Упражнения к главе 8

Упражнение 8.1. Пусть на m-мерной поверхности M в $\mathbb{R}^n$ заданы координаты $u^1, \dots, u^m$, в которых матрица первой фундаментальной формы скалярна: в каждой точке она диагональна, а диагональный элемент равен $\lambda = \lambda(u^1, \dots, u^m)$. Напишите уравнения геодезических. В случае, когда M — двумерная поверхность с координатами (x, y), $y > 0$, для которой матрица первой фундаментальной формы скалярна, а $\lambda = 1/y^2$, покажите, что геодезическими являются равномерно параметризованные лучи, перпендикулярные оси абсцисс, а также равномерно параметризованные дуги окружностей, центры которых лежат на оси абсцисс. Убедитесь, что это — полный список геодезических.

Упражнение 8.2. Пусть $ds^2 = x(dx^2 + dy^2)$, $x > 0$. Докажите, что геодезические для этой метрики являются параболами.

Упражнение 8.3. Пусть $ds^2 = g(r)dr^2 + r^2 d\varphi^2$, $g(r) > 0$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Докажите, что кривые $\varphi = \varphi_0$ являются геодезическими.

Упражнение 8.4. Пусть M — двумерная поверхность вращения, заданная в цилиндрических координатах (r, φ, z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция. Рассмотрим произвольную геодезическую $\gamma(t) = \bigl(\varphi(t), z(t)\bigr)$ на M, и пусть $r(t)$ — расстояние от $\gamma(t)$ до оси z, а $\psi(t)$ — угол между вектором скорости $\dot\gamma(t)$ и параллелью $z = z(t)$. Докажите теорему Клеро: величина $r(t)\cos\bigl(\psi(t)\bigr)$ не зависит от t.

Упражнение 8.5. Опишите все поверхности вращения, заданные в цилиндрических координатах (r, φ, z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция, на которых существуют замкнутые геодезические (нетривиальная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, называется ***замкнутой***, если $\gamma(a) = \gamma(b)$ и ее продолжение на $[b, b+\varepsilon]$: $\gamma(b+s) = \gamma(a+s)$, $s \in [b, b+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, — регулярная кривая).

Упражнение 8.6. Опишите геодезические на ортогональной группе $\mathrm{O}(n)$ (воспользуйтесь понятием экспоненты матрицы и покажите, что e^{tA}, где A — кососимметричная матрица, являются геодезическими, проходящими через E).

Упражнение 8.7. Выясните, как выглядят в нормальных координатах с центром в точке P

(1) матрица первой фундаментальной формы в точке $0 \in T_P M$;

(2) геодезические, проходящие через точку P;

(3) символы Кристоффеля в точке $0 \in T_P M$.

Упражнение 8.8. Пусть U^P — нормальная окрестность радиуса r точки $P \in M$ поверхности M и $0 < a < r$. Покажите, что

(1) множество $\exp_P\bigl(U_a(0)\bigr) \subset M$ — открытый шар радиуса a с центром в точке P относительно внутренней метрики поверхности M;

(2) геодезическая сфера S_a с центром в точке P поверхности M является сферой в смысле внутренней метрики: S_a состоит из всех точек, расположенных от P на внутреннем расстоянии a;

(3) топология, заданная на M с помощью внутренней метрики, совпадает с исходной топологией.

Упражнение 8.9. Приведите пример нормальной окрестности, не являющейся ε-вполне нормальной ни для какого $\varepsilon > 0$.

Упражнение 8.10. Докажите, что на поверхности M каждая нетривиальная геодезическая $\gamma\colon [a, b] \to M$ является локально кратчайшей, т.е. для любой точки $t \in [a, b]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ограничение γ на $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих ее концы. Приведите пример геодезической, которая не является кратчайшей среди кривых, соединяющих ее концы.

Упражнение 8.11. Покажите, что каждая кратчайшая кусочно-гладкая равномерно параметризованная кривая на поверхности является геодезической.

Упражнение 8.12. Используя теорему Хопфа–Ринова, покажите, что на верхней полуплоскости с координатами (x, y) и метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ описанные в упражнении 8.1 геодезические являются кратчайшими между любыми двумя своими точками. Запишите расстояние во внутренней метрике для точек на вертикальном луче и для точек на дуге стандартной окружности.