

Список теоретических вопросов к зачету по классической дифференциальной геометрии

1. Кривые, общие определения:
 - 1.1) определение промежутка
 - 1.2) определение параметрической кривой в топологическом пространстве
 - 1.3) определение замены параметра кривой
 - 1.4) определение непараметрической кривой
 - 1.5) определение ломаной в метрическом пространстве и ее длины
 - 1.6) определение длины параметрической кривой в метрическом пространстве
 - 1.7) определение спрямляемой кривой в метрическом пространстве
 - 1.8) определение натуральной и равномерной параметризации кривой в метрическом пространстве, скорости равномерной параметризации
 - 1.9) определение безостановочной кривой в метрическом пространстве
 - 1.10) определение гладкой параметрической кривой в арифметическом пространстве, ее вектора скорости
 - 1.11) определение гладкой непараметрической кривой в арифметическом пространстве
 - 1.12) определение особых и регулярных точек гладкой кривой (параметрической и непараметрической) в арифметическом пространстве
 - 1.13) определение регулярной параметрической кривой в арифметическом пространстве
 - 1.14) определение регулярной непараметрической кривой в арифметическом пространстве
 - 1.15) определение кривой-графика в арифметическом пространстве
 - 1.16) определение неявной кривой в арифметическом пространстве
 - 1.17) локальная эквивалентности трех определений кривой: параметрического, в виде графика, в неявном виде
 - 1.18) интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве
2. Теория Френе кривых в евклидовом пространстве:
 - 2.1) определение p -регулярной кривой в арифметическом пространстве
 - 2.2) определение бирегулярной кривой в арифметическом пространстве
 - 2.3) определение репера Френе $(n-1)$ -регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве
 - 2.4) формулы Френе для $(n-1)$ -регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве
 - 2.5) кривизны $(n-1)$ -регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве
 - 2.6) формулы кривизн произвольно параметризованной $(n-1)$ -регулярной кривой в n -мерном евклидовом пространстве
 - 2.7) кривизна и ориентированная кривизна для регулярных кривых на евклидовой плоскости
 - 2.8) главная нормаль бирегулярной кривой на евклидовой плоскости
 - 2.9) неориентированные формулы Френе бирегулярных кривых на евклидовой плоскости
 - 2.10) ориентированные формулы Френе регулярных кривых на евклидовой плоскости
 - 2.11) формула для вычисления кривизны произвольно параметризованной регулярной кривой на евклидовой плоскости
 - 2.12) формула для вычисления ориентированной кривизны произвольно параметризованной регулярной кривой на евклидовой плоскости
 - 2.13) главная нормаль и бинормаль бирегулярных кривых в трехмерном евклидовом пространстве
 - 2.14) кривизна регулярных кривых и кручение бирегулярных кривых в трехмерном евклидовом пространстве
 - 2.15) репер Френе бирегулярных кривых в трехмерном евклидовом пространстве
 - 2.16) формулы Френе для бирегулярных кривых в трехмерном евклидовом пространстве
 - 2.17) формула для вычисления кривизны произвольно параметризованной регулярной кривой в трехмерном евклидовом пространстве
 - 2.18) формула для вычисления кручения произвольно параметризованной регулярной кривой в трехмерном евклидовом пространстве

2.19) существование $(n-1)$ -регулярной кривой с заданными функциями кривизны, ее единственность

3. Геометрия кривых на евклидовой плоскости

3.1) явные формулы для регулярной параметрической кривой с заданной ориентированной кривизной на евклидовой плоскости

3.2) определение эволюты регулярной кривой на евклидовой плоскости

3.3) определение эвольвенты регулярной кривой на евклидовой плоскости

3.4) связь между эволютой и эвольвентой регулярной кривой на евклидовой плоскости

3.5) определение порядка касания регулярных кривых в арифметическом пространстве

3.6) определение соприкасающейся окружности регулярной кривой на евклидовой плоскости

3.7) порядок касания регулярной кривой с соприкасающейся окружностью

3.8) определение огибающей однопараметрического семейства неявных кривых в открытом подмножестве арифметической плоскости

3.9) система уравнений, задающих огибающую однопараметрического семейства неявных кривых в открытом подмножестве арифметической плоскости, достаточное условие разрешимости этой системы

4. Поверхности, общие определения:

