Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
механико - математический факультет
кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

Дипломная работа на тему:

Алгоритм построения распределения градиентов и полные наборы на алгебрах Ли малой размерности.

Выполнил: Короткевич А.А.
Научные руководители: Фоменко А.Т.
Болсинов А.В.

май 2007

Постановка задачи.

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{g}^*$ — двойственное к ней пространство (коалгебра). Тогда на множестве гладких функций на $\mathfrak{g}^*$ можно ввести структуру бесконечномерной алгебры Ли, задав скобку Пуассона следующий образом. Пусть $f, g : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ две произвольные гладкие функции, тогда

$$\{f, g\}(x) =< x, [df(x), dg(x)] >,$$

здесь x — произвольный элемент коалгебры, дифференциалы функций f и g в точке x можно рассматривать как элементы алгебры $\mathfrak{g}$, квадратными скобками обозначен коммутатор, а треугольными — значение ковектора на векторе. Отметим, что скобка Пуассона двух полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$ также является полиномиальной функцией. В дальнейшем нам будет удобно полиномы на $\mathfrak{g}^*$ считать полиномами от элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Множество всех полиномов от элементов алгебры $\mathfrak{g}$ с введенной выше скобкой Пуассона образуют бесконечномерную алгебру Ли, которую мы будем называть алгеброй Пуассона – Ли и обозначать $P(\mathfrak{g})$.

У алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть две характеристики: ее размерность $\dim\mathfrak{g}$ и индекс $\mathrm{ind}\mathfrak{g}$.

Определение. *Набор полиномов $f_1, \dots, f_k \in P(\mathfrak{g})$ называется полным коммутативным, если выполнены следующие условия:*

1) $\{f, g\} = 0$ *для* $\forall i, j \in 1, \dots, k$

2) $f_1, \dots, f_k$ *— почти всюду функционально независимы*

3) $k = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g}+ind\mathfrak{g})$.

Полные коммутативные наборы представляют большой интерес, поскольку из существования такого набора следует, что на пространстве двойственном к алгебре Ли существует вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с полиномиальными первыми интегралами. Действительно, если взять один полином из полного коммутативного набора в качестве гамильтониана, то оставшиеся полиномы будут являться функционально независимыми первыми интегралами.

Априори неизвестно, на каждой ли конечномерной алгебре Ли существует хотя бы один полный коммутативный набор полиномов. В работе [4] А.Т. Фоменко и А.С. Мищенко была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная вещественная или комплексная алгебра Ли, тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Авторами гипотеза была доказана для случая, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — полупростая.

Позже С.Т. Садэтов доказал данную гипотезу для произвольной алгебры [1].

Теорема (Садэтов, 2004). *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Доказательством данной теоремы является алгоритм, который задачу построения полного коммутативного набора на конкретной алгебре Ли сводит к задаче построения полного коммутативного набора на алгебре Ли меньшей размерности до тех пор, пока мы не придем к коммутативной или полупростой алгебре. Для коммутативной алгебры построение полного коммутативного набора тривиально, а в случае полупростой алгебры полный коммутативный набор можно получить методом сдвига аргумента, предложенным А.Т. Фоменко и А.С. Мищенко в работе [4].

Очевидно, что могут существовать два различных полных коммутативных набора, градиенты которых задают одинаковое распределение на коалгебре. Поэтому с геометрической точки зрения важны не столько сами полиномы, сколько распределения, задаваемые их градиентами. В связи с этим возникает вопрос о построении распределения градиентов полиномов, полученных методом Садэтова. В данной работе получен алгоритм построения такого распределения (см. стр. 9 — 10).

Также в данной работе построены полные коммутативные наборы полиномов для всех вещественных алгебр Ли размерности 3, 4, 5 и нильпотентных размерности 6 методом Садэтова (см. таблицы на стр. 17 — 34).

Алгоритм построения распределения градиентов.

Начнем с более подробного описания метода Садэтова, а конкретно с леммы, которая играет ключевую роль в данном методе. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Тогда для нее выполняется одна из следующих возможностей.

Лемма ([1], [2]). *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{g}$ имеет коммутативный идеал $\mathfrak{h}$, не являющийся одномерным центром алгебры $\mathfrak{g}$;

2) $\mathfrak{g}$ имеет идеал $\mathfrak{h}_m$, изоморфный алгебре Гейзенберга, и при этом центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром идеала $\mathfrak{h}_m$;

3) $\mathfrak{g} = L \oplus \mathbb{K}$, где алгебра L полупроста;

4) $\mathfrak{g}$ полупроста.

В случаях 3) и 4) искомый коммутативный набор получается методом сдвига аргумента, а в случаях 1) и 2) удается сделать индуктивный переход к алгебре Ли меньшей размерности. Проследим, как будут меняться градиенты полиномов при индуктивных переходах в случаях 1) и 2).

Случай 1.

Алгебра $\mathfrak{g}$ имеет коммутативный идеал $\mathfrak{h}$ не совпадающий с одномерным центром. Пусть $\dim\mathfrak{g} = n$, а $\dim\mathfrak{h} = k$. Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ базис $e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n$ так, чтобы вектора $e_1, \dots, e_k$ образовывали базис в идеале $\mathfrak{h}$. Тогда в данном базисе структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ будут выглядеть следующим образом:

	$e_1 \dots e_k$	$f_{k+1} \dots f_n$
$e_1 \ \vdots \ e_k$	0	$a_{ij}^p e_p$
$f_{k+1} \ \vdots \ f_n$	$a_{ji}^p e_p$	$b_{ij}^p e_p + c_{ij}^q f_q$

тензоры $a_{ij}^p, b_{ij}^p, c_{ij}^q$ — кососимметричны по нижним индексам, и ими задается коммутатор в алгебре $\mathfrak{g}$. Стоит отметить, что индекс p меняется в пределах от 1 до k, а индекс q меняется в пределах от $k+1$ до n. Для тензора a_{ij}^p: $1 \le i \le k$ и $k+1 \le j \le n$ или $k+1 \le i \le n$ и $1 \le j \le k$. Для тензоров b_{ij}^p и c_{ij}^q: $k+1 \le i \le n$ и $k+1 \le j \le n$.

Так как $\mathfrak{h}$ — идеал, то присоединенное представление ad можно ограничить на идеал $\mathfrak{h}$. Обозначим ограничение: $ad|_{\mathfrak{h}}$. При таком представлении каждому элементу алгебры $\mathfrak{g}$ сопоставим линейный оператор на $\mathfrak{h}$. Посмотрим, какие операторы при этом соответствуют базисным элементам. Так как идеал $\mathfrak{h}$ коммутативный, то элементам $e_1, \dots, e_k$

соответствуют тождественно нулевые операторы на $\mathfrak{h}$. А каждому элементу f_m соответствует оператор, который в данном базисе задается матрицей (a^i_{mj}).

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_k,\eta_{k+1},\ldots,\eta_n$ базис в коалгебре $\mathfrak{g}^*$, двойственный к базису $e_1,\ldots,e_k,f_{k+1},\ldots,f_n$. Рассмотрим представление $(ad|_{\mathfrak{h}})^*$ двойственное к представлению $ad|_{\mathfrak{h}}$. При таком представлении каждому элементу алгебры будет соответствовать оператор на $\mathfrak{h}^*$. Какие операторы будут соответствовать базисным элементам алгебры $\mathfrak{g}$? Элементам $e_1,\ldots,e_k$ будут соответствовать нулевые операторы на $\mathfrak{h}^*$. А каждому элементу f_m будет соответствовать оператор, который в базисе $\xi_1,\ldots,\xi_k$ будет задаваться матрицей $(a^i_{mj})^*$.

Теперь согласно методу Садэтова (см. [2]) необходимо рассмотреть множество всех рациональных сечений $\Psi:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{g}$, таких что $\Psi(h)\in St_{(ad|_{\mathfrak{h}})^*}(h)$ для каждого $h\in\mathfrak{h}^*$. Здесь $St_{(ad|_{\mathfrak{h}})^*}(h)$ – стабилизатор элемента h относительно действия $(ad|_{\mathfrak{h}})^*$.

