

Упражнения к введению

В приведенных ниже задачах 1 – 7 тензоры рассматриваются на n -мерном векторном пространстве.

Упражнение 1. Для каждого базиса e_i зададим набор чисел δ_j^i . Покажите, что это соответствие задает тензор типа $(1, 1)$.

Упражнение 2. Пусть b — тензор типа $(0, 2)$ (билинейная форма). Предположим, что в некотором базисе e_i матрица (b_{ij}) , составленная из координат тензора b невырождена.

- (1) Докажите, что и в любом другом базисе $e_{i'}$ матрица $(b_{i'j'})$ из координат тензора b невырождена.
- (2) Рассмотрим в каждом базисе e_i матрицу (b^{ij}) , обратную к матрице (b_{ij}) . Докажите, что такое соответствие — тензор типа $(2, 0)$.

Упражнение 3. Пусть v и w — векторы, т.е. тензоры типа $(1, 0)$, а ξ — ковекторы, т.е. тензор типа $(0, 1)$. Тензор $v \otimes \xi$ — линейный оператор, т.е. тензор типа $(1, 1)$, поэтому его можно применить к вектору w . Чему равен результат?

Упражнение 4. Фиксируем некоторый базис e_i и рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому упорядоченному набору векторов определитель матрицы, столбцы которой — координаты выбранных векторов. Так как определитель матрицы — полилинейное отображение столбцов матрицы, получаем тензор T типа $(0, n)$.

- (1) Запишите координаты тензора T в базисе e_i .
- (2) Запишите координаты этого тензора в другом базисе $e_{i'}$.

Упражнение 5. Тензор называется *инвариантным*, если его координаты не меняются при переходе от одного базиса к другому. В соответствии с задачей 1, тензор, имеющий в некотором базисе координаты δ_j^i , является инвариантным тензором типа $(1, 1)$.

- (1) Докажите, что не существует инвариантных тензоров типа (p, q) при $p \neq q$.
- (2) Опишите все инвариантные тензоры типа $(1, 1)$ и $(2, 2)$.

Упражнение 6. Покажите, что свойство положительной определенности билинейной формы — тензорное. Для положительно определенной билинейной формы, покажите, что матрица Грама системы векторов невырождена, если и только если векторы этой системы линейно независимы. Останется ли это утверждение верным, если заменить “положительную определенность” на “невырожденность”?

Упражнение 7. Пусть G — матрица Грама базиса e_i . Как изменится матрица Грама при переходе к другому базису $e_{i'}$?

Упражнение 8. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше чем 3 с базисом $(1, x, x^2, x^3)$ и билинейной формой $b(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$. Покажите, что билинейная форма является скалярным произведением и ортогонализируйте этот базис.

Упражнение 9. Пусть $\dim V = 2$, $e_1, e_2 \in V$ — базис V , $v = x e_1 + y e_2 \in V$, $a(v) = x^2$, $b(v) = xy$. Покажите, что не существует базиса, в котором обе квадратичные формы a и b имеют канонический вид.

Упражнение 10. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ стандартную метрику $\rho_1(x, y) = |x - y|$. Положим $\rho_2 = \rho_1 / (1 + \rho_1)$. Покажите, что ρ_2 — метрика, не эквивалентная ρ_1 .

Упражнение 11. Положим $Z = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ и зададим на Z топологию, в которой базой являются все одноточечные подмножества $\mathbb{N}$, а также множества вида $T_n := \{m \geq n : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ сходится к $y \in X$, если и только если продолжение f отображения x на все Z такое, что $f(\infty) = y$, непрерывно.

Упражнение 12. Приведите примеры полных и неполных нормированных пространств.

Упражнение 13. Покажите, что функция на линейном нормированном пространстве V , сопоставляющая каждому вектору v его норму $\|v\|$, непрерывна. В частности, каждый шар $\{v \in V : \|v\| \leq r\}$ — замкнутое ограниченное подмножество V .

Упражнение 14. Покажите, что

- (1) нормы на линейном пространстве (не обязательно конечномерном) эквивалентны, если и только если они задают одну и ту же топологию;
- (2) эквивалентные метрики на произвольном множестве задают одну и ту же топологию;
- (3) неэквивалентные метрики могут задавать одну и ту же топологию (приведите пример);
- (4) на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, в частности, задаваемые ими топологии одинаковы, а замкнутые ограниченные подмножества компактны (в частности, компактными являются все замкнутые шары);
- (5) приведите пример нормированного пространства, в котором невырожденный замкнутый шар некомпактен;
- (6) на бесконечномерном пространстве могут существовать неэквивалентные нормы (приведите пример).

Упражнение 15. Пусть V, W — нормированные пространства (не обязательно конечномерные), и $L: V \rightarrow W$ — линейное отображение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует хотя бы одна точка пространства V , в которой отображение L непрерывно.
- (2) Отображение L непрерывно в 0.
- (3) Существует такое число K , что $\|L(v)\| \leq K \|v\|$ для любого $v \in V$.
- (4) Отображение L ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества V в ограниченные подмножества W .
- (5) Норма $\|L\|$ ограничена.
- (6) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *липшицевым*, если существует такое число C , что $|f(x)f(x')| \leq C |xx'|$ для любых $x, x' \in X$. В этом пункте утверждается, что L — липшицево отображение (на V и W мы рассматриваем метрики, порожденные нормами).
- (7) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что для любых $x, x' \in X$ с $|xx'| < \delta$ выполняется $|f(x)f(x')| < \varepsilon$. В этом пункте утверждается, что L — равномерно непрерывно.

Упражнение 16. Покажите, что линейные отображения из конечномерного нормированного пространства в произвольное нормированное пространство всегда непрерывны. Приведите пример разрывного линейного отображения нормированных пространств.

Упражнение 17. Покажите, что отображение нормированных пространств, дифференцируемое в точке, непрерывно в этой точке, а дифференциал определен однозначно.

Упражнение 18. Покажите, что дифференциал не меняется при замене нормы на эквивалентную.