Лекция 8

Геодезические

План. Определение геодезических, уравнение геодезических, постоянство длины вектора скорости, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки с данным вектором скорости, сохранение геодезических при аффинных заменах параметра, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении, сохранение геодезических при изометрии, сохранение угла между вектором скорости геодезической и вектором параллельного поля, операции над поверхностями, переход к подобласти, произведение поверхностей, касательное расслоение, касательный вектор касательного расслоения, теорема о зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начального условия, ее применение к случаю отображения касательного расслоения поверхности на саму поверхность, заданного с помощью геодезических, экспоненциальное отображение, локальная диффеоморфность экспоненциального отображения, нормальные окрестности, радиальные геодезические, конструкция и ее свойства, лемма Гаусса о перпендикулярности геодезической соответствующей геодезической сфере, лемма об оценке длины кривой, лежащей в нормальной окрестности, лемма о том, что радиальная геодезическая является кратчайшей кривой на всей поверхности, ε-вполне нормальные окрестности, теорема существования таких окрестностей (без доказательства), существование и единственность кратчайших геодезических, соединяющих произвольную пару точек ε-вполне нормальной окрестности, определение выпуклой окрестности, теорема Хопфа–Ринова.

В этой лекции мы будем изучать кривые, у которых поле скоростей параллельно. Такие кривые, являющиеся аналогами прямых, называются геодезическими.

8.1 Геодезические

Определим теперь кривые на поверхностях, являющиеся аналогами прямых. С физической точки зрения, прямая — траектории равномерного движения, т.е. движения с нулевым ускорением. Для кривых на поверхности аналогом ускорения является "ковариантное ускорение", т.е. ортогональная проекция ускорения на пространство, касательное к поверхности. Иными словами, искомые кривые представляют собой траектории движения по поверхности, при котором тангенциальная составляющая ускорения равна нулю. Последнее равносильно тому, что ускорение (посчитанное в $\mathbb{R}^n$) перпендикулярно поверхности. Заметим, что отсутствие тангенциальной составляющей ускорения приводит также к тому, что длина вектора скорости не меняется, т.е. искомые кривые должны быть параметризованы равномерно (ниже мы формально докажем этот факт).

Итак, кривая γ на поверхности (M,ρ) называется *геодезической*, если в каждой точке кривой γ выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

- ускорение $\ddot\gamma(s)$ перпендикулярно $T_{\gamma(s)}M$;
- $(\partial_{\dot\gamma}\dot\gamma)^T=0$;
- $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$;
- поле скоростей $\dot\gamma$ кривой γ параллельно вдоль γ.

(напомним, что мы договорились отождествлять кривую γ с ее внешним представлением $\rho\circ\gamma$).

Напишем уравнения, задающие геодезические. Приводимый ниже результат мгновенное вытекает из следствия 7.8.

Теорема 8.1. *Пусть $\gamma(t)$ — кривая, лежащая на поверхности M. Введем на M координаты $u^1,\dots,u^m$ и пусть $\big(u^1(t),\dots,u^m(t)\big)$ — координатная запись кривой $\gamma(t)$. Тогда γ — геодезическая, если и только если γ удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенной относительно вторых производных*:

$$\ddot u^k+\Gamma^k_{ij}\dot u^i\dot u^j=0,\quad k=1,\dots,m. \tag{8.1}$$

Система (8.1) называется *уравнениями геодезических.*

Предложение 7.13, примененное к параллельному полю скоростей геодезической, мгновенно приводит к следующему результату.

Предложение 8.2. *Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Тогда длина ее вектора скорости постоянна, т.е. $\gamma(t)$ — равномерно параметризованная кривая.*

Воспользуемся теперь теоремой существования и единственности решений дифференциальных уравнений, см. теорему 63 из введения и обсуждение после нее. Отметим, что начальные условия в рассматриваемом случае — это пара, состоящая из точки, через которую проходит кривая, и вектора скорости этой кривой в этой точке.

Теорема 8.3. *Для любой точки P поверхности (M,ρ) и любого касательного вектора $\xi\in T_PM$ существует геодезическая $\gamma(s)$ на поверхности M такая, что $\gamma(s_0)=P$ и $\gamma'(s_0)=\xi$. Если δ — другая геодезическая на M с такими же начальными условиями, то γ и δ совпадают на пересечении областей определения.*

Отметим, что постоянные отображения тоже являются геодезическими, которые мы будем называть *тривиальными.*

Предложение 8.4. *Пусть $\gamma(s)$ — нетривиальная геодезическая и кривая $\delta(t)=\gamma\bigl(s(t)\bigr)$ получается из γ регулярной заменой параметра. Тогда δ — геодезическая, если и только если $s(t)=at+b$, где $a\ne0$ и b — вещественные числа.*

Доказательство. Заметим сначала, что кривая $\gamma(at+b)$ также удовлетворяет системе (8.1), поэтому является геодезической. Обратно, предположим, что кривая $\delta(t)$, получающаяся из γ регулярной заменой параметра, является геодезической, тогда $\dot\delta=s_t\dot\gamma$, примем $s_t\ne0$. По предложению 8.2, длины векторов скоростей кривых γ и δ постоянны, откуда $s_t=\mathrm{const}$ и, значит, $s=at+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\ne0$ (последнее — в силу регулярности замены). □

Предложение 8.4 иногда формулируют так: *через данную точку в данном направлении проходит единственная геодезическая.*

Замечание 8.5. Так как символы Кристоффеля выражаются исключительно через первую фундаментальную форму (теорема 7.1), то при изометрии геодезические переходят в геодезические. Теорема 8.3, вместе с обсуждениями после нее, приводит к следующему результату: если для какой-нибудь поверхности удалось описать все геодезические, проходящие через данную точку, то также описываются и все геодезические, проходящие через точку, являющуюся образом при изометрии. Например, на сфере достаточно описать геодезические, проходящие через любую точку. Но на сфере все совсем просто: ускорение каждой равномерно параметризованной большой окружности (сечения сферы двумерной плоскостью, проходящей через центр сферы) перпендикулярно сфере, поэтому все такие кривые и их фрагменты — это полный список геодезических (так как через любую точку в любом направлении можно провести большую окружность).

