Упражнения к главе 2

Упражнение 2.1. Вычислите кривизну, ориентированную кривизну и базис Френе для плоских регулярных кривых, заданных

(1) графиком функции $y = f(x)$;

(2) неявной функцией $F(x, y) = c$.

Упражнение 2.2. Для следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами x, y, вычислите кривизну, ориентированную кривизну и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

(2) для дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$;

(3) для графика функции $y = \operatorname{ch}(x)$;

(4) для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Упражнение 2.3. Для следующих кривых, заданных в трехмерном пространстве с декартовыми координатами x, y, z, вычислите кривизну, кручение, и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой;

(2) для винтовой линии $\gamma(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, b\,t)$, $a > 0$;

(3) для кривой $\gamma(t) = (t^2,\, 1 - t,\, t^3)$.

Упражнение 2.4. Рассмотрим следующую кривую в четырехмерном пространстве:

$$\gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right).$$

Вычислите базис Френе и кривизны кривой γ.

Упражнение 2.5. Для кривых в трехмерном пространстве, докажите, что

(1) регулярная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю;

(2) бирегулярная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Выясните, верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой γ выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = 0$, то γ лежит в некоторой плоскости?

Упражнение 2.6. Покажите, что $(n-1)$-регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой $k_{n-1} = 0$, лежит в $(n-1)$-мерном аффинном пространстве.

Упражнение 2.7. Покажите, что натурально параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой тождественно равна нулю некоторая производная порядка $k > 1$, является отрезком прямой.

Упражнение 2.8. Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^3$ имеет постоянную кривизну $k > 0$, если и только если существует натурально параметризованная кривая $\tau(\sigma)$ на единичной сфере и точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{k}\int_{ka}^{ks} \tau\, d\sigma.$$

Упражнение 2.9. Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^3$ имеет постоянное кручение $\varkappa \neq 0$, если и только если на единичной сфере существует натурально параметризованная кривая $\beta(\sigma)$ ненулевой геодезической кривизны (проекция вектора ускорения $\beta_{\sigma\sigma}$ на касательную плоскость к сфере всюду отлична от нуля), а в пространстве — точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{\varkappa}\int_{\varkappa a}^{\varkappa s} [\beta, \beta_\sigma]\, d\sigma.$$

Упражнение 2.10. Докажите, что кривизна бирегулярной кривой в $\mathbb{R}^3$ пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u такой, что $\langle u, \tau\rangle = \mathrm{const} \neq 0$.

Упражнение 2.11. Докажите, что натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^3$ с кривизной k, для которой $\dot{k} \neq 0$, и с ненулевым кручением $\varkappa$ лежит на сфере радиуса R тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

Приведите пример бирегулярной натурально параметризованной кривой, не лежащей на сфере, для которой выполнены все условия задачи, кроме $\dot{k} \neq 0$.