Фиксируем некоторый элемент $h\in\mathfrak{h}^*$ и найдем его стабилизатор. Пусть $h=\sum\limits_{i=1}^k h_i\xi_i$. Рассмотрим произвольный элемент $x\in\mathfrak{g}$, пусть $x=\sum\limits_{i=1}^k x_ie_i+\sum\limits_{i=k+1}^n x_if_i$. Найдем действие образа элемента x на h при представлении $(ad|_{\mathfrak{h}})^*$. Обозначим через A_x – оператор, соответствующий элементу x при представлении $(ad|_{\mathfrak{h}})^*$. Тогда

$$x\in St_{(ad|_{\mathfrak{h}})^*}(h)\Longleftrightarrow A_x(h)=0\in\mathfrak{h}^*$$

то есть $<A_x(h),y>=0$ для любого $y\in\mathfrak{h}$. Это равносильно тому, что $<A_x(h),e_i>=0$, где $i=1,\ldots,k$. Теперь пришло время найти стабилизатор $St_{(ad|_{\mathfrak{h}})^*}(h)$:

$$<A_x(h),e_i>=\sum_{j=1}^k x_j<A_{e_j}(h),e_i>+\sum_{j=k+1}^n x_j<A_{f_j}(h),e_i>=\sum_{j=k+1}^n x_j<A_{f_j}(h),e_i>$$

так как $h=\sum\limits_{p=1}^k h_p\xi_p$, то

$$\sum_{j=k+1}^n x_j<A_{f_j}(h),e_i>=\sum_{j=k+1}^n x_j\sum_{p=1}^k h_p<A_{f_j}(\xi_p),e_i>.$$

Выше отмечалось, что $A_{f_m}=(a^i_{mj})^*$, поэтому

$$<A_{f_j}(\xi_p),e_i>=<\xi_p,A^*_{f_j}(e_i)>=<\xi_p,a^s_{ji}e_s>=a^p_{ji}.$$

Значит стабилизатор элемента $h=\sum\limits_{p=1}^k h_p\xi_p$ задается системой уравнений относительно x_j-ых :

$$\sum_{j=k+1}^n\sum_{p=1}^k x_jh_pa^p_{ji}=0,\quad i=1,\ldots,k. \qquad (*)$$

Следует отметить, что в данной системе отсутствуют неизвестные $x_1,\ldots,x_k$, поэтому размерность стабилизатора любого элемента h, всегда больше или равна k. Пусть $\dim_{\mathbb{K}}St(h)=l$ $(l\geq k)$. Тогда l неизвестных (без потери общности можно считать, что это $x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_l$) образуют фундаментальную систему решений, поэтому остальные неизвестные: $x_{l+1},\ldots,x_n$ выражаются через них линейным способом:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{l+1} & = & c_{l+1,k+1}x_{k+1}+\cdots+c_{l+1,l}x_l\\ \vdots & & \\ x_n & = & c_{n,k+1}x_{k+1}+\cdots+c_{n,l}x_l\end{array}\right. \qquad (**)$$

здесь $c_{i,j}$ — рациональные функции от $h_1,\ldots,h_k$.

Теперь более подробно рассмотрим рациональные сечения расслоения стационарных подалгебр, то есть такие рациональные отображения $\Psi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}$, что $\Psi(h) \in St(h)$. Каждое такое сечение суть набор из n рациональных функций $x_1, \ldots, x_n$:

$$(h_1, h_2, \ldots, h_k) \xrightarrow{\Psi} \underbrace{(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l}_{\text{произвольные}} \underbrace{, x_{l+1}, \ldots, x_n)}_{\text{из системы } (**)}$$

причем, в качестве функций $x_1, \ldots, x_l$ можно взять произвольные рациональные функции от $h_1, \ldots, h_k$, а функции $x_{l+1}, \ldots, x_n$ будут их линейными комбинациями с коэффициентами $c_{i,j}$ согласно системе $(**)$. Как отмечалось выше, коэффициенты $c_{i,j}$ в системе $(**)$ рациональные функции от $h_1, \ldots, h_k$, поэтому $x_{l+1}, \ldots, x_n$ также будут рациональными функциями от $h_1, \ldots, h_k$. Зафиксируем любое рациональное сечение, для этого достаточно задать рациональные функции:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & R_1(h_1, \ldots, h_k) \\ \vdots & & \\ x_l & = & R_l(h_1, \ldots, h_k) \end{array}$$

зная $x_1, \ldots, x_l$, находим:

$$\begin{array}{rcl} x_{l+1} & = & L_{l+1}(R_{k+1}, \ldots, R_l) \\ \vdots & & \\ x_n & = & L_n(R_{k+1}, \ldots, R_l) \end{array}$$

определение линейных функций $L_{l+1}, \ldots, L_n$ содержится в системе $(**)$.

Множество всех рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр естественным образом наделяется структурой алгебры Ли, для этого достаточно взять поточечный коммутатор: $[\Psi_1, \Psi_2](h) = [\Psi_1(h), \Psi_2(h)]$. Теперь, согласно общей конструкции, нужно по каждому рациональному сечению построить функцию на $\mathfrak{g}^*$ следующим образом:

$$f_\Psi(\zeta) = < \Psi(\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta)), \zeta >, \quad \zeta \in \mathfrak{g}^*$$

Как известно, все рациональные функции на $\mathfrak{g}^*$ со скобкой Пуассона образуют Пуассонову алгберу. Легко проверить, что описанное выше отображение $\Psi \to f_\Psi$ является гомоморфизмом: $\{f_{\Psi_1}, f_{\Psi_2}\}(\zeta) = < [\Psi_1, \Psi_2](\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta)), \zeta > = f_{[\Psi_1, \Psi_2]}(\zeta)$ алгебры рациональных сечений в алгебру Пуассона. Изучим алгебру $\mathfrak{a}$ — образ данного гомоморфизма. Над первоначальным полем $\mathbb{K}$ алгебра $\mathfrak{a}$ бесконечномерна, но ее также можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ — полем рациональных функций на $\mathfrak{h}$. Над новым полем она становится конечномерной, причем имеет место утверждение:

Утверждение([2]). $\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h})} \mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{K}} St(h) - \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h} + 1$

Доказательство: В введенных нами обозначениях: $\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h})} \mathfrak{a} = l - k + 1$. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $\zeta \in \mathfrak{g}^*$, пусть $\zeta = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \xi_i + \sum_{i=k+1}^{n} \zeta_i \eta_i$. Тогда $\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \xi_i$.

$$\Psi(\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta)) = (R_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k), \ldots, R_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_k), L_{l+1}(R_{k+1}, \ldots, R_l), \ldots, L_n(R_{k+1}, \ldots, R_l))$$

$$f_\Psi(\zeta) = < \Psi(\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta)), \zeta > =$$
$$= R_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\zeta_1 + \cdots + R_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\zeta_l + L_{l+1}(R_{k+1}, \ldots, R_l)\zeta_{l+1} + \cdots + L_n(R_{k+1}, \ldots, R_l)\zeta_n$$

теперь, пользуясь системой $(**)$ распишем функции L_i через $c_{i,j}$, получим:

$$f_\Psi(\zeta) = < \Psi(\pi_{\mathfrak{h}^*}(\zeta)), \zeta > =$$

$R_1\zeta_1+\dots+R_l\zeta_l+(c_{l+1,k+1}R_{k+1}+\dots+c_{l+1,l}R_l)\zeta_{l+1}+\dots+(c_{n,k+1}R_{k+1}+\dots+c_{n,l}R_l)\zeta_n =$
$= R_1\zeta_1+\dots+R_k\zeta_k+R_{k+1}(\zeta_{k+1}+c_{l+1,k+1}\zeta_{l+1}+\dots+c_{n,k+1}\zeta_n)+\dots+R_l(\zeta_l+c_{l+1,l}\zeta_{l+1}+\dots+c_{n,l}\zeta_n)$

Отсюда видно, что любая функция, построенная по рациональному сечению, представляется в виде суммы элемента поля $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ (первые k слагаемых) и линейной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ базисных функций $\varphi_i = \zeta_i + c_{l+1,i}\zeta_{l+1} + \dots + c_{n,i}\zeta_n$, где $k+1 \le i \le l$. Тем самым, размерность алгебры $\mathfrak{a}$ равна $l-k+1$. ■

Любое рациональное сечение расслоения стационарных подалгебр задается набором рациональных функций $x_1,\dots,x_n$ на $\mathfrak{h}^*$, которые должны удовлетворять описанным выше условиям. Рассмотрим следующие сечения:

$$\Psi_0 \quad : \quad \begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ \vdots & \\ x_k &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{k+1} &= 0 \\ \vdots & \\ x_n &= 0 \end{cases}$$

$$\Psi_i \quad : \quad \begin{cases} x_1 &= 0 \\ \vdots & \\ x_k &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{k+1} &= 0 \\ \vdots & \\ x_i &= 1 \\ \vdots & \\ x_l &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{l+1} &= c_{l+1,i} \\ \vdots & \\ x_n &= c_{n,i} \end{cases} \qquad i = k+1,\dots,l$$

Легко видеть, что при гомоморфизме $\Psi \to f_\Psi$ сечение Ψ_0 переходит в элемент поля $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$, который мы обозначим φ_0, а сечения Ψ_i переходят в функции φ_i. Функций $\varphi_0, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_l$ образуют базис в алгебре $\mathfrak{a}$.