Задача 8.6. Опишите геодезические на ортогональной группе $\mathrm{O}(n)$ (воспользуйтесь понятием экспоненты матрицы и покажите, что кривые $\gamma(t)=e^{tA}$, где A — кососимметричная матрица, являются геодезическими, проходящими через E).

Из предложения 7.13 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 8.7. *Пусть на поверхности M заданы геодезическая γ и параллельное вдоль нее векторное поле X. Тогда скалярное произведение $\langle\dot\gamma,X\rangle$ постоянно, в частности, величина угла между полем X и вектором скорости $\dot\gamma$ кривой γ постоянна.*

Для дальнейшего нам понадобится некоторое уточнение теоремы 8.3, описывающее зависимость геодезических от начальных условий. Чтобы его сформулировать, мы превратим семейство всех касательных пространств к поверхности в некоторую поверхность, которая называется касательным расслоением.

8.2 Операции над поверхностями. Касательное расслоение к поверхности

Приведем некоторые операции над поверхностями, которые нам пригодятся в дальнейшем.

8.2.1 Ограничение поверхности на область

Пусть $(M, \mathcal{P}, \rho)$ — поверхность, где, напомним, атлас $\mathcal{P}$ состоит из параметризаций $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ — биективных отображений в некоторые области $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, причем каждая замена параметризации $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ — гладкое регулярное отображение. Напомним также, что на M определена естественная топология, а областью называется каждое связное открытое подмножество топологического пространства. Так как M гомеоморфно области Ω_α, то пространство M тоже является областью.

Пусть $U \subset M$ — некоторая область. Определим поверхность $(U, \mathcal{P}^U, \rho^U)$, выбрав в качестве параметризаций $\varphi_\alpha^U \in \mathcal{P}^U$ ограничения на U параметризаций $\varphi_\alpha \in \mathcal{P}$, а в качестве ρ^U — ограничение погружения ρ на U. *Именно таким образом каждую область на поверхности мы будет рассматривать как поверхность.*

8.2.2 Произведение поверхностей

Пусть $(M, \mathcal{P}^M, \rho^M)$ и $(N, \mathcal{P}^N, \rho^N)$ — две поверхности. Определим поверхность $(M\times N, \mathcal{P}, \rho)$ следующим образом: положим $\rho(P,Q) = \rho^M(P) \times \rho^N(Q)$, а по каждой паре параметризаций $\varphi_\alpha^M\colon M \to \Omega_\alpha^M$ и $\varphi_\beta^N\colon N \to \Omega_\beta^N$ построим параметризацию $\varphi_{\alpha,\beta}\colon M\times N \to \Omega_\alpha^M \times \Omega_\beta^N$ аналогичным образом: $\varphi_{\alpha,\beta}(P,Q) = \varphi_\alpha^M(P) \times \varphi_\beta^N(Q)$ для всех $P \in M$ и $Q \in N$. Все полученные параметризации $\varphi_{\alpha,\beta}$ отнесем к $\mathcal{P}$ и будем называть *каноническими*. Напомним, что в атлас должны входить все отображения, получающиеся также и заменами координат в областях $\Omega_\alpha^M \times \Omega_\beta^N$. Добавим их, и все добавленные координаты будем называть *неканоническими*. Полученная поверхность называется *произведением поверхностей M и N*.

8.2.3 Касательное расслоение

Пусть $(M, \mathcal{P}, \rho)$ — поверхность размерности m в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество $TM := \cup_{P\in M}\{P\} \times T_PM$, фактически представляющее собой дизъюнктное объединение касательных пространств к поверхности.

Построим поверхность $(TM, T\mathcal{P}, T\rho)$ размерности $2m$ в $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом. Для каждого $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ из $\mathcal{P}$ определим биективное отображение $T\varphi_\alpha\colon TM \to \Omega_\alpha \times \mathbb{R}^m$ так. Точка из TM — это пара (P, ξ), где $P \in M$ и $\xi \in T_PM$. Если $u^1, \dots, u^m$ — координаты на M, определенные параметризацией φ_α, $P = (u^1, \dots, u^m)$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ — координатные записи точки P и вектора ξ в координатах u^i, то положим

$$T\varphi_\alpha(P, \xi) = (u^1, \dots, u^m, \xi^1, \dots, \xi^m).$$

Координаты, заданные отображением $T\varphi_\alpha$, будем называть *линейными*.

Если $v^1, \dots, v^m$ — координаты на M, заданные другой параметризацией $\varphi_\beta \in \mathcal{P}$, то

$$T\varphi_\beta \circ (T\varphi_\alpha)^{-1}(u^1, \dots, u^m, \xi^1, \dots, \xi^m) = \big(v^1(u^1, \dots, u^m), \dots, v^m(u^1, \dots, u^m),\, v^1_{u^i}\xi^i, \dots, v^m_{u^i}\xi^i\big),$$

или, в более компактном виде, $T\varphi_\beta \circ (T\varphi_\alpha)^{-1} = \big(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1},\, d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})\big)$. Заметим, что эти замены параметризации — гладкие регулярные отображения. Отнесем все отображения $T\varphi_\alpha$ ко множеству $T\mathcal{P}$. Так как в атлас должны входить также все отображения, получающиеся заменами координат в областях $\Omega_\alpha \times \mathbb{R}^m$, добавим их, и все добавленные координаты будем называть *нелинейными*.

Наконец, определим погружение $T\rho\colon TM \to \mathbb{R}^{2n}$, положив $T\rho(P, \xi) = \rho(P) \times \xi$ (напомним, что $\xi \in T_PM$ является вектором в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$).

Определение 8.8. Поверхность $(TM, T\mathcal{P}, T\rho)$ называется *касательным расслоением поверхности* $(M, \mathcal{P}, \rho)$.

Замечание 8.9. Как выглядит топология на TM, порожденная атласом $T\mathcal{P}$? В качестве базы этой топологии можно взять прообразы при отображении $T\varphi_\alpha$ декартовых произведений вида $U \times V$, где $U \subset \Omega_\alpha$ — открытый шар в координатах $u^1, \dots, u^m$, а V — открытый шар в $\mathbb{R}^m$ в декартовых координатах $\xi^1, \dots, \xi^m$. Такой прообраз будет состоять из объединений множеств $\{P\} \times V_P \subset M \times \mathbb{R}^n$, состоящих из пар (P, ξ), $P = \varphi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^m)$, $\xi = \xi^i \rho_{u^i}(u^1, \dots, u^m)$, где $(u^1, \dots, u^m)$ пробегает шар U, а $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ — шар V.

