Обязательные задачи по курсу Геометрии-2

А. А. Тужилин

Содержание

1 Элементы теории графов

Упражнение 1.1. Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

Упражнение 1.2.

(1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

(2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.

(3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Упражнение 1.3. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Упражнение 1.4. Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

Упражнение 1.5.

(1) В парке "Лотос" невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

(2) Вершина степени 1 называется ***висячей***. Связный граф без циклов называется ***деревом***. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

Упражнение 1.6.

(1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.

(2) Администрация парка "Лотос" решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а алея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Упражнение 1.7. ***Насыщенным углеводородом*** называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Упражнение 1.8. Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Упражнение 1.9. На пир при дворе короля Артура собрались рыцари, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

2 Топологические пространства, примеры

Упражнение 2.1. Проверьте, что семейства множеств, которые мы называли топологией Зарисского, индуцированной топологией и метрической топологией, действительно удовлетворяют всем аксиомам топологии.

Упражнение 2.2. Предположим, что $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — симметричная положительно определенная функция, удовлетворяющая $\rho(x,z) \le \max\bigl\{\rho(x,y), \rho(y,z)\bigr\}$ для всех $x,y,z \in X$.

(1) Покажите, что ρ — метрика (она называется ***ультраметрикой***, а соответствующее метрическое пространство — ***ультраметрическим***).

(2) Убедитесь, что каждый "треугольник" xyz является равнобедренным, причем его основание не превосходит боковой стороны. Иными словами, среди трех расстояний $\rho(x,y)$, $\rho(y,z)$, $\rho(x,z)$ два равны друг другу, а третье — не превосходит этих двух.

(3) Убедитесь, что каждая точка любого шара является его центром.

(4) Покажите, что если два шара пересекаются, то один из них содержится в другом (в частности, шары могут совпадать).

(5) Покажите, что каждый шар ненулевого радиуса одновременно и открыт, и замкнут.

(6) Покажите, что каждое более чем одноточечное подмножество разбивается на два непустых множества, открытых в индуцированной топологии (ниже такие подмножества мы назовем ***несвязными***).

(7) Пусть $G=(V,E)$ — простой связный конечный граф. Припишем каждому ребру $e \in E$ положительное число $\omega(e)$ — ***вес*** ребра e. ***Весом*** $\omega(\gamma)$ ***пути*** γ в графе G назовем максимальный из весов его ребер. Для вершин $v \ne w$ обозначим $\varOmega(v,w)$ множество всех путей, соединяющих v и w. Положим $\rho(v,w) = \min\bigl\{\omega(\gamma) : \gamma \in \varOmega(v,w)\bigr\}$. Также для каждой вершины $v \in V$ положим $\rho(v,v)=0$. Покажите, что ρ — ультраметрика, и что все конечные ультраметрические пространства представимы в таком виде.

Упражнение 2.3. Пусть X — метрическое пространство, а $B(X)$ — линейное пространство ограниченных функций на X, т.е. таких отображений $f\colon X \to \mathbb{R}$, что $\sup_{x\in X}\bigl|f(x)\bigr| < \infty$. Это последнее число назовем sup-***нормой функции*** f и обозначим $\|f\|_\infty$.

(1) Покажите, что $\|\cdot\|_\infty$ — действительно является нормой. Соответствующую функцию расстояния на $B(X)$ обозначим аналогичным образом: $|fg|_\infty = \|f-g\|_\infty$.

(2) Выберем произвольную точку $x_0 \in X$, и для каждой точки $x \in X$ рассмотрим функцию $d_x : X \to \mathbb{R}$, заданную так: $d_x(y) = |xy| - |x_0y|$. Покажите, что эта функция ограничена, а также что отображение $x \mapsto d_x$ изометрично: $|d_xd_y|_\infty = |xy|$. Это отображение называется ***вложением Куратовского***. Таким образом, каждое метрическое пространство можно рассматривать как подмножество линейного нормированного пространства, а его метрическую топологию — как индуцированную из этого линейного нормированного пространства.

Упражнение 2.4.

(1) Что представляют собой круги на манхеттенской плоскости и плоскости с max-нормой?

(2) Докажите, что манхеттенская плоскость и плоскость с max-нормой изометричны.

(3) Изометричны ли трехмерные пространства с манхеттенской нормой и max-нормой?

Упражнение 2.5. Пусть ρ — метрика на множестве X. Для каждой пары точек $x,y \in X$ положим $d(x,y) = \min\bigl\{\rho(x,y), 1\bigr\}$. Покажите, что d — метрика на X, задающая ту же самую метрическую топологию, что и ρ.