Теперь предположим, что для алгебры $\mathfrak{a}$ найден полный коммутативный набор полиномов $\tilde{P}_\alpha, \alpha \in I$. Тем самым найдено распределение градиентов полиномов из полного набора. Векторное поле, задаваемое градиентом одного полинома, представляет собой вектор длины $l-k+1$ (размерность алгебры $\mathfrak{a}$), состоящий из полиномов от переменных $\varphi_0, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_l$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$.

По методу Садэтова, чтобы из полного коммутативного набора $\tilde{P}_\alpha, \alpha \in I$ на алгебре $\mathfrak{a}$ получить полный коммутативный набор на первоначальной алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо в каждом полиноме $\tilde{P}_\alpha$ заменить $\varphi_0, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_l$ на следующие выражения:

$$\begin{array}{lll} \varphi_0 & \to & e_1 \\ \varphi_i & \to & f_i + c_{l+1,i}f_{l+1} + \dots + c_{n,i}f_n, \qquad k+1 \le i \le l. \end{array} \tag{$***$}$$

В полученных выражениях избавиться от рациональности домножением на общий знаменатель. Получим набор полиномов $P_\alpha, \alpha \in I$. Теперь добавив к нему полиномы $e_1,\dots,e_k$ получим искомый полный коммутативный набор на алгебре $\mathfrak{g}$.

Теперь найдем распределение, задаваемое градиентами полного коммутативного набора на алгебре $\mathfrak{g}$. Для этого достаточно найти $\frac{\partial P_\alpha}{\partial f_i}, \alpha \in I, k+1 \le i \le n$. Отметим, что производные $\frac{\partial P_\alpha}{\partial e_i}, \alpha \in I, 1 \le i \le k$ не влияют на искомое распределение, поскольку в полный набор входят полиномы $e_1,\dots,e_k$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial f_i} = \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_i}\Big|_{\varphi_i} \qquad k+1 \le i \le l$$

где в правой части в частной производной φ_i – ые заменены согласно $(***)$. Аналогично

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial f_i} = \Big(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_{k+1}}c_{i,k+1} + \dots + \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_l}c_{i,l}\Big)\Big|_{\varphi_i} \quad l+1 \le i \le n$$

Значит для того чтобы получить распределение градиентов полного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо взять градиенты полного набора на алгебре $\mathfrak{a}$, отбросить у них первую компоненту (то есть производную $\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_0}$), в оставшихся компонентах $\varphi_0, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_l$ заменить согласно $(***)$, полученные вектора домножить справа на матрицу вида:

$$\Big(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_{k+1}}\Big|_{\varphi_i}, \ldots, \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_l}\Big|_{\varphi_i}\Big) \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & c_{l+1,k+1} & \cdots & c_{n,k+1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{l+1,l} & \cdots & c_{n,l} \end{array}\right|$$

Это будет проекция искомого распределения вдоль первых k базисных векторов. Теперь добавив линейную оболочку градиентов полиномов $e_1, \ldots, e_k$ получим нужное нам распределение.

Случай 2.

Алгебра $\mathfrak{g}$ содержит идеал $\mathfrak{h}_m$ изоморфный алгебре Гейзенберга, причем центр $\mathfrak{h}_m$ совпадает с центром всей алгебры. Напомним определение алгебры Гейзенберга.

Определение. *Алгебра $\mathfrak{h}_m$ называется алгеброй Гейзенберга, если выполнены следующие условия:*

1) *как линейное пространство $\mathfrak{h}_m$ является прямой суммой одномерного подпространства и $2m$ – мерного подпространства: $\mathfrak{h}_m =< z > \oplus V^{2m}$*

2) *на V^{2m} задана симплектическая структура ω*

3) *z является одномерным центром*

4) *для $\forall v_1, v_2 \in V^{2m} \quad [v_1, v_2] = \omega(v_1, v_2)z$.*

Пусть $\dim\mathfrak{g} = n$, а $\dim\mathfrak{h}_m = 2m+1$. Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ базис $z, v_1, \ldots, v_{2m}, f_1, \ldots, f_k$ (где $k = n-2m-1$), так чтобы вектора $z, v_1, \ldots, v_{2m}$ образовывали базис в идеале $\mathfrak{h}_m$, а z был одномерным центром. Предположим, что симплектическая структура ω в данном базисе задается матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$. Тогда структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & z & v_1 \ldots v_{2m} & f_1 \ldots f_k \\ \hline z & 0 & 0 \ \cdots \ 0 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline v_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \omega_{ij} z & a^p_{ij} v_p + b_{ij} z \\ v_{2m} & 0 & & \\ \hline f_1 & 0 & a^p_{ji} v_p + & \\ \vdots & \vdots & & * \\ f_k & 0 & + b_{ji} z & \\ \hline \end{array}$$

здесь a^p_{ij}, b_{ij} — тензоры кососимметричные по нижним индексам, индекс p меняется в пределах от 1 до $2m$, звездочкой обозначены структурные константы произвольного вида.

Лемма ([2]). *Существует подалгебра $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, такая что $\mathfrak{b} + \mathfrak{h}_m = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_m =< z >$. При этом подпространство $V \subset \mathfrak{h}_m$ инвариантно относительно присоединенного действия $\mathfrak{b}$, и $\mathfrak{b}$ действует на V симплектическими преобразованиями.*

Чтобы в данном случае построить полный коммутативный набор на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо взять полный коммутативный набор на алгебре $\mathfrak{b}$, затем в нем заменить все элементы алгебры $\mathfrak{b}$ на квадратичные полиномы, которые являются образами данных элементов при отображении

$$\rho_\beta(x) =< \beta, x >< z, x > + \frac{1}{2} < \omega^{-1}((ad_\beta)^* \pi(x)), x >$$

где x произвольный элемент из $\mathfrak{g}^*$, β — элемент подалгебры $\mathfrak{b}$, $\rho_\beta(x)$ соответствующий ему квадратичный полином, $\pi : \mathfrak{g}^* \to V^*$ проекция, $(ad_\beta)^* : V^* \to V^*$ оператор, двойственный к оператору $ad_\beta : V \to V$, ω — симплектическая структура на V, рассматриваемая как отображение из V в V^*, $\omega^{-1} : V^* \to V$ — обратный оператор.

После этого к полученному набору нужно добавить полный коммутативный набор на $\mathfrak{h}_m$, например можно взять $z, u_1, \dots, u_m$, где $u_1, \dots, u_m$ — базис некоторого лагранжевого подпространства в V. Поэтому нашей ближайшей целью будет описание подалгебры $\mathfrak{b}$.

В статье А.В. Болсинова [2] предложен следующий способ нахождения подалгебры $\mathfrak{b}$. Пусть $\xi = \xi_0 z + \sum\limits_{i=1}^{2m} \xi_i v_i + \sum\limits_{i=2m+1}^{n-1} \xi_i f_{i-2m}$ произвольный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $u = \sum\limits_{i=1}^{2m} u_i v_i$ произвольный элемент из V. Тогда коммутатор $[\xi, u] \in \mathfrak{h}_m$ можно разложить по подпространствам $< z >$ и V:

$$[\xi, u] = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 \in V, \quad \eta_2 \in < z > .$$

Легко видеть, что

$$\eta_2 = \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} \xi_i u_j \omega_{ij} z + \Big(\sum_{i=2m+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2m} \xi_i u_j [f_{i-2m}, v_j] \Big)\Big|_{\text{проекция на z}} =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} \xi_i u_j \omega_{ij} + \sum_{i=2m+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2m} \xi_i u_j b_{ij} \Big) z.$$

Так как $< z >$ одномерное подпространство, то элемент η_2 можно представить в виде $\eta_2 = l_\xi(u) z$, где $l_\xi(u)$ линейный функционал на V со значениями в поле $\mathbb{K}$. Так как на V есть невырожденная симплектическая структура, то существует единственный вектор $u_\xi \in V$, однозначно определяемый по ξ, такой что $l_\xi(u) = \omega(u_\xi, u)$. Найдем этот вектор u_ξ.

$$l_\xi(u) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \begin{pmatrix} \Omega \\ - \; - \; - \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2m} \end{pmatrix}$$

здесь $B = (b_{ij})$ матрица размера $k \times 2m$. Теперь из того что $l_\xi(u) = \omega(u_\xi, u)$ верно для всех u находим

$$(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \begin{pmatrix} \Omega \\ - \; - \; - \\ B \end{pmatrix} = (u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_{2m}}) \begin{pmatrix} \Omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{\xi_1} \\ \vdots \\ u_{\xi_{2m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \Big| & -\Omega^{-1}B^T \end{pmatrix}$$