Замечание 8.10. Выясним, как выглядит касательное пространство к касательному расслоению. Возьмем произвольную точку $(P, \xi) \in TM$ и рассмотрим в TM кривую $\delta(t) = \big(P(t), \xi(t)\big)$, проходящую через (P, ξ): $P(0) = P$ и $\xi(0) = \xi$. Пусть $u^1, \dots, u^m$ — координаты на M, тогда

$$P(t) = \big(u^1(t), \dots, u^m(t)\big) \quad \text{и} \quad \xi(t) = \xi^i(t)\rho_{u^i}\big(u^1(t), \dots, u^m(t)\big).$$

Положим $\xi^i = \xi^i(0)$, $\zeta^i = \dot{u}^i(0)$, $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^m)$, $\eta^i = \dot{\xi}^i(0)$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^m)$, тогда (все производные рассматриваются при $t = 0$)

$$\dot{\delta} = (\dot{P},\, \dot{\xi}^i \rho_{u^i} + \xi^i \dot{u}^j \rho_{u^i u^j}) = (\zeta,\, \eta^i \rho_{u^i} + \xi^i \zeta^j \rho_{u^i u^j}),$$

в частности, для $\xi = 0$ имеем $\dot{\delta}(0) = (\zeta, \eta) \in T_P M \times T_P M$.

Для касательного расслоения определено естественное гладкое отображение $\pi\colon TM \to M$, сопоставляющее паре (P, ξ) точку P. Это отображение называется (*естественной*) *проекцией*. Кроме того, каждое касательное векторное поле X на M можно рассматривать как гладкое отображение $X\colon M \to TM$, для которого $\pi \circ X\colon M \to M$ — тождественное отображение. Такие отображения называют еще *сечениями касательного расслоения*.

8.3 Экспоненциальное отображение и нормальные координаты

Приведем теперь уточнение теоремы 8.3, которое вытекает из соответствующего уточнения теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. А именно, в нем рассматривается зависимость решения ОДУ от начального условия и утверждается, что у каждого начального условия есть окрестность, в которой каждое решение определено на некотором интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где ε *не зависит от выбора начального условия*. При этом, решение гладким образом зависит от начального условия, см. подробности например в [1] или в [2].

Следствие 8.11. *Пусть (M, ρ) — поверхность, $P \in M$ и $\xi \in T_P M$. Тогда существует такая окрестность $V \subset TM$ точки (P, ξ) и такое $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $Q \in M$ и касательного вектора $\zeta \in T_Q M$, удовлетворяющих $(Q, \zeta) \in V$, существует геодезическая $\gamma_{Q,\zeta}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, для которой $\gamma_{Q,\zeta}(0) = Q$ и $\dot{\gamma}_{Q,\zeta}(0) = \zeta$. Тем самым, определено отображение поверхностей $\gamma\colon V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(Q, \zeta, t) = \gamma_{Q,\zeta}(t)$, и это отображение — гладкое. Так как линейная замена параметра оставляет геодезические геодезическими, то можно так подобрать V и ε, чтобы ε было больше* 1.

Воспользуемся следствием 8.11 в случае, когда $\xi = 0$ и $\varepsilon > 1$. Пусть $U = V \cap T_P M$, тогда определено отображение $\exp_P\colon U \to M$, заданное так: $\exp_P(\zeta) = \gamma(P, \zeta, 1)$.

Теорема 8.12. *Для каждой точки P поверхности M в $\mathbb{R}^n$, существует открытый шар $U_r(0) \subset T_P M$ (относительно расстояния, индуцированного из $\mathbb{R}^n$, т.е. относительно первой фундаментальной формы) такой, что $U_r(0)$ входит в область определения отображения* $\exp_P$, *и ограничение* $\exp_P$ *на $U_r(0)$ является диффеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, введенными в обсуждении перед теоремой. Ясно, что отображение $\exp_P$ — гладкое, так как получается из гладкого отображения γ фиксированием двух “координат”. Так как U — открытое подмножество $T_P M$, содержащее 0, в $T_P M$ существует открытый шар $U_a(0)$ с центром в 0 радиуса $a > 0$, содержащийся в U.

Вычислим дифференциал этого отображения в точке $0 \in T_P M$. Для этого выберем произвольное ненулевое $\zeta \in U_a(0)$, тогда при всех $t \in [0, 1]$ векторы $t\zeta$ содержатся в $U_a(0)$ и, значит, для них определено отображение $\exp_P$. Рассмотрим кривую $\delta(t) = t\zeta$, тогда $\delta(0) = 0$, $\dot{\delta}(0) = \zeta$ и определена композиция $(\exp_P \circ \delta)(t) = \exp_P(t\zeta)$. Выясним, что представляет собой эта композиция.

Напомним, что через $\gamma_{P,t\zeta}(s)$ мы обозначили геодезическую, для которой $\gamma_{P,t\zeta}(0) = P$ и $\dot{\gamma}_{P,t\zeta}(0) = t\zeta$.

Лемма 8.13. *При каждом $t \in [0, 1]$ имеет место равенство $\gamma_{P,\zeta}(t) = \gamma_{P,t\zeta}(1)$.*

Доказательство. При $t = 0$ геодезическая $\gamma_{P,t\zeta}$ вырождается в точку $P = \gamma_{P,\zeta}(0)$. При $t > 0$ у всех геодезических $\gamma_{P,t\zeta}(s)$ вектор скорости в точке $s = 0$ сонаправлен с ζ, поэтому все они получаются из одной и той же геодезической $\gamma_{P,\zeta}(\tau)$ линейными заменами параметра τ. Так как параметризация каждой геодезической равномерная, а скорость параметризации геодезической $\gamma_{P,t\zeta}$ равна длине ее вектора скорости, т.е. $t\|\zeta\|$, то длина участка геодезической $\gamma_{P,t\zeta}(s)$ между $s = 0$ и $s = 1$ равна $t\|\zeta\|$, поэтому на геодезической $\gamma_{P,\zeta}(\tau)$ точка $\gamma_{P,t\zeta}(1)$ соответствует $\tau = t$, т.е. $\gamma_{P,\zeta}(t) = \gamma_{P,t\zeta}(1)$, что и требовалось. □

