Интегрируемость пары $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$ с помощью специальной алгебры интегралов

К.М.Зуев

1 Введение

Одной из важных задач дифференциальной геометрии является описание римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками. К настоящему времени эта задача далека от своего полного решения. С одной стороны существуют топологические препятствия к интегрируемости, которые запрещают существование таких потоков на многобразиях с достаточно сложной топологией. Так, на двумерном компактном аналитическом многообразии с отрицательной эйлеровой характеристикой геодезический поток аналитической римановой метрики неинтегрируем в классе аналитических интегралов (В.В Козлов, 1979, [5]). Другими словами, аналитические римановы метрики с интегрируемыми (в классе аналитических интегралов) геодезическими потоками не могут существовать ни на каких 2-многообразиях, кроме сферы, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна(на них они действительно существуют). И.А. Тайманов получил топологические условия, препядствующие аналитической интегрируемости геодезических потоков, не зависящие от размерности [15]. Что касается позитивных результатов, то здесь известны лишь несколько серий многообразий, на которых удалось явным образом построить интегрируемые геодезические потоки. Топологически почти все эти многообразия представляют собой однородные пространства. Вот примеры однородных пространств, допускающих интегрируемые геодезические потоки: компактные группы Ли (А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, 1978, [8]), многообразия Штифеля $SO(n)/SO(n-2)$ (А.Тимм, 1981, [13]), симметрические пространства (А.Тимм, 1981 [13], А.С.Мищенко, 1982, [6]), $SU(3)/T^2$ (Г.Патернайн, Р. Спатцер, 1994, [12]).

В настоящей работе доказывается интегрируемость пары $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$ с помощью специальной алгебры интегралов, предложенной А.В.Болсиновым.

2 Основные конструкции

Здесь мы напомним основные понятия и опишем используемые конструкции.

2.1 Коммутативная интегрируемость

Пусть M^{2n} симплектическое многообразие с канонической пуассоновой структурой. Рассмотрим гамильтоновы уравнения:

$$\dot{x} = \{x, H\}_M \ , \ H : M^{2n} \to \mathbb{R}$$

Обычно коммутативную интегрируемость определяют следующим образом:

Определение. Гамильтоновы уравнения $\dot{x} = \{x, H\}_M$ интегрируемы в коммутативном смысле (вполне интегрируемы), если существует семейство гладких функций $f_1, \ldots, f_n$ на M^{2n} такое, что

1. $\{f_i, H\} = 0$ для всех $i = 1 \ldots n$, то есть функции f_i являются интегралами гамильтоновой системы.

2. $\{f_i, f_j\} = 0$ для всех $i, j = 1 \ldots n$, то есть функции f_i коммутируют в смысле скобки Пуассона.

3. Дифференциалы df_i линейно не зависимы на открытом всюду плотном подмножестве M^{2n}

Легко видеть, что в этом случае семейство $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ образует коммутативную алгебру Ли относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}_M$. $\mathcal{F}$ называется полной коммутативной алгеброй первых интегралов на M. Оказывается, чтов гладком случае на любом симплектичкском многообразии существует хотябы одна гамильтонова система, интегрируемая в коммутативном смысле.

Теорема(А.В.Браилов). На любом симплектическом многообразии существует полное коммутативное семейство гладких функций, функционально не зависимых почти всюду на многообразии.

Однако, набор, который строится в этой теореме не представляет интереса с точки зрения содержательных физических приложений. Геометрия вполне интегрируемых систем описывается теоремой Лиувилля.

Теорема Лиувилля. Если гамильтонова система $\dot{x} = \{x, H\}_M$ интегрируема в коммутативном смысле и $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ ее полная коммутативная алгебра интералов, то каждая связная компактная компонетна регулярной совместной поверхности уровня интегралов $\{f_1 = c_1, \ldots, f_n = c_n\}$ диффеоморфна n-мерному инвариантному тору $\mathbb{T}^n$ с линейной динамикой.

2.2 Некоммутативная интегрируемость

Достаточно часто возникает такая ситуация, когда система обладает избыточным набором первых интегралов, которые уже не коммутируют между собой. С задачами такого рода призвана бороться теория некоммутативной интегрируемости, которая была разработана А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [7]. Ее суть состоит в следующем.

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ - первые интегралы гамильтоновой системы $\dot{x} = \mathrm{sgrad} H$. Линейные комбинации первых интегралов и их попарные скобки Пуассона снова являются первыми интегралами системы. Поэтому мы можем считать, добавляя по необходимости функции, что пространство $\mathcal{F}$ первых интегралов системы является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Пусть $F_x \subset T_x^* M$ - подпространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, а $K_x \subset F_x$ - ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x. Предположим, что

$$\dim F_x = \dim \operatorname{span}\{df(x), f \in \mathcal{F}\} = \mathrm{k} \ , \quad x \in U$$

$$\dim K_x = \dim \ker \{\cdot, \cdot\}|_{F_x} = \mathrm{d} \ , \quad x \in U$$

почти всюду на M. Пусть $\phi : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$ отображение момента:

$$\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$$

$$\Sigma = \phi\left(M \setminus U\right)$$

Число k называют дифференциальной размерностью алгебры интегралов $\mathcal{F}$ (колличество функционально независимых интегралов), а d - ее дифференциальным индексом (характерезует степень коммутативности $\mathcal{F}$). Они соответственно обозначаются через $\mathrm{ddim}\, \mathcal{F}$ и $\mathrm{dind}\, \mathcal{F}$.

Определение. Алгебра интегралов $\mathcal{F}$ называется полной, если

$$\mathrm{ddim}\, \mathcal{F} + \mathrm{dind}\, \mathcal{F} = \dim \mathrm{M}$$

Определение. Говорят, что гамильтонова система вполне интегрируема в некоммутативном смысле, если она обладает полной алгеброй первых интегралов.

Если алгебра $\mathcal{F}$ коммутативна, то $\mathrm{ddim} \mathcal{F} = \mathrm{dind} \mathcal{F} = \mathrm{n}$ и мы получаем классическую лиувиллеву интегрируемость. Оказывается, что если система интегрируема в некоммутативном смысле, то имеется аналог теоремы Лиувилля (который, на самом деле является существенным усилением классической теоремы).