Упражнение 2.6. Покажите, что каждое открытое множество на прямой $\mathbb{R}$ представляет собой объединение не более чем счетного числа непересекающихся интервалов, как ограниченных, так и неограниченных. Покажите, что каждое открытое множество на отрезке представимо в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся множеств, которые могут быть или интервалами, или полуинтервалами с концами в концах отрезка, или всем отрезком.

Упражнение 2.7. Приведите пример двух неэквивалентных метрик на одном и том же множестве, задающих одну и ту же топологию.

3 База, хаусдорфовость, сходимость, непрерывность

Упражнение 3.1. Покажите, что семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$ является базой некоторой топологии, определенной на множестве X, если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
- для каждых пересекающихся $B, B' \in \mathcal{B}$ и любой точки $x \in B \cap B'$ существует $C \in \mathcal{B}$, для которого $x \in C \subset B \cap B'$.

Упражнение 3.2. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ семейство ее подмножеств $\mathcal{B}$, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения.

(1) Семейство $\mathcal{B}$ — база некоторой топологии τ. Обозначим X топологическое пространство, равное $\mathbb{R}$ с топологией τ.

(2) Отображение $f\colon X \to X$, $f\colon x \mapsto 2x$, — непрерывно.

(3) Отображение $g\colon X \to X$, $g\colon x \mapsto -x$, — разрывно в каждой точка.

Упражнение 3.3. Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств X:

(1) $\mathcal{B}_a = \{X\}$;

(2) $\mathcal{B}_d$, совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;

(3) $\mathcal{B}_z$, состоящее всех множеств U, для которых $X \setminus U$ — конечный набор точек.

Докажите, что первое из них — база антидискретной топологии τ_a, второе — дискретной τ_d, а третье — топологии Зарисского τ_z.

Упражнение 3.4. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, заданное формулой $f(x) = \sin x$. Выясните, является ли f непрерывным, если мы рассматриваем на $\mathbb{R}$ и $[-1,1]$ следующие топологии из упражнения 3.3:

(1) $(\mathbb{R}, \tau_a)$, $\big([-1,1], \tau_z\big)$;

(2) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1,1], \tau_a\big)$;

(3) $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $\big([-1,1], \tau_z\big)$;

(4) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1,1], \tau_d\big)$;

(5) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1,1], \tau_z\big)$.

Упражнение 3.5. Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.

Упражнение 3.6. Пусть X — более чем счетное топологическое пространство, в котором непустыми открытыми множествами являются дополнения до не более чем счетных подмножеств. Покажите, что в этом пространстве сходящимися являются лишь стационарные последовательности.

Упражнение 3.7.

(1) Покажите, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств переводит каждую сходящуюся к $x \in X$ последовательность в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

(2) Покажите, что отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно в точке $x \in X$, если и только если каждая сходящаяся к x последовательность переходит в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

(3) Приведите пример отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств, разрывного в некоторой точке $x \in X$, однако переводящего все последовательности, сходящиеся к x, в последовательности, сходящиеся к $f(x)$.

Упражнение 3.8. Докажите, что

(1) каждое липшицево отображение равномерно непрерывно и, значит, непрерывно;

(2) если $A \subset X$ — непустое подмножество метрического пространства X и $d_A(x) = \inf_{a \in A} |ax|$, то d_A является 1-липшицевым отображением и, потому, непрерывно; в частности, непрерывными являются функции $d_p(x) = |px|$ для любых $p \in X$.

4 Гомеоморфизм, кривые, структура подмножеств, конструкции

Упражнение 4.1. Рассмотрим на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел две топологии: индуцированную из стандартной топологии прямой $\mathbb{R}$, и топологию Зарисского. Гомеоморфны ли полученные топологические пространства?

Упражнение 4.2. Фиксируем произвольное простое число p. Ненулевое рациональное $r \in \mathbb{Q}$ запишем в виде $p^t(a/b)$, где a и b не делятся на p, а $t \in \mathbb{Z}$. Ясно, то t определено однозначно, несмотря на неоднозначное представление r. Положим $|r|_p = 1/p^t$. Если же $r = 0$, то пусть $|r|_p = 0$. Для $q, r \in \mathbb{Q}$ зададим $d_p(q, r) = |q - r|_p$. Покажите, что

(1) $|q + r|_p \le \max\{|q|_p, |r|_p\}$;

(2) d_p — ультраметрика;

(3) метрическое пространство $(\mathbb{Q}, d_p)$ не гомеоморфно дискретному пространству;

(4) вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$.

