Упражнения к главе 3

Упражнение 3.1. Решите на плоскости натуральное уравнение $k_1(s) = 1/s$, $I = \{s \in \mathbb{R} : s > 0\}$.

Упражнение 3.2. Докажите, что бирегулярные кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

Упражнение 3.3. Покажите, что любая окружность, проходящая через точку P регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой γ с меньшим чем 2 порядком.

Упражнение 3.4. Постройте две плоских кривых, совпадающих лишь в одной точке P и имеющих бесконечный порядок касания.

Упражнение 3.5. Для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, заданного на плоскости с декартовыми координатами x, y, напишите уравнение эволюты.

Упражнение 3.6. Покажите, что эволюта плоской кривой γ совпадает с множеством особых точек всех волновых фронтов, выпущенных с γ.

Упражнение 3.7. Найдите огибающую для следующих семейств кривых на плоскости с декартовыми координатами x, y:

(1) семейства окружностей γ_α, заданных уравнениями $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = 1$;

(2) семейства отрезков данной длины, концы которых расположены на взаимно перпендикулярных прямых;

(3) для семейства серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющих данную точку с точками данной прямой.

Упражнение 3.8 (Формула Крофтона)**.** Рассмотрим на плоскости всевозможные ориентированные прямые (для каждой прямой можно выбрать одну из двух ориентаций, т.е. единичный вектор, параллельный прямой). Это направление для ориентированной прямой ℓ обозначим $\nu(\ell)$. Также через $\varphi = \varphi(\ell)$ обозначим аргумент вектора $\nu = \nu(\ell)$, т.е. $\nu = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Далее, определим *ориентированное расстояние* $p = p(\ell)$ от ориентированной прямой ℓ до начала координат O следующим образом: если прямая ℓ проходит через O, то положим $p = 0$; если не проходит, то пусть A — ближайшая к O точка прямой; тогда $p = |OA|$, если базис OA, ν положительно ориентирован, и $p = -|OA|$ в противном случае.

Пусть γ — спрямляемая плоская кривая и ℓ — ориентированная прямая. Через $n_\gamma(\ell) = n_\gamma(\varphi, p)$ обозначим количество точек множества $\ell \cap \operatorname{im}\gamma$ (это количество может быть бесконечным). Тогда длина $|\gamma|$ кривой γ может быть вычислена по следующей формуле:

$$|\gamma| = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} n_\gamma(\varphi, p)\,dp\right]d\varphi.$$

Непрерывную параметрическую кривую назовем *кусочно-регулярной*, если она склеена из конечного числа регулярных кривых. Докажите эту формулу для кусочно-регулярных кривых таких, что количество пересечений с прямыми ограничены: для каждой кривой существует число N такое, что количество пересечений с каждой прямой не превосходит N.

Упражнение 3.9 (Кривые постоянной ширины)**.** В этом упражнении все кривые — плоские. Спроецируем замкнутую кривую на прямую, тогда образ — отрезок. Прообраз этого отрезка при рассматриваемой проекции назовем *полосой, ограничивающей кривую*, а каждое из двух направлений прямых, ограничивающих полосу, — *направлением полосы*. Расстояние между граничными прямыми полосы назовем *шириной кривой в направлении полосы*. Замкнутую кривую назовем *выпуклой*, если она ограничивает выпуклую область. Выпуклую кривую, ширина которой не зависит от направления ограничивающей ее полосы, назовем *кривой постоянной ширины*, при этом ширину любой полосы, ограничивающей такую кривую, назовем *шириной* этой *кривой*. Кривую постоянной ширины, отличную от окружности, будем называть *нетривиальной*.

(1) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного нечетного числа $n \geq 3$ регулярных кривых.

(2) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного четного числа $n \geq 6$ регулярных кривых.

(3) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из четырех регулярных кривых.

(4) Докажите, что длина кривой постоянной ширины w равна πw (теорема Барбье).

(5) Покажите, что каждая граничная прямая полосы, ограничивающей кривую постоянной ширины, пересекает кривую ровно в одной точке. Эти точки, для данной полосы, называются *противоположными точками кривой*, а соединяющий их отрезок — *диаметром кривой*, соответствующим данной полосе. Покажите, что диаметр кривой постоянной ширины перпендикулярен соответствующей ему полосе.

(6) Точку кривой $\gamma(t)$, $i \in I$, назовем *внутренней точкой регулярности*, если t — внутренняя точка промежутка I, а γ регулярна в t. Предположим, что концы диаметра кривой постоянной ширины являются внутренними точками регулярности. Докажите, что центры кривизны этих точек совпадают и, значит, сумма радиусов кривизны в таких точках равна ширине кривой.

Упражнение 3.10. *Овалом* на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется замкнутая кривая положительной кривизны, ограничивающая строго выпуклую область (для любых двух точек этой области внутренность соединяющего их отрезка лежит внутри области). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.