Лекция 7

Параллельный перенос

План. Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму, символы Кристоффеля, векторные поля вдоль кривых, ковариантные производные полей вдоль кривых, параллельные векторные поля, параллельный перенос, уравнения параллельного переноса, сохранение скалярного произведения при параллельном переносе, изометричность параллельного переноса, евклидовы координаты и евклидова метрика, параллельный перенос в евклидовых координатах, примеры цилиндра и конуса, касающиеся поверхности, параллельный перенос вдоль кривой касания поверхностей, вычисление параллельного переноса вдоль параллелей на стандартной двумерной сфере.

В этой лекции мы выразим ковариантные производные касательных векторных полей на поверхности через первую фундаментальную форму поверхности и применим полученные формулы для изучения аналога параллельного переноса. А именно, мы определим параллельный перенос касательного вектора вдоль кривой на поверхности. В дальнейшем мы введем в рассмотрение кривые, у которых поле скоростей параллельно. Такие кривые, являющиеся аналогами прямых, называются геодезическими.

7.1 Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму

Пусть на поверхности (M,ρ) в $\mathbb{R}^n$ введены координаты $u^1,\dots,u^m$, в которых матрица первой фундаментальной формы имеет компоненты g_{ij}. Через g^{ij} будем обозначать компоненты матрицы, обратной к (g_{ij}).

Пусть X — касательное векторное поле к поверхности M, а $(X^1,\dots,X^m)$ — координатное представление X. Выберем произвольную точку $P\in M$ и произвольный касательный вектор $\xi\in T_PM$ с координатным представлением $(\xi^1,\dots,\xi^m)$. Мы хотим записать координаты поля $\nabla_\xi X$ через координаты X^i, ξ^i и первую фундаментальную форму поверхности M.

Рассмотрим гладкую параметрическую кривую $\gamma(t)$ на M, задающую ξ, а именно, пусть $P=\gamma(0)$ и $\xi=(\rho\circ\gamma)'(0)$. Если $\bigl(u^1(t),\dots,u^m(t)\bigr)$ — координатное представление кривой γ, то $\xi^i=\dot u^i(0)=:\dot u^i$. Тогда

$$\partial_\xi X=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Bigl[X^i\bigl(u^1(t),\dots,u^m(t)\bigr)\rho_{u^i}\bigl(u^1(t),\dots,u^m(t)\bigr)\Bigr]=X^i_{u^j}\dot u^j\rho_{u^i}+X^i\rho_{u^iu^j}\dot u^j.$$

Так как $\nabla_\xi X=(\partial_\xi X)^T$, то, чтобы получить координаты поля $\nabla_\xi X$, нам остается разложить вектор $(\rho_{u^iu^j})^T$ по каноническому базису ρ_{u^k}. Пусть $(\rho_{u^iu^j})^T=\Gamma^k_{ij}\rho_{u^k}$. Умножим скалярно последнее равенство на ρ_{u^p} и заметим, что левая часть полученной формулы равна

$$\bigl\langle(\rho_{u^iu^j})^T,\rho_{u^p}\bigr\rangle=\langle\rho_{u^iu^j},\rho_{u^p}\rangle=\langle\rho_{u^i},\rho_{u^p}\rangle_{u^j}-\langle\rho_{u^i},\rho_{u^pu^j}\rangle=(g_{ip})_{u^j}-\langle\rho_{u^i},\rho_{u^pu^j}\rangle,$$

а правая имеет вид

$$\langle\Gamma^k_{ij}\rho_{u^k},\rho_{u^l}\rangle=\Gamma^k_{ij}g_{kp}.$$

Вычислим $\langle\rho_{u^iu^j},\rho_{u^p}\rangle$ через производные коэффициентов первой фундаментальной формы. Для этого запишем три уравнения

$$\begin{aligned}(g_{ip})_{u^j}=&\langle\rho_{u^iu^j},\rho_{u^p}\rangle+\langle\rho_{u^pu^j},\rho_{u^i}\rangle,\\(g_{jp})_{u^i}=&\langle\rho_{u^ju^i},\rho_{u^p}\rangle+\langle\rho_{u^pu^i},\rho_{u^j}\rangle,\\(g_{ij})_{u^p}=&\langle\rho_{u^iu^p},\rho_{u^j}\rangle+\langle\rho_{u^ju^p},\rho_{u^i}\rangle,\end{aligned}$$

сложим первые два, и вычтем из них третье, в результате получим

$$(g_{ip})_{u^j} + (g_{jp})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p} = 2\langle \rho_{u^i u^j}, \rho_{u^p}\rangle = 2\Gamma^k_{ij} g_{kp}.$$

Поделим полученное равенство на 2, умножим на g^{pq} и просуммируем по p. Так как $g_{kp}g^{pq} = \delta^q_k$, то

$$\Gamma^q_{ij} = \frac{1}{2} g^{qp}\big[(g_{ip})_{u^j} + (g_{pj})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p}\big]$$

(эту формулу мы записали в более запоминающейся форме, воспользовавшись симметричностью g_{ij} и g^{ij}).