Упражнение 4.3. Пусть X — это

(1) или множество из 10 точек, наделенное антидискретной топологией;

(2) или прямая $\mathbb{R}$, наделенная топологией Зарисского.

Можно ли две разных точки из X соединить непрерывной кривой?

Упражнение 4.4. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, $r \ge 0$ и $s > 0$. Покажите, что

(1) $\partial U_s(x)$ и $\partial B_s(x)$ не связаны никаким включением,

(2) $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$,

(3) $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$,

причем оба предыдущих включения могут быть строгими.

Упражнение 4.5. Пусть Y и Z — подмножества топологического пространства X. Покажите, что

$$\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z} \quad \text{и} \quad \overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z},$$

а также приведите пример, когда $\overline{Y \cap Z} \ne \overline{Y} \cap \overline{Z}$.

Упражнение 4.6. Пусть Z — подмножество топологического пространства X. Покажите, что $\operatorname{Int}(X \setminus Z) = X \setminus \overline{Z}$ и, аналогично, $\operatorname{Int} Z = X \setminus \overline{X \setminus Z}$.

Упражнение 4.7. Покажите, что подмножество Z топологического пространства X замкнуто, если и только если оно содержит все свои граничные точки.

Упражнение 4.8. Пусть даны топологические пространства X_α, $\alpha \in I$, и Y. Докажите, что отображение $f\colon \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \to Y$ непрерывно, если и только если все ограничения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны.

Упражнение 4.9. Пусть X — метрическое пространство, и $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — его метрика. Покажите, что функция ρ непрерывна.

Упражнение 4.10. Запишем каждую матрицу размера $n \times n$ в виде вектора длины n^2, разместив строки матрицы одну за другой на одной строке. Эта запись позволяет отождествить множество $\mathrm{M}(n)$ всех таких матриц с $\mathbb{R}^{n^2}$ и, тем самым, превратить $\mathrm{M}(n)$ и все его подмножества в топологические пространства. Пусть $\mathrm{O}(2) \subset \mathbb{R}^4$ и $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{O}(2)$ обозначают соответственно пространство всех ортогональных 2×2-матриц и его подмножество, состоящее из всех матриц с определителем 1. Докажите, что $\mathrm{O}(2)$ и $\mathrm{SO}(2)$ — замкнутые и ограниченные подмножества $\mathbb{R}^4$.

Упражнение 4.11. Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в окружности и прямые.

5 Компактность

Упражнение 5.1. Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства. ***Расстоянием*** $|AB|$ между ними назовем число $\inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$.

(1) Покажите, что это расстояние не обязано удовлетворять неравенству треугольника.

(2) Приведите пример двух замкнутых непересекающихся подмножеств, расстояние между которыми равно нулю.

(3) Покажите, что между непересекающимися непустыми компактными подмножествами это расстояние всегда положительно (разрешается воспользоваться теоремой Тихонова).

Упражнение 5.2. Докажите, что дважды перекрученная лента гомеоморфна цилиндру.

Упражнение 5.3. Запишем каждую матрицу размера $n \times n$ в виде вектора длины n^2, разместив строки матрицы одну за другой на одной строке. Эта запись позволяет отождествить множество $\mathrm{M}(n)$ всех таких матриц с $\mathbb{R}^{n^2}$ и, тем самым, превратить $\mathrm{M}(n)$ и все его подмножества в топологические пространства.

(1) Чему гомеоморфно пространство $\mathrm{SO}(2) \subset \mathbb{R}^4$, состоящее из всех ортогональных 2×2-матриц с определителем 1?

(2) Чему гомеоморфно пространство $\mathrm{O}(2) \subset \mathbb{R}^4$, состоящее из всех ортогональных 2×2-матриц?

Упражнение 5.4. Подмножество топологического пространства называется ***всюду плотным***, если его замыкание совпадает со всем пространством. Топологическое пространство называется ***сепарабельным***, если оно содержит не более чем счетное всюду плотное подмножество. Покажите, что компактное метрическое пространство сепарабельно. Отметим, что компактное топологическое пространство сепарабельным быть не обязано.

Упражнение 5.5. ***Прямой Зоргенфрея*** называется прямая $\mathbb{R}$ со следующей ***топологией Зоргенфрея***: базой это топологии являются всевозможные полуинтервалы $[a, b)$.

(1) Покажите, что топология Зоргенфрея тоньше, чем стандартная топология, т.е. что все открытые подмножества в стандартной топологии открыты и в топологии Зоргенфрея. В частности, каждый полуинтервал $[a, b)$ — открыто-замкнутое множество.

(2) Покажите, что прямая Зоргенфрея некомпактна.