Вернемся к доказательству теоремы. По лемме 8.13,

$$(\exp_P \circ \delta)(t) = \exp_P(t\zeta) = \gamma_{P,t\zeta}(1) = \gamma_{P,\zeta}(t),$$

следовательно, образ кривой δ при отображении $\exp_P$, т.е. кривая $\exp_P \circ \delta$, совпадает с начальным отрезком геодезической $\gamma_{P,\zeta}$, поэтому $(d\exp_P)_0$ переводит вектор ξ в себя (мы отождествляем касательное пространство к T_PM в точке 0 с самим пространством T_PM). Но последнее, по теореме об обратном отображении, означает, что ограничение отображения $\exp_P$ на некоторую окрестность $U^0 \subset T_PM$ точки $0 \in T_PM$ является диффеоморфизмом с некоторой окрестностью точки P. По определению открытого множества, в U^0 существует искомый открытый шар $U_r(0)$. □

Так как отображение $\exp_P$ является диффеоморфизмом между открытым шаром $U_r(0)$ и его образом U^P — окрестностью точки $P \in M$, — с помощью него можно задать в U^P координаты: выбираем в T_PM произвольный ортонормальный базис и соответствующие ему координаты, тогда $\exp_P$ переносит эти координаты на U^P. Определенные только что координаты называются ***нормальными с центром в точке*** P. Окрестности $U_r(0)$ и U^P называются ***нормальными***, а r — ***радиусом*** обеих этих окрестностей (ниже мы обоснуем применение термина радиус к окрестности U^P). Также нетривиальную геодезическую вида $\exp_P(t\,\xi)$, где $\xi \neq 0$ содержится в T_PM и может лежать вне $U_r(0)$, а t меняется в пределах от 0 до некоторого $0 < a < r/\|\xi\|$ (геодезическая начинается в центре нормальной окрестности $U^P \subset M$ и не выходит из нее), будем называть ***радиальной***.

Задача 8.14. Выясните, как выглядят в нормальных координатах с центром в точке P

(1) матрица первой фундаментальной формы в точке $0 \in T_PM$;

(2) геодезические, проходящие через точку P;

(3) символы Кристоффеля в точке $0 \in T_PM$.

8.4 Минимальные свойства геодезических

Продолжим изучать свойства нормальных координат.

Конструкция 8.15. Пусть $U_r(0) \subset T_PM$ — нормальная окрестность. Рассмотрим произвольную гладкую кривую $v\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to T_PM$, для которой норма $\|v(s)\|$ постоянна и равна некоторому числу $a > 0$, в частности, кривая v не проходит через 0. Положим $b = r/a$, тогда при всех $t \in (-b, b)$ и всех $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ точка $t\,v(s)$ лежит в $U_r(0)$. Зададим отображение $f\colon (-b,b) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ так:

$$f(t,s) = \exp_P\bigl(t\,v(s)\bigr).$$

Лемма 8.16. *Отображение f из конструкции 8.15 — гладкое и обладает следующими свойствами.*

(1) *При каждом фиксированном $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ кривая $\gamma(t) = f(t,s)$ — геодезическая на M, проходящая через $P = \gamma(0)$ и имеющая в P скорость $\dot\gamma(0) = v(s)$. В частности, норма $\|f_t\| = \|v(s)\| = a$ не зависит от t, а вектор f_{tt} перпендикулярен M.*

(2) *Векторы f_t и f_s взаимно перпендикулярны в каждой точке (t,s).*

Доказательство. Отображение f — гладкое как композиция гладкого отображения $(t,s) \mapsto t\,v(s)$ и $\exp_P$.

Пункт (1) вытекает из определения экспоненты.

Докажем теперь пункт (2). Положим $g(t,s) = \langle f_t, f_s\rangle$. Мы должны показать, что $g(t,s) \equiv 0$. Продифференцируем g по t:

$$g_t = \langle f_t, f_s\rangle_t = \langle f_{tt}, f_s\rangle + \langle f_t, f_{st}\rangle.$$

По пункту (1), вектор f_{tt} перпендикулярен поверхности M, поэтому его скалярное произведение с касательным вектором f_s равно нулю. Таким образом, $\langle f_{tt}, f_s\rangle = 0$.

Далее, $\langle f_t, f_{st}\rangle = \frac{1}{2}\langle f_t, f_t\rangle_s$, но, снова по пункту (1), величина $\langle f_t, f_t\rangle = a^2$ постоянна, поэтому $\langle f_t, f_t\rangle_s = 0$.

Итак, мы показали, что $g_t = 0$ и, значит, функция $g(t,s)$ не зависит от t. В частности, $g(t,s) = g(0,s)$, однако $f(0,s) = \exp_P(0) = P$, поэтому $f_s(0,s) = 0$ и, значит,

$$g(t,s) = g(0,s) = \bigl\langle f_t(0,s), f_s(0,s)\bigr\rangle = 0,$$

что и требовалось. □

Во введенных выше обозначениях, пусть теперь $0 < a < r$. Положим $\Sigma_a = \{\xi \in T_PM : \|\xi\| = a\}$. Тогда Σ_a — сфера в T_PM и, значит, — регулярная неявная поверхность. Обозначим S_a образ сферы Σ_a при отображении $\exp_P$. Так как отображение $\exp_P$, ограниченное на $U_r(0)$, — диффеоморфизм с образом, S_a — регулярная неявная поверхность. Она называется *геодезической сферой*.