Оказывается, что отображение $\xi \to \xi - u_\xi$ суть проекция алгебры $\mathfrak{g}$ на некоторое подпространство, более того, это подпространство и является искомой подалгеброй $\mathfrak{b}$. Пусть $M = (m_{ij}) = \Omega^{-1}B^T$, тогда оператор проекции в фиксированном нами базисе можно записать следующим образом

$$\xi - u_\xi = \left|\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & M \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_2 m \\ \xi_{2m+1} \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}$$

Выберем в алгебре $\mathfrak{b}$ базис $z, \tilde{f}_1 = f_1 - u_{f_1}, \ldots, \tilde{f}_k = f_k - u_{f_k}$. Найдем образ базисных элементов алгебры $\mathfrak{b}$ при отображении ρ. Так как $\rho_\beta(x) =< \beta, x >< z, x > + \frac{1}{2} < \omega^{-1}((ad_\beta)^*\pi(x)), x >$, то нетрудно видеть, что

$$\rho_z = z^2$$

$$\rho_{\tilde{f}_i} = z\big(f_i + \sum_{j=1}^{2m} m_{ji}v_j\big) + \frac{1}{2}(v_1, \ldots, v_{2m}) \begin{pmatrix} & \Omega^{-1}(a_{iq}^p)^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2m} \end{pmatrix}, 1 \le i \le k \quad (****)$$

Предположим, что $\tilde{P}_\alpha, \alpha \in I$ полный коммутативный набор полиномов на алгебре $\mathfrak{b}$ (отметим, что это полиномы от $z, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ с коэффициентами из прежнего поля $\mathbb{K}$). Тогда согласно методу Садэтова, для того чтобы получить полный коммутативный набор на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо в полиномах $\tilde{P}_\alpha, \alpha \in I$ заменить $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ на квадратичные полиномы от $z, v_1, \ldots, v_{2m}, f_1, \ldots, f_k$ согласно $(****)$. Затем к полученным полиномам $P_\alpha, \alpha \in I$ добавить полный коммутативный набор на $\mathfrak{h}_m$, то есть например $z, u_1, \ldots, u_m$ (где $u_1, \ldots, u_m$ базис некоторого лагранжевого подпространства в V).

Теперь найдем распределение, задаваемое градиентами полного коммутативного набора на $\mathfrak{g}$, для этого достаточно найти $\frac{\partial P_\alpha}{\partial v_i}, \frac{\partial P_\alpha}{\partial f_j}, \alpha \in I, 1 \le i \le 2m, 1 \le j \le k$. Отметим, что производные $\frac{\partial P_\alpha}{\partial z}, \alpha \in I$ не влияют на распределение, так как в полный коммутативный набор входит z. Легко видеть, что

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial v_i} = \Big(\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_s} \underbrace{\Big(zm_{is} + \frac{1}{2}\big(\sum_{p=1}^{2m}\sum_{q=1}^{2m} \omega_{ip}(a_{sq}^p)^* v_q + \sum_{p=1}^{2m}\sum_{q=1}^{2m} \omega_{qp}(a_{si}^p)^* v_q\big)\Big)}_{\frac{\partial \rho_{\tilde{f}_s}}{\partial v_i}}\Big)\Big|_\rho, \quad 1 \le i \le 2m$$

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial f_j} = \Big(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_j} z\Big)\Big|_\rho, 1 \le j \le k$$

в правых частях вместо $z, \tilde{f}_i$ подставлены $\rho_z, \rho_{\tilde{f}_i}$ из $(****)$. Пусть $G = \Big(\frac{\partial \rho_{\tilde{f}_i}}{\partial v_j}\Big)$ матрица из частных производных, ее размеры $k \times 2m$. Отметим, что матрица G явно выражается через структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ (собственно это выражение написано в формуле выше).

Для того чтобы получить распределение градиентов полного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо взять градиенты полного набора на алгебре $\mathfrak{b}$, отбросить у них первую компоненту (то есть производную $\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial z}$), в оставшихся компонентах $z, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k$ заменить согласно $(****)$ на $\rho_z, \rho_{\tilde{f}_1}, \ldots, \rho_{\tilde{f}_k}$, полученные вектора домножить справа на матрицу вида:

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_1}\Big|_\rho, \ldots, \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_k}\Big|_\rho\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccc} & z & & 0 \\ G & & \ddots & \\ & 0 & & z \end{array}\right)$$

Это будет проекция искомого распределения вдоль вектора z. Теперь добавив линейную оболочку градиентов полиномов $z, u_1, \ldots, u_k$ получим нужное нам распределение.

Теорема. Распределение градиентов полного коммутативного набора полиномов, полученного методом Садэтова, строится явным алгоритмом, причем алгоритм сводится к решению линейных систем уравнений.

Алгоритм построения распределения градиентов.

Метод Садэтова в конечном итоге может прийти либо к коммутативной алгебре, либо к полупростой.

а) В случае коммутативной алгебры полный коммутативный набор состоит из линейных полиномов (базисных векторов алгебры) и распределение градиентов полиномов в каждой точке совпадает со всем кокасательным пространством.

б) В случае полупростой алгебры полный коммутативный набор получается методом сдвига аргумента и искомое распределение градиентов есть распределение градиентов данных полиномов.

Теперь считаем, что в методе Садэтова был совершен индуктивный переход одного из двух видов: 1) коммутативный идеал, 2) идеал Гейзенберга. Пусть на алгебре $\mathfrak{k}$, к которой мы перешли, распределение градиентов полного коммутативного набора уже известно, найдем распределение градиентов полного коммутативного набора на исходной алгебре $\mathfrak{g}$:

1) В исходной алгебре $\mathfrak{g}$ был коммутативный идеал $\mathfrak{h}$ не являющийся одномерным центром. Значит для того чтобы получить распределение градиентов полного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо взять градиенты полного набора на алгебре $\mathfrak{k}$, отбросить у них первую компоненту (то есть производную $\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_0}$), в оставшихся компонентах $\varphi_0, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_l$ заменить согласно $(***)$, полученные вектора домножить справа на матрицу вида:

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_{k+1}}\Big|_{\varphi_i}, \ldots, \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \varphi_l}\Big|_{\varphi_i}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & c_{l+1,k+1} & \cdots & c_{n,k+1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{l+1,l} & \cdots & c_{n,l} \end{array}\right)$$

получим проекцию искомого распределения вдоль первых k базисных векторов, добавив к полученному распределению распределение, задаваемое градиентами полиномов $e_1, \ldots, e_k$ получим искомое распределение.

2) В исходной алгебре $\mathfrak{g}$ был идеал $\mathfrak{h}_m$ изоморфный алгебре Гейзенберга, причем центр идеала совпадал с центром всей алгебры. Поэтому для того чтобы получить распределение градиентов полного коммутативного набора на алгебре $\mathfrak{g}$ необходимо взять градиенты полного коммутативного набора на алгебре $\mathfrak{t}$, отбросить у них первую компоненту (то есть производную $\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial z}$), в оставшихся компонентах $z, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k$ заменить согласно $(* * **)$ на $\rho_z, \rho_{\tilde{f}_1}, \dots, \rho_{\tilde{f}_k}$, полученные вектора домножить справа на матрицу вида:

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_1}\Big|_\rho, \dots, \frac{\partial \tilde{P}_\alpha}{\partial \tilde{f}_k}\Big|_\rho\right) \qquad \left[\begin{array}{c|ccc} & z & & 0 \\ G & & \ddots & \\ & 0 & & z \end{array}\right]$$

получим проекцию искомого распределения вдоль вектора z, добавив к полученному распределению распределение, задаваемое градиентами полиномов $z, u_1, \dots, u_k$ получим искомое распределение.

Конец алгоритма.

Полные коммутативные наборы полиномов на алгебрах Ли малой размерности.

В работе была использована классификация вещественных алгебр Ли размерностей три, четыре, пять и нильпотентных размерности шесть, которая приведена в статье J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz [3]. Для каждой из этих алгебр был построен полный коммутативный набор полиномов методом Садэтова.

Придерживаясь обозначений в статье [3] мы каждой алгебре поставим в соответствие символ $A_{n,m}$, где n — размерность алгебры, а m — ее порядковый номер в классификации алгебр той же размерности.

Результат построения полных коммутативных наборов на данных алгебрах приведен в виде таблиц на страницах 17 — 34. Каждая таблица состоит из четырех столбцов. В первом столбце приведена таблица умножения алгебры, задающая коммутатор. Во втором столбце указаны ограничения на параметр (если рассматривается не одна алгебра, а сразу целое семейство, зависящее от параметра) и набор инвариантов данной алгебры. Все наборы инвариантов были также получены в работе [3]. В третьем столбце указан полный коммутативный набор полиномов, который получается после применения метода Садэтова. В последнем четвертом столбце указан символ данной алгебры.