(3) Покажите, что каждое компактное подмножество прямой Зоргенфрея не более чем счетно.

(4) Приведите пример счетного подмножества прямой Зоргенфрея, не являющегося компактным.

(5) Покажите, что последовательность x_i сходится к x в топологии Зоргенфрея, если и только если последовательность x_i сходится к x справа в стандартной топологии.

(6) Покажите, что прямая Зоргенфрея сепарабельна.

Упражнение 5.6 (лемма Лебега)**.** Покажите, что для каждого открытого покрытия компактного метрического пространства X существует такое число $\lambda > 0$, называемое ***числом Лебега***, что для каждого подмножества $Y \subset X$ с диаметром меньшим λ имеется содержащий его элемент покрытия.

Упражнение 5.7 (теорема Бэра)**.** Подмножество топологического пространства называется ***нигде не плотным***, если его замыкание имеет пустую внутренность.

(1) Покажите, что в полном метрическом пространстве пересечение не более чем счетного семейства открытых всюду плотных множеств — всюду плотно.

(2) Покажите, что в полном метрическом пространстве объединение не более чем счетного числа нигде не плотных подмножеств не имеет внутренних точек, в частности, не совпадает с этим пространством.

6 Связность и линейная связность

Упражнение 6.1. Пусть X — пространство с топологией Зарисского. Является ли оно

(1) связным?

(2) линейно связным для не менее чем континуального X?

(3) линейно связным для не более чем счетного X? (Воспользуйтесь теоремой Бэра.)

Упражнение 6.2. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — семейство линейно связных пространств. Покажите, что их декартово произведение $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ линейно связно.

Упражнение 6.3. Пусть f — непрерывная функция, заданная на топологическом пространстве X. Обозначим через Γ множество уровня функции f, т.е. $\Gamma = \{x \in X : f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$. Положим $\Omega = X \setminus \Gamma$. Докажите, что точки $P, Q \in \Omega$, в одной из которых функция f больше c, а в другой — меньше c, лежат в разных связных компонентах множества Ω.

Упражнение 6.4. Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, полученное из $\mathbb{R}^n$ выбрасыванием гиперплоскости

$$\pi = \bigl\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d\bigr\},$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ — ненулевой вектор. Докажите, что X состоит из двух связных компонент — ***открытых полупространств, ограниченных*** π.

Упражнение 6.5. Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, полученное из $\mathbb{R}^n$ выбрасыванием k различных параллельных гиперплоскостей. Докажите, что X состоит из $(k+1)$-ой связной компоненты.

Упражнение 6.6. Для $k = 1, \dots, n$ через I_k обозначим или невырожденный отрезок, или интервал, или полуинтервал (с открытым левым или правым концом). Декартово произведение $K = \prod_{p=1}^{n} I_p \subset \mathbb{R}^n$ назовем ***кирпичом с основанием*** $B = \prod_{p=1}^{n-1} I_p$ ***и высотой*** $h = I_n$. Для строго монотонной последовательности $t_1, \dots, t_k$, состоящей из внутренних точек высоты h, рассмотрим ***сечения*** $B \times \{t_p\}$, и пусть X получается из K выкидыванием всех этих сечений. Покажите, что X состоит из $(k+1)$-ой компоненты.

Упражнение 6.7. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается

(1) из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием $k \geq 1$ различных лучей, выходящих из одной точки;

(2) из круга C, открытого или замкнутого, выбрасыванием $k \geq 1$ различных его радиусов.

Докажите, что X состоит из k компонент.

Упражнение 6.8. Покажите, что если $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, — непрерывные функции на топологическом пространстве X, то функции $f(x) = \max\bigl\{f_1(x), \dots, f_n(x)\bigr\}$ и $g(x) = \min\bigl\{f_1(x), \dots, f_n(x)\bigr\}$ также непрерывны.

Упражнение 6.9. ***Замкнутым полупространством в*** $\mathbb{R}^n$ называется объединение гиперплоскости и любого из двух ограниченных ей открытых полупространств. ***Выпуклым многогранником в*** $\mathbb{R}^n$ называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств в случае, когда это пересечение ограничено и имеет непустую внутренность. Докажите, что граница выпуклого многогранника разбивает пространство на две компоненты, т.е. если эту границу выкинуть, то останется подмножество, состоящее из двух компонент.

Упражнение 6.10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $\gamma\colon [a,b] \to U$ — кривая. Докажите, что существует ломаная L, соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, все ребра которой лежат в U. Таким образом, открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно, если и только если каждая пара его точек может быть соединена ломаной, все ребра которой лежат в U.

