

Упражнения к главе 1

Упражнение 1.1. Постройте непрерывную кривую, проходящую через все точки квадрата.

Упражнение 1.2. Постройте на плоскости гладкую параметрическую кривую, образ которой — прямой угол.

Упражнение 1.3. Постройте пример неодноточечного линейно связного метрического пространства, в котором нет ни одной невырожденной спрямляемой кривой.

Упражнение 1.4. Выясните, какие из трех представлений кривых (параметрическое, графиком отображения, неявным отображением) могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

Упражнение 1.5. Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Упражнение 1.6. Пусть X — метрическое пространство, γ — кривая в X , и точки $x, y \in X$ лежат на γ . Покажите, что $|\gamma| \geq |xy|$.

Упражнение 1.7. Докажите пункты (1), (3) и (4) теоремы 1.6.

Упражнение 1.8. Пусть параметрическая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая. Покажите, что отображение γ — липшицево и, значит, γ — спрямляемая кривая. Постройте пример гладкой параметрической кривой, не являющейся липшицевой. Может ли гладкая спрямляемая параметрическая кривая не быть липшицевой?

Упражнение 1.9. Постройте пример неспрямляемой параметрической кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что ограничение γ на $(0, 1]$ является гладкой спрямляемой параметрической кривой.

Упражнение 1.10. Введите натуральный параметр на следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами x, y или в пространстве \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами x, y, z :

(1) на отрезке прямой $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

(2) на дуге окружности $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$;

(3) на графике функции $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $a > 0$, задающей кривую, по которой прогибается тяжелая цепь (кривая называется *цепной линией*);

(4) на винтовой линии $(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$.

Упражнение 1.11. Круг K на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 “катится без проскальзывания”

(1) по прямой;

(2) по окружности снаружи круга, ограниченного этой окружностью;

(3) по окружности внутри круга, ограниченного этой окружностью.

Точка M жестко связана с кругом K (она может лежать вне круга). Задайте траекторию движения точки M параметрически. Изобразите соответствующие кривые. Напишите компьютерную программу (например, в пакете Математика), которая рисует эти кривые в зависимости от параметров задачи.