Алгебры Ли малой размерности можно разбить на шесть классов, таких что для всех алгебр из одного класса метод Садэтова устроен одинаково (метод Садэтова по сути является алгоритмом, и на каждом шаге алгоритма есть несколько возможностей, мы говорим, что метод Садэтова для двух алгебр устроен одинаково, если на каждом шаге у этих алгебр выбираются одинаковые возможности). Для каждого из шести классов мы перечислим все алгебры в него входящие и для одной из этих алгебр подробно приведем метод Садэтова.

Полупростые алгебры.

Среди рассматриваемых нами алгебр есть две полупростые, а именно $A_{3,8}$ (это в точности алгебра $\mathfrak{su}(1,1)$) и $A_{3,9}$ (это в точности алгебра $\mathfrak{su}(2)$). Для полупрострых алгебр метод Садэтова совпадает с методом сдвига аргумента, поэтому здесь мы не будем приводить построение полного коммутативного набора.

Алгебры, в которых существует большой коммутативный идеал.

Среди рассматриваемых нами алгебр есть семьдесят алгебр, в которых существует большой коммутативный идеал, то есть такой коммутативный идеал, что его базис (рассматриваемый как набор линейных полиномов) образует полный коммутативный набор на всей алгебре. Это алгебры: $A_{3,1} - A_{3,7}$; $A_{4,1} - A_{4,7}$; $A_{4,9}$; $A_{4,11}$; $A_{4,12}$; $A_{5,1}$; $A_{5,2}$; $A_{5,4} - A_{5,24}$; $A_{5,27} - A_{5,35}$; $A_{5,38}$; $A_{5,39}$; $A_{6,1}$; $A_{6,2}$; $A_{6,4} - A_{6,20}$. Например, рассмотрим алгебру $A_{3,4}$:

$$A_{3,4}: \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & -e_2 \\ \hline -e_1 & e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ее размерность $\dim A_{3,4} = 3$, а индекс $\mathrm{ind} A_{3,4} = 1$, поэтому полный коммутативный набор должен состоять из $k = \frac{1}{2}(3+1) = 2$ полиномов. Легко видеть, что в данной алгебре существует коммутативный идеал, он натянут на вектора e_1 и e_2. В силу того, что идеал достаточно большой, полиномов e_1, e_2 хватает для полного коммутативного набора.

Отметим, что если в данном случае провести "факторизацию"по коммутативному идеалу, то есть рассмотреть алгебру рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем, то она просто будет одномерной.

Алгебры, в которых существует коммутативный идеал, а алгебра рациональных сечений двумерна.

Следующий класс алгебр, к рассмотрению которого мы переходим, состоит из алгебр, в которых существует коммутативный идеал (не являющийся одномерным центром), а алгебра рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем двумерна. Этот класс состоит из семи алгебр: $A_{4,8}$; $A_{5,3}$; $A_{5,36}$; $A_{5,40}$; $A_{6,3}$; $A_{6,21}$; $A_{6,22}$.

Рассмотрим, например, алгебру $A_{4,8}$:

$A_{4,8}$:

0	0	0	0
0	0	e_1	e_2
0	$-e_1$	0	$-e_3$
0	$-e_2$	e_3	0

Ее размерность равна $\dim A_{4,8} = 4$, а индекс $\operatorname{ind} A_{4,8} = 2$, поэтому полный коммутативный набор должен содержать $k = \frac{1}{2}(4+2) = 3$ полинома. В данной алгебре существует коммутативный идеал, он натянут на вектора e_1 и e_2.

Согласно методу Садэтова теперь необходимо перейти к алгебре рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем, для этого необходимо решить систему уравнений на стабилизатор элемента общего положения.

Ниже будем использовать введенные выше обозначения. Система на стабилизатор общего положения имеет вид $\sum\limits_{j=3}^{4}\sum\limits_{p=1}^{2} x_j h_p a_{ji}^p = 0$, $i = 1, 2$. Напомним, что $h = (h_1, h_2)$ элемент общего положения из пространства двойственного к идеалу, а $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ элемент алгебры $A_{4,8}$. При фиксированном h пространство решений системы и будет являться стабилизатором элемента h. В нашем случае система состоит из одного уравнения и имеет вид

$$x_3 h_1 + x_4 h_2 = 0.$$

Поэтому размерность стабилизатора элемента общего положения равна $\dim St(h) = 4 - 1 = 3$, откуда получаем, что размерность алгебры рациональных сечений над расширенным полем равна $\dim_{\mathbb{R}(e_1,e_2)} \mathfrak{a} = 3 - 2 + 1 = 2$. Следующие рациональные сечения образуют базис в алгебре рациональных сечений:

$$\Psi_0 : \begin{array}{rcl} x_1 &=& 1 \\ x_2 &=& 0 \\ x_3 &=& 0 \\ x_4 &=& 0 \end{array} \qquad \Psi_1 : \begin{array}{rcl} x_1 &=& 0 \\ x_2 &=& 0 \\ x_3 &=& 1 \\ x_4 &=& -\frac{h_1}{h_2} \end{array}$$

Соответствующие им полиномы в алгебре $\mathfrak{a}$ имеют вид:

$$\begin{array}{rcl} f_{\Psi_0} &=& e_1 \\ f_{\Psi_1} &=& e_2 e_3 - e_1 e_4. \end{array}$$

Выше мы установили, что алгебра $\mathfrak{a}$ двумерна, но в алгебре рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр всегда существует центр, поэтому алгебра $\mathfrak{a}$ коммутативна, а значит в качестве полного коммутативного набора на ней можно взять просто линейные полиномы f_{Ψ_0} и f_{Ψ_1}.

Чтобы получить полный коммутативный набор на первоначальной алгебре $A_{4,8}$ необходимо к полиномам, соответствующим полному набору на алгебре $\mathfrak{a}$ добавить базис в идеале (линейные полиномы). В итоге получаем, что e_1, e_2, $e_2e_3 - e_1e_4$ — полный коммутативный набор на алгебре $A_{4,8}$.

Алгебры, в которых существует коммутативный идеал, а алгебра рациональных сечений трехмерна.

Еще один класс состоит из двух алгебр $A_{5,25}$ и $A_{5,26}$. В этих алгебрах существует коммутативный идеал не являющийся одномерным центром, такой что алгебра рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем трехмерна.

Для примера рассмотрим алгебру $A_{5,25}$:

$A_{5,25}$:

0	0	0	0	$2pe_1$
0	0	e_1	0	pe_2+e_3
0	$-e_1$	0	0	pe_3-e_2
0	0	0	0	be_4
-$2pe_1$	-pe_2-e_3	-pe_3+e_2	-be_4	0

Отметим, что это не одна алгебра, а целое семейство алгебр зависящее от двух параметров b и p, причем на параметры наложено единственное условие $b \neq 0$.

Размерность алгебры $A_{5,25}$ равна $\dim A_{5,25} = 5$, а индекс $\mathrm{ind} A_{5,25} = 1$. Поэтому полный коммутативный набор должен содержать $k = \frac{1}{2}(5+1) = 3$ полинома. В данной алгебре существует коммутативный идеал, он натянут на вектора e_1 и e_4.

Теперь согласно методу Садэтова нужно перейти к алгебре рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем, для этого необходимо решить систему на стабилизатор общего положения, в нашем случае она будет иметь вид:

$$\begin{cases} -2ph_1x_5 &= 0 \\ -bh_4x_5 &= 0. \end{cases}$$

Так как h элемент общего положения, то стабилизатор будет задаваться одним уравнением $x_5 = 0$. Поэтому размерность стабилизатора общего положения будет равна $\dim St(h) = 5 - 1 = 4$, а размерность алгебры рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем $\dim_{\mathbb{R}(e_1,e_4)} \mathfrak{a} = 4 - 2 + 1 = 3$. Следующие рациональные сечения образуют базис в алгебре рациональных сечений:

$$\Psi_0 : \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \Psi_1 : \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \Psi_2 : \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Соответствующие им полиномы в алгебре $\mathfrak{a}$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} f_{\Psi_0} &= e_1 \\ f_{\Psi_1} &= e_2 \\ f_{\Psi_2} &= e_3 \end{aligned}$$

Легко видеть, что таблица умножения алгебры $\mathfrak{a}$ в базисе $f_{\Psi_0}, f_{\Psi_1}, f_{\Psi_2}$ имеет вид:

$\mathfrak{a}$:

0	0	0
0	0	f_{Ψ_0}
0	$-f_{\Psi_0}$	0

Подчеркнем, что это алгебра над полем $\mathbb{R}(e_1, e_4)$. Так как $\dim\mathfrak{a} = 3$, а $\mathrm{ind}\mathfrak{a} = 1$, то полный коммутативный набор на алгебре $\mathfrak{a}$ должен состоять из $\tilde{k} = \frac{1}{2}(3+1) = 2$ полиномов. Но в алгебре $\mathfrak{a}$ существует большой коммутативный идеал, он натянут на вектора f_{Ψ_0} и f_{Ψ_1}, поэтому в качестве полного коммутативного набора можно взять линейные полиномы (базисные вектора данного идеала).