Упражнение 6.11. Докажите, что

(1) отрезок и окружность не гомеоморфны;

(2) буквы Р и Я не гомеоморфны.

7 Теорема Жордана

Упражнение 7.1. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — вложенная замкнутая ломаная, и Ω_0, Ω_1 — компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

(1) Докажите, что одна из компонент, скажем Ω_1, ограничена, а другая, т.е. Ω_0, — нет.

(2) Множество $F = L \cup \Omega_1$ называется ***многоугольником***, ломаная L — ***границей*** ∂F ***многоугольника*** F, множество Ω_1 — ***внутренностью*** $\operatorname{Int} F$ ***многоугольника*** F и, наконец, множество Ω_0 — ***внешностью*** $\operatorname{Out} F$ ***многоугольника*** F. Докажите, что $\operatorname{Int} F$ и $\operatorname{Out} F$ — открытые множества, а L и F — замкнутые, причем в данном случае внутренность $\operatorname{Int} F$ и границу $L = \partial F$ многоугольника F можно понимать в смысле приведенных в предыдущих лекциях одноименных понятий топологии.

Упражнение 7.2. Докажите теорему Жордана, в которой плоскость $\mathbb{R}^2$ заменена на произвольное непустое открытое связное подмножество $U \subset \mathbb{R}^2$. А именно, пусть $L \subset U$ — вложенная ломаная и $\Omega = U \setminus L$. Покажите, что если ломаная L незамкнута, то множество Ω связно, а если L замкнута, то Ω состоит в точности из двух компонент.

Упражнение 7.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — связное открытое подмножество. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1],\ [A_2, B_2], \ldots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset U$ (некоторые отрезки могут быть вырожденными) и положим $X_k = \cup_{i=1}^{k} [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \ldots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$.

(1) Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = U \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k. В частности, каждое множество Ω_k линейно связно.

(2) Выведите отсюда, что подмножество плоскости, полученное из U выбрасыванием конечного числа вложенных попарно непересекающихся незамкнутых ломаных, линейно связно.

Упражнение 7.4. Докажите, что подмножество связного открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$, полученное из U выбрасыванием конечного числа k лежащих в U вложенных попарно непересекающихся замкнутых ломаных, состоит из $(k+1)$-ой компоненты.

Упражнение 7.5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — связное открытое подмножество. Докажите, что подмножество плоскости, полученное выбрасыванием из U вложенной замкнутой ломаной и вложенной незамкнутой ломаной, состоит из двух компонент.

Упражнение 7.6. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое подмножество, $V \subset U$ — конечное множество, и E — конечное семейство вложенных кривых в U, соединяющих точки из V, причем пересекающихся и пересекающих V только по своим концевым точкам. Покажите, что каждую кривую из E можно заменить на вложенную ломаную, лежащую в U, соединяющую те же точки из V, причем полученные ломаные снова пересекаются и пересекают V только по своим концевым точкам.

Упражнение 7.7. Докажите, что

(1) пять точек плоскости нельзя соединить вложенными ломаными так, чтобы была соединена каждая пара разных точек, и чтобы все эти ломаные пересекались лишь по своим концевым вершинам;

(2) в предыдущем пункте ломаные можно заменить на кривые.

Упражнение 7.8. Докажите теорему Жордана на двумерном цилиндре. Разрешается воспользоваться теоремой Жордана для кривых.

8 Плоские графы

Упражнение 8.1.

(1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде вложенного геометрического графа, ребра которого — ломаные.

(2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде вложенного геометрического графа, ребра которого — прямолинейные отрезки.

Упражнение 8.2. Используя формулу Эйлера, покажите, что граф $K_{3,3}$ непланарный.

Упражнение 8.3. Пусть G — плоский связный простой граф, имеющий v вершин, e ребер и f граней.

(1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(2) Покажите, что G содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

Упражнение 8.4. Пусть G — плоский связный простой граф. Покажите, что G не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

Упражнение 8.5. Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень $d \geq 3$, каждая грань ограничена одним и тем же числом $k \geq 3$ ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

Определение. Пусть G — простой граф. *Окружением* $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$ ***вершины*** v графа G назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из G, каждая из которых соединена с v некоторым ребром; его ребра — все ребра графа G, соединяющие выбранные вершины.

Определение. Пусть $\mathcal{C} = \{\mathrm{Col}_i\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть ***цветами***. Каждое отображение $\nu\colon V \to \mathcal{C}$ будем называть ***раскраской графа*** $G = (V, E, \partial)$ ***цветами из множества*** $\mathcal{C}$. При этом будем говорить, что ***вершина*** v ***покрашена в цвет*** $\nu(v)$. Раскраска ν называется ***правильной***, если смежные вершины покрашены разными цветами.