Лемма 8.17 (Гаусс)**.** *Для каждого $\xi \in \Sigma_a \subset T_P M$ геодезическая $\gamma(t) = \exp_P(t\xi)$ перпендикулярна S_a в точке пересечения $Q = \gamma(1)$.*

Доказательство. Мы должны показать, что вектор $\dot\gamma(1)$ перпендикулярен каждому касательному вектору $\eta \in T_Q S_a$. Выберем произвольную гладкую кривую $w\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_a$, для которой $w(0) = Q$ и $\dot w(0) = \eta$. Так как $\exp_P$ — диффеоморфизм, определена гладкая кривая $v(s) = \exp_P^{-1}\bigl(w(s)\bigr)$ на Σ_a, причем $w(s) = \exp_P\bigl(v(s)\bigr)$. Рассмотрим гладкое отображение $f(t,s)$ из конструкции 8.15, примененной к кривой $v(s)$, тогда, в обозначениях этой конструкции, $b = r/a > 1$, $\gamma(t) = f(t,0)$, $\dot\gamma(t) = f_t(t,0)$, $f(1,s) = w(s)$ и, поэтому, $f_s(1,0) = \dot w(0) = \eta$. Но, по лемме 8.16, векторы f_t и f_s ортогональны, что и завершает доказательство. □

Лемма 8.18. *Пусть U^P — нормальная окрестность точки $P \in M$ поверхности M, и $\gamma\colon [a,b] \to U^P$ — гладкая параметрическая кривая, не проходящая через P. Рассмотрим гладкую кривую $\delta = \exp_P^{-1} \circ \gamma$ в касательном пространстве $T_P M$. Тогда длина $|\gamma|$ кривой γ оценивается так:*

$$|\gamma| \ge \Bigl|\bigl\|\delta(b)\bigr\| - \bigl\|\delta(a)\bigr\|\Bigr|, \tag{8.2}$$

где норма в $T_P M$, как всегда, порождена первой фундаментальной формой поверхности M. Более того, в формуле (8.2) *имеет место равенство, если и только если кривая γ монотонно параметризует отрезок радиальной геодезической, выпущенной из P.*

Доказательство. Положим $r(s) = \bigl\|\delta(s)\bigr\|$ и $v(s) = \delta(s)/\bigl\|\delta(s)\bigr\|$, тогда $\delta(s) = r(s)v(s)$, причем $\bigl\|v(s)\bigr\| \equiv 1$ и $\gamma(s) = \exp_P\bigl(r(s)v(s)\bigr)$. Примерим к кривой $v(s)$ конструкцию 8.15, построим соответствующую функцию $f(t,s)$ и заметим, что $\gamma(s) = f\bigl(r(s), s\bigr)$. Так как, в силу леммы 8.16, векторы f_t и f_s ортогональны, а $\|f_t\| = \|v(s)\| = 1$, имеем

$$\dot\gamma = f_t\,\dot r + f_s \quad\Rightarrow\quad \|\dot\gamma\| = \|f_t\|\,|\dot r| + \|f_s\| \ge \|f_t\|\,|\dot r| = |\dot r|,$$

и, значит,

$$|\gamma| = \int_a^b \|\dot\gamma(s)\|\,ds \ge \int_a^b |\dot r(s)|\,ds \ge \left|\int_a^b \dot r(s)\,ds\right| = \bigl|r(b) - r(a)\bigr| = \Bigl|\bigl\|\delta(b)\bigr\| - \bigl\|\delta(a)\bigr\|\Bigr|. \tag{8.3}$$

Заметим, что первое неравенство в формуле (8.3) обращается в равенство, если и только если $f_s \equiv 0$. Так как $\exp_P$ —диффеоморфизм с образом, последнее равносильно тому, что вектор скорости кривой $s \mapsto t\,v(s)$ в касательной пространстве $T_P M$ тождественно обращается в 0. Напомним, что $f(t,s) = \exp_P\bigl(t\,v(s)\bigr)$. Так как мы рассматриваем кривые, не проходящие через P, то нас интересует этот результат при $t \ne 0$, а в таких точках он равносилен $\dot v \equiv 0$, т.е. $v(s) = v_0$, а это означает, что образ кривой γ лежит на геодезической $\exp_P(t\,v_0)$.

Далее, второе неравенство из формулы (8.3) превращается в равенство, если и только если $\dot r$ не меняет знак, т.е. кривая γ монотонно параметризует соответствующий отрезок геодезической $\exp_P(t\,v_0)$. Доказательство закончено. □

Следствие 8.19. *Пусть U^P — нормальная окрестность точки $P \in M$ поверхности M, и $\gamma\colon [0,1] \to M$ — гладкая параметрическая кривая, соединяющая точку $P = \gamma(0)$ с отличной от нее точкой $Q = \gamma(1) \in U^P$. Пусть $\delta(t) = \exp_P(t\,\xi)$ — радиальная геодезическая, также соединяющая $P = \delta(0)$ и $Q = \delta(1)$. Тогда $|\gamma| \ge |\delta|$, причем равенство достигается, если и только если кривая γ монотонно параметризует образ кривой δ.*

Доказательство. Пусть сначала кривая γ лежит в окрестности U^P. Рассмотрим замкнутый шар $B_d(0) \subset T_P M$, где d столь мало, что точка Q лежит вне окрестности $B = \exp_P\bigl(B_d(0)\bigr)$, и пусть $\gamma(t')$ — последняя точка выхода кривой γ из окрестности B. Тогда для кривой $\gamma|_{[t',1]}$ применима лемма 8.18, в соответствии с которой

$$|\gamma| \ge \bigl|\gamma|_{[t',1]}\bigr| \ge \|Q\| - d = |\delta| - d,$$

причем равенство достигается, если и только если $\gamma|_{[t',1]}$ монотонно параметризует часть δ. Осталось устремить d к 0.

Если же образ кривой γ не лежит в U^P, то эта кривая пересекает геодезическую сферу $S_a \subset U$ некоторого радиуса a, большего, чем $|\delta|$. Но тогда, в силу доказанного выше, $|\gamma| \ge a > |\delta|$. □

Задача 8.20. Пусть U^P — нормальная окрестность радиуса r точки $P \in M$ поверхности M и $0 < a < r$. Покажите, что

(1) множества $\exp_P\big(U_a(0)\big) \subset M$ и $\exp_P\big(B_a(0)\big) \subset M$ — соответственно открытый и замкнутый шары радиуса a с центром в точке P относительно внутренней метрики поверхности M;

(2) геодезическая сфера S_a с центром в точке P поверхности M является сферой в смысле внутренней метрики: S_a состоит из всех точек, расположенных от P на внутреннем расстоянии a;

(3) топология, заданная на M с помощью внутренней метрики, совпадает с исходной топологией.

При построении отображения $\exp_P$ мы фиксировали две составляющие отображения $\gamma(Q,\zeta,t)$, а именно, $Q = P$ и $t = 1$. Если фиксировать только t, то можно получить более интересный результат, который мы приведем без доказательства.