Функции Γ^q_{ij} называются *символами Кристоффеля*. Таким образом,

$$\nabla_\xi X = X^i_{u^j}\dot{u}^j\rho_{u^i} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot{u}^j\rho_{u^k} = (X^k_{u^j} + \Gamma^k_{ij}X^i)\dot{u}^j\rho_{u^k} = (X^k_{u^j} + \Gamma^k_{ij}X^i)\xi^j\rho_{u^k}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть на поверхности (M,ρ) заданы координаты $u^1,\dots,u^m$, а X — касательное поле, $X = X^i\rho_{u^i}$. Выберем произвольные $P \in M$ и $\xi = \xi^i\rho_{u^i} \in T_PM$. Тогда ковариантная производная поля X по направлению вектора ξ вычисляется так*:

$$\nabla_\xi X = (X^k_{u^j} + \Gamma^k_{ij}X^i)\xi^j\rho_{u^k},$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля, которые выражаются через коэффициенты g_{ij} первой фундаментальной формы и компоненты g^{ij} матрицы, обратной к (g_{ij}), по формулам

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}\big[(g_{ip})_{u^j} + (g_{pj})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p}\big].$$

Замечание 7.2. Обратите внимание, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, т.е. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. В следующем семестре мы будем иметь дело с более общей конструкцией ковариантного дифференцирования, в которой символы Кристоффеля могут быть не связанными с метрикой, а также не обязаны быть симметричными.

Замечание 7.3. Для удобства вычислений, полагают

$$\nabla_j X^k = X^k_{u^j} + \Gamma^k_{ij}X^i \quad \text{и} \quad \nabla_\xi X^k = \xi^j\nabla_j X^k,$$

тогда $\nabla_\xi X = (\nabla_\xi X^k)\rho_{u^k}$.

Обратите внимание, что ковариантная производная совпадает с соответствующей частной производной, если все Γ^k_{ij} равны нулю.

Пример 7.4. Предположим, что на поверхности M заданы координаты $u^1,\dots,u^m$, в которых матрица первой фундаментальной формы скалярна, т.е. диагональна, и все диагональные элементы равны между собой и равны функции $\lambda(u^1,\dots,u^m)$. Вычислим символы Кристоффеля.

Имеем $g_{ij} = \lambda\delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}/\lambda$, поэтому

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2\lambda}\delta^{kp}(\lambda_{u^j}\delta_{ip} + \lambda_{u^i}\delta_{pj} - \lambda_{u^p}\delta_{ij}) = \frac{1}{2\lambda}(\lambda_{u^j}\delta_{ik} + \lambda_{u^i}\delta_{kj} - \lambda_{u^k}\delta_{ij}).$$

Таким образом, если все три индекса i,j,k попарно различны, то $\Gamma^k_{ij} = 0$. Вот полный список символов Кристоффеля, которые могут быть ненулевыми (если встречаются два разных индекса, мы считаем их не совпадающими):

$$\Gamma^k_{ii} = -\frac{\lambda_{u^k}}{2\lambda},\ \Gamma^k_{ik} = \Gamma^k_{ki} = \frac{\lambda_{u^i}}{2\lambda},\quad \Gamma^k_{kk} = \frac{\lambda_{u^k}}{2\lambda}.$$

Рассмотрим частный случай, а именно, когда двумерная поверхность параметризована верхней полуплоскостью со стандартными координатами x,y, а метрика скалярна и $\lambda = 1/y^2$ (метрика плоскости Лобачевского).

В этом случае символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma^1_{11} = 0,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y},\quad \Gamma^1_{22} = 0,\quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y},\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\quad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

Задача 7.5. Выясните, как меняются символы Кристоффеля при переходе в другие координаты.

7.2 Векторные поля вдоль кривых, параллельный перенос

Пусть $\gamma\colon I \to M$ — гладкая параметрическая кривая на поверхности (M,ρ) в $\mathbb{R}^n$. По определению, $\rho\circ\gamma$ — гладкое отображение из I в $\mathbb{R}^n$. *Векторным полем вдоль* γ назовем произвольное гладкое отображение $X\colon I \to \mathbb{R}^n$. При этом, пользуясь отождествлением касательных пространств к $\mathbb{R}^n$ с помощью параллельного переноса, будем считать, что $X(t)$ содержится в касательном пространстве $T_{(\rho\circ\gamma)(t)}\mathbb{R}^n$. Так как мы не предполагаем, что кривая γ не имеет самопересечений, в одной и той же точке поверхности может быть задано несколько векторов поля X, соответствующих разным параметрам t.

Замечание 7.6. В традиционных курсах кривую γ на многообразии M принято отождествлять с ее координатной записью, что существенно упрощает формулы. В нашем случае, когда (M,ρ) — поверхность в $\mathbb{R}^n$, имеется две координатных записи: внутренняя, т.е. в координатах на поверхности (фактически, запись отображения $\varphi_\alpha\circ\gamma$, где φ_α задает координаты) и внешняя, т.е. запись в декартовых координатах объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$ отображения $\rho\circ\gamma$. **Начиная с этого места, мы будем отождествлять γ с отображением $\rho\circ\gamma$, в частности, мы будем писать $\dot\gamma$ вместо** $(\rho\circ\gamma)'$.