Теорема(А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Н.Н.Нехорошев). Предположим, что $\mathrm{ddim}\, \mathcal{F} + \mathrm{dind}\, \mathcal{F} = \dim \mathrm{M}$ при $x \in U$. Пусть $c \in \phi(M) \setminus \Sigma$ регулярное значение отображения момента, тогда

1. $M_c = \phi^{-1}(c)$ является изотропным подмногообразием M и гамильтоновы уравнения на M_c могут быть (локально) разрешены в квадратурах.

2. Компактная связная компонента M_c диффеоморфна d-мерному тору $\mathbb{T}^d$.

3. В окрестности $\mathbb{T}^d$ существуют обобщенные координаты действие-угол $y, x, I, \varphi \,\mathrm{mod} 2\Pi$ такие, что симплектическая форма имеет в них следующий вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} dI_i \wedge d\varphi + \sum_{i=1}^{n-d} dy_i \wedge dx_i,$$

4. Гамильтониан зависит только от координат действия $H = H(I_1, \ldots, I_d)$.

5. Инвариантные торы будут совместными поверхностями уровня координат I, y, x и гамильтоновы уравнения на инвариантных торах примут линейный вид:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1}, \ldots, \dot{\varphi}_d = \frac{\partial H}{\partial I_d}$$

На самом деле, эта теорема существенно сильнее классической теоремы Лиувилля: в предположениях теоремы о некоммутативном интегрировании, гамильтоновы уравнения интегрируемы в обычном коммутативном смысле. Этот результат А.В.Болсинову и Б.Йовановичу. Они модифицировали идею Браилова и доказали следующую теорему

Теорема(А.В.Болсинов, Б.Йованович,[10]). В предположениях предыдущей теоремы гамильтоновы уравнения $\dot{x} = \{x, H\}$ интегрируемы в коммутативном смысле, т.е. существуют n гладких коммутирующих интегралов $g_1, \ldots, g_n$, функционально не зависимые на открытом всюду плотном подмножестве M^{2n}.

Из этой теоремы следует, что d-мерные инвариантные торы $\mathbb{T}^d$ могут быть организованы в торы большей размерности $\mathbb{T}^n$, которые являются совместными поверхностями уровня коммутирующих интегралов. Таким образом, торы $\mathbb{T}^n$ расслоены на торы $\mathbb{T}^d$, отсюда следует, что траектории соответствующей динамической системы не являются всюду плотными на торах $\mathbb{T}^n$. В этом смысле система является вырожденной.

Итак, установление факта некоммутативной интегрируемости системы дает нам больше информации о поведение ее интегральных траекторий по сравнению с классической теоремой Лиувилля.

Гипотеза(А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, 1978). Все некоммутативно интегрируемые системы интегрируемы и в коммутативном смысле с помощью алгебры интегралов того же функционального класса, что и исходная некоммутативная алгебра.

А.В.Болсинов и Б.Йованович в работе [10] доказали эту гипотезу для гладкого класса (C^∞) интегралов. Поэтому некоммутативную интегрируемость иногда называют суперинтегрируемостью.

2.3 Геодезические потоки

Пусть (M, g) риманово многообразие и $Q = T^*M$ его кокасательное расслоение с естественной симплектической структурой. Возьмем в качестве гамильтониана $H(p, q) = \frac{1}{2} g_q^{-1}(p, p)$, где $p \in T_q^*M$, тогда гамильтоновы уравнения на Q превратятся в уравнения геодезического потока метрики g на M. Основные свойства геодезичеких потоков описаны в монографии [2].

Вообще говоря, геодезический поток произвольной метрики неинтегрируем. В работе [3] доказано, что геодезический поток биинвариантной метрики на любом однородном пространстве $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ компактной группы Ли $\mathfrak{G}$ интегрируем в некоммутативном смысле. Опишем соответсвующую конструкцию.

Пусть $\mathfrak{G}$ компактная группа Ли, $\mathfrak{H}$ связная подгруппа, $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ однородное пространство, $G = T_e\mathfrak{G}$ и $H = T_e\mathfrak{H}$ алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Возьмем на $\mathfrak{G}$ биинвариантную метрику (ее существование доказано, например, в [4]). Она индуцирует в G невырожденное $Ad_{\mathfrak{G}}$-инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть $G = H \oplus V$ ортогональное разложение алгебры G относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отождествим V с касательным пространством $T_{\pi(e)}M$, где $\pi : \mathfrak{G} \to M$ каноническая проекция. Теперь, ограничивая $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на V и разнося его по M, получаем биинвариантную метрику ds_0^2 на однородном пространстве. При помощи $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и ds_0^2 отождествим G^* с G и T^*M с TM.

Пусть $\phi : TM \to G$, $\phi(gv) = Ad_g v$ отображение момента $\mathfrak{G}$-действия на M, где через gv обозначено действие элемента $g \in \mathfrak{G}$ на элемент $v \in V = T_{\pi(e)}M$. Через $\mathbb{R}[G]$ и $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ обозначим алгебру полиномов на G и алгебру $Ad_{\mathfrak{H}}$-инвариантных полиномов на V. Тогда следующие два класса функций на TM будут интегралами потока ds_0^2

$$\mathcal{F}_1 = \phi^*\mathbb{R}[G] = \{p = h \circ \phi,\ h \in \mathbb{R}[G]\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\mathfrak{G} - \text{инвариантные полиномы на}\, TM\}$$

Заметим, что функции из этих классов коммутируют: $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}_{TM} = 0$. Семейство $\mathcal{F}_2$ находится во взаимно однозначном соответствии с полиномами из $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ (биекция задается так $p(v) \leftrightarrow f_p(gv)$). Пусть

$$\tau_1 : \mathbb{R}[G] \to \mathcal{F}_1,\ \ \tau_1(p) = p \circ \phi$$

$$\tau_2 : \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}} \to \mathcal{F}_2,\ \ \tau_2(p) = f_p$$

На G и V определим скобки Пуассона:

$$\{f(x), g(x)\}_G = \langle x, [\nabla f(x), \nabla g(x)]\rangle$$

$$\{f(v), g(v)\}_V = \langle v, [\nabla f(v), \nabla g(v)]\rangle$$

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать результат А.В.Болсинова и Б.Йовановича.

