критических точек при этом отображении.

Второй способ поиска критических точек отображения момента может показаться похожим на первый, но иногда этот способ бывает проще осуществить. А именно, мы ищем вектора косых градиентов интегралов H и F как функций на M_{c_1, c_2}^4 , но в координатах объемлющего шестимерного пространства $e(3)^*$. В силу утверждения 2, $sgrad H = (\{L_x, H\}, \{L_y, H\}, \{L_z, H\}, \{x, H\}, \{y, H\}, \{z, H\})$. Аналогичное выражение получаем для $sgrad F$. Теперь опять же смотрим точки, в которых зависимы $sgrad H$ и $sgrad F$ в объемлющем пространстве,

и ограничиваем это множество на M_{c_1, c_2}^4 . Получаем то же самое множество критических точек отображения момента.

§4. Топология слоений Лиувилля интегрируемого случая Матвеева-Дуллина

4.1. Интегрируемый случай. В работе [12] найден новый интегрируемый случай на одной из орбит коприсоединенного действия группы $E(3)$, а именно на многообразии $M^4 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, xL_x + yL_y + zL_z = 0\}$ в координатах, описанных выше. Положим $A, c, s \in \mathbb{R}$, где параметры $s > 1$, $A > 0$. Определим функции

$$W(z) = z + s, P(z) = 3z^2 + 4sz + 1, G(z) = \frac{P(z)}{(2W(z))^2}.$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H := \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2 + (1 + G(z))L_z^2) - \frac{Ax}{\sqrt{W(z)}} + \frac{c}{W(z)}, \quad (3)$$

а дополнительный первый интеграл

$$F := 2HL_z - L_z^3 + \frac{A}{\sqrt{W(z)}}(xL_z + 2W(z)L_x). \quad (4)$$

Следует особо отметить, что данная система имеет интеграл третьей степени по импульсам так же как и классический случай Горячева-Чаплыгина. Согласно [11], этот случай вместе со случаем Горячева-Чаплыгина принадлежит четырехпараметрическому семейству интегрируемых случаев на $M_{1,0}^4$ с интегралом третьей степени по импульсам.

4.2. Топология изоэнергетических поверхностей. Для поиска критических точек векторного поля существуют те же самые два способа, что и при поиске критических точек отображения момента. Либо находим точки, в которых зависимы градиенты функций I_1, I_2 и H как функций объемлющего шестимерного пространства, потом ограничиваем это множество на M_{c_1, c_2}^4 . Либо считаем вектор косога градиента H как показано выше, приравниваем все его компоненты к нулю и опять же ограничиваем получившееся множество точек на M_{c_1, c_2}^4 .

Функция на многообразии называется *функцией Морса* или *морсовской функцией*, если все ее критические точки невырождены в том смысле, что в этих точках невырождены матрицы вторых производных. Такое определение вполне корректно. Ну действительно, гессиан функции в критической точке, как это хорошо известно, является тензором типа $(0, 2)$, а поэтому условие его невырожденности не зависит от выбора координат на многообразии. Основная теорема теории функций Морса.

ТЕОРЕМА 3 (Лемма Морса). Пусть x_0 — критическая точка функции Морса f на многообразии M^n . Тогда существуют такие локальные координаты (x^1, x^2, \dots, x^n) в окрестности точки x_0 , что функция f примет вид:

$$f(x) = f(x_0) - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 - \dots - (x^k - x_0^k)^2 + (x^{k+1} - x_0^{k+1})^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2$$

для некоторого целого k от 0 до n .

Число k , очевидным образом, для каждой критической точки определено однозначно — оно определяется сигнатурой матрицы гессиана функции. При этом такую точку будем называть седловой типа $(k, n - k)$.

Вернемся к интегрируемому случаю.

ТЕОРЕМА 4. Множество критических точек гамильтониана случая Матвеева-Дуллина на $M_{1,0}^4$ можно представить в виде

$$\begin{cases} y = 0, \\ L_x = L_y = L_z = 0, \\ A(x^2 + 2zW(z)) - \frac{2cx}{\sqrt{W(z)}} = 0. \end{cases}$$

В случае $c = 0$ система сильно упрощается, и поэтому можно добавить, что при $c = 0$

- Интеграл энергии H на M^4 имеет только два критических значения:

$$h_1 = -A\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})},$$

$$h_2 = A\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})},$$

• Критические точки ξ_1 и ξ_2 , отвечающие критическим значениям h_1 и h_2 , обе невырождены, то есть интеграл энергии H на M^4 является функцией Морса.

- Критические точки ξ_1 и ξ_2 являются точками ранга ноль отображения момента.
- Критическая точка, отвечающая значению h_1 , — точка глобального минимума.
- Критическая точка, отвечающая значению h_2 , — седловая точка типа $(2, 2)$.
- Неособые изоэнергетические поверхности имеют следующий топологический тип:

$$\forall h \in (-\infty, h_1) Q_h^3 = \emptyset,$$

$$\forall h \in (h_1, h_2) Q_h^3 \cong S^3,$$

$$\forall h \in (h_2, \infty) Q_h^3 \cong \mathbb{R}P^3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критические точки гамильтониана — это те точки нашего алгебраического многообразия M^4 , где зависимы градиенты функций H, I_1 и I_2 как функций в объемлющем пространстве.

$H :$	L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
$I_1 :$	0	0	0	$2x$	$2y$	$2z$
$I_2 :$	x	y	z	L_x	L_y	L_z

(5)

Предположим, что $y \neq 0$. Преобразуем таблицу:

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
x	y	z	$L_x - \frac{x}{y}L_y$	$L_z - \frac{z}{y}L_y$

(6)

Определитель 1-ого и 2-ого столбцов последней таблицы должен равняться нулю. То есть $yL_x - xL_y = 0$. Следовательно, определитель 2-ого и 4-ого столбцов не равен нулю. Получили противоречие с зависимостью строк.

Если предположить, что $y = 0, L_y \neq 0$, то из 2-ого и 5-ого столбца таблицы (5) видно, что вторая строчка должна быть нулевой. Что не возможно, так как $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

В случае $y = 0, L_y = 0$ получаем упрощенную таблицу:

L_x	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
0	0	x	z
x	z	L_x	L_z

(7)

Полагаем $x = 0$, получаем $z = \pm 1, L_z = 0$. Из первого столбца таблицы следует, что $L_x = 0$, поскольку вторая и третья строчка таблицы (7), так же как и вторая и третья строчка таблицы (5), не зависимы на всем фазовом пространстве. Получаем, что определитель второго, третьего и четвертого столбцов не равен нулю. Противоречие.