Теперь добавим к полученным полиномам базисные вектора коммутативного идеала в алгебре $A_{5,25}$. Окончательно получаем, что e_1, e_2, e_4 полный коммутативный набор полиномов на исходной алгебре $A_{5,25}$.

Алгебра $A_{4,10}$.

В этом пункте мы разберем класс состоящий из одной алгебры — $A_{4,10}$.

$A_{4,10}$:

0	0	0	0
0	0	e_1	$-e_3$
0	$-e_1$	0	e_2
0	e_3	$-e_2$	0

Размерность этой алгебры равна $\dim A_{4,10} = 4$, а индекс $\mathrm{ind} A_{4,10} = 2$, поэтому полный коммутативный набор должен состоять из $k = \frac{1}{2}(4+2) = 3$ полиномов. В данной алгебре не существует коммутативного идеала не совпадающего с одномерным центром алгебры, зато есть идеал изоморфный алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}_1$, причем центр идеала совпадает с центром алгебры. Идеал натянут на базисные вектора e_1, e_2, e_3, где e_1 является центром как идеала, так и алгебры $A_{4,10}$.

Согласно методу Садэтова теперь необходимо рассмотреть проекцию алгебры $A_{4,10}$ на некоторую подалгебру $\mathfrak{b}$. В данном случае подалгебра $\mathfrak{b}$ натянута на e_1 и e_4. Для данной алгебры $\mathfrak{b}$ существует вложение в $P(A_{4,10})$, которое устроено следующим образом:

$$\rho_\beta(x) =< \beta, x >< e_1, x > + \frac{1}{2} < \omega^{-1}((ad_\beta)^* \pi(x)), x >$$

где $\beta \in \mathfrak{b}$ произвольный элемент алгебры $\mathfrak{b}$, f_β образ вложения (квадратичный полином на $A_{4,10}^*$), x произвольный элемент из $A_{4,10}^*$.

Далее необходимо построить полный коммутативный набор полиномов на алгебре $\mathfrak{b}$ и взять образ полного коммутативного набора при описаном выше вложении. К полученным полиномам добавить полный набор на $\mathfrak{h}_1$.

В нашем случае подалгебра $\mathfrak{b}$ двумерна и коммутативна, поэтому в качестве полного коммутативного набора на ней достаточно взять базисные элементы (линейные полиномы), то есть e_1 и e_4. Легко проверить, что при вложении их образами будут следующие полиномы:

$$\begin{aligned} f_{e_1} &= e_1^2 \\ f_{e_4} &= e_1e_4 + \tfrac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2) \end{aligned}$$

Добавляя к ним e_1, e_2 — полный коммутативный набор на $\mathfrak{h}_1$, получаем, что полиномы $e_1, e_2, e_1e_4 + \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2)$ образуют полный коммутативный набор на исходной алгебре $A_{4,10}$.

Алгебра $A_{5,37}$.

Мы переходим к рассмотрению последнего из шести классов, который состоит из одной алгебры $A_{5,37}$.

$A_{5,37}$:

0	0	0	$2e_1$	0
0	0	e_1	e_2	$-e_3$
0	$-e_1$	0	e_3	e_2
-2e_1	$-e_2$	$-e_3$	0	0
0	e_3	$-e_2$	0	0

Размерность данной алгебры равна $\dim A_{5,37} = 5$, а индекс $\mathrm{ind} A_{5,37} = 1$, поэтому полный коммутативный набор должен состоять из $k = \frac{1}{2}(5+1) = 3$ полиномов.

В данной алгебре существует одномерный коммутативный идеал не являющийся одномерным центром. Он натянут на вектор e_1. Переходя к алгебре рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр, находим стабилизатор общего положения, который задается системой:

$$-2h_1x_4 = 0.$$

Так как h элемент общего положения, то стабилизатор общего положения задается уравнением: $x_4 = 0$. Поэтому $\dim St(h) = 5 - 1 = 4$, а $\dim_{\mathbb{R}(e_1)} \mathfrak{a} = 4 - 1 + 1 = 4$. Следующие рациональные сечения образуют базис в алгебре рациональных сечений:

$$\Psi_0 : \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \Psi_1 : \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \Psi_2 : \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \Psi_3 : \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Соответствующие им полиномы в алгебре $\mathfrak{a}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{\Psi_0} &= e_1 \\ f_{\Psi_1} &= e_2 \\ f_{\Psi_2} &= e_3 \\ f_{\Psi_3} &= e_5. \end{aligned}$$

Поэтому таблица умножения алгебры $\mathfrak{a}$ в базисе $f_{\Psi_0}, f_{\Psi_1}, f_{\Psi_2}, f_{\Psi_3}$ будет следующей:

$\mathfrak{a}$:

0	0	0	0
0	0	f_{Ψ_0}	$-f_{\Psi_2}$
0	$-f_{\Psi_0}$	0	f_{Ψ_1}
0	f_{Ψ_2}	$-f_{\Psi_1}$	0

Так как индекс $\mathrm{ind}\mathfrak{a} = 2$, а $\dim\mathfrak{a} = 4$, то полный коммутативный набор должен состоять из $\tilde{k} = \frac{1}{2}(4+2) = 3$ полиномов. Несмотря на то, что алгебра $\mathfrak{a}$ над полем $\mathbb{R}(e_1)$, ее структурные константы в данном базисе принадлежат $\mathbb{R}$ и совпадают со структурными константами алгебры $A_{4,10}$. Поэтому в качестве полного коммутативного набора на алгебре $\mathfrak{a}$ можно взять полный коммутативный набор на алгебре $A_{4,10}$. Добавляя к нему базисный вектор одномерного идеала (линейный полином) получаем, что $e_1, e_2, e_1e_5 + \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2)$ образуют полный коммутативный набор полиномов на исходной алгебре $A_{5,37}$.

Все вышесказанное резюмирует следующая теорема.

Теорема.

1) *На каждой трехмерной вещественной не полупростой алгебре Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

2) *На алгебре с коммутатором:* $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_3$ *полный коммутативный набор полиномов:* y_1, y_2, $y_2y_3 - y_1y_4$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_4] = e_2$ *полный коммутативный набор полиномов:* y_1, y_2, $y_1y_4 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2)$. *На остальных четырехмерных вещественных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

3) *На алгебре с коммутатором:* $[e_3, e_4] = e_2$, $[e_3, e_5] = e_1$, $[e_4, e_5] = e_3$ *полный коммутативный набор:* y_1, y_2, y_3, $y_1y_4 - y_2y_5$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = -e_2$, $[e_3, e_5] = e_3$ *полный коммутативный набор:* y_1, y_2, $y_2y_3 + y_1y_5$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_4] = 2e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_2, e_5] = -e_3$, $[e_3, e_5] = e_2$ *полный коммутативный набор:* y_1, y_2, $y_1y_5 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2)$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_1, e_2] = 2e_1$, $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = 2e_3$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = -e_5$, $[e_3, e_5] = e_4$ *полный коммутативный набор:* $y_2y_4y_5 - y_1y_4^2 + y_3y_5^2$, y_4, y_5. *На остальных пятимерных вещественных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

4) *На алгебре с коммутатором:* $[e_1, e_2] = e_6$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$ *полный коммутативный набор:* y_3, y_4, y_5, y_6, $y_2y_4 - y_1y_5$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_3, e_4] = e_6$ *полный коммутативный набор:* y_4, y_5, y_6, $y_2y_6 - y_3y_5$. *На алгебре с коммутатором:* $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_3, e_4] = e_6$ *полный коммутативный набор:* y_4, y_5, y_6, $y_2y_6 - y_3y_5$. *На остальных шестимерных вещественных нильпотентных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

Трехмерные алгебры.

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1	$y_1,\ y_2$	$A_{3,1}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline -e_1 & \text{-}e_1\text{-}e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1 \exp[-\frac{x_2}{x_1}]$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,2}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_2 \\ \hline -e_1 & -e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\frac{x_2}{x_1}$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,3}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & -e_2 \\ \hline -e_1 & e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1 x_2$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,4}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & ae_2 \\ \hline -e_1 & -ae_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	$0 < \|a\| < 1$ $x_2 x_1^{-a}$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,5}$

$\begin{matrix} 0 & 0 & -e_2 \\ 0 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{matrix}$	$x_1^2 + x_2^2$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,6}$
$\begin{matrix} 0 & 0 & ae_1\text{-}e_2 \\ 0 & 0 & e_1+ae_2 \\ \text{-}ae_1+e_2 & \text{-}e_1\text{-}ae_2 & 0 \end{matrix}$	$a > 0$ $(x_1^2 + x_2^2)[\frac{x_1+ix_2}{x_1-ix_2}]^{ia}$	$y_1,\ y_2$	$A_{3,7}$
$\begin{matrix} 0 & e_1 & -2e_2 \\ -e_1 & 0 & e_1 \\ 2e_2 & -e_1 & 0 \end{matrix}$	$x_2^2 + x_1x_3$	метод сдвига аргумента	$A_{3,8}$
$\begin{matrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{matrix}$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	метод сдвига аргумента	$A_{3,9}$

Четырехмерные алгебры.