Теорема. *(А.В.Болсинов, Б.Йованович, 2001, [11])*
1. Геодезический поток биинвариантной метрики ds_0^2 на однородном пространстве M вполне интегрируем в некоммутативном смысле. $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ является полной алгеброй интегралов.
2. Если выполнены следующие условия:

(i) $\mathcal{A}$ - полная коммутативная алгебра на $Ad_{\mathfrak{G}}$-орбитиах $O_{\mathfrak{G}}(v)$ для $v \in V$ общего положения

(ii) $\mathcal{B}$ - полная коммутативная подалгебра $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$
тогда $\tau_1(\mathcal{A}) + \tau_2(\mathcal{B})$ - полная коммутативная алгебра интегралов на TM.

Существует хорошо известная конструкция, называемая методом сдвига аргумента [8], позволяющая строить полные коммутативные семейства полиномов на произвольной орбите компактной группы Ли. Поэтому для построения полной коммутативной алгебры интегралов на TM нужно найти полную коммутативную подалгебру $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{G}}$. Отсюда возникает следующее определение.

Определение. Пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ называется интегрируемой, если существует $\mathcal{B}$ – полная коммутативная алгебра $Ad_{\mathfrak{H}}$- инвариантных полиномов на V (т.е. такая , какая требуется в пункте (ii) теоремы).

В этих терминах гипотеза Мищенко – Фоменко звучит так : все пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ интегрируемы.

3 Интегрируемость пары $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$

Рассмотрим однородное пространство $SU(n)/S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3))$. Из теоремы следует, что поток биинвариантной метрики на M интегрируем в некоммутативном смысле. Открытым остается вопрос об интегрируемости соответствующей пары.

Рассмотрим следующее семейство полиномов на V

$$\mathcal{B} = \{p_\lambda(v) = p(v_1 + \lambda v_2),\ \ p \in \mathbb{R}[G]^{\mathfrak{G}},\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

где $v = v_1 + v_2$, а элементы v_1 и v_2 имеют вид :

$$v_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & V & 0 \\ \hline V^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad v_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & U_1 \\ \hline 0 & 0 & U_2 \\ \hline U_1^* & U_2^* & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{где} \qquad A^* = -\bar{A}^T$$

Легко проверить, что $\mathcal{B}$ подалгебра в $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$.

Гипотеза(А.В.Болсинов) : Пара $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$ интегрируема с помощью алгебры $\mathcal{B}$.

Чтобы доказать эту гипотезу нужно проверить следующие два утверждения:

- $\mathcal{B}$ — коммутативна
- $\mathcal{B}$ — полна в $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$

3.1 Коммутативность $\mathcal{B}$

Коммутативность набора $\mathcal{B}$ можно доказать с помощью обобщенного метода цепочек подалгебр, который заключается в следующем.

Пусть нам дана цепочка связных подгрупп Ли

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$$

и соответствующая цепочка подалгебр

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

Тогда имеется ортогональное разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ такое, что $G_i = H \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_i$. Предположим. что (G_i, G_{i-1}) является симметрической парой, т.е

$$[G_{i-1}, G_{i-1}] \subset G_{i-1} \qquad [G_{i-1}, V_i] \subset V_i \qquad [V_i, V_i] \subset G_{i-1}$$

Для симметрической пары (G_i, G_{i-1}) определим алгебру

$$\mathcal{B}_i = \{f(v) = p(v_1 + \ldots + v_{i-1} + \lambda v_i),\ \ p \in \mathbb{R}[G_i]^{\mathfrak{G}_i}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

где v_i ортогональная проекция $v \in V$ на V_i. Тогда $\mathcal{B}_1 + \ldots + \mathcal{B}_n$ будет коммутативной подалгеброй $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ [Микитюк].

Наша ситуация вписывается в эту конструкцию следующим образом.

$$s(u_{k_1} + u_{k_2} + u_{k_3}) = H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 = G = su_n$$

$$H = G_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} H_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & H_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H_3 \end{array}\right) \qquad G_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} H_1 & V & 0 \\ \hline V^* & H_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H_3 \end{array}\right) \qquad G_2 = G = \left(\begin{array}{c|c|c} H_1 & V & U_1 \\ \hline V^* & H_2 & U_2 \\ \hline U_1^* & U_2^* & H_3 \end{array}\right)$$

$$V_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & V & 0 \\ \hline V^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad V_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & U_1 \\ \hline 0 & 0 & U_2 \\ \hline U_1^* & U_2^* & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$$

Таким образом имеем:

Лемма1. $\mathcal{B}$ - коммутативная подалгебра в $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$

3.2 Полнота $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$

По определению, полнота подалгебры $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ означает, что

$$\operatorname{ddim} \mathcal{B} + \operatorname{dind} \mathcal{B} = \operatorname{ddim} \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}} + \operatorname{dind} \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$$

Так как $\mathcal{B}$ коммутативна, то $\operatorname{ddim} \mathcal{B} = \operatorname{dind} \mathcal{B}$ и, следовательно надо доказать, что

$$\operatorname{ddim} \mathcal{B} = \frac{1}{2}(\operatorname{ddim} \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}} + \operatorname{dind} \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}) =: \chi(V, \mathfrak{H}),$$

где χ функция, зависящая от k_1, k_2, k_3. Можно показать, что

$$\chi(V, \mathfrak{H}) = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 - \frac{1}{2}(k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + k_3(k_3-1))$$

Таким образом, для доказательства полноты достаточно подсчитать $\operatorname{ddim}\mathcal{B}$ – число функционально независимых функций в $\mathcal{B}$ и убедиться, что оно совпадает с $\chi(k_1, k_2, k_3)$. Для малых n ($n = 3, 4, 5, 6$) этот план осуществим, однако, обобщение на случай произвольных n затрудняется тяжелыми выкладками. То есть доказательство полноты "по определению"заходит в тупик. Выход состоит в использовании критерия полноты Болсинова. Напомним соответсвующую конструкцию.

