Упражнения к главе 5

Упражнение 5.1. Вычислите первую фундаментальную форму следующих двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

(1) поверхности вращения
$$\rho(\varphi, t) = \big(f(t)\cos\varphi,\ f(t)\sin\varphi,\ g(t)\big),$$
где $f(t), g(t)$ — гладкие функции, причем функция f всюду положительна;

(2) эллипсоида, заданного параметрически в виде
$$\rho(\varphi, \theta) = (a\cos\varphi\cos\theta,\ b\sin\varphi\cos\theta,\ c\sin\theta).$$

Упражнение 5.2. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид
$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

(1) Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых
$$u = \pm\frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

(2) Найдите углы этого криволинейного треугольника.

Упражнение 5.3. Найдите на поверхности
$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$
кривые, пересекающие каждую кривую $v = \mathrm{const}$ под постоянным углом θ (**локсодромии**).

Упражнение 5.4. Покажите, что ни в одном открытом подмножестве стандартной двумерной сферы нельзя ввести евклидовых координат (для этого можно использовать вид кратчайших кривых на евклидовой плоскости и сфере, а также формулы для суммы углов треугольников).

Упражнение 5.5. В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) рассмотрим тор T^2, заданный неявно функцией $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$, где $0 < b < a$, и стандартную сферу S^2, заданную $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть $F\colon T^2 \to S^2$ — *гауссово отображение*, сопоставляющее каждой точке $P \in T^2$ единичную нормаль к касательной плоскости $T_P T^2$, направленную наружу области, ограниченной тором T^2. Введите на торе и сфере координаты, найдите соответствующую координатную запись отображения F, и запишите в этих координатах дифференциал гауссова отображения.

Упражнение 5.6. Пусть $\mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$ — группа ортогональных матриц, и $E \in \mathrm{O}(3)$ — единичная матрица. Рассмотрим матрицу
$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9.$$
Докажите, что ξ — касательный вектор к $\mathrm{O}(3)$ в точке E, и найдите образ ξ при действии дифференциала отображения $F\colon \mathrm{O}(3) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, которое ставит в соответствие каждой матрице из $\mathrm{O}(3)$ векторное произведение ее первого и второго столбцов.

Упражнение 5.7. Стереографические координаты на стандартной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ определены в упражнении 4.6. Следующие задания относятся к двумерной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и стереографической проекции из “северного полюса”.

(1) Запишите индуцированную метрику в стереографических координатах.

(2) Покажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми.

(3) Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в обобщенные окружности. Выведите отсюда, что инверсия переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняет углы между кривыми.

Упражнение 5.8. Проверьте, что

(1) изометричность линейного отображение нормированных пространств эквивалентна сохранению нормы;

(2) изометричность линейного отображение пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению скалярного произведения;

(3) изометричность линейного отображение пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению длин и скалярных произведений векторов какого-нибудь базиса.

Упражнение 5.9. Пусть M — поверхность. Для каждой пары точек $P, Q \in M$ определим расстояние $|PQ|$ как точную нижнюю грань длин всех кусочно-гладких кривых на M, соединяющих P и Q. Покажите, что построенная функция является метрикой.

Упражнение 5.10. Пусть отображение поверхностей $F\colon M \to N$ сохраняет внутренние метрики. Покажите, что тогда для каждой точки $P \in M$ отображение $dF|_P\colon T_PM \to T_{F(P)}N$ изометрично, где расстояния на касательных пространствах задаются первыми фундаментальными формами.

Упражнение 5.11. Рассмотрим две параметрические поверхности в $\mathbb{R}^3$:

$$\rho(r,v) = (r\cos v, r\sin v, r+v),\ (r,v)\in\mathbb{R}^2\ \text{ (коноид)},$$
$$\sigma(z,\varphi) = \bigl(\sqrt{1+z^2}\cos\varphi, \sqrt{1+z^2}\sin\varphi, z\bigr),\ (z,\varphi)\in\mathbb{R}^2\ \text{ (бесконечнолистная намотка на гиперболоид вращения)}.$$

Докажите, что отображение $F : \{z = r,\ \varphi = v + \operatorname{arctg} r\}$ задает изометрию этих поверхностей.