Замечание 7.7. Пусть, как и выше, X — векторное поле вдоль гладкой кривой γ, лежащей на поверхности M, и $\xi\in T_{\gamma(t)}M$. Тогда, вообще говоря, производная $\partial_\xi X$ не определена. Однако, если ξ — вектор скорости кривой γ (или коллинеарный ему вектор), то производную уже определить можно, так как $\partial_{\dot\gamma}X = \dot X$. В частности, для касательного и нормального полей определены ковариантные производные $\nabla_{\dot\gamma}X$. Важным частным случаем является поле $X=\dot\gamma$ скоростей кривой γ: ковариантная производная $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ будет в дальнейшем играть важную роль.

Отметим, что при выводе теоремы 7.1 мы на самом первом шаге могли не дифференцировать векторное поле X по u^j, а сразу продифференцировать по t, получив

$$\nabla_\xi X = \Big(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\xi^j\Big)\rho_{u^k}.$$

Эта формула уже зависит лишь от значений поля X вдоль кривой γ, задающей касательный вектор ξ. Тем самым, мы приходим к следующему результату.

Следствие 7.8. *Пусть на поверхности (M,ρ) введены координаты $u^1,\dots,u^m$. Рассмотрим на поверхности M произвольную гладкую параметрическую кривую γ с координатным представлением $\big(u^1(t),\dots,u^m(t)\big)$ и определенное вдоль γ касательное векторное поле $X(t)$ с координатным представлением $\big(X^1(t),\dots,X^m(t)\big)$. Тогда ковариантная производная поля X по направлению вектора $\dot\gamma$ корректно определена и вычисляется так*:

$$\nabla_{\dot\gamma} X = \Big(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot u^j\Big)\rho_{u^k},$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля.

7.2.1 Параллельные векторные поля и параллельный перенос вдоль кривых

Обобщим понятие параллельного векторного поля в пространстве $\mathbb{R}^n$ на случай поверхностей. Для этого заменим, что в $\mathbb{R}^n$ параллельность эквивалентна тому, что поле не меняется вдоль любой кривой, т.е. производная этого поля по направлению кривой равна нулю. На поверхности вместо обычных производных естественно рассматривать ковариантные.

Определение 7.9. Касательное векторное поле X вдоль гладкой параметрической кривой γ называется *параллельным*, если $\nabla_{\dot\gamma}X = 0$. Также говорят, что векторы параллельного поля получаются из произвольного одного *параллельным переносом.*

Следствие 7.8 позволяет мгновенно написать систему уравнений, решения которой — параллельные векторные поля.

Следствие 7.10. *Пусть M — поверхность с координатами $u^1,\dots,u^m$, на которой заданы гладкая параметрическая кривая γ с координатным представлением $\big(u^1(t),\dots,u^m(t)\big)$ и касательное векторное поле X с координатным представлением $\big(X^1(t),\dots,X^m(t)\big)$. Тогда поле X параллельно, если и только если оно удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}X^i\dot u^j = 0,\quad k=1,\dots,m. \tag{7.1}$$

Система (7.1) называется *уравнениями параллельного переноса*. Заметим, что уравнения (7.1) образуют систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому к ним применима теорема существования, единственности и продолжения.

Теорема 7.11. *Пусть M — поверхность, а $\gamma\colon I\to M$ — гладкая параметрическая кривая на M. Тогда для каждого $t_0\in I$ и касательного вектора $\xi\in T_{\gamma(t_0)}M$ существует и единственно параллельное векторное поле X вдоль всей кривой γ, удовлетворяющее начальному условию $X(t_0)=\xi$.*

Пример 7.12. В примере 7.4 мы вычислили символы Кристоффеля на двумерной поверхности, параметризованной верхней полуплоскостью с координатами x, y, в которой метрика скалярна и диагональный элемент равен $\lambda = 1/y^2$. Запишем теперь уравнение параллельного переноса:

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{y}X^1\dot y - \frac{1}{y}X^2\dot x = 0,\\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{y}X^1\dot x - \frac{1}{y}X^2\dot y = 0.\end{cases}$$

Опишем, как выглядит параллельный перенос вдоль кривой $y = \mathrm{const} =: c$, параметризованной так: $x = t$, $y = c$. Напишем уравнения переноса вдоль этой кривой:

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{c}X^2 = 0,\\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{c}X^1 = 0.\end{cases}$$

Подставляя выражение X^2 из первого уравнения во второе уравнение, получаем $\ddot X^1 + \frac{1}{c^2}X^1 = 0$, откуда $X^1 = a\cos\frac{t}{c} + b\sin\frac{t}{c}$, и, из первого уравнения, $X^2 = -a\sin\frac{t}{c} + b\cos\frac{t}{c}$. Запишем решение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} X^1\\ X^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{c} & \sin\frac{t}{c}\\ -\sin\frac{t}{c