Упражнение 8.6 (Теорема Хивуда о пяти красках)**.** Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

Упражнение 8.7. Покажите, что

(1) пространство $[a, b]/\sim$, $a \neq b$, гомеоморфно окружности;

(2) образ вложенной замкнутой кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен окружности;

(3) вложенная кривая (замкнутая или незамкнутая), лежащая на сфере, не может проходить через все точки сферы (отметим, что не вложенная кривая — может).

Упражнение 8.8. Докажите теорему Жордана на двумерной сфере. Разрешается воспользоваться теоремой Жордана для кривых.

9 Многогранники в $\mathbb{R}^3$

Упражнение 9.1. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v, e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

(1) $e + 6 \leq 3v$;

(2) $e + 6 \leq 3f$;

(3) $f + 4 \leq 2v$;

(4) $v + 4 \leq 2f$;

(5) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;

(6) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);

(7) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;

(8) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v-2)$.

Определение. Пусть P — вершина произвольного многогранника W, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда ***кривизной в вершине*** P называется величина $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$.

Упражнение 9.2. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π.

Упражнение 9.3. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W. Докажите, что $\partial W \setminus L$ состоит из двух компонент.

Определение. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W, а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются ***многоугольниками на*** ∂W. Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются ***внутренними***, из Ω_j — ***внешними***, а из L — ***граничными***, где $\{i,j\} = \{1,2\}$. Положим $\operatorname{Int} M_i = \Omega_i$, $\operatorname{Out} M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

Определение. Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W, а P — некоторая вершина многоугольника X. Тогда ***угол*** α_P ***многоугольника*** X ***в вершине*** P определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W, то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 9.4. Рассмотрим n-угольник X, лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна $\pi(n-2)$ плюс сумма кривизн $K(P)$ по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X.

Упражнение 9.5. Существует ли тетраэдр с гранями $F_1, \ldots, F_4$ такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12} = F_1 \cap F_2$ и $e_{34} = F_3 \cap F_4$ равен $37°$? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Упражнение 9.6. Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Определение. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X, называется ***выпуклой оболочкой*** X и обозначается через $\operatorname{conv} X$. Иными словами, $\operatorname{conv} X$ — это такое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, что $X \subset \operatorname{conv} X$, и если $Y \supset X$ — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv} X \subset Y$.

Упражнение 9.7. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

10 Лемма Шпернера

Упражнение 10.1. Пусть выпуклый многоугольник P триангулирован, т.е. разбит на невырожденные треугольники так, что выполняются условия, описанные в определении триангуляции симплекса. Предположим, что вершины триангуляции покрашены в три цвета 1, 2, 3. Покажите, что число всецветных треугольников четно (нечетно), если и только если четно (нечетно) число граничных сторон триангуляции, вершины которых покрашены всеми цветами $1, 2$. В частности, какие бы два цвета i и j мы не выбрали, число граничных сторон, вершины которых покрашены в i и j, будет иметь одну и ту же четность.

Упражнение 10.2. Вершины триангуляции квадрата покрашены в четыре цвета $\{1, 2, 3, 4\}$ следующим образом: для раскраски вершин квадрата использованы все цвета, а вершины триангуляции, попавшие на сторону квадрата, концы которой покрашены цветами i и j, также покрашены в эти цвета. Покажите, что имеется не менее двух ***разноцветных*** треугольников, т.е. таких треугольников триангуляции, вершины которых покрашены тремя цветами.

Упражнение 10.3 (Лемма Кнастера–Куратовского–Мазуркевича)**.** Пусть k-мерный симплекс Δ покрыт $(k+1)$-им замкнутым множеством $C_1, \dots, C_{k+1}$ так, что для любого непустого $I \subset \{1, \dots, k+1\}$ грань Δ_I покрыта $\{C_i\}_{i \in I}$. Покажите, что тогда $\cap_{i=1}^{k+1} C_i \neq \emptyset$.

В дальнейшем под ***слабой леммой Шпернера*** будем понимать утверждение о существовании хотя бы одного всецветного симплекса.

Упражнение 10.4. Выведите из теоремы Брауэра слабую лемму Шпернера.

Упражнение 10.5. Покажите, что из леммы Кнастера–Куратовского–Мазуркевича вытекает слабая лемма Шпернера.

Упражнение 10.6. Пусть известно, что 2-адическую норму, определенную для всех рациональных чисел в задаче 4.2, можно продолжить на все вещественные числа x до функции $|x|_2$, удовлетворяющей следующим свойствам:

(1) $|x|_2 \geq 0$,

(2) $|x|_2 = 0$, если и только если $x = 0$,

(3) $|x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2$,

(4) $|x + y|_2 \leq \max\big\{|x|_2, |y|_2\big\} \leq |x|_2 + |y|_2$.