Итак, остается следующее единственное допустимое соотношение на переменные $y = 0, L_y = 0, x \neq 0$. Упрощаем таблицу:

L_x	$(1 + G)L_z$	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} + \frac{Az}{x\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
x	z	$L_z - \frac{z}{x}L_x$

(8)

Зависимость строк эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + zL_z = 0, \\ \left(\frac{1}{1-z^2} + G\right)L_z = 0, \\ \frac{x}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}} + \frac{Az}{\sqrt{W}} - \frac{cx}{W^2} + GL_xL_z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Или уже в упрощенном виде:

$$\begin{cases} L_x = L_y = L_z = 0, \\ y = 0, \\ A(x^2 + 2zW) - \frac{2cx}{\sqrt{W}} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Теперь разберемся только с частным случаем, когда $c = 0$. Получаем две критические точки $\xi_{1,2} = (0, 0, 0, \pm x_0, 0, z_0)$, где $z_0 = -s + \sqrt{s^2 - 1}$, $x_0 = \sqrt{2 + 2s\sqrt{s^2 - 1} - 2s^2}$. Для обеих точек выполнено $y = 0$. Легко проверить, что в точках ξ_1 и ξ_2 градиенты функций F, I_1 и I_2 линейно зависимы. Следовательно, $dH|_{M^4}(\xi_{1,2}) = dF|_{M^4}(\xi_{1,2}) = 0$, и ранг отображения момента в этих точках равен нулю. Далее, подставляя точки в гамильтониан, получаем два критических значения.

ЛЕММА 1 (лемма 5.1 [3, том 2]). Пусть для точки $\xi_0 \in M_{c_1, c_2}^4$ выполнено условие:

$$\text{grad } H(\xi_0) = \lambda_1 \text{grad } I_1(\xi_0) + \lambda_2 \text{grad } I_2(\xi_0).$$

Тогда квадратичная форма, определяемая гессианом функции $\tilde{H} = H|_{M_{c_1, c_2}}$ в точке ξ_0 , является ограничением формы, определяемой матрицей $\mathbf{H} = d^2H - \lambda_1 d^2I_1 - \lambda_2 d^2I_2$ на касательное пространство $T_{\xi_0}M_{c_1, c_2}^4$.

В обеих критических точках выполнено следующее равенство $\text{grad}H = \lambda \text{grad}I_1$, где $\lambda = -\frac{A}{2x\sqrt{W(z)}}$. Воспользуемся леммой 1. В координатах L_x, L_y, L_z, x, y, z получаем.

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + G(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix}, \quad d^2I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве к M^4 в точках $\xi_{1,2}$ вектора

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} -z_0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix},$$

можно взять за базис. Тогда матрица $d^2\tilde{H}$ в этом базисе примет вид:

$$d^2\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2(\frac{1}{1-z^2} + G) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Итак, обе критические точки ξ_1 и ξ_2 невырождены, ξ_1 - локальный минимум, ξ_2 - седло индекса 2. Следовательно, $\forall h \in (h_1, h_2)$ $Q_h^3 \cong S^3$ — топологический тип вблизи точки минимума.

Теперь рассмотрим Q_h^3 при $h > h_2$. Заменяем $G(z)$ на $tG(z)$, тем самым введем еще один параметр $t \in [0, 1]$. Тогда, если найти критические значения нового гамильтониана, они будут те же h_1 и h_2 , поскольку при подсчете критических значений исходного гамильтониана от функции $G(z)$ нам потребовалось только одно свойство $\frac{1}{1-z^2} + G(z) > 0$, а оно сохранится после введения параметра. Следовательно неособые компактные поверхности в M^4 , $\{H_t = h\}$, диффеоморфны при $t \in [0, 1]$. При $t = 1$ получаем Q_h^3 , а при $t = 0$ имеем

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2h + \frac{2Ax}{\sqrt{W}}, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Топология новой поверхности и Q_h^3 одинаковы. Если взять $h > \max_{x^2+y^2+z^2=1} (\frac{Ax}{\sqrt{W}})$, то гладкой заменой $\vec{L} \rightarrow \frac{h + \frac{Ax}{\sqrt{W}}}{h} \vec{L}$ получаем еще одну поверхность

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2h, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Последняя поверхность уже диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$, а значит и Q_h^3 при $h > h_2$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$. Теорема 4 доказана. ■

4.3. Типы критических точек отображения момента ранга ноль. Пусть на (M^4, ω) задана интегрируемая система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F , а точка $\xi \in M^4$ такая, что $dH(\xi) = dF(\xi) = 0$. Оператор в $T_\xi M$ называется симплектическим, если он сохраняет форму $\omega|_\xi$. На $T_\xi M$ корректно определить два симплектических оператора $A_H := \Omega^{-1}d^2(H|_\xi)$ $A_F := \Omega^{-1}d^2(F|_\xi)$, порождающих в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Положение равновесия ξ называется невырожденным, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $sp(4, \mathbb{R})$.

Укажем эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$. Коммутативная подалгебра $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна, и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. Итак, сначала надо убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$ имеет попарно различные собственные значения (такой элемент называется регулярным элементом $sp(4, \mathbb{R})$).

Оба оператора A_H и A_F соответствуют стандартному представлению алгебры $sp(4, \mathbb{R})$. Это помогает классифицировать положения равновесия ранга ноль. В стандартном представлении $sp(4, \mathbb{R})$ собственные значения операторов разбиваются на пары вида $\lambda, -\lambda$. Поэтому невырожденные точки ранга ноль можно классифицировать по типу собственных значений регулярного элемента в алгебре Картана $K(H, F)$:

- 1) *центр-центр* — чисто мнимые корни $iA, -iA, iB, -iB$;
- 2) *центр-седло* — два вещественных и два мнимых корня $-A, A, iB, -iB$;
- 3) *седло-седло* — вещественные корни $-A, A, -B, B$;
- 4) *фокус-фокус* — чисто комплексные корни $A - iB, A + iB, -A + iB, -A - iB$.

Зная тип невырожденного положения равновесия, можно многое сказать о топологии слоения Лиувилля в его окрестности. Теоретическое обоснование классификации можно прочесть, например, в [3, том 1, глава 1].