Теорема 8.21. *Для каждой точки P поверхности M существует такая нормальная окрестность U и такое $\varepsilon > 0$, что у каждой точки $Q \in U$ имеется нормальная окрестность радиуса ε, содержащая U.*

Определение 8.22. Окрестность U из теоремы 8.21 назовем *ε-вполне нормальной*. Если рассуждения не используют ε или вводят его самостоятельно, то такую окрестность называют просто *вполне нормальной*.

Задача 8.23. Приведите пример нормальной окрестности, не являющейся вполне нормальной.

Следствие 8.24. *Пусть U — произвольная ε-вполне нормальная окрестность точки P поверхности M, тогда каждая пара точек $Q_1, Q_2 \in U$ соединяется единственной геодезической в M, длина которой меньше ε, причем эта геодезическая — кратчайшая кривая в M.*

Доказательство. Действительно, так как U содержится в нормальной окрестности U^{Q_1} радиуса ε, точка Q_2 соединяется в M с точкой Q_1 геодезической $\gamma(t) = \exp_{Q_1}(t\,\xi)$ для некоторого $\xi \in U_\varepsilon(0) \subset T_{Q_1}M$: $Q_1 = \gamma(0)$, $Q_2 = \gamma(1)$, $|\gamma| = \|\xi\| < \varepsilon$. В силу биективности отображения $\exp_{Q_1}$, ограниченного на $U_\varepsilon(0)$, и теоремы единственности для геодезических, никакие другие радиальные геодезические, выходящие из Q_1 и имеющие длину меньше ε, не соединяют точки Q_1 и Q_2. Все остальные геодезические, соединяющие Q_1 и Q_2, т.е. выходящие из окрестности U^{Q_1}, в силу следствия 8.19 будут не короче ε (убедитесь в этом). Таким образом, мы показали, что Q_1 и Q_2 соединяются единственной геодезической γ длины меньше ε. Снова по следствию 8.19, геодезическая γ не длиннее всех остальных кривых, соединяющих Q_1 и Q_2, т.е. γ — кратчайшая кривая. □

Замечание 8.25. Отметим, что геодезическая, построенная в следствии 8.24, не обязана содержаться в окрестности U. Если же каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая точки ε-вполне нормальной окрестности U, содержится в U, то такая окрестность U называется *выпуклой*. Можно показать, что у каждой точки поверхности существует выпуклая окрестность.

Задача 8.26. Докажите, что на поверхности M каждая нетривиальная геодезическая $\gamma\colon [a,b] \to M$ — локально кратчайшая, т.е. для любой точки $t \in [a,b]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ограничение γ на $[a,b] \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих ее концы. Приведите пример геодезической, которая не является кратчайшей среди кривых, соединяющих ее концы.

Задача 8.27. Покажите, что каждая кратчайшая кривая на поверхности является геодезической.

8.4.1 Теорема Хопфа–Ринова

В данном разделе мы поговорим о связи свойств экспоненциального отображения с геометрией поверхности.

Теорема 8.28 (Хопф–Ринов)**.** *Пусть (M,ρ) — поверхность, тогда следующие утверждения* (1)–(4) *попарно эквивалентны, и каждое из них влечет* (5):

(1) *существует точка $P \in M$ такая, что отображение $\exp_P$ определено на всем T_PM;*

(2) *замкнутые и ограниченные* (*относительно внутренней метрики*) *подмножества M компактны;*

(3) *внутренняя метрика поверхности M — полная;*

(4) *для каждой точки $Q \in M$ отображение $\exp_Q$ определено на всем T_QM* (*такие поверхности называются* ***геодезически полными***);

(5) *каждая пара точек $P, Q \in M$ соединяется геодезической длины $|PQ|$.*

Доказательство. Мы докажем, что из (1) вытекает (5′), где (5′) отличается от (5) лишь тем, что в нем точка P не любая, а удовлетворяет условию (1). Затем мы покажем, что имеет место следующая последовательность импликаций: (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1). Тем самым, установив равносильность (1) и (4), мы докажем импликацию (1) ⇒ (5) и, значит, что каждое утверждение (1)–(4) само влечет (5).

Прежде чем приступать к доказательству конкретных импликаций, приведем ряд полезных для дальнейшего лемм.

Лемма 8.29. *Каждая геодезическая сфера является компактом.*

Доказательство. Действительно, каждая геодезическая сфера является образом экспоненциального отображения, примененного к соответствующей сфере в касательном пространстве, которая, как хорошо известно, — компакт. Остается вспомнить, что экспоненциальное отображение непрерывно, а непрерывный образ компакта — компакт. □

Лемма 8.30. *Пусть P, Q — точки поверхности M, находящиеся на расстоянии d во внутренней метрике. Пусть S_a — геодезическая сфера с центром в P и радиусом $0 < a < d$. Тогда функция расстояния от Q до точек сферы S_a достигает своего минимума в некоторой точке $X \in S_a$, причем $a + |XQ| = d$.*

Доказательство. Так как, в силу задачи 8.20, топология, индуцированная внутренней метрикой, совпадает с исходной топологией, функция расстояния непрерывна (в исходной топологии) и, в силу компактности геодезической сферы S_a (лемма 8.29), эта функция расстояния от Q до точек из S_a достигает своего минимума в некоторой точке $X \in S_a$.

Пусть $\Gamma(s)$ — произвольная кривая, соединяющая $P = \Gamma(0)$ и $Q = \Gamma(1)$. Так как функция $\big|P\Gamma(s)\big|$ непрерывна, $\big|P\Gamma(0)\big| = 0$ и $\big|P\Gamma(1)\big| = |PQ| = d > a$, существует $s_0 \in (0,1)$ такое, что $\big|P\Gamma(s_0)\big| = a$. Так как, в силу задачи 8.20, геодезическая сфера S_a является сферой с центром в P и радиусом a относительно внутренней метрики, то точка $\Gamma(s_0) =: Y$ принадлежит S_a. Таким образом, мы показали, что кривая Γ пересекает геодезическую сферу S_a.

По следствию 8.19, $|\Gamma_{[0,s_0]}| \ge a$. Так как в точке X достигается минимум расстояний от Q до точек из S_a, получаем $|\Gamma_{[s_0,1]}| \ge |YQ| \ge |XQ|$. Таким образом, $|\Gamma| \ge a + |XQ|$, откуда $|PQ| \ge a + |XQ|$.