Докажите теорему Монски: если триангуляция единичного квадрата состоит из m треугольников одинаковой площади, то m нечетно.

Указание:

- раскрасьте плоскость в три цвета так: если $S_i \subset \mathbb{R}^2$ покрашено цветом i, то
$$S_1 = \big\{(x, y) : |x|_2 < 1,\ |y|_2 < 1\big\},\quad S_2 = \big\{(x, y) : |x|_2 \geq 1,\ |x|_2 \geq |y|_2\big\},\quad S_3 = \big\{(x, y) : |y|_2 \geq 1,\ |y|_2 > |x|_2\big\};$$
- докажите, что если $|x|_2 < |y|_2$, то $|x + y|_2 = |y|_2$ и выведите отсюда инвариантность S_2 и S_3 при сдвигах на векторы из S_1;
- рассмотрите квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$;
- покажите, что в цвета 1 и 2 может быть раскрашена лишь одна сторона квадрата, а именно, соединяющая $(0, 0)$ и $(1, 0)$;
- выведите отсюда, что в триангуляции имеется всецветный треугольник T;
- используя продолженную 2-адическую норму, докажите, что если s — площадь T, то $|s|_2 > 1$, для чего предварительно сдвиньте T, совместив его вершину из S_1 с началом координат;
- выведите отсюда, что $|m|_2 < 1$ и, значит, m нечетно.

11 Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

Упражнение 11.1. Пусть W — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$, а также на многоугольники $G_1, \ldots, G_m$. Докажите следующее утверждение: многоугольник W можно разрезать на многоугольники W_i так, что каждый W_i лежит в некотором F_j и G_k. В частности, каждый F_j и G_k разрезается на некоторые из многоугольников W_i.

Упражнение 11.2. Выведите из упражнения 11.1, что из равносоставленности многоугольников A и B, а также многоугольников B и C, вытекает равносоставленность многоугольников A и C. Покажите, что отношение равносоставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

Упражнение 11.3. Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

Упражнение 11.4. Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

Упражнение 11.5. Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равносоставлены.

Упражнение 11.6. Из упражнения 11.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равносоставлены.

Упражнение 11.7. Докажите, что конечный набор прямоугольников равносоставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

Упражнение 11.8. Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

Упражнение 11.9. Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равносоставлен с кубом.

Упражнение 11.10. Выясните, являются ли равносоставленными равновеликие октаэдр и четырехугольная пирамида, основание которой — грань куба, а оставшаяся вершина — центр этого куба?

Определение. Пусть W — многогранник с множеством ребер E, и M — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из E. Пусть f — произвольная функция Дена для W, и $g\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника* W, соответствующим паре (f, g), назовем число $\sum_{e \in E} g\big(|e|\big) f(\alpha_e)$, где $|e|$ и α_e — длина ребра e и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

Упражнение 11.11. Докажите, что у равносоставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

Упражнение 11.12. Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравносоставленные с равновеликим кубом.

12 Двумерные поверхности

Упражнение 12.1. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. ***Эйлеровой характеристикой*** такой карты называется число $v - e + f$, где v — число вершин, e — число ребер и f — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

Упражнение 12.2. ***Эйлеровой характеристикой поверхности*** называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где v, e и f — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 12.1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мёбиуса.

Упражнение 12.3. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразите $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

Упражнение 12.4. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразите $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 12.5. Вычислите эйлерову характеристику

(1) поверхности M_g^m, полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок;

(2) поверхности N_h^m, полученной из сферы с h пленками Мёбиуса вырезанием m дырок.

Упражнение 12.6. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, … в следующем порядке:

$$a,\ b,\ a,\ b,\ c,\ d,\ c,\ d, \ldots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.

Упражнение 12.7. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, … в следующем порядке:

$$a,\ a,\ b,\ b,\ c,\ c,\ d,\ d, \ldots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно h, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с h пленками Мёбиуса.

Упражнение 12.8. На замкнутой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый n-угольник, и в каждой вершине сходится по k ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности, а e — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при $n = 2$, $k = 4$.

Упражнение 12.9. Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.

13 Кривые

Упражнение 13.1. Постройте на плоскости гладкую кривую, образ которой — прямой угол.

Упражнение 13.2. Постройте пример неодноточечного линейно связного метрического пространства, в котором нет ни одной невырожденной спрямляемой кривой.

