# Упражнения к главе 6

**Упражнение 6.1.** Пусть $e_1, e_2, e_3$ — базис трехмерного векторного пространства $V$, а $e^1, e^2, e^3$ – двойственный базис.

(1) Вычислите значение тензора $T = e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes e^2$ на паре $(e^1 + e^2 + e^3,\, e_1 + 5e_2 + 4e_3)$.

(2) Вычислите значение тензора $T = e^2 \otimes e^1 + (e^1 + 2e^2 + 3e^3) \cdot e^2$ на паре $(e_1 + e_2 + e_3,\, e_1 + 5e_2 + 4e_3)$.

**Упражнение 6.2.** Используя тензорную запись, вычислите первую фундаментальную форму катеноида, заданного параметрически так:

$$\rho(z, \varphi) = \Bigl(a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos\varphi,\, a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin\varphi,\, z\Bigr).$$

**Упражнение 6.3.** Пусть $M$ — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, \theta) = \bigl((a + b\cos\theta)\cos\varphi,\, (a + b\cos\theta)\sin\varphi,\, b\sin\theta\bigr), \quad 0 < b < a, \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим векторные поля $X$ и $Y$ вдоль тора $M$: поле $X$ — касательное, имеющее в координатах $\varphi, \theta$ координаты $(1, 0)$, а поле $Y$ составлено из единичных внешних нормалей. Найдите ковариантные производные этих полей во всех точках тора и вдоль всех касательных векторов.

**Упражнение 6.4.** Пусть $\mathrm{M}(n)$ — векторное пространство всех матриц размера $n \times n$. Для $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n)$ обозначим $\operatorname{tr} A$ ***след матрицы*** $A$, т.е. $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(1) Для $A, B \in M(n)$ покажите, что $\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A)$.

(2) Записывая последовательные строки матрицы в одну строку, получим изоморфизм между $\mathrm{M}(n)$ и $\mathbb{R}^{n^2}$. Убедитесь, что стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n^2}$ в матричном виде запишется так: для $A, B \in \mathrm{M}(n)$ имеем

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\,B^t) = \operatorname{tr}(A^t\,B) = \operatorname{tr}(B^t\,A) = \operatorname{tr}(B\,A^t).$$

(3) Пусть $C \in \mathrm{O}(n)$ — ортогональная матрица, и $A, B \in \mathrm{M}(n)$. Покажите, что $X \mapsto C\,X$ является ортогональным преобразованием в $\mathrm{M}(n)$, т.е. для любых $A, B \in \mathrm{M}(n)$ выполняется $\langle C\,A,\, C\,B\rangle = \langle A, B\rangle$.

(4) Покажите, что $\mathrm{O}(n)$ лежит в сфере с центром в 0 и радиусом $\sqrt{n}$.

**Упражнение 6.5.** Пусть $M = \mathrm{O}(n)$ — неявная поверхность в $\mathbb{R}^{n^2} = \mathrm{M}(n)$, состоящая из всех ортогональных матриц размера $n \times n$.

(1) Покажите, что касательное пространство в единице $E \in M$ совпадает с подпространством всех кососимметричных матриц.

(2) Покажите, что нормальное пространство в единице $E \in M$ совпадает с подпространством всех симметричных матриц.

(3) Покажите, что касательное пространство в $C \in M$ совпадает с $C(T_E M)$.

(4) Покажите, что нормальное пространство в $C \in M$ совпадает с $C(N_E M)$.

(5) Пусть $A \in T_E M(n)$ — произвольная матрица, и $X$ — векторное поле на $M$, заданное так: $X(C) = C\,A$, $C \in M$. Вычислите $\partial_\xi X$, где $\xi \in T_C M$.

(6) Пусть $A \in T_E M$ — произвольная кососимметричная матрица, и $X(C) = C\,A$, $C \in M$, — векторное поле на $M$. Убедитесь, что $X$ — касательное поле к $M$ и найдите $\nabla_\xi X$ при каждом $\xi \in T_C M$.

(7) Пусть $B \in N_E M$ — произвольная симметричная матрица, и $X(C) = C\,B$, $C \in M$, — векторное поле на $M$. Убедитесь, что $X$ — нормальное поле к $M$ и найдите $\nabla_\xi X$ при каждом $\xi \in T_C M$.