$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -e_1 & -e_2 & 0 \end{array}$	x_1 $x_2^2 - 2x_1x_3$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,1}$
$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & ae_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2+e_3 \\ -ae_1 & -e_2 & -e_2-e_3 & 0 \end{array}$	$a \neq 0$ $x_2 \exp(-\frac{x_3}{x_2})$ $\frac{x_2^a}{x_1}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,2}$
$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ -e_1 & 0 & -e_2 & 0 \end{array}$	x_2 $x_1 \exp(-\frac{x_3}{x_2})$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,3}$
$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2+e_3 \\ -e_1 & -e_1-e_2 & -e_2-e_3 & 0 \end{array}$	$x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$ $\frac{2x_1x_3 - x_2^2}{x_1^2}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,4}$
$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & ae_2 \\ 0 & 0 & 0 & be_3 \\ -e_1 & -ae_2 & -be_3 & 0 \end{array}$	$ab \neq 0, -1 \leq a \leq b \leq 1$ $\frac{x_1^a}{x_2}$ $\frac{x_1^b}{x_3}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,5}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & ae_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & be_2\text{-}e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2+be_3 \\ \hline \text{-}ae_1 & \text{-}be_2+e_3 & \text{-}e_2\text{-}be_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0,\ b \geq 0$ $\frac{x_1^{2b/a}}{x_2^2+x_3^2}$ $(x_2^2 + x_3^2)(\frac{x_2+ix_3}{x_2-ix_3})^{ib}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{4,6}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 2e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline \text{-}2e_1 & -e_2 & \text{-}e_2\text{-}e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	нет	$y_1,\ y_2$	$A_{4,7}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & -e_3 \\ \hline 0 & -e_2 & e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1 $x_2x_3 - x_1x_4$	$y_1,\ y_2,$ $y_2y_3 - y_1y_4$	$A_{4,8}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & (1+b)e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & be_3 \\ \hline \text{-}(1+b)e_1 & -e_2 & \text{-}be_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	$-1 < b \leq 1$ нет	$y_1,\ y_2$	$A_{4,9}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & -e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & e_3 & -e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1 $2x_1x_4 + x_2^2 + x_3^2$	$y_1,\ y_2,$ $y_1y_4+\frac{1}{2}(y_2^2+y_3^2)$	$A_{4,10}$

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$2ae_1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>e_1</td><td>ae_2-e_3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-e_1$</td><td>0</td><td>e_2+ae_3</td></tr>
<tr><td>-$2ae_1$</td><td>-ae_2+e_3</td><td>-e_2-ae_3</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>$a > 0$
нет</td>
<td>y_1, y_2</td>
<td>$A_{4,11}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>e_1</td><td>$-e_2$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>e_2</td><td>e_1</td></tr>
<tr><td>$-e_1$</td><td>$-e_2$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>e_2</td><td>$-e_1$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>нет</td>
<td>y_1, y_2</td>
<td>$A_{4,12}$</td>
</tr>
</table>

Пятимерные алгебры.

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & -e_1 & -e_2 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1,\ x_2,$ $x_2x_3 - x_1x_4$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,1}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1,$ $x_2^2 - 2x_1x_3,$ x_2^3+$3x_1^2x_4$-$3x_1x_2x_3$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,2}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & -e_2 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1,\ x_2,$ x_3^2+$2x_2x_5$-$2x_1x_4$	$y_1,\ y_2,\ y_3,$ $y_1y_4 - y_2y_5$	$A_{5,3}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,4}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,5}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,6}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & be_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ce_4 \\ \hline -e_1 & \text{-}ae_2 & \text{-}be_3 & \text{-}ce_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$abc \neq 0$, $-1 \leq c \leq b \leq a \leq 1$, $\frac{x_1^a}{x_2},\ \frac{x_1^b}{x_3},\ \frac{x_1^c}{x_4}$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,7}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ce_4 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_3 & \text{-}ce_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$0 < \|c\| \leq 1$ $x_1,\ \frac{x_3^c}{x_4}$ $x_3 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,8}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & be_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ce_4 \\ \hline -e_1 & \text{-}e_1\text{-}e_2 & \text{-}be_3 & \text{-}ce_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$0 \neq c \leq b$ $\frac{x_1^b}{x_3},\ \frac{x_1^c}{x_4}$, $x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,9}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & -e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1, $x_2^2 - 2x_1x_3$, $x_4 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,10}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ce_4 \\ \hline -e_1 & -e_1-e_2 & -e_2-e_3 & -ce_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$c \neq 0$ $\frac{x_1^c}{x_4}$, $x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$, $2\frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2^2}{x_1^2}$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,11}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_3+e_4 \\ \hline -e_1 & -e_1-e_2 & -e_2-e_3 & -e_3-e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$, $2\frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2^2}{x_1^2}$, $3\frac{x_4}{x_1} - 3\frac{x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,12}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & pe_3-qe_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & qe_3+pe_4 \\ \hline -e_1 & -ae_2 & qe_4-pe_3 & -qe_3-pe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$aq \neq 0,\ \|a\| \leq 1$ $\frac{x_1^a}{x_2},\ \frac{x_1^{2p}}{x_3^2+x_4^2}$, $x_1^{2q}(\frac{x_3+ix_4}{x_3-ix_4})^i$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,13}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & pe_3-e_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_3+pe_4 \\ \hline 0 & -e_1 & -pe_3+e_4 & -e_3-pe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1, $(x_3^2+x_4^2)(\frac{x_3+ix_4}{x_3-ix_4})^{ip}$, $(x_3^2+x_4^2)\exp(-2p\frac{x_2}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,14}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_3+ae_4 \\ \hline -e_1 & -e_1-e_2 & -ae_3 & -e_3-ae_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\|a\| \leq 1$ $\frac{x_1^a}{x_3}$, $x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$ $x_3 \exp(-\frac{x_4}{x_3})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,15}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & pe_3\text{-}qe_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & qe_3+pe_4 \\ \hline -e_1 & \text{-}e_1\text{-}e_2 & qe_4\text{-}pe_3 & \text{-}qe_3\text{-}pe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$q \neq 0$ $\frac{x_1^{2p}}{x_3^2+x_4^2}$, $x_1^{2q}(\frac{x_3-ix_4}{x_3+ix_4})$, $x_1 \exp(-\frac{x_2}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,16}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & pe_1\text{-}e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+pe_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & qe_3\text{-}se_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & se_3+qe_4 \\ \hline \text{-}pe_1+e_2 & \text{-}e_1\text{-}pe_2 & se_4\text{-}qe_3 & \text{-}se_3\text{-}qe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$s \neq 0$ $\frac{(x_1^2+x_2^2)^q}{(x_3^2+x_4^2)^p}$, $(x_1^2+x_2^2)(\frac{x_1+ix_2}{x_1-ix_2})^{ip}$, $(x_3^2+x_4^2)(\frac{x_3+ix_4}{x_3-ix_4})^{\frac{iq}{s}}$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,17}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & pe_1\text{-}e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+pe_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+pe_3\text{-}e_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2+e_3+pe_4 \\ \hline \text{-}pe_1+e_2 & \text{-}e_1\text{-}pe_2 & \text{-}e_1\text{-}pe_3+e_4 & \text{-}e_2\text{-}e_3\text{-}pe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$p \geq 0$ $\frac{x_1x_4-x_2x_3}{x_1^2+x_2^2}$, $(x_1^2+x_2^2)(\frac{x_1+ix_2}{x_1-ix_2})^{ip}$, $(x_1^2+x_2^2)\times$ $\times \exp(-2p\frac{x_1x_3+x_2x_4}{x_1^2+x_2^2})$	$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,18}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & (a\text{-}1)e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & be_4 \\ \hline \text{-}ae_1 & -e_2 & \text{-}(a\text{-}1)e_3 & \text{-}be_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$b \neq 0$ $\frac{x_1^b}{x_4^a}$	$y_1,\ y_2,\ y_4$	$A_{5,19}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & (a\text{-}1)e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+ae_4 \\ \hline \text{-}ae_1 & -e_2 & \text{-}(a\text{-}1)e_3 & \text{-}e_1\text{-}ae_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1 \exp(-a\frac{x_4}{x_1})$	$y_1,\ y_2,\ y_4$	$A_{5,20}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3+e_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline -2e_1 & -e_2-e_3 & -e_3-e_4 & -e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\frac{x_4^2}{x_1}$	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,21}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline 0 & -e_3 & 0 & -e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_1	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,22}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & be_4 \\ \hline -2e_1 & -e_2-e_3 & -e_3 & -be_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$b \neq 0$ $\frac{x_1^b}{x_4^2}$	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,23}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon e_1+2e_4 \\ \hline -2e_1 & -e_2-e_3 & -e_3 & -\varepsilon e_1-2e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon = \pm 1$ $x_1 \exp[-2\varepsilon(\frac{x_4}{x_1})]$	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,24}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2pe_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & pe_2+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & pe_3-e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & be_4 \\ \hline -2pe_1 & -pe_2-e_3 & -pe_3+e_2 & -be_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$b \neq 0$ $\frac{x_1^b}{x_4^{2p}}$	$y_1,\ y_2,\ y_4$	$A_{5,25}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2pe_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & pe_2+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & pe_3\text{-}e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon e_1+2pe_4 \\ \hline \text{-}2pe_1 & \text{-}pe_2\text{-}e_3 & \text{-}pe_3+e_2 & \text{-}\varepsilon e_1\text{-}2pe_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon = \pm 1$ $x_1 \exp[-2\varepsilon p \frac{x_4}{x_1}]$	$y_1,\ y_2,\ y_4$	$A_{5,26}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3+e_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1+e_4 \\ \hline -e_1 & 0 & \text{-}e_3\text{-}e_4 & \text{-}e_1\text{-}e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1 \exp(-\frac{x_4}{x_1})$	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,27}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ae_1 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & 0 & (a\text{-}1)e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3+e_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline \text{-}ae_1 & \text{-}(a\text{-}1)e_2 & \text{-}e_3\text{-}e_4 & -e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\frac{x_4^a}{x_1}$	$y_1,\ y_3,\ y_4$	$A_{5,28}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline -e_1 & -e_2 & 0 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_3	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,29}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (a+1)e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & ae_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & (a\text{-}1)e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & 0 & e_4 \\ \hline \text{-}(a+1)e_1 & \text{-}ae_2 & \text{-}(a\text{-}1)e_3 & -e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\frac{(x_2^2-2x_1x_3)^{a+1}}{x_1^{2a}}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,30}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & 2e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & 0 & e_3+e_4 \\ \hline -3e_1 & -2e_2 & -e_3 & -e_3-e_4 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\frac{(x_2^2-2x_1x_3)^3}{x_1^4}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,31}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & ae_1+e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & -e_2 & 0 & 0 \\ \hline -e_1 & -e_2 & -ae_1-e_3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1^{2a}\exp[\frac{x_2^2-2x_1x_3}{x_1^2}]$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,32}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & be_3 & ae_3 \\ \hline -e_1 & 0 & -be_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_2 & -ae_3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a^2-b^2\neq 0$ $\frac{x_1^bx_2^a}{x_3}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,33}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & ae_1 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_3 & e_2 \\ \hline -ae_1 & -e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ \hline -e_1 & 0 & -e_2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$(\frac{x_2^a}{x_1})\exp(\frac{x_3}{x_2})$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,34}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 0 & be_1 & ae_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & -e_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_3 & e_2 \\ \hline -be_1 & -e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ \hline -ae_1 & e_3 & -e_2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a^2+b^2\neq 0$ $\frac{x_1^2}{(x_2^2+x_3^2)^b}\left(\frac{x_2+ix_3}{x_2-ix_3}\right)^{ia}$	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,35}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & e_2 & -e_2 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline -e_1 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$(x_2x_3 + x_1x_5)/x_1$	$y_1,\ y_2,$ $y_2y_3 + y_1y_5$	$A_{5,36}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & 2e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_1 & e_2 & -e_3 \\ \hline 0 & -e_1 & 0 & e_3 & e_2 \\ \hline \text{-}2e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e_3 & -e_2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$(x_2^2+x_3^2+2x_1x_5)/x_1$	$y_1,\ y_2,$ $y_1y_5 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2)$	$A_{5,37}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_1 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & -e_2 & 0 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_3	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,38}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 0 & 0 & e_1 & -e_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_1 & -e_2 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_2 & -e_1 & 0 & -e_3 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_3	$y_1,\ y_2,\ y_3$	$A_{5,39}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 0 & 2e_1 & -e_2 & e_5 & 0 \\ \hline \text{-}2e_1 & 0 & 2e_3 & e_4 & -e_5 \\ \hline e_2 & \text{-}2e_3 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline -e_5 & -e_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e_5 & -e_4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$x_1x_4^2 - x_2x_4x_5-$ $x_3x_5^2$	$y_2y_4y_5 - y_1y_4^2+$ $+y_3y_5^2,$ $y_4,\ y_5$	$A_{5,40}$

