Упражнения к главе 4

Упражнение 4.1. Опишите координатные кривые и координатные поверхности цилиндрической и сферической систем координат.

Упражнение 4.2. Составьте параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной регулярной кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется *развертывающейся.* Исследуйте развертывающуюся поверхность на регулярность.

Упражнение 4.3. Пусть в $\mathbb{R}^3$ введены стандартные координаты x, y, z. В плоскости $y = 0$ рассмотрим регулярную кривую γ, не пересекающую ось z, и будем вращать эту кривую вокруг оси z. Покажите, что полученное множество M можно представить как образ регулярной параметрической поверхности. В случаях, когда γ — это или окружность, для определенности, с центром на оси x, или график положительной гладкой функции $x = f(z)$, задайте M неявной функцией, т.е. как решение уравнения $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция, определенная на некоторой области и удовлетворяющая теореме о неявной функции во всех точках из M.

Упражнение 4.4. *Эллиптические координаты* λ, μ, z в $\mathbb{R}^3$ определяются с помощью формул

$$x = \lambda\,\mu, \quad y = \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z.$$

(1) Приведите одну из максимальных областей определения эллиптических координат.

(2) Найдите и изобразите координатные кривые и координатные поверхности эллиптических координат.

(3) Вычислите якобианы перехода между эллиптическими и евклидовыми координатами.

Упражнение 4.5. *Эллипсоидальные координаты* в $\mathbb{R}^3$ вводятся с помощью уравнений ($a > b > c$):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \qquad (\lambda > -c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1 \quad (-b^2 > \nu > -a^2).$$

Докажите, что каждой точке $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует не более одной системы значений λ, μ, ν. Выясните, каким точкам $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует одна система значений λ, μ, ν.

Параметры λ, μ, ν называются *эллипсоидальными координатами.*

Выразите декартовы координаты x, y, z через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν.

Упражнение 4.6. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, сфера S^{n-1} задается неявно уравнением $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1$, $N = (0, 0, \ldots, 1) \in S^{n-1}$ — “северный полюс”, и Π — гиперплоскость $x^n = 0$. Рассмотрим отображение $\nu\colon S^{n-1}\setminus\{N\} \to \Pi$, сопоставляющее каждой точке $P \in S^{n-1}\setminus\{N\}$ единственную точку пересечения луча NP с плоскостью Π.

(1) Выпишите, как связаны координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ точки P и координаты $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ ее образа $\nu(P) \in \Pi$ (в Π рассматриваются декартовы координаты, индуцированные из $\mathbb{R}^n$). Проверьте, что $\nu^{-1}\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая поверхность. Координаты $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ на $S^{n-1} \setminus \{N\}$ называются *стереографическими.* Отметим, что имеются и другие варианты определения этих координат, получающиеся заменой точки N на другую точку сферы, например, на “южный полюс” $S = (0, 0, \ldots, -1) \in S^{n-1}$, а также заменой плоскости Π.

(2) *Инверсией* относительно сферы в $\mathbb{R}^k$ с центром в $C \in \mathbb{R}^k$ и радиусом R называется отображение из $\mathbb{R}^k\setminus\{C\}$ в себя, переводящее каждую точку P в такую точку Q, что P и Q лежат на одном луче, выпущенном из C, причем $|CP|\,|CQ| = R^2$. Покажите, что замена координат на $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ при замене N на S (при той же гиперплоскости Π) является инверсией в Π относительно единичной сферы с центром в начале координат.

(3) Покажите, что отражение сферы S^{n-1} относительно гиперплоскости Π в стереографических координатах представляет собой инверсию в Π относительно единичной сферы с центром в начале координат.

(4) Рассмотрите частный случай двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$, введите на Π вместо координат u^1, u^2 комплексную координату $z = u^1 + i\,u^2$, и запишите замену координат при замене N на S в комплексной форме.

Упражнение 4.7. *Ортогональная группа* $\mathrm{O}(3)$ состоит из матриц размера 3×3, сохраняющих стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, иными словами, $A \in \mathrm{O}(3)$, если и только если $A^T A = E$. Записывая три строки каждой ортогональной матрицы последовательно в строку, получим вектор из $\mathbb{R}^9$. Таким образом, $\mathrm{O}(3)$ можно рассматривать как подмножество $\mathbb{R}^9$. Докажите, что в окрестности каждой точки $A \in \mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$ ортогональная группа представляет собой регулярную трехмерную поверхность. Можно ли то же самое сказать про специальную ортогональную группу $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{O}(3)$, составленную из ортогональных матриц с определителем 1?

Упражнение 4.8. Специальная линейная группа $\mathrm{SL}(n)$ состоит из матриц размера $n \times n$, имеющих единичный определитель. Также рассмотрим $\mathrm{SL}(n)$ как подмножество $\mathbb{R}^{n^2}$. Покажите, что в окрестности каждой точки $A \in \mathrm{SL}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ специальная линейная группа представляет собой регулярную поверхность коразмерности 1, т.е. размерности $n^2 - 1$. Постройте локальное представление $\mathrm{SL}(n)$ в виде графика функции.