Пусть $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ две скобки Пуассона на многообразии M. $\{\cdot,\cdot\}_1$ и $\{\cdot,\cdot\}_2$ называются согласованными, если для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ структура $(\lambda_1\{\cdot,\cdot\}_1 + \lambda_2\{\cdot,\cdot\}_2)$ снова является пуассоновой. Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_1\{\cdot,\cdot\}_1 + \lambda_2\{\cdot,\cdot\}_2,\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$$

Через R_0 обозначим ранг скобки общего положения в Λ

$$R_0 = \max \operatorname{rank}\{\cdot,\cdot\}(x),$$

где максимум берется по всем точкам из M и всем структурам из Λ. Выделим в Λ подмножество Λ_0 – скобки максимального ранга:

$$\Lambda_0 = \{\{\cdot,\cdot\} \in \Lambda,\ \ \operatorname{rank}\{\cdot,\cdot\} = R_0\}$$

Для каждой скобки $\{\cdot,\cdot\} \in \Lambda_0$, рассмотрим множество ее функций Казимира $\mathcal{Z}_{\{,\}}$ и совокупность всех этих функций обозначим через $\mathcal{Z}_{\Lambda_0}$

$$\mathcal{Z}_{\Lambda_0} = \{\cup \mathcal{Z}_{\{,\}}\ ,\ \ \text{где } \{\cdot,\cdot\} \in \Lambda_0\}$$

Семейство $\mathcal{Z}_{\Lambda_0}$ является коммутативным относительно любой скобки из Λ [1]. Вместе с Λ рассмотрим ее естественную комплексификацию:

$$\Lambda^{\mathbb{C}} = \{\lambda_1\{\cdot,\cdot\}_1 + \lambda_2\{\cdot,\cdot\}_2,\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$$

Имеет место следующий

Критерий Болсинова(1991, [1]):

Пусть $\{\cdot,\cdot\} \in \Lambda_0$ и $\operatorname{rank}\{\cdot,\cdot\} = R_0$. Тогда семейство $\mathcal{Z}_{\Lambda_0}$ полно в точке $x \in M$ тогда и только тогда, когда для любой скобки $\{\cdot,\cdot\}' \in \Lambda^{\mathbb{C}}$ выполнено $\operatorname{rank}\{\cdot,\cdot\}'(x) = R_0$

Далее, нам потребуется критерий "регулярности"произвольного элемента алгебры Ли, описанный в работе [14].

Квадратную матрицу $A(\lambda)$, элементы которой суть многочлены от λ будем называть λ-матрицей. Пусть λ-матрица $A(\lambda)$ имеет ранг r, т.е в этой матрице имеются не равные тождественно нулю миноры r-ого порядка, в то время как все миноры порядка $> r$ тождественно относительно λ равны нулю. Обозначим через $D_j(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров j-го порядка матрицы $A(\lambda)$, $j = 1, \ldots, r$. В каждом $D_j(\lambda)$ считаем старший коэффициент равным единице. Тогда в ряду

$$D_r(\lambda), \quad D_{r-1}(\lambda), \quad . \ . \ . \ , \quad D_1(\lambda), \quad D_0(\lambda) \equiv 1$$

каждый многочлен делится без остатка на последующий. Действительно, если к какому-нибудь минору j-го порядка применить разложение Безу по элементам какой-либо строки, то каждое слогаемое в этом разложении будет делится на $D_{j-1}(\lambda)$; следовательно, любой минор j-го порядка, а значит и $D_j(\lambda)$, делится на $D_{j-1}(\lambda)$. Соответствующие частные обозначим через $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \quad . \ . \ . \ , \quad i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}$$

Многочлены $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ называются инвариантными многочленами λ-матрицы $A(\lambda)$. Термин "инвариантные многочлены"связан со следующим соображением. Введем в рассмотрение следующие элементарные операции над λ-матрицей:

1. Умножение строки (столбца) на число $c \neq 0$
2. Прибавление к строке (столбцу) другой, предварительно умноженной на произвольный многочлен $p(\lambda)$
3. Перестановка местами двух любых строк (столбцов).

Две матрицы называют эквивалентными если одну из них можно получить из другой с помощью элементарных операций. Многочлены $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ инвариантны относительно элементарных операций, т.е. одинаковы у эквивалентных матриц. Имеет место

Теорема [14]. Число линейно независимых матриц, коммутирующих с матрицей A определяется формулой

$$N = n_1 + 3n_2 + \ldots + (2t-1)n_t,$$

где $n_1, \ldots, n_t$ степени непостоянных инвариантных многочленов матрицы $A(\lambda) = A - \lambda E$, упорядоченные по убыванию.

Характеристическая матрица $A - \lambda E$ является λ-матрицей ранга n. Можно показать [14], что она эквивалентна канонической диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} i_n(\lambda) & & & \\ & i_{n-1}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & i_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

т.е. приводится к ней элементарными операциями.

Заметим, что

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$$

поэтому

$$N \geq n,$$

причем знак равенства (который говорит о регулярности A) имеет место в том и только в том случае, когда $t = 1$. Таким образом элемент A регулярен тогда и только тогда, когда матрица $A - \lambda E$ эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_{n-1} & \\ & & & p_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

где c_i константы, а $p_n(\lambda)$ многочлен степени n.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ - компактная группа Ли, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ связная подгруппа, G и H соответствующие алгебры Ли. Пусть

$$G = H \oplus V$$

ортогональное разложение G относительно $Ad_{\mathfrak{H}}$-инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$, индуцируемого биинвариантной метрикой на $\mathfrak{G}$. Предположим, что пространство V также представлено в виде прямой суммы:

$$V = V_1 \oplus V_2$$

причем это разложение инвариантно относительно присоединенного действия $\mathfrak{H}$, то есть

$$Ad_{\mathfrak{H}} : V_i \longrightarrow V_i$$

На алгебре $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ рассмотрим следующие две пуассоновы структуры:

$$\{f(v), g(v)\}_V(v) = \langle v, [\nabla f(v), \nabla g(v)] \rangle$$

$$\{f(v), g(v)\}_\theta(v) = \langle v, [\nabla f(v), \nabla g(v)]_\theta \rangle$$

Скобка $\{\cdot, \cdot\}_V$ – это просто ограничение стандартной скобки Пуассона-Ли на пространство V. А $\{\cdot, \cdot\}_\theta$ – это скобка отвечающая алгебре Ли G_θ (которая совпадает с G как линейное пространство, и имеет следующую лиевскую структуру $[X, Y]_\theta = [X, Y] - [\mathrm{pr}_{V_2} X, \mathrm{pr}_{V_2} Y]$), ограниченная на V. Эти скобки согласованны (здесь инвариантность функций по существу). Если, согласно описанной выше конструкции, построить семейство $\mathcal{Z}_{\Lambda_0}$ для пары согласованных скобок $\{\cdot,\cdot\}_V$ и $\{\cdot,\cdot\}_\theta$, то мы в точности получим $\mathcal{B} = \{p(v_1+\lambda v_2),\ \text{где}\, p -$ инвариант, $\lambda\in\mathbb{R}\}$