Шестимерные нильпотентные алгебры.

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3 & e_4 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_4, x_6, $x_3x_6 - x_4x_5$, $2x_2x_4 - x_3^2$	y_2, y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,1}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $2x_4x_6 - x_5^2$, $2x_2x_6 - 2x_3x_5 + x_4^2$, $3x_3x_6^2 - 3x_4x_5x_6 - x_5^3$	y_2, y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,2}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_6 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & e_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_4, x_5, x_6, $x_1x_5 + x_3x_6 - x_2x_4$	y_3, y_4, y_5, y_6, $y_2y_4 - y_1y_5$	$A_{6,3}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,4}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & ae_6 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & -ae_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$ x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,5}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & e_6 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & e_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,6}$
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,7}$
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & e_3+e_5 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_3-e_5 & 0 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_4, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,8}$
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & e_3 & e_4 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_4, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,9}$
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & e_3 & e_5 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & ae_6 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & -ae_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$ x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,10}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_5, x_6	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,11}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $2x_3x_6 - x_4^2$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,12}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_5 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & 0 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $2x_3x_6 - x_4^2$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,13}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_5 & 0 & ae_6 & 0 \\ \hline -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \text{-}ae_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$a \neq 0$ x_6, $x_5^2 + ax_4^2 - 2ax_3x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,14}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3+e_5 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline \text{-}e_3\text{-}e_5 & 0 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $x_4^2 - 2x_3x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,15}$

$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 & 0 \\ 0 & 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 \\ -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_5 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	x_6, $3x_3x_6^2 + x_5^3 - 3x_4x_5x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,16}$
$\begin{array}{cccccc} 0 & e_3 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ -e_3 & 0 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	x_6, $x_4^2 - 2x_3x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,17}$
$\begin{array}{cccccc} 0 & e_3 & e_4 & e_6 & 0 & 0 \\ -e_3 & 0 & e_5 & 0 & ae_6 & 0 \\ -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-}ae_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$a \neq 0$ x_6, $x_5^2 + ax_4^2 - 2ax_3x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,18}$
$\begin{array}{cccccc} 0 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & 0 \\ -e_3 & 0 & e_6 & 0 & 0 & 0 \\ -e_4 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	x_6, $x_5^2 - 2x_4x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,19}$
$\begin{array}{cccccc} 0 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & 0 \\ -e_3 & 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 \\ -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_5 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	x_6, $x_5^3 + 3x_3x_6^2 - 3x_4x_5x_6$	y_3, y_4, y_5, y_6	$A_{6,20}$

$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3 & 0 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_4 & 0 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_5 & -e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5$	$y_4,\ y_5,\ y_6,$ $y_2y_6 - y_3y_5$	$A_{6,21}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline 0 & e_3 & e_5 & 0 & e_6 & 0 \\ \hline -e_3 & 0 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\ \hline -e_5 & -e_4 & 0 & e_6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -e_5 & -e_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	x_6, $2x_5^3 + 3x_4^2x_6 -$ $-6x_2x_6^2 - 6x_3x_5x_6$	$y_4,\ y_5,\ y_6,$ $y_2y_6 - y_3y_5$	$A_{6,22}$

Список литературы

[1] Садэтов С. Т. Доказательство гипотезы Мищенко – Фоменко. Доклады РАН. 2004. 397. №6. 751 – 754.

[2] Болсинов А. В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко - Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 2005, вып. 26, М.: МГУ стр. 87-109

[3] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz Invariants of real low dimension Lie algebras.// Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, №6., June 1976

[4] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли.// Изв. АН СССР Сер. Мат. 1978. 42. №2. - стр. 396-415

[5] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР Сер. Мат. - 1979. - т.43, №3.- стр. 160-174

[6] Дж. Хамфрис Введение в теорию алгебр Ли и их представлений //М.: МЦНМО, 2003

[7] Трофимов В. В. Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений // М.: Факториал, 1995