Применительно к интегрируемому случаю Матвеева-Дуллина.

ТЕОРЕМА 5. *Для случая Матвеева-Дуллина на множестве параметров $s = 0$ для критических точек отображения момента ранга ноль верно следующее описание лиувиллева слоения:*

- ξ_1 — особая точка типа *центр-центр*, при $A \neq \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}$,
- ξ_2 — особая точка типа *фокус-фокус*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим симметрический тензор T_{ij} типа $(0, 2)$ на пуассоновом многообразии. Пусть M — симплектический лист пуассонова слоения, $\tilde{\pi}^{ij}$ — тензор Пуассона на нем. Хотим найти оператор A в TM , являющийся результатом поднятия индекса при помощи тензора $\tilde{\pi}^{ij}$ у тензора $T_{jk}|_M$ типа $(0, 2)$ на M . Из теоремы Вайнштайна об ограничении тензора Пуассона пуассонова многообразия на симплектические слои следует, что оператор A можно искать по следующему правилу: $A = \|(\pi^{ij} T_{jk})|_M\|$, где π^{ij} — тензор Пуассона на всем пуассоновом многообразии.

Рассуждения выше помогают выписать операторы A_H и A_F в критических точках. Для оператора A_H имеем: $A_H = \Omega^{-1} d^2(H|_\xi) = \|\pi^{ij}(d^2H - \lambda_1 d^2 I_1 - \lambda_2 d^2 I_2)_{jk}\|(\xi)$, где $\text{grad}H|_\xi = \lambda_1 \text{grad}I_1|_\xi + \lambda_2 \text{grad}I_2|_\xi$. Аналогично для оператора A_F .

В нашем случае $\text{grad}H|_{\xi_{1,2}} = -\frac{A}{x\sqrt{W}} \text{grad}I_1|_{\xi_{1,2}}$, $\text{grad}F|_{\xi_{1,2}} = \frac{2A\sqrt{W}}{x} \text{grad}I_2|_{\xi_{1,2}}$. Следовательно

$$\begin{aligned} \|\pi^{ij}(d^2H + \frac{A}{x\sqrt{W}} d^2 I_1)_{jk}\|(\xi_{1,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} - \frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Az}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Az}{x\sqrt{W}} + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{Az}{2W\sqrt{W}} + x(\frac{A}{x\sqrt{W}} - \frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x(1+G) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \|\pi^{ij}(d^2F - \frac{2A\sqrt{W}}{x} d^2 I_2)_{jk}\|(\xi_{1,2}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & \frac{A}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x} \\ -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2Az\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2Az\sqrt{W}}{x} + \frac{Ax}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Az}{\sqrt{W}} + x\left(\frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A\sqrt{W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2Az\sqrt{W}}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2Az\sqrt{W}}{x} - \frac{Ax}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Az}{\sqrt{W}} + x\left(\frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{A\sqrt{W}}{x}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A\sqrt{W} & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось ограничить эти два оператора на $TM|_{\xi_{1,2}}$. В базисе $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ операторы A_H и A_F принимают вид:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1 + x^2G & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_F = \begin{pmatrix} 0 & -2Ax\sqrt{W} & 0 & 0 \\ \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2Ax\sqrt{W} \\ 0 & 0 & \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим оператор

$$A_H - \frac{x}{2A\sqrt{W}}A_F = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ -1 & 0 & -\frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1 + x^2G & 0 & x^2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Его характеристический многочлен имеет вид: $\lambda^4 + 2\left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + x^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} - x^2\right)^2$. Дискриминант $D = 16x^2\frac{Ax}{\sqrt{W}}$. Теперь для точки ξ_1 , где $x > 0$, получаем 4 различных чисто мнимых собственных значения, но только если свободный член многочлена не равен нулю, то есть $A \neq x\sqrt{W} = \sqrt{s^2 - 1}\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}$. А для точки ξ_2 , где $x < 0$, четыре различных комплексных не чисто мнимых и не действительных значения. То есть ξ_1 — особая точка типа центр-центр, ξ_2 — особая точка типа фокус-фокус. ■

4.4. Критические точки отображения момента при $y \neq 0$. Будем искать критические точки отображения момента первым способом. Для нахождения критических точек полезна следующая техническая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $f_1, f_2, f_3, f_4 : e(3)^* \rightarrow \mathbb{R}$ — попарно коммутирующие в некоторой точке $\lambda_0 \in (e(3))^*$ функции (т.е. $\{f_i, f_j\}(\lambda_0) = 0$). Пусть в этой точке λ_0

- 1) зависимы первые 5 координат градиентов функций f_1, f_2, f_3, f_4 , отвечающих переменным L_x, L_y, L_z, x, y ,
- 2) для некоторого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$x\frac{\partial f_i}{\partial L_y} - y\frac{\partial f_i}{\partial L_x} \neq 0,$$

Тогда градиенты функций f_1, f_2, f_3, f_4 линейно зависимы в этой точке.

Доказательство леммы легко следует из линейной алгебры.

Применим к нашему случаю H, F, I_1, I_2 . Почти везде необходимо искать точки, в которых зависимы лишь первые пять координат градиентов, а не все шесть. Как легко видеть, невыполнение условия 2 леммы эквивалентно следующей системе

$$\begin{cases} y = 0, \\ xL_y = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Поэтому на множестве $y \neq 0$ достаточно смотреть лишь зависимость первых пяти координат градиентов функций H, K, I_1, I_2

$H :$	L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0
$K :$	$2L_xL_z + 2A\sqrt{W}$	$2L_yL_z$	$L_x^2 + L_y^2 + 3GL_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$-\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$	0
$I_1 :$	0	0	0	x	y
$I_2 :$	x	y	z	L_x	L_y

(16)

ТЕОРЕМА 6. Множество критических точек отображения момента интегрируемого случая Матвеева-Дуллина при $y \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ (xL_y - yL_x)\left(\frac{L_z}{2Wy} + \frac{L_y}{y^2}\right) = \frac{A}{\sqrt{W}}, \\ (2G - 1 - \frac{z}{2W})L_z^2 + \frac{2W}{y}L_yL_z + \left(1 - \frac{1-z^2+2zW}{y^2}\right)L_y^2 + L_x^2 + \frac{2c}{W} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала преобразуем таблицу градиентов по первой и второй строке