Лемма2. $\mathcal{B}$ полна в $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ при $k_i[n/2]$

Доказательство. Подгруппа $\mathfrak{H}$ присоединенным образом действует на пространстве V, $Ad:\mathfrak{H}\to \mathrm{Aut}V$. Рассмотрим пространство орбит $V/Ad_{\mathfrak{H}}$. Через $[v]$ будем обозначать орбиту элемента $v\in V$. Алгебру $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ можно рассматривать как алгебру $\mathbb{R}[V/Ad_{\mathfrak{H}}]$ функций на орбитах, с редуцированной скобкой $\{\cdot,\cdot\}'_V$ на $V/Ad_{\mathfrak{H}}$. Соответствие $\mathbb{R}[V/Ad_{\mathfrak{H}}]\ni f'\leftrightarrow f\in\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ задается естественным образом $f'[v]=f(v)$, а скобка $\{\cdot,\cdot\}'_V$ устроена так:

$$\{f'([v]),g'([v])\}'_V[v]=\langle v,[df(v),dg(v)]\rangle,$$

где $v\in[v]$ некоторая точка орбиты. Так как $\langle Ad_hv,[df(Ad_hv),dg(Ad_hv)]\rangle = \langle Ad_hv,Ad_h[df(v),dg(v)]\rangle=\langle v,[df(v),dg(v)]\rangle$, то скобка определена корректно.

На $V/Ad_{\mathfrak{H}}$ можно определить еще одну пуассонову структуру $\{\cdot,\cdot\}'_\theta$, которая получается редукцией $\{\cdot,\cdot\}_\theta$. Скобки $\{\cdot,\cdot\}'_V$ и $\{\cdot,\cdot\}'_\theta$ согласованны на $V/Ad_{\mathfrak{H}}$. Пусть

$$\Lambda'_\theta=\Big\{\{\cdot,\cdot\}'_{\alpha\beta}=\alpha\{\cdot,\cdot\}'_V+\beta\{\cdot,\cdot\}'_\theta,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\Big\}$$

Заметим, что $V/Ad_{\mathfrak{H}}$ не является многообразием. Однако, в окрестности орбиты общего положения это $(\mathrm{dim}V-\mathrm{dim}H+\dim\,\mathrm{Ann}_H(v))$-многообразие и мы можем применять критерий Болсинова.

Докажем, что семейство скобок Λ'_θ удовлетворяет условиям критерия Болсинова, для $[v]\in V/Ad_{\mathfrak{H}}$ общего положения. Тогда центральные функции $\mathcal{B}'$, полученные из семейства $\mathcal{B}$, будут полной подалгеброй $\mathbb{R}[V/Ad_{\mathfrak{H}}]$ относительно $\{\cdot,\cdot\}'_V$. Но это эквивалентно тому, что алгебра $\mathcal{B}$ будет полной подалгеброй $\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$ относительно $\{\cdot,\cdot\}_V$.

Далее все пространства предполагаются комплексифицированными.

Пусть $v\in V$, тогда (ко)косательное пространство к $V/Ad_{\mathfrak{H}}$ может быть отождествлено с подпространством $J\subset V$, порожденным дифференциалами $Ad_{\mathfrak{H}}$-инвариантных функций в точке v. Ясно, что J совпадает с ортогональным дополнением к косательному пространству орбиты $O_{\mathfrak{H}}(v)$.

$$J=\mathrm{span}\{df(v),\ \ f\in\mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}\}=[v,H]^{\perp_V}$$

Легко проверить, что при $\alpha\neq0$ и $\alpha+\beta\neq0$ скобки $\{\cdot,\cdot\}'_{\alpha\beta}$ и $\{\cdot,\cdot\}'_V$ изоморфны, соответствующий изоморфизм:

$$\phi:\ \ v_1+v_2\longmapsto(\alpha+\beta)\left(v_1+\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,v_2\right)$$

Через $A_{\alpha\beta}$ обозначим кососимметричную форму на J, задаваемую скобкой $\{\cdot,\cdot\}'_{\alpha\beta}$ в точке $[v]$. Покажем, что точка $[v]$ может быть выбрана так, что `(i)` $\mathrm{rank} A_{\alpha\beta} = \mathrm{rank} A_{1,0}$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha + \beta \neq 0$

`(ii)` $\mathrm{rank} A_{0,1} = \mathrm{rank} A_{1,0}$

`(iii)` $\mathrm{rank} A_{1,-1} = \mathrm{rank} A_{1,0}$

Заметим, что для каждого из этих трех условий элемент v может быть свой. Это следует из того, что если условие выполняется в одной точке, то оно будет выполнено почти всюду на $V^{\mathbb{C}}$. Поэтому для условий `(i)` и `(ii)` будет предъявлен один элемент v, а для для вырожденной скобки $\{\cdot,\cdot\}'_{1,-1}$ (условие `(iii)`) другой.

Пусть $æ_{\alpha\beta} : J \mapsto G$ оператор, соответствующий форме $A_{\alpha\beta}$, то есть $A_{\alpha\beta}(x,y) = \langle x, æ_{\alpha\beta}(y)\rangle$, тогда можно показать, что

$$æ_{\alpha\beta}(\xi_1+\xi_2) = ([\xi_1,(\alpha+\beta)v_1] + [\xi_2,(\alpha+\beta)v_2]) + ([\xi_1,(\alpha+\beta)v_2] + [\xi_2,\alpha v_1]) \,,$$

где $\xi_i \in V_i$, выражение в первых круглых скобках принадлежит $H \oplus V_1$, а второе V_2. Сделаем замену $\xi_1' = \xi_1/\mu$, где $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$. Тогда размерность ядра формы $A_{\alpha\beta}$ при $\alpha+\beta \neq 0$ совпадает с размерностью пространства решений системы уравнений :

$$\begin{array}{l} [\xi_1', \mu v_1] + [\xi_2, v_2] = 0 \\ [\xi_1', v_2] + [\xi_2, \mu v_1] = 0 \end{array}$$

то есть $\xi_1' + \xi_2$ принадлежит аннулятору элемента $\mu v_1 + v_2$ в $V^{\mathbb{C}}$. Поэтому условие `(i)` эквивалентно регулярности элемента $\mu v_1 + v_2$ в $V^{\mathbb{C}}$ при $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Чтобы указать подходящий элемент v, зафиксируем обозначения.