С другой стороны, по определению внутренней метрики, для любого $\varepsilon > 0$ существует кривая γ_2, соединяющая X и Q, для которой $|\gamma_2| < |XQ| + \varepsilon$. Взяв в качестве γ_1 радиальную геодезическую, соединяющую P и X, получим $|\gamma_1| = a$. Рассмотрев, после необходимых замен параметра, склейку кривых γ_1 и γ_2, получим кривую Γ, соединяющую P и Q, для которой $|\Gamma| < a + |XQ| + \varepsilon$, откуда $|PQ| < a + |XQ| + \varepsilon$. Таким образом, неравенства $a + |XQ| \le |PQ| < a + |XQ| + \varepsilon$ имеют место при каждом $\varepsilon > 0$, следовательно, $|PQ| = a + |XQ|$. □

Перейдем теперь к доказательству импликаций.

(1) ⇒ (5′). Выберем произвольную точку $Q \in M$ и пусть $d = |PQ|$. Если $U_r(0) \subset T_PM$ — нормальная окрестность точки P, то при $d < r$ утверждение вытекает из следствия 8.19, поэтому предположим, что $d \ge r$.

Выберем произвольное $0 < a < r$ и пусть $S_a \subset M$ — геодезическая сфера радиуса a с центром в P. По лемме 8.30, расстояние от Q до точек сферы S_a достигает своего минимального значения в некоторой точке $x_0 \in S_a$, причем $a + |x_0Q| = d$.

Так как ограничение $\exp_P$ на $U_r(0) \subset T_PM$ является диффеоморфизмом с образом, то существует единственное $v \in T_PM$, $\|v\| = 1$, для которого $x_0 = \exp_P(a\,v)$. Рассмотрим натурально параметризованную геодезическую $\gamma(s) = \exp_P(s\,v)$, определенную, в силу предположения, при всех $s \ge 0$. Отметим, что $\gamma(a) = x_0$. Мы покажем, что $\gamma(d) = Q$ и длина геодезической $\gamma|_{[0,d]}$ равна $|PQ|$.

Рассмотрим следующее множество:

$$A := \Big\{s \in [0,d] : \big|\gamma(s)Q\big| = d - s\Big\}.$$

Как было отмечено выше, $a + |x_0Q| = d$ и $x_0 = \gamma(a)$, так что $\big|\gamma(a)Q\big| = d - a$, поэтому $a \in A$ и, значит, $A \ne \emptyset$.

Далее, заметим, что условие, задающее A, имеет вид $f(s) = \big|\gamma(s)Q\big| - (d - s) = 0$, а функция f, в силу сказанного выше, непрерывно зависит от s, поэтому A — замкнутое подмножество отрезка $[0,d]$.

Пусть $s_1 = \sup A$. Мы покажем, что $s_1 = d$, откуда, в силу замкнутости A, имеем $d \in A$, поэтому $|\gamma(d)Q| = d - d = 0$ и, значит, $\gamma(d) = Q$.

Предположим противное, т.е. что $s_1 < d$. Положим $x_1 = \gamma(s_1)$. Так как A — замкнуто, то $s_1 \in A$, откуда $|x_1Q| = d - s_1$.

Так как $s_1 < d$, существует $0 < b < d - s_1$, для которого определена геодезическая сфера $S_b \subset M$ с центром в x_1. Снова, по лемме 8.30, расстояние от Q до точек сферы S_b достигает своего минимального значения в некоторой точке $x_2 \in S_b$, причем $b + |x_2Q| = |x_1Q| = d - s_1$. Отсюда, и из неравенств треугольника, получаем

$$|Px_2| \geq |PQ| - |x_2Q| = d - |x_2Q| = s_1 + b \quad \text{и} \quad |Px_2| \leq |Px_1| + |x_1x_2| \leq s_1 + b,$$

поэтому $|Px_2| = s_1 + b$. Но точки P и x_2 соединяются кривой, являющейся склейкой двух геодезических: кривой $\gamma|_{[0,s_1]}$ и радиальной геодезической δ, соединяющей x_1 и x_2. Длина первой из этих кривых равна s_1, а второй равна b. Таким образом, эта склейка имеет длину, равную расстоянию между концами склейки, т.е. является кратчайшей кривой. По задаче 8.27, эта склейка — геодезическая, поэтому радиальная геодезическая δ продолжает γ и, значит, $x_2 = \gamma(s_1 + b) = \gamma(s_2)$, где $s_2 := s_1 + b > s_1$. Но

$$\bigl|\gamma(s_2)Q\bigr| = |x_2Q| = d - s_1 - b = d - s_2,$$

поэтому $s_2 \in A$, противоречие.

Итак, мы показали, что $\sup A = d$, откуда $Q = \gamma(d)$, но длина натурально параметризованной геодезической $\gamma|_{[0,d]}$ равна $d = |PQ|$, т.е. расстоянию между ее концами.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $A \subset M$ — произвольное замкнутое ограниченное множество. Последнее означает, что существует такой шар $B_a(P)$ по отношению к внутренней метрике, для которого $A \subset B_a(P)$. Так как (1) $\Rightarrow$ (5′), для каждой точки $Q \in B_r(P)$ существует геодезическая, соединяющая P с Q и имеющая длину PQ. По условию, отображение $\exp_P$ определено на замкнутом шаре $B_r(0) \subset T_PM$ и для каждого $r > a$. Из сказанного выше вытекает, что $B_a(P) \subset \exp_P\bigl(B_r(0)\bigr)$. Так как шар $B_r(0)$ — компакт, а отображение $\exp_P$ непрерывно, то $\exp_P\bigl(B_r(0)\bigr)$ — компакт, поэтому A — замкнутое подмножество этого компакта и, значит, тоже компактно.

(2) $\Rightarrow$ (3) Каждая фундаментальная последовательность ограничена, поэтому ее замыкание также ограничено. По условию, это замыкание является компактом, поэтому фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность и, значит, сама сходится, что влечет полноту.