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0
$2A\sqrt{W}$	0	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$	0
0	0	0	x	y
x	y	z	L_x	L_y

(18)

Линейные преобразования над четвертым и пятым столбцами

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$
$2A\sqrt{W}$	0	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$
x	y	z	$L_x - \frac{x}{y}L_y$

(19)

теперь над первыми двумя столбцами

$L_x - \frac{x}{y}L_y$	$(1 + G)L_z - \frac{z}{y}L_y$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$
$2A\sqrt{W}$	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}} + 2\frac{A\sqrt{W}L_y}{y}$

(20)

Поскольку мы видим, что нижний элемент первого столбца последней таблицы ненулевой, для зависимости строк необходимо приравнять к нулю лишь два определителя. Это 1-ый и 2-ой столбцы и 1-ый и 3-ий. После аккуратных выкладок получим выражения из (19). Теорема доказана. ■

4.5. Бифуркационная диаграмма отображения момента. Множество критических точек отображения момента для интегрируемого случая можно описать следующим образом: Пусть в некоторой точке $\xi \in M^4$ зависимы косые градиенты гамильтониана H и интеграла K . Тогда в случае Матвеева-Дуллина возможны два случая. Либо точка ξ является особой для нашего векторного поля, то есть $v = \text{sgrad } H$ в точке ξ . Либо косые градиенты интеграла и гамильтониана пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности λ , то есть $\text{sgrad } H = \lambda \text{sgrad } K$. Поскольку функция K постоянна вдоль векторного поля $\text{sgrad } H$, значит вся траектория, выходящая из точки ξ , состоит из критических точек отображения момента с тем же коэффициентом пропорциональности λ , то есть $\text{sgrad } H = \lambda \text{sgrad } K$ вдоль всей траектории. В нашем случае все критические траектории является либо окружностями, либо точками, поскольку изоэнергетические поверхности компактны. Более того, согласно утверждению 4, вся эта траектория проектируется в одну точку бифуркационного множества отображения момента. Исходя из этих рассуждений вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Коэффициент пропорциональности $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен на критических окружностях.

В нашем случае этот коэффициент равен $2g$, где

$$g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y} \quad (21)$$

Шестую координату $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$, отвечающую переменной z , легко посчитать. Коэффициент g есть отношение шестых координат косых косых градиентов. Исходя из третьего уравнения системы (16) на критические точки, на множестве $y \neq 0$ коэффициент g определен корректно.

ТЕОРЕМА 7. На множестве критических точек отображения момента случая Матвеева-Дуллина при $y \neq 0$ справедлива следующая система:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y}, \\ \lambda = \frac{L_z - g}{W}, \quad g, \lambda \in \mathbb{R}, \\ L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs - 2c)\lambda^2 = A^2, \\ H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), \\ F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gc\lambda + 2g^3. \end{cases} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим выражение для g в третье уравнение (19), получим:

$$L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}. \quad (23)$$

Получившееся подставим в выражение для g .

$$(L_z - g)\left(\frac{1 - z^2}{2W}(L_z - 2g) + zL_z\right) = Ax\sqrt{W}. \quad (24)$$

Как легко видеть 4-ое уравнение (19) может быть записано в виде:

$$GL_z^2 + L_x^2 + L_y^2 + \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2}g(L_z - g) - 2gL_z + \frac{2c}{W} = 0. \quad (25)$$

Опять же из (23) и (26) выразим L_x через переменные z и L_z :

$$L_x = x\frac{L_z - 2g}{2W} + \frac{A\sqrt{W}}{g - L_z}. \quad (26)$$

Распишем выражение через z, L_z и g

$$L_x^2 + L_y^2 = \frac{A^2W}{(L_z - g)^2} - GL_z^2 + \frac{g}{W}\frac{1 - z^2 + 2zW}{W}L_z - g\frac{1 - z^2}{W^2}. \quad (27)$$

Выражение (29) подставляем в (27) и опять же после некоторых преобразований получаем

$$A^2 + 2g((1 - s^2)\left(\frac{L_z - g}{W}\right) - gs)\left(\frac{L_z - g}{W}\right)^2 + 2c\left(\frac{L_z - g}{W}\right)^2 = 0. \quad (28)$$

Теперь видно, что

$$\lambda = \frac{L_z - g}{W} \quad (29)$$

является еще одним интегралом критических окружностей, зависящим от интеграла g по формуле (31). Выражение для H подставим в (27):

$$\begin{aligned} 2H + \frac{2Ax}{\sqrt{W}} - L_z^2 + \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2}g(L_z - g) - 2gL_z &= 0, \\ 2H + (1 - s^2)\left(\frac{L_z - g}{W}\right)^2 - 4gs\frac{L_z - g}{W} - 3g^2 &= 0 \\ H &= \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражение (27) подставим в интеграл F :

$$F = g(2L_z - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2}(L_z - g))L_z - \frac{Ax}{\sqrt{W}}L_z + 2A\sqrt{W}L_x. \quad (31)$$

Упростим

$$2A\sqrt{W}L_x - \frac{Ax}{\sqrt{W}}L_z = -g\frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2}(L_z - g)^2 + g^2\frac{1 - z^2 - 2zW}{W^2}(L_z - g) - \frac{2A^2W}{L_z - g} \quad (32)$$

$$g(2L_z - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2}(L_z - g))L_z = g(2 - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2})(L_z - g)^2 + g^2(4 - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2})(L_z - g) + 2g^3 \quad (33)$$

$$F = g(2 - 2\frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2})(L_z - g)^2 + 4g^2(1 - \frac{zW}{W^2})(L_z - g) + 2g^3 - \frac{2A^2W}{L_z - g}, \quad (34)$$

$$F = 2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 4g^2s\lambda + 2g^3 - \frac{2A^2}{\lambda} \quad (35)$$

или

$$F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gc\lambda + 2g^3 \quad (36)$$

Теорема доказано. ■

ЛЕММА 3. Множество критических траекторий, полностью лежащих в гиперплоскости $y = 0$, исчерпывается особыми точками векторного поля $v = \text{sgrad } H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приравняем координату $\text{sgrad}H$, отвечающую переменной y , к нулю:

$$(\text{sgrad}H)_5 = -z\frac{\partial H}{\partial L_x} + x\frac{\partial H}{\partial L_z} = -zL_x + x(1 + G(z))L_z = 0.$$

На гиперплоскости $y = 0$ выделим следующие случаи. Сначала $x = 0, y = 0$, что влечет $z \pm 1, L_x = 0, L_z = 0$. Первые, третьи, четвертые и шестые координаты градиентов функций H, F, I_1, I_2 образуют матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W(z)}} & 0 \\ 2A\sqrt{W(z)} & L_y^2 + \frac{2c}{W(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы не равен нулю. Значит, в этом случае мы получаем вообще не на особые точки отображения момента.