Комплексификацией $su_n(\mathbb{R})$ является полупростая алгебра $sl_n(\mathbb{C})$. Пусть

$$\mathrm{K} = \{h = \mathrm{diag}\,(h_1,\ldots,h_n)\,,\ h_1+\ldots+h_n = 0, h_i \in \mathbb{C}\}$$

картановская подалгебра в $sl_n(\mathbb{C})$, а $\Delta = \{\alpha_{ij}\,, 1 \le i \neq j \le n\}$ система корней соответствующая K, $\alpha_{ij}(h) = h_i - h_j$. Корневое разложение $sl_n(\mathbb{C})$ имеет вид

$$sl_n(\mathbb{C}) = K + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{C}E_\alpha \,,$$

где $E_{\alpha_{ij}}$ это матрица с одним ненулевым элеменнтом на позиции (i,j). В качестве базы Δ_B системы Δ можно взять корни $\Delta_B = \{\alpha_{12},\ldots\alpha_{n-1,n}\}$. Тогда каждый корень β представляется в виде суммы $\sum_{\alpha\in\Delta_B} m_\alpha \alpha$, где m_α принимает значения $0,1$ или $0,-1$. Высотой корня называется число $m(\beta) = \sum_\alpha m_\alpha$. Корень $\alpha \in \Delta$ называется положительным или отрицательным в зависимости от знака $m(\alpha)$. Легко видеть, что $m(\alpha_{ij}) = j - i$, поэтому $\alpha_{ij} > 0$ при $i < j$ и $\alpha_{ij} < 0$ при $i > j$.

Пусть

$$\begin{array}{l} k = \max\{k_1,k_2,k_3\} \\ r\ = \mathrm{mod}\,(n,k) \end{array}$$

где $\mathrm{mod}(x,y)$ суть остаток от деления x на y. Обозначим через $\Delta_{ab} \subset \Delta$ следующее подмножество корней:

$$\Delta_{ab} = \{\alpha_{ij} \,:\, a+1 \leq j \leq b\}$$

Тогда в качестве v можно взять следующий элемент:

$$v = \sum_{m(\alpha)=k} E_\alpha + \sum_{m(\alpha)=-n+r-1} E_\alpha + \sum_{\substack{m(\alpha)=k-n+r-1,\\ \alpha\in\Delta_{rk}}} E_\alpha$$

Докажем, что в этом случае элемент $\mu v_1 + v_2$ будет регулярным в $G^{\mathbb{C}}$, а значит и в $V^{\mathbb{C}}$. Если $\mu \neq 0$, то матрица $\mu v_1 + v_2$ содержит в точности $n-1$ ненулевой элемент. Обозначим их через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ так, что если $j > i$, то α_j стоит в строчке с большим номером чем α_i (из вида элемента v следует, что в каждой строчке не более одного ненулевого элемента). Составим характеристическую матрицу $\mu v_1 + v_2 - \lambda E$ и будем элементарными операциями приводить ее к каноническому диагональному виду.

Переставим первый и $(k{+}1)$-ый столбцы, затем прибавим к $(k{+}1)$-му столбцу первый, умноженный на $\frac{\lambda}{\alpha_1}$, и к $(k{+}1)$-ой строке первую, умноженную на $\frac{\lambda}{\alpha_1}$. Это первый шаг. Теперь переставим второй и $(k+2)$ столбец и прибавим к $(k+2)$-му столбцу второй, умноженный на $\frac{\lambda}{\alpha_2}$, и к $(k+2)$-ой строке прибавим вторую, умноженную на $\frac{\lambda}{\alpha_2}$. Это второй шаг. И так далее, на i-ом шаге мы добиваемся того, что на пересечении i-го столбца и i-ой строки стоит α_i и это единственный в них ненулевой элемент. После $(n-k)$ шагов (а именно столько корней с весом k) характеристическая матрица примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
\alpha_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \alpha_{n-k} & & & & \\
\hline
& & & p_1(\lambda) & & & \\
& & & \alpha_{n-k+1} & \ddots & & \\
& & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & \alpha_{n-1} & p_k(\lambda)
\end{array}\right)$$

где многочлены $p_i(\lambda)$ имеют вид :

$$a_i(\lambda) = \left[\begin{array}{ll}
\dfrac{-\lambda^{\left[\frac{n+i}{k}\right]}}{\alpha_{i+n-2k}\alpha_{i+n-2k}\ldots\alpha_{\mathrm{mod}(r+i,k)}}, & \text{если } \mathrm{mod}(r+i,k) \neq 0 \\[2ex]
\dfrac{-\lambda^{\frac{n+i}{k}-1}}{\alpha_{i+n-2k}\alpha_{i+n-2k}\ldots\alpha_{k}}, & \text{если } \mathrm{mod}(r+i,k) = 0
\end{array}\right.$$

Далее, действуя аналогичным образом приводим к каноническому виду двухдиагональную матрицу размера $k \times k$. В итоге получим, что матрица $\mu v_1 + v_2 - \lambda E$ эквивалентна следующей :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{n-1} & \\ & & & \dfrac{-\lambda^n}{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} \end{pmatrix}$$

и значит элемент $\mu v_1 + v_2$ регулярен в $G^{\mathbb{C}}$, а значит и в $V^{\mathbb{C}}$. таким образом, (i) доказано.

Ядра форм $A_{1,0}$ и $A_{0,1}$ в точке $v_1 + v_2$ задаются следующими системами уравнений:

$$(1)\ \begin{array}{l} [\xi_1, v_1] + [\xi_2, v_2] = 0 \\ [\xi_1, v_2] + [\xi_2, v_1] = 0 \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{l} [\tilde{\xi}_1, v_1] + [\tilde{\xi}_2, v_2] = 0 \\ [\tilde{\xi}_1, v_2] = 0 \end{array}$$

где $\xi_i \in V_i$ Поэтому для выполнения условия `(ii)` достаточно показать, что размерности пространств решений этих систем совпадают. Для простоты докажем это для случая $k_1 = k_2 = k_3 = k$, в общем случае доказательство проводится в том же духе.

