Упражнения к главе 7

Упражнение 7.1. Пусть m-мерная поверхность M в $\mathbb{R}^n$ задана в виде графика отображения $(x^{m+1}, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^m)$, причем в точке $P = (0, \ldots, 0)$ координатное подпространство, натянутое на первые m базисных векторов $\mathbb{R}^n$, касается M. Вычислите, чему равны символы Кристоффеля в координатах $x^1, \ldots, x^m$ в точке P.

Упражнение 7.2. Пусть M — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, \theta) = \big((a + b\cos\theta)\cos\varphi,\ (a + b\cos\theta)\sin\varphi,\ b\sin\theta\big), \quad 0 < b < a, \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой $\theta = 0$ или $\theta = \pi$

Упражнение 7.3. Пусть M — бесконечнолистная намотка на поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, z) = \big(f(z)\cos\varphi,\ f(z)\sin\varphi,\ z\big),$$

где $f(z)$ — гладкая положительная функция f. Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой $z = z_0$, где z_0 — критическая точка функции f.

Упражнение 7.4. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) задана регулярная кривая

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), 0\big), \quad t \in (a, b).$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность $\rho(t, z) = \big(x(t), y(t), z\big)$. Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

Упражнение 7.5. Пусть $\gamma(t)$, $t \in (a, b)$, — регулярная кривая на стандартной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим коническую поверхность $\rho(u, t) = u\gamma(t)$, $u > 0$. Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

Упражнение 7.6. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) задана конус $x^2 + y^2 = a\,z^2$, $a > 0$. Рассмотрим сечение этого конуса плоскостью $z = 1$. Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе воль этого сечения.

Упражнение 7.7. Пусть S^2 — стандартная двумерная сфера в $\mathbb{R}^3$. Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль параллели сферы S^2.

Упражнение 7.8. Покажите, что если символы Кристоффеля тождественно равны нулю, то индуцированная метрика — евклидова.

Упражнение 7.9. Выясните, как меняются символы Кристоффеля при переходе в другие координаты.

Упражнение 7.10. Пусть g_{ij} — компоненты первой фундаментальной формы поверхности M, а $(X^1, \ldots, X^m)$ — координатная запись касательного векторного поля X в некоторых координатах $u^1, \ldots, u^m$. Положим $g = \det(g_{ij})$. Докажите следующие формулы:

(1) $\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}(\ln g)_{u^j} = (\ln\sqrt{g})_{u^j}$;

(2) $\nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}X^j)_{u^j}$.