В случае $x \neq 0, y = 0$ получаем $(\frac{1}{1-z^2} + G(z))L_z = 0$. Значит, $L_z = 0, L_x = 0$. Теперь, если взглянуть на таблицу градиентов, можно убедиться, что на множестве особых точек должно выполняться $L_y = 0$, а также $A(x^2 + 2zW(z)) - \frac{2cx}{\sqrt{W(z)}} = 0$. А это в точности совпадает со множеством критических точек гамильтонова векторного поля. Лемма доказана. \square

Теперь для построения бифуркационной диаграммы в случае $c = 0$ необходимо найти условия совместности системы (24). Такие вычисления не технические и не очень сложные, поэтому приводим лишь результат.

ТЕОРЕМА 8. *Бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой системы Матвеева-Дуллина при $c = 0$ состоит из следующих компонент:*

- 1) критические точки $(h, f) = (h_1, 0), (h, f) = (h_2, 0)$
- 2) кривых, задающихся условием при $\lambda, g \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2g((s^2 - 1)\lambda + gs)\lambda^2 = A^2, \\ H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), H \geq h_1, \\ F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 2g^3. \end{cases}$$

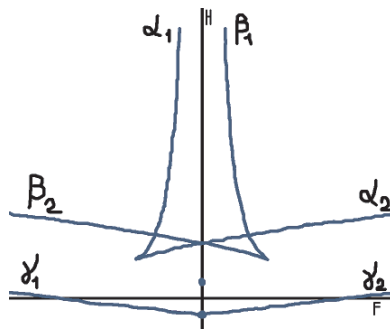


Рисунок 3

4.6. Количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы при $c = 0$. В этом пункте мы рассмотрим количество критических окружностей в прообразе каждой точки бифуркационной диаграммы.

ТЕОРЕМА 9. *В случае Матвеева-Дуллина при $c = 0$ в прообразе каждой точки кривых бифуркационной диаграммы $\gamma_1, \beta_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и γ_2 лежит ровно по одной критической окружности. В прообразе общей точки кривых γ_1 и γ_2 лежит одна точка из $M_{1,0}^4$. В прообразе пересечений $\beta_2 \cap \alpha_1, \beta_2 \cap \alpha_2$ и $\beta_1 \cap \alpha_2$ лежит по две критические окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего пункта имеем следующее представление для критических точек отображения момента:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y}, \\ \lambda = \frac{L_z - g}{W}, \\ L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs)\lambda^2 = A^2. \end{cases} \quad (37)$$

Для каждого g и λ посчитаем количество критических окружностей, удовлетворяющих вышеуказанной системе. Из системы можно вывести

$$\begin{aligned} L_z &= g + \lambda W(z), \\ L_y &= \frac{y(\lambda W(z) - g)}{2W(z)}, \\ L_x &= \frac{x(\lambda W(z) - g)}{2W(z)} - \frac{A}{\lambda \sqrt{W(z)}}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение совместности системы можно свести к уравнению на сфере Пуассона:

$$x = \frac{\lambda}{2A\sqrt{W(z)}} [(1 - z^2)(\lambda W(z) - g) + 2zW(z)(g + \lambda W(z))] =: f(z). \quad (38)$$

Теперь рассмотрим точки пересечения гладкой плоской кривой $x = f(z)$ и окружности $x^2 + z^2 = 1$ и разделим эти точки на 3 типа:

- 1) Точки, в которых кривая $x = f(z)$ "входит" во внутренность круга $x^2 + z^2 \leq 1$,
- 2) Точки, в которых кривая "выходит" во внешность круга,
- 3) Точки, в которых кривая лишь касается окружности, оставаясь вне или внутри окружности.

Заметим, что точкам третьего типа соответствуют особые точки векторного поля $sgradH$. Мы рассматриваем лишь вырожденные точки отображения момента ранга 1 — без критических точек ранга 0. Поэтому ни при каких допустимых значениях интегралов g и λ точек третьего типа получиться не может. Следовательно возможны лишь точки первых двух типов, причем в равных количествах. То есть если при каких-то g и λ у нас k точек первого типа, то и k точек второго. И при этом в прообразе лежит k критических окружностей.

Опишем еще одно наблюдение. Возьмем какую-то критическую точку бифуркационной диаграммы, посчитаем количество критических окружностей, висящих надо этой точкой. Пусть их оказалось ровно k штук. Теперь начинаем гладко передвигаться по кривой бифуркационной диаграммы в точки более высокой энергии. Тем самым мы гладко меняем как параметры g и λ так и уравнение кривой $x = f(z)$. При этом количество критических окружностей меняться не должно, в противном случае для кривой $x = f(z)$ возникали бы точки третьего типа пересечения с окружностью $x^2 + z^2 = 1$. Итак, на каждой гладкой кривой бифуркационной диаграммы количество критических окружностей строго постоянно, причем равно количеству окружностей для критических значений с высокой энергией.

Рассмотрим точку на кривой α_1 и устремим ее на высокий уровень энергии, что будет характеризоваться условиями $g \rightarrow +0, \lambda \rightarrow +\infty, g\lambda^3 = O(1)$. Уравнение кривой $x = f(z)$ примет вид:

$$x = \frac{\lambda^2 \sqrt{W(z)}}{2A} (1 - z^2 + 2zW(z)) + o(1). \quad (39)$$

Ровно два пересечения с окружностью $x^2 + z^2 = 1$: одно точка первого типа, другая — второго. Таким образом в прообразе каждой внутренней точки кривой α_1 лежит одна критическая окружность.

То же самое сделаем с кривой α_2 , что на высоких уровнях энергии уже будет характеризоваться $g \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow +0, g\lambda = \frac{A}{\sqrt{2s}} + o(1)$. Уравнение кривой $x = f(z)$ примет вид:

$$x = \frac{2zW(z) + z^2 - 1}{2\sqrt{2sW(z)}} + o(1). \quad (40)$$

Опять же только две точки пересечения с окружностью $x^2 + z^2 = 1$. Таким образом в прообразе каждой внутренней точки кривой α_2 лежит тоже лишь одна окружность.