(3) $\Rightarrow$ (4) Предположим, что M не является геодезически полным. Это означает, что для некоторой точки $P \in M$ выходящая из P натурально параметризованная геодезическая $\gamma(s)$, $P = \gamma(0)$, определена при $s < s_0$ и не продолжается в s_0 (если бы геодезическая продолжалась вплоть до s_0, то мы смогли бы ее продолжить, воспользовавшись теоремой 8.3). Рассмотрим последовательность $0 < s_n < s_0$, стремящуюся к s_0. Так как $|\gamma(s_m)\gamma(s_n)| \leq |s_m - s_n|$, то последовательность $\gamma(s_n)$ фундаментальна. Так как M, по предположению, полно, эта последовательность сходится к некоторой точке $Q \in M$.

По теореме 8.21, для некоторого $\varepsilon > 0$ существует ε-вполне нормальная окрестность U точки Q. Выберем N столь большим, чтобы при $m, n \geq N$ точки $\gamma(s_m)$ и $\gamma(s_n)$ принадлежали U и выполнялось $|s_m - s_n| < \varepsilon/2$. По определению ε-вполне нормальной окрестности, у точки $x := \gamma(s_n)$ существует нормальная окрестность радиуса ε. Положим $v = \dot\gamma(s_n)$ и рассмотрим натурально параметризованную геодезическую $\delta(t) = \exp_x(t\,v)$, которая определена по крайней мере при $t \in [0, \varepsilon)$ (так как у x есть нормальная окрестность радиуса ε). Сделав линейную замену параметра t, вновь получим геодезическую $\delta(s - s_n)$, определенную на $[s_n, s_n + \varepsilon)$ и, по теореме единственности для геодезических, совпадающую с $\gamma|_{[s_n,s_0)}$ на начальном отрезке. Но, так как $s_n + \varepsilon > s_0$, то геодезическая $\delta(s - s_m)$ задает продолжение геодезической γ за точку s_0, противоречие.

(4) $\Rightarrow$ (1) Геодезическая полнота означает выполнение пункта (1) не только в некоторой точке, но и во всех, а, значит, и в некоторой. $\square$

Литература к главе 8

[1] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.1, Приложение 1.

[2] Do Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, p.63, Theorem 2.2.

Упражнения к главе 8

Упражнение 8.1. Пусть на m-мерной поверхности M в $\mathbb{R}^n$ заданы координаты $u^1, \dots, u^m$, в которых матрица первой фундаментальной формы скалярна: в каждой точке она диагональна, а диагональный элемент равен $\lambda = \lambda(u^1, \dots, u^m)$. Напишите уравнения геодезических. В случае, когда M — двумерная поверхность с координатами (x, y), $y > 0$, для которой матрица первой фундаментальной формы скалярна, а $\lambda = 1/y^2$, покажите, что геодезическими являются равномерно параметризованные лучи, перпендикулярные оси абсцисс, а также равномерно параметризованные дуги окружностей, центры которых лежат на оси абсцисс. Убедитесь, что это — полный список геодезических.

Упражнение 8.2. Пусть $ds^2 = x(dx^2 + dy^2)$, $x > 0$. Докажите, что геодезические для этой метрики являются параболами.

Упражнение 8.3. Пусть $ds^2 = g(r)dr^2 + r^2 d\varphi^2$, $g(r) > 0$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Докажите, что кривые $\varphi = \varphi_0$ являются геодезическими.

Упражнение 8.4. Пусть M — двумерная поверхность вращения, заданная в цилиндрических координатах (r, φ, z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция. Рассмотрим произвольную геодезическую $\gamma(t) = \big(\varphi(t), z(t)\big)$ на M, и пусть $r(t)$ — расстояние от $\gamma(t)$ до оси z, а $\psi(t)$ — угол между вектором скорости $\dot\gamma(t)$ и параллелью $z = z(t)$. Докажите теорему Клеро: величина $r(t)\cos\big(\psi(t)\big)$ не зависит от t.

Упражнение 8.5. Опишите все поверхности вращения, заданные в цилиндрических координатах (r, φ, z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция, на которых существуют замкнутые геодезические (нетривиальная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, называется ***замкнутой***, если $\gamma(a) = \gamma(b)$ и ее продолжение на $[b, b+\varepsilon]$: $\gamma(b+s) = \gamma(a+s)$, $s \in [b, b+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, — регулярная кривая).

Упражнение 8.6. Опишите геодезические на ортогональной группе $\mathrm{O}(n)$ (воспользуйтесь понятием экспоненты матрицы и покажите, что e^{tA}, где A — кососимметричная матрица, являются геодезическими, проходящими через E).

Упражнение 8.7. Выясните, как выглядят в нормальных координатах с центром в точке P

(1) матрица первой фундаментальной формы в точке $0 \in T_P M$;

(2) геодезические, проходящие через точку P;

(3) символы Кристоффеля в точке $0 \in T_P M$.

Упражнение 8.8. Пусть U^P — нормальная окрестность радиуса r точки $P \in M$ поверхности M и $0 < a < r$. Покажите, что

(1) множество $\exp_P\big(U_a(0)\big) \subset M$ — открытый шар радиуса a с центром в точке P относительно внутренней метрики поверхности M;

(2) геодезическая сфера S_a с центром в точке P поверхности M является сферой в смысле внутренней метрики: S_a состоит из всех точек, расположенных от P на внутреннем расстоянии a;

(3) топология, заданная на M с помощью внутренней метрики, совпадает с исходной топологией.

Упражнение 8.9. Приведите пример нормальной окрестности, не являющейся ε-вполне нормальной ни для какого $\varepsilon > 0$.

Упражнение 8.10. Докажите, что на поверхности M каждая нетривиальная геодезическая $\gamma\colon [a, b] \to M$ является локально кратчайшей, т.е. для любой точки $t \in [a, b]$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ограничение γ на $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих ее концы. Приведите пример геодезической, которая не является кратчайшей среди кривых, соединяющих ее концы.

Упражнение 8.11. Покажите, что каждая кратчайшая кусочно-гладкая равномерно параметризованная кривая на поверхности является геодезической.

Упражнение 8.12. Используя теорему Хопфа–Ринова, покажите, что на верхней полуплоскости с координатами (x, y) и метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ описанные в упражнении 8.1 геодезические являются кратчайшими между любыми двумя своими точками. Запишите расстояние во внутренней метрике для точек на вертикальном луче и для точек на дуге стандартной окружности.