При $k_1 = k_2 = k_3$ элемент v имеет вид:

$$v = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} & & & & \alpha_1 & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & \alpha_k & & & & \\ \hline & & & & & & & & \beta_1 & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \beta_k \\ \hline 0 & & & & & & & & & & & \\ \gamma_1 & \ddots & & & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \gamma_{k-1} & 0 & & & & & & & & \end{array}\right)$$

Для $\xi = \xi_1 + \xi_2$ введем следующее обозначение:

$$\xi = \left(\begin{array}{c|c|c} & B & X \\ \hline Y & & C \\ \hline A & Z & \end{array}\right)$$

Тогда система (1) распадается на две независимые системы:

$$(1.1)\begin{cases} X\gamma = \alpha Y \\ Y\alpha = \beta Z \\ Z\beta = \gamma X \end{cases} \qquad (1.2)\begin{cases} A\alpha = \gamma B \\ B\beta = \alpha C \\ C\gamma = \beta A \end{cases}$$

Здесь через α, β, γ обозначены ненулевые диагональные подматрицы в v. Для $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2$ введем следующее обозначение:

$$\tilde{\xi} = \left(\begin{array}{c|c|c} & \widetilde{B} & \widetilde{X} \\ \hline \widetilde{Y} & & \widetilde{C} \\ \hline \widetilde{A} & \widetilde{Z} & \end{array}\right)$$

Тогда система (2) также распадается на две независимые системы:

$$(2.1)\begin{cases} \widetilde{X}\gamma = \alpha\widetilde{Y} \\ \widetilde{Y}\alpha = \beta\widetilde{Z} \\ \widetilde{Z}\beta = \gamma\widetilde{X} \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \widetilde{B} = 0 \\ \beta\widetilde{A} = 0 \\ \widetilde{C}\gamma = 0 \end{cases}$$

Системы (1.1) и (2.1) совпадают и поэтому дают одинаковый вклад в размерности пространств решений систем (1) и (2). Исследуем системы (1.2) и (2.2). Из второго уравнения (2.2) следует, что $\widetilde{A} = 0$, а из третьего, что первый столбец $\widetilde{C}$ произвольный, а все остальные нулевые. Поэтому пространство решений системы (2.2) k-мерно. Далее, зададим первый столбец матрицы C, тогда из второго уравнения (1.2) найдем первый столбец B, а из первого уравнения - первый столбец A. Зная первый столбец A из третьего уравнения (1.2) находится второй столбец C и далее процедура повторяется. В итоге находим все решение. Следовательно, пространство решений системы (1.2) также k-мерно.

Итак, размерности пространсв решений систем (1) и (2) совпадают и значит условие `(ii)` выполнено.

Чтобы выполнить условие `(iii)` исследуем ядро вырожденной скобки $\{\cdot,\cdot\}'_V - \{\cdot,\cdot\}'_\theta$ на пространстве орбит $V/Ad_{\mathfrak{H}}$. Пусть $\mathcal{Z}(\{\cdot,\cdot\}_V - \{\cdot,\cdot\}_\theta)$ множество функций Казимира. Тогда, если $f(v_1, v_2) \in \mathcal{Z}(\{\cdot,\cdot\}_V - \{\cdot,\cdot\}_\theta)$, то

$$0 = \langle v_1 + v_2, [df_1 + df_2, \xi_1 + \xi_2]_{1,-1}\rangle$$

$$= \langle v_1 + v_2, [df_2, \xi_2]\rangle = \langle [df_2, v_1], \xi_2\rangle = \langle [df_2, v_1], \xi_1 + \xi_2\rangle,$$

где $\xi_i, df_i \in V_i$. Отсюда получаем, что

$$[df_2, v_1] \in [v_1 + v_2, H] \cap V_2$$

или, что то же самое

$$[df_2, v_1] \in [v_2, Ann_H(v_1)]$$

Так как нас интересуют только $Ad_{\mathfrak{H}}$-инвариантные функции на V, т.е. $f \in \mathbb{R}[V]^{\mathfrak{H}}$, то

$$\langle df, [v_1 + v_2, H] \rangle = 0,$$

что эквивалентно

$$\langle [df_1, v_1] + [df_2, v_2], H \rangle = 0$$

Нужно выбрать точку $v_1 + v_2$ так, чтобы размерность пространства решений системы

$$\begin{array}{l} [df_2, v_1] \in [v_2, Ann_H v_1] \\ \langle [df_1, v_1] + [df_2, v_2], H \rangle = 0 \end{array} \tag{3}$$

относительно df_1 и df_2 равнялась $\mathrm{rank} A_{1,0}$.

Пусть

$$\begin{array}{l} l_1 = \min\{k_1, k_2, k_3\} \\ l_2 = \mathrm{avg}\{k_1, k_2, k_3\} \\ l_3 = \max\{k_1, k_2, k_3\} \end{array}$$

Тогда в качестве v можно взять следующий элемент :

$$k_1 \le k_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 + v_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & A & 0 & X \\ \hline A^T & & & Y \\ \hline 0 & & & Z \\ \hline Y^T & X^T & Z^T & \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} A : k_1 \times k_1 \\ X : k_1 \times k_3 \\ Y : k_1 \times k_3 \\ Z : (k_2 - k_1) \times k_3 \end{array}$$

$$k_2 \le k_1 \quad \Longrightarrow \quad v_1 + v_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & 0 & Z \\ \hline & & A & Y \\ \hline 0 & A^T & & X \\ \hline Z^T & X^T & Y^T & \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} A : k_2 \times k_2 \\ X : k_2 \times k_3 \\ Y : k_2 \times k_3 \\ Z : (k_1 - k_2) \times k_3 \end{array}$$

где верхнетреугольная компонента v^+ матрицы v имеет вид

$$v^+ = \sum_{\substack{m(\alpha)=l_1, \\ \alpha \in \Delta_{k_1, k_1+l_1}}} E_\alpha + \sum_{\substack{m(\alpha)=l_2, \\ \alpha \in \Delta_{k_1+k_2, k_1+k_2+l_2}}} E_\alpha + \sum_{\substack{m(\alpha)=l_2+1, \\ \alpha \in \Delta_{k_1+k_2+1, k_1+k_2+l_2}}} E_\alpha + \sum_{m(\alpha)=l_1+2l_2} E_\alpha$$

Как и при обсуждении условия `(ii)` подробно раасмотрим случай $k_1 = k_2 = k_3 = k$. В остальных случаях докозательство хотя и более громоздко,но полностью аналогично.