Для кривой γ_2 имеем $g \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow -0, g\lambda = -\frac{A}{\sqrt{2s}} + o(1)$. Уравнение кривой $x = f(z)$ имеет вид:

$$x = -\frac{2zW(z) + z^2 - 1}{2\sqrt{2sW(z)}} + o(1). \quad (41)$$

Опять же только две точки пересечения с окружностью. В прообразе каждой внутренней точки кривой γ_2 лежит одна окружность.

Поскольку наша диаграмма по своей структуре симметрична относительно прямой $f = 0$, значит, в прообразе точек кривых β_1, β_2 и γ_1 тоже лежит ровно по одной критической окружности. ■

4.7. Индексы некоторых критических точек дополнительного интеграла. В этом разделе мы рассмотрим только одну критическую окружность и ее индекс (см. Определение 7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. При $c = 0$ одна окружность в прообразе кривой α_2 имеет индекс 1.

При $c = 0$ рассмотрим критическую точку ξ , имеющую координаты $x = 0, y = 1, z = 0$ на сфере Пуассона. Согласно теореме 7 имеем:

$$\begin{cases} x = 0, y = 1, z = 0, \\ L_y = 0, \\ L_x L_z = -2A\sqrt{s}, \\ L_z^4 = \frac{8A^2 s^3}{2s^2 - 1}. \end{cases} \quad (42)$$

Выбираем точку, в которой $L_x < 0$, а $L_z > 0$. Тогда, подставив параметры $g = \frac{1}{2}L_z > 0$ и $\lambda = \frac{L_z}{2s} > 0$ для точки ξ , легко понять, что эта точка лежит на кривой α_2 , причем $F(\xi) > 0$.

Таблица градиентов интегралов системы в точке ξ имеет вид:

$H :$	L_x	0	$(1 - \frac{1}{4s^2})$	$-\frac{A}{\sqrt{s}}$	0	$\frac{2s^2-1}{4s^3}L_z^2$
$F :$	$-2A\sqrt{s}$	0	$L_x^2 + \frac{3}{4s^2}L_z^2$	$-\frac{AL_z}{\sqrt{s}}$	0	$\frac{2s^2-1}{2s^3}L_z^3 + \frac{AL_x}{\sqrt{s}}$
$I_1 :$	0	0	0	0	1	0
$I_2 :$	0	1	0	L_x	0	L_z

(43)

Для упрощения подсчета индекса интеграла F на изоэнергетической поверхности $Q_h^3(\xi)$ в точке ξ воспользуемся леммой 5.1 [3, том 2]. Легко видеть, что градиенты зависимы при помощи соотношения $grad F - L_z grad H = 0$. Поэтому квадратичная форма, определяемая гессианом функции $\tilde{F} = F|_{Q_h^3}$ в точке ξ , является ограничением формы $\mathbf{G} = G_F - L_z G_H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$, где G_H и G_F — гессианы интегралов H и F как функций в шестимерном пространстве. После несложных подсчетов получаем:

$$G_H|_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4s^2+1}{4s^2} & 0 & 0 & \frac{2s^2-1}{2s^3}L_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2s^2-1}{2s^3}L_z & \frac{A}{2s\sqrt{s}} & 0 & \frac{3-5s^2}{4s^4}L_z^2 \end{pmatrix} \quad G_F|_\xi = \begin{pmatrix} 2L_z & 0 & \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{s}} \\ 0 & 2L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & \frac{3}{2s^2} & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{3(2s^2-1)}{2s^3}L_z^2 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{AL_z}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{3(2s^2-1)}{2s^3}L_z^2 & 0 & 0 & \frac{11-8s^2}{8s^4}L_z^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}|_\xi = \begin{pmatrix} L_z & 0 & \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{s}} \\ 0 & L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & \frac{5-4s^2}{4s^2} & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{2s^2-1}{s^3}L_z^2 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{2s^2-1}{s^3}L_z^2 & 0 & 0 & \frac{5-8s^2}{8s^4}L_z^3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Выберем базисные векторы $e_1 = (\frac{A}{L_z\sqrt{s}}, -L_z, 0, 0, 0, 1)$, $e_2 = (-\frac{L_z}{2s}, \frac{2A\sqrt{s}}{L_z}, 0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (\frac{4s^2+1}{8As^2\sqrt{s}}L_z^2, 0, 1, 0, 0, 0)$ в $T_\xi Q_h^3$ как в ортогональном дополнении относительно стандартной евклидовой метрики в \mathbb{R}^6 к градиентам H, I_1, I_2 из таблицы (5). Тогда ограничение формы $\mathbf{G} = G_F - L_z G_H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$ можно представить в координатном виде как:

$$\mathbf{G}_{Q_h^3} = \begin{pmatrix} \frac{4s^4-s^2+1}{4s^4}L_z^3 & -\frac{A(2s^2+1)L_z}{s\sqrt{s}} & \frac{8s^2-1}{4s^2}L_z^3 \\ -\frac{A(2s^2+1)L_z}{s\sqrt{s}} & \frac{4s^2-1}{4s^2}L_z^3 & -\frac{3L_z^4}{16AS^3\sqrt{s}} \\ \frac{8s^2-1}{4s^2}L_z^3 & -\frac{3L_z^4}{16AS^3\sqrt{s}} & \frac{-64s^4+52s^2-1}{64A^2s^5}L_z^5 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Итак, сигнатура матрицы $\mathbf{G}_{Q_h^3}$ равна $(1, -1, 0)$.

4.8. Экспериментальные данные. Для поиска индексов критических окружностей полезна следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Любая критическая окружность случая Матвеева-Дуллина при $s = 0$ проходит через гиперплоскость $y = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Движение вдоль критической траектории замкнуто, поэтому координаты точки на критической окружности повторяются циклически. Следовательно, вдоль критической окружности каждая координата скорости должна обращаться в нуль в некоторых точках. Поскольку $(\text{sgrad } H)_3 = -\frac{Ay}{\sqrt{W(z)}}$, значит, вдоль любой критической траектории есть точка, где $y = 0$. \square

Подсчет индексов критических окружностей и доказательство их невырожденности оказался технически сложным. С помощью компьютерной программы удалось доказать следующую экспериментальную теорему.