4.1) определение (непрерывной) параметрической поверхности в арифметическом пространстве, определение размерности поверхности

4.2) определение координатной записи параметрической поверхности в арифметическом пространстве

4.3) определение гладкой параметрической поверхности в арифметическом пространстве

4.4) определение регулярной параметрической поверхности в арифметическом пространстве

4.5) определение вложенной непрерывной параметрической поверхности в арифметическом пространстве

4.6) свойство образа вложенной регулярной поверхности той же размерности, что и объемлющее пространство

4.7) определение криволинейных координат или замены координат в области арифметического пространства

4.8) определение координатных кривых, координатных поверхностей, координатных гиперповерхностей криволинейных координат в области арифметического пространства

4.9) формулы полярных координат на арифметической плоскости, а также цилиндрических и сферических координат в трехмерном арифметическом пространстве

4.10) определение замены координат на регулярной параметрической поверхности в арифметическом пространстве

4.11) определение непараметрической поверхности

4.12) определение поверхности-графика, заданной непрерывной функцией

4.13) определение поверхности-графика, заданной гладкой функцией, представление в виде образа вложенной регулярной параметрической поверхности

4.14) определение неявной поверхности

4.15) локальная эквивалентности трех определений поверхности: параметрического, в виде графика, в неявном виде

4.16) формализация понятия поверхности: множество точек поверхности, семейство параметризаций поверхности (карты, атлас), координаты на поверхности, погружение поверхности в арифметическое пространство, объемлющее пространство, координаты в объемлющем пространстве, координатная запись погружения поверхности

4.17) расширение понятия поверхности в случае размерности 1

4.18) введение топологии на поверхности

5. Отображение поверхностей и его дифференциал:

5.1) определение отображения поверхностей, его координатная запись

- 5.2) определение регулярного отображения поверхностей
 - 5.3) определение диффеоморфизма
 - 5.4) определение отображения между поверхностью и топологическим пространством, координатная запись
 - 5.5) определение отображения между поверхностью и промежутком или областью, гладкость, регулярность, диффеоморфность таких отображений
 - 5.6) различие между поверхностью и промежутком или областью, возможность игнорировать эти различия в дальнейших построениях
 - 5.7) определение параметрической и непараметрической кривых на поверхности
 - 5.8) определение функции на поверхности
 - 5.9) запись кривой на поверхности во внутренних и внешних координатах
 - 5.10) определение касательного вектора к поверхности
 - 5.11) запись касательного вектора к поверхности во внутренних координатах поверхности
 - 5.12) определение касательного пространства к поверхности
 - 5.13) определение канонического базиса касательного пространства к поверхности, соответствующего данным координатам на поверхности
 - 5.14) формула изменения координат канонического базиса при замене координат на поверхности
 - 5.15) канонический базис касательного пространства к объемлющему пространству
 - 5.16) отождествление касательного пространства к поверхности с линейным подпространством касательного пространства объемлющего пространства
 - 5.17) определение дифференциала (гладкого) отображения поверхностей
 - 5.18) координатная запись дифференциала отображения поверхностей
 - 5.19) линейность дифференциала отображения поверхностей
 - 5.20) формула изменения координатной записи дифференциала отображения поверхностей при замене координат на поверхностях
 - 5.21) определение кокасательных векторов на поверхности, кокасательное пространство к поверхности
 - 5.22) сравнение отображения поверхностей с отображениями между поверхностью и промежутком или областью: где разрешено изменять координаты, где координаты фиксированы?
 - 5.23) дифференциалы функций на поверхности как кокасательные векторы
 - 5.24) дифференциалы координатных функций как базис кокасательного пространства, двойственный к каноническому базису касательного пространства
 - 5.25) формула дифференциала функции из матанализа как разложение дифференциала по двойственному базису кокасательного пространства
6. Первая фундаментальная форма поверхности, изометричные отображения:
- 6.1) определение первой фундаментальной формы или индуцированной метрики поверхности
 - 6.2) определение матрицы первой фундаментальной формы, соответствующей данным координатам на поверхности
 - 6.3) определение изометричного отображения метрических пространств
 - 6.4) определение изометричного отображения нормированных линейных пространств
 - 6.5) определение кусочно-гладкой кривой
 - 6.6) определение внутренней метрики на поверхности
 - 6.7) определение изометричного отображения поверхностей
 - 6.8) биективное отображение поверхностей со всюду изометричным дифференциалом
7. Тензорная запись первой фундаментальной формы:
- 7.1) определение тензорного произведения, его свойства
 - 7.2) задание билинейной формы в виде тензорного произведения
 - 7.3) запись первой фундаментальной формы с помощью тензорного произведения
 - 7.4) симметричное тензорное произведение
 - 7.5) запись первой фундаментальной формы с помощью симметричного тензорного произведения