Упражнение 13.3. Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Упражнение 13.4. Пусть X — метрическое пространство, γ — кривая в X, и точки $x, y \in X$ лежат на γ. Покажите, что $|\gamma| \ge |xy|$.

Упражнение 13.5. Пусть параметрическая кривая $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая. Покажите, что отображение γ — липшицево и, значит, γ — спрямляемая кривая.

Упражнение 13.6. Введите натуральный параметр на следующих кривых, заданных на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$:

(1) на отрезке прямой $\gamma(t) = v\,t + a$, где $a, v \in \mathbb{R}^3$, $v \ne 0$;

(2) на дуге окружности $\gamma(\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $r > 0$;

(3) на графике функции $\gamma(x) = \big(x, a\,\mathrm{ch}(x/a)\big)$, $a > 0$, задающей кривую, по которой прогибается тяжелая цепь (кривая называется ***цепной линией***);

(4) на винтовой линии $\gamma(\varphi) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b\varphi)$.

Упражнение 13.7. Круг K на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ “катится без проскальзывания”

(1) по прямой;

(2) по окружности снаружи круга, ограниченного этой окружностью;

(3) по окружности внутри круга, ограниченного этой окружностью.

Точка M жестко связана с кругом K (она может лежать вне круга). Задайте траекторию движения точки M параметрически. Изобразите соответствующие кривые. Напишите компьютерную программу (например, в пакете Математика), которая рисует эти кривые в зависимости от параметров задачи.

14 Кривизны кривых

Упражнение 14.1. Вычислите кривизну, ориентированную кривизну и базис Френе для плоских регулярных кривых, заданных графиком функции $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$.

Упражнение 14.2. Для следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами x, y, вычислите кривизну, ориентированную кривизну и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой $\gamma(t) = v\,t + a$, где $a, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$;

(2) для дуги окружности $\gamma(\varphi) = r(\cos\varphi,\, \sin\varphi)$, $r > 0$;

(3) для цепной линии $\gamma(x) = \big(x,\, a\,\mathrm{ch}(x/a)\big)$, $a > 0$;

(4) для эллипса $\gamma(\varphi) = (a\cos\varphi,\, b\sin\varphi)$, $a > 0$, $b > 0$.

Упражнение 14.3. Для следующих кривых, заданных в трехмерном пространстве с декартовыми координатами x, y, z, вычислите кривизну, кручение, и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой;

(2) для винтовой линии $\gamma(t) = (a\,\cos t,\, a\sin t,\, b\,t)$, $a > 0$;

(3) для кривой $\gamma(t) = (t^2,\, 1 - t,\, t^3)$.

Упражнение 14.4. Рассмотрим следующую кривую в четырехмерном пространстве:

$$\gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right).$$

Вычислите базис Френе и кривизны кривой γ.

Упражнение 14.5. Для кривых в трехмерном пространстве, докажите, что

(1) регулярная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю;

(2) бирегулярная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Выясните, верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой γ выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = 0$, то γ лежит в некоторой плоскости?

Упражнение 14.6. Покажите, что $(n-1)$-регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой $k_{n-1} = 0$, лежит в $(n-1)$-мерном аффинном пространстве.

Упражнение 14.7. Покажите, что натурально параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой тождественно равна нулю некоторая производная порядка $k > 1$, является отрезком прямой.

Упражнение 14.8. Докажите, что кривизна бирегулярной кривой в $\mathbb{R}^3$ пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u такой, что $\langle u, \tau\rangle = \mathrm{const} \neq 0$.

15 Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых

Упражнение 15.1. Решите на плоскости натуральное уравнение $k_1(s) = 1/s$, $I = [a, b]$, $0 < a < b$.

Упражнение 15.2. Докажите, что бирегулярные кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

Упражнение 15.3. Покажите, что любая окружность, проходящая через точку P регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой γ с меньшим чем 2 порядком.

Упражнение 15.4. Постройте две плоских кривых, совпадающих лишь в одной точке P и имеющих бесконечный порядок касания.

Упражнение 15.5. Для эллипса $\gamma(t) = (a\cos t,\, b\sin t)$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, заданного на плоскости с декартовыми координатами x, y, напишите уравнение эволюты.

Упражнение 15.6. Покажите, что эволюта плоской кривой γ совпадает с множеством особых точек всех волновых фронтов, выпущенных с γ.

Упражнение 15.7. ***Овалом*** на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется замкнутая кривая положительной кривизны, ограничивающая строго выпуклую область (для любых двух точек этой области внутренность соединяющего их отрезка лежит внутри области). ***Вершиной овала*** называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.