ТЕОРЕМА 10 (экспериментальная теорема). *При $s = 0$ критические окружности на кривых бифуркационной диаграммы все невырождены. Индекс окружностей, лежащих в прообразе кривых α_1, γ_1 , равен 2, в прообразе кривых α_2, β_2 — равен 1, в прообразе кривых γ_2, β_1 — равен 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из таблицы градиентов (18) на множестве критических точек из условия $y = 0$ следует $L_y = 0$. Рассмотрим случай $x \neq 0$.

На множестве $y = 0, L_y = 0$ гессианы интегралов H, F, I_1, I_2 принимают вид:

$$G_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & G'L_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'L_z & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix}, G_F = \begin{pmatrix} 2L_z & 0 & 2L_x & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{W}} \\ 0 & 2L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2L_x & 0 & 6GL_z & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & \frac{AL_z}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} & \frac{AL_z}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$G_{I_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G_{I_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где выражения $*$ — громоздки, и могут быть выписаны при необходимости. На множестве критических точек получаем следующую зависимость градиентов интегралов:

$$\text{sgrad}F = \lambda_1 \text{sgrad}H + \lambda_2 \text{sgrad}I_1 + \lambda_3 \text{sgrad}I_2, \quad (46)$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно найти из первых трех столбцов таблицы градиентов (18). А именно:

$$\begin{pmatrix} L_x & 0 & x \\ (1+G)L_z & 0 & z \\ -\frac{A}{\sqrt{W}} & x & L_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_x L_z + 2A\sqrt{W} \\ L_x^2 + 3GL_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ -\frac{AL_z}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}$$

По правилу Крамера получаем:

$$\begin{aligned} \Delta &= x^2 \left(\frac{1}{x^2} + G \right) L_z, \\ \Delta_1 &= x^2 \left(3 \left(\frac{z^2}{x^2} + G \right) L_z^2 - \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2Az\sqrt{W}}{x} \right) \right), \\ \Delta_2 &= -\frac{z^2}{x^2} \left(3 - \frac{1}{x^2} - G \right) L_z^4 - \left(-\frac{Az^2}{x\sqrt{W}} - 2G \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{Az\sqrt{W}}{x} \right) + \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} - \frac{2Az\sqrt{W}}{x} \right) \right) L_z^2 - \frac{A}{\sqrt{W}} \left(\frac{Ax^2}{\sqrt{W}} + 2Az\sqrt{W} \right), \\ \Delta_3 &= -z \left(3 - \frac{1}{x^2} - G \right) L_z^3 - x \left(\frac{Az}{\sqrt{W}} - 2A(1+G)\sqrt{W} \right) L_z, \\ \lambda_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \end{aligned}$$

Теперь для множества критических точек строим квадратичную форму, определяемую вторым дифференциалом интеграла F как функции на Q_h^3 , по правилу $d^2(F|_{Q_h^3}) = (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2)|_{Q_h^3}$. Эта квадратичная форма на множестве критических точек всегда вырождена. И для нас интересны точки, в которых ранг этой формы равен ровно двум. Как видно из таблицы градиентов (5) при $y = 0, L_y = 0$ вектора e_2 и e_5 всегда лежат в TQ_h^3 . Осталось найти еще один вектор из TQ_h^3 , ортогональный e_2, e_5 и градиентам из таблицы (5). Допустим,

$$e = \left(x \left(\frac{z}{2} G'(z) - \frac{1}{x^2} (1+G(z)) \right), 0, x^2 \left(\frac{z}{x^4} + \frac{1}{2} G'(z) \right) L_z^2 + x \left(\frac{Ax^2}{2W(z)\sqrt{W(z)}} + \frac{Az}{\sqrt{W(z)}} \right), -zx \left(\frac{1}{x^2} + G(z) \right), 0, -x^2 \left(\frac{1}{x^2} + G(z) \right) \right)^T.$$

Теперь считаем $d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2$ как квадратичную форму на векторах e_2, e_5, e . Ограничение $d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2$ на $\langle e_2, e_5 \rangle$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2L_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_z - \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель последней матрицы равен $(\lambda_1 - 2L_z)\lambda_2 - \lambda_3^2$. Если его приравнять к нулю, получим следующее уравнение:

$$(\Delta_1 - 2L_z \Delta) \Delta_2 - \Delta_3^2 = 0. \quad (47)$$

И если расписать последнее равенство, можно получить довольно-таки громоздкое выражение:

$$b_1 \xi^2 + b_2 \xi + b_3 = 0, \quad (48)$$

где $b_1 = (3 - \frac{1}{x^2} - G) \left(-\frac{3z^2}{x^2} - \frac{2G}{x^2} (x^2 + zW) + \frac{1}{x^2} (x^2 - 2zW) + \frac{z^2}{x^4} (x^2 + 2zW) + \frac{4zW}{x^2} (1+G) \right)$,

$$b_2 = (x^2 + 2zW) \left(3 - \frac{1}{x^2} - G - \frac{z^2}{x^2} - \frac{2G}{x^2} (x^2 + zW) + \frac{1}{x^4} (x^2 - 2zW) - (z - 2W(1+G))^2 \right),$$

$$b_3 = (x^2 + 2zW)^2,$$

$\xi = \frac{AxL_z^2}{\sqrt{W}}$. Теперь составим уравнения критических точек при $y = L_y = 0, x \neq 0$. Косые градиенты H и F

имею только по две отличные от нуля координаты, а именно:

$$(sgradH)_2 = \left(-\frac{z}{x} G + \frac{x}{2} G' \right) L_z^2 + \left(\frac{Az}{\sqrt{W}} + \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}} \right),$$

$$(sgradH)_5 = x \left(\frac{1}{x^2} + G \right) L_z,$$

$$(sgradF)_2 = \left(\frac{2z}{x} - \frac{z^3}{x^3} - \frac{3z}{x} G + xG' \right) L_z^3 - \left(2A\sqrt{W} - \frac{Az}{\sqrt{W}} - \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}} \right) L_z,$$

$$(sgradF)_5 = 3x \left(\frac{z^2}{x^2} + G \right) L_z^2 - \left(2Az\sqrt{W} + \frac{Ax^2}{\sqrt{W}} \right). \text{ После этого уравнения на зависимость косых градиентов примет}$$

вид:

$$a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 = 0, \quad (49)$$

где $a_1 = -2W(\frac{z}{x^4} + \frac{G'}{2})(3 - \frac{1}{x^2} - G)$,
 $a_2 = (2zW + x^2)(\frac{2zW}{x^2}G - WG' - 3 + 2(\frac{1}{x^2} + G)) + 4W^2(\frac{1}{x^2} + G)$,
 $a_3 = -(x^2 + 2zW)^2$.