8. Векторные поля и ковариантное дифференцирование:
 - 8.1) определение алгебры (гладких) функций на поверхности
 - 8.2) представление алгебры функций в виде кольца
 - 8.3) дифференцирование функций на поверхности вдоль кривых на поверхности
 - 8.4) независимость дифференцирования функций на поверхности вдоль кривых на поверхности от выбора касающихся кривых, определение дифференцирования функций на поверхности вдоль касательных векторов
 - 8.5) свойства дифференцирования функций на поверхности вдоль касательного вектора
 - 8.6) определение векторного поля вдоль поверхности
 - 8.7) определение невырожденного векторного поля
 - 8.8) определение модуля векторных полей
 - 8.9) определение производной векторного поля вдоль кривой на поверхности
 - 8.10) независимость дифференцирования векторных полей вдоль кривых на поверхности от выбора касающихся кривых, определение дифференцирования векторных полей на поверхности вдоль касательных векторов
 - 8.11) определение нормального пространства к поверхности
 - 8.12) разложение вектора, касательного к объемлющему пространству в точке образа поверхности, на касательную и нормальную составляющие, ортогональные проекции на касательное и нормальное пространства
 - 8.13) определение касательного и нормального векторных полей
 - 8.14) разложение модуля всех векторных полей вдоль поверхности в прямую сумму подмодуля касательных полей и подмодуля нормальных полей
 - 8.15) определение ковариантного дифференцирования касательных полей
 - 8.16) определение ковариантного дифференцирования нормальных полей
 - 8.17) определение ковариантного дифференцирования функций
 - 8.18) свойства ковариантного дифференцирования
 - 8.19) локальные векторные поля
 - 8.20) продолжение касательного вектора до касательного векторного поля
 - 8.21) продолжение нормального вектора до локального нормального векторного поля
9. Девивационные формулы, параллельный перенос:
 - 9.1) выражение ковариантной производной касательного векторного поля через первую фундаментальную форму, символы Кристоффеля
 - 9.2) явный вид символов Кристоффеля
 - 9.3) определение векторного поля вдоль кривой на поверхности
 - 9.4) производная и ковариантная производная векторного поля, определенного вдоль кривой, вдоль вектора скорости кривой
 - 9.5) формула ковариантной производной векторного поля, определенного вдоль кривой, вдоль вектора скорости кривой
 - 9.6) определение параллельного векторного поля вдоль кривой
 - 9.7) определение параллельного переноса касательного вектора вдоль кривой
 - 9.8) уравнения параллельного переноса
 - 9.9) существование и единственность параллельного переноса данного касательного вектора
 - 9.10) инвариантность скалярного произведения векторных полей, параллельных вдоль кривой на поверхности
 - 9.11) изометричность параллельного переноса
 - 9.12) определение касающихся поверхностей
 - 9.13) параллельный перенос вдоль кривой касания поверхностей
10. Геодезические:
 - 10.1) определение геодезических

- 10.2) уравнения геодезических
- 10.3) постоянство длины вектора скорости геодезической
- 10.4) теорема существования и единственности геодезической, выходящей из данной точки с данным вектором скорости
- 10.5) полное описание замен параметров геодезических, оставляющих эти кривые геодезическими
- 10.6) теорема существования и единственности геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении
- 10.7) сохранение геодезических при изометрии
- 10.8) сохранение скалярного произведения между вектором параллельного поля вдоль геодезической и вектором скорости геодезической
- 10.9) операции над поверхностями: ограничение поверхности на область
- 10.10) операции над поверхностями: произведение поверхностей
- 10.11) операции над поверхностями: касательное расслоение
- 10.12) касательное пространство к касательному расслоению
- 10.13) зависимость геодезической от начальных условий: гладкость и возможность параметризации одним и тем же интервалом
- 10.14) определение экспоненциального отображения
- 10.15) локальная диффеоморфность экспоненциального отображения
- 10.16) определение нормальной окрестности в касательном пространстве с центром в нуле, радиус этой окрестности
- 10.17) определение нормальной окрестности на поверхности с центром в данной точке, радиус этой окрестности
- 10.18) определение нормальных координат на поверхности с центром в данной точке поверхности
- 10.19) определение радиальной геодезической
- 10.20) определение геодезической сферы
- 10.21) радиальная геодезическая и геодезическая сфера (лемма Гаусса)
- 10.22) сравнение длины гладкой кривой, соединяющей концы радиальной геодезической, с длиной этой геодезической
- 10.23) определение ϵ -вполне нормальной окрестности
- 10.24) теорема существования ϵ -вполне нормальной окрестности
- 10.25) определение выпуклой окрестности
- 10.26) теорема Хопфа-Ринова
- 10.27) схема доказательства теоремы Хопфа-Ринова

11. Вторая фундаментальная форма:

- 11.1) определение коммутатора векторных полей
- 11.2) коммутатор касательных векторных полей
- 11.3) свойства коммутатора касательных векторных полей
- 11.4) определение второй фундаментальной формы поверхности, обоснование корректности определения
- 11.5) определение оператора Вейнгартена поверхности, обоснование корректности определения
- 11.6) симметричность второй фундаментальной формы
- 11.7) определение второй фундаментальной формы и оператора Вейнгартена по отношению к нормальному вектору
- 11.8) связь между второй фундаментальной формой и оператором Вейнгартена
- 11.9) формула Гаусса и формула Вейнгартена
- 11.10) координатная запись второй фундаментальной формы
- 11.11) координатная запись оператора Вейнгартена
- 11.12) определение главных кривизн в данной точке поверхности, характеристическое уравнение для их нахождения

- 11.13) определение главных направлений в касательном пространстве к поверхности, их соответствие главным кривизнам, характеристическое уравнение для нахождения главных направлений
- 11.14) определение линейных сечений поверхности
- 11.15) определение нормальных линейных сечений поверхности
- 11.16) как получить одномерные линейные сечения двумерными плоскостями
- 11.17) одномерные сечения гиперповерхности: определение нормали к сечению, определение оснащенного сечения, соглашение: опускаем термин «оснащенные», соглашение при определении нормальных сечений
- 11.18) одномерные сечения гиперповерхности: определение ориентированных и неориентированных сечений
- 11.19) одномерные сечения гиперповерхности: определение касающихся сечений
- 11.20) одномерные сечения гиперповерхности: определение угла наклона сечения
- 11.21) одномерные сечения гиперповерхности: определение ориентированной кривизны сечения
- 11.22) геометрия одномерных сечений гиперповерхности: теорема Менье
- 11.23) геометрия одномерных сечений гиперповерхности: теорема об отношении пары форм
- 11.24) одномерные сечения гиперповерхности: определение главных нормальных сечений
- 11.25) одномерные сечения гиперповерхности: ориентированные кривизны главных нормальных сечений
- 11.26) геометрия одномерных сечений гиперповерхности: формула Эйлера
- 11.27) геометрия одномерных сечений гиперповерхности: инварианты пары форм, определение средней и гауссовой кривизн
- 11.28) геометрия одномерных сечений гиперповерхности: координатное выражение средней и гауссовой кривизн
- 11.29) вычисление собственных значений симметричного линейного оператора с помощью минимакса, экстремальность наименьшего и наибольшего собственных чисел
- 11.30) двумерные поверхности в трехмерном арифметическом пространстве: пример определения главных направлений без вычислений
- 11.31) определение минимальных поверхностей и поверхностей постоянной средней кривизны
- 11.32) уравнение Лагранжа минимальных поверхностей
- 11.33) определение поля средней кривизны и функции средней кривизны для поверхности произвольной коразмерности, корректность определения

12. Вторая фундаментальная форма:

- 12.1) тензор кривизны и уравнения Гаусса
- 12.2) уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци
- 12.3) свойства тензора Римана
- 12.4) определение существенных компонент тензора Римана
- 12.5) существенные компоненты тензора Римана в случае двумерных поверхностей
- 12.6) блистательная теорема Гаусса
- 12.7) теорема Бонне

Важное замечание. К каждому определению студент должен уметь приводить примеры, иллюстрирующие это определение