В случае $k_1 = k_2 = k_3$ элемент v имеет вид :

$$v = \left(\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{matrix}\alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_k\end{matrix} & \\ \hline
\begin{matrix}\alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_k\end{matrix} & & \begin{matrix}\beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{k-1} \\ & & & \beta_k\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}\beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{k-1} & \beta_k\end{matrix} & &
\end{array}\right)$$

Тогда аннулятор элемента v_1 в подалгебре H :

$$\mathrm{Ann}_H(v_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{H} & & \\ \hline & \mathrm{H} & \\ \hline & & H_3 \end{array}\right), \qquad H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_k)$$

Для дифференциала функции Казимира введем следующее обозначение :

$$df = \left(\begin{array}{c|c|c} & F_1 & F_2 \\ \hline \widehat{F}_1 & & \widetilde{F}_2 \\ \hline \widehat{F}_2 & \widehat{\widetilde{F}}_2 & \end{array}\right)$$

Тогда системы (3) будет эквивалентна следующей системе матричных уравнений :

$$\begin{cases} \widetilde{F}_2 = 0 \\ \widehat{F}_2 = 0 \\ \widehat{\widetilde{F}}_2 d_{\beta\gamma} = d^T_{\beta\gamma} F_2 \\ \alpha F_2 = H d_{\beta\gamma} - d_{\beta\gamma} H_3 \\ \widehat{\widetilde{F}}_2 \alpha = d^T_{\beta\gamma} H - H_3 d^T_{\beta\gamma} \\ F_2 d^T_{\beta\gamma} = \alpha \widehat{F}_1 - F_1 \alpha \\ d_{\beta\gamma} \widehat{\widetilde{F}}_2 = \widehat{F}_1 \alpha - \alpha F_1 \end{cases} \qquad (3')$$

где α и $d_{\beta\gamma}$ ненулевые подматрицы в v (α диагональная, а $d_{\beta\gamma}$ 2-диагональная верхнетреугольная). Так как матрицы α и $d_{\beta\gamma}$ невырожденные, то из третьего и четвертого уравнения системы $(3')$ получаем :

$$\begin{aligned} &\widehat{\widehat{F}}_2 = d_{\beta\gamma}^T F_2 d_{\beta\gamma}^{-1} \\ &F_2 = \alpha^{-1} H d_{\beta\gamma} - \alpha^{-1} d_{\beta\gamma} H_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

Подставляя эти вырожения по очереди в пятое уравнение $(3')$ и приводя подобные члены получаем, что $(d_{\beta\gamma}^T \alpha^{-1} d_{\beta\gamma}) H_3 = H_3 (d_{\beta\gamma}^T \alpha^{-1} d_{\beta\gamma})$. Откуда следует, что H_3 симметричная 3-диагональная матрица, в которой ровно k независимых элементов. Поэтому $\dim \mathrm{Ann}_H(v_1) = \dim H + \dim H_3 - 1 = 2k - 1$. Здесь -1 появляется ввиду того, что H подалгебра $sl_n(\mathbb{C})$. Теперь из $(*)$ следует, что $\dim F_2 = 2k - 1$, а $\widehat{\widehat{F}}_2$ однозначно восстанавливается по F_2.

Последние два уравнения $(3')$ имеют вид :

$$\begin{aligned} &F_1 \alpha - \alpha \widehat{F}_1 = X^k \\ &\alpha F_1 - \widehat{F}_1 \alpha = Y^k \end{aligned} \qquad (\sharp)$$

где X^k, Y^k матрицы, однозначно восстанавливающиеся по F_2. Исключая из этих уравнений $\widehat{F}_1$ получаем, что $\alpha F_1 \alpha^{-1} - \alpha^{-1} F_1 \alpha = Z^k$, где $Z^k = Y^k - \alpha^{-1} X^k \alpha$. Отсюда следует, что $\dim F_1 = k$. Из $(\sharp)$ видно, что $\widehat{F}_1$ однозначно восстанавливается по F_1.

Таким образом, получаем, что $\dim df = \dim F_2 + \dim F_1 = 3k - 1 = \mathrm{rank} sl_n(\mathbb{C})$. Что и требовалось доказать.

Итак, все три условия можно удовлетворить подходящим выбором элемента $v_1 + v_2$, следовательно, алгебра $\mathcal{B}$ полна. Лемма 2 доказана.

Из леммм 1,2 вытекает следующая

Теорема. *Пара $(SU(n), S(U(k_1) \times U(k_2) \times U(k_3)))$ интегрируема с помощью алгебры $\mathcal{B}$ при $k_i \leq [n/2]$*

Таким образом, гипотеза Болсинова доказана.

Список литературы

[1] Болсинов А.В. *Согласованные пуассоновы структуры на Алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Изв.ак.наук СССР, сер. матем. Т.55, №1, 1991*

[2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы сиситемы. Геометрия. Топология. Классификация. Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.*

[3] Болсинов А.В., Йованович Б. *Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах // Матем. сб. 2001. т.192, N.7. с.21-40.*

[4] Грантмахер Ф.Р *Теория матриц. Наука, 1966*

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения. Эдиториал УРСС, 1998.*

[6] Козлов В.В. *Топологические препядствия к интегрируемости натуральных механических систем. // ДАН СССР, 1979, т.249, No.6, с.1299-1302*

[7] Микитюк И.В. *Интегртруемость уравнений Эйлера ассоциированных с фильтрациями полупростых алгебр Ли. // Матем. сб. 125(167), No.4, 1984*

[8] Мищенко А.С. *Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах. // Матем. заметки, 1982, т.31, No.2, с.257-262*

[9] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т.12 No.2 с.46-56.*

[10] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Уравнение Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН. СССР. Сер. матем. 1978 Т.42 No.2 С.396-415.*

[11] Тайманов И.А. *Топологические препядствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях. // Изв. АН СССР, т.51(1984), No.2 с.429-435*

[12] Bolsinov A.V., Jovanovic B. *Complete involutive algebras of functions on cotangent bundles of homogeneous spaces. // to appear in Math. Zeit*

[13] Bolsinov A.V., Jovanovic B. *Integrability, moment map and geodesic flows. // Annals of Global Analysis and geometry*

[14] Bolsinov A.V., Jovanovic B. *Homogeneous spaces with completely integrable riemannian and sub-riemannian geodesic flows.*

[15] Paternain G.P., Spatzier R.J. *New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows. // Adv. Math., 1994, v.108, p.346-366*

[16] Thimm A. *Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1981, v.1, p.495-517.*