Как видно, уравнения (50) и (51) эквивалентны. К тому же

$$\langle e_2, e_5 \rangle^T (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2) \langle e \rangle = 0.$$

Отсюда получаем

$$d^2(F|_{Q_h^3}) = \begin{pmatrix} 2L_z - \lambda_1 & -\lambda_3 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

где $a_{33} = e^T (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2) e$, а главный минор, натянутый на первые два столбца и две строки, равен нулю. Теперь количество положительных собственных значений матрицы (52) считаем следующим образом:

- 1) Выбираем $N \in \mathbb{N}$.
- 2) Определяемся со знаком x : $x > 0$ либо $x < 0$.
- 3) Для каждого $z_m = \frac{2m}{N} - 1$, где $m = 1, 2, \dots, N - 1$, находим x_m и L_{z_m} из системы (50).
- 4) Для получившихся z, x и L_z численно считаем количество положительных значений матрицы (52).

Описанный алгоритм проверен при $A = 1, s = 2, c = 0, N = 1000$. Программа написана на языке C++. ■

Теперь на основании экспериментальной теоремы 10 можно провести грубую лиувиллеву классификацию случая Матвеева-Дуллина. Выводы следующей теоремы тоже не могут быть приняты как что-то абсолютно верное, потому что они основаны на численных данных.

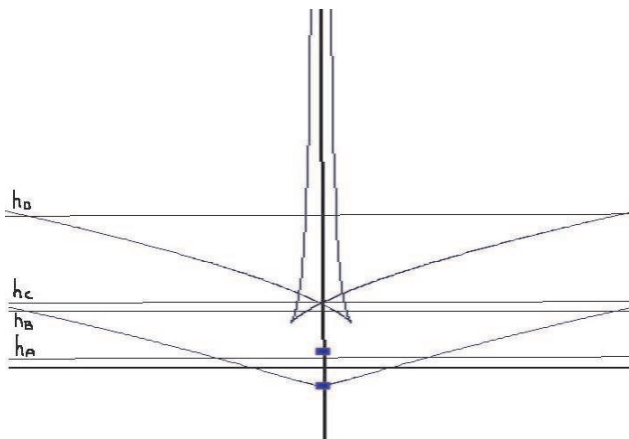


Рисунок 4

ТЕОРЕМА 11 (Экспериментальная теорема). *Грубые молекулы изоэнергетических поверхностей Q_h^3 случая Матвеева-Дуллина имеют следующий тип:*

тип 1 при $h \in (h_1, h_k) \setminus \{h_2\}$,

тип 3 при $h \in (h_k, h_c) \setminus \{h_2\}$,

тип 2 при $h \in (h_c, \infty)$,

где h_k — уровень энергии общей точки кривых α_1 и α_2 (β_1 и β_2).

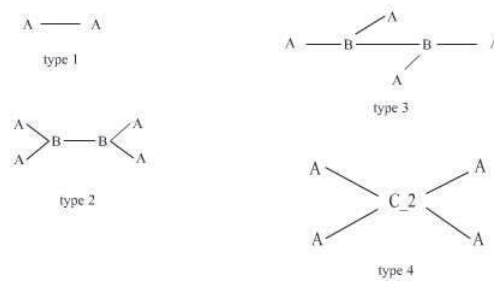


Рисунок 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку кривым $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \beta_2$ соответствует индекс 0 или 2, бифуркации, отвечающие этим кривым, имеют тип A . Критические окружности, соответствующие кривым α_2, β_1 , имеют индекс 1. Таким кривым будет соответствовать либо атом B , либо атом A^* . Атом A^* не возможен, поскольку перестройка A^* не изменяет количество торов в прообразе. Теперь тип грубой молекулы определяется однозначно. ■

4.9. Программа дальнейших исследований. Работа в направлении исследования случая Матвеева-Дуллина будет продолжена. Первым делом следует вычислить грубую молекулу изоэнергетической поверхности $Q_{h_c}^3$. Также следует проверить невырожденность всех или почти всех критических окружностей отображения момента аналитическим способом. В таком случае факты из пункта 4.8 можно будет считать математически верными, и вопрос о классе грубой Лиувиллевой эквивалентности случая Матвеева-Дуллина при $c = 0$ можно будет считать решенным. Все результаты, полученные в данной работе, можно обобщить на случай $c \neq 0$. Этому препятствует лишь некоторая техническая сложность подсчетов. Финалом исследования случая можно считать работу по нахождению меток Фоменко-Цишанга Лиувиллева слоения и меченых молекул интегрируемого случая.

Список литературы

- [1] Болсинов А.В., Козлов В.В., Фоменко А.Т. — Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела. // УМН, 1995, т. 50, вып. 3, стр. 3 - 32.
- [2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. — Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН 1990, т. 45, вып. 2, стр. 49-77.
- [3] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. — Интегрируемые гамильтоновы системы. // Ижевск, РХД, 1999, Т. 1, 2.
- [4] Борисов А.В., Мамаев И.С. — Динамика твердого тела. // Ижевск, РХД, 2001.
- [5] тензор Пуассона
- [6] Морозов П.В. — Лиувиллева классификация интегрируемой системы Клебша. //Мат. Сборник, 2000, Т. 191, №2, стр. 113-138.
- [7] Морозов П.В. — Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Киргофа // Мат. сборник, 2004, т.195, №3, стр. 69
- [8] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. — Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. // М. Факториал, изд-во "Просперус"УдГУ, 1995.

- [9] Хагигатдуст Г. — Топология слоений Лиувилля для новых интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$. // Диссертация на соискание уч. степ. канд. ф.-м. наук, М., 2004.
- [10] Харламов М. П. — Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. // Ленинград, Изд. Лен. Универс., 1988.
- [11] Цыганов А. В. — Об одном семействе интегрируемых систем на сфере, обладающих кубическим интегралом движения. // ДАН, 2005, том 402, №4, стр. 457 - 459
- [12] Dullin H.R., Matveev V.S. — A new integrable system on the sphere. // Math Research Letters, №11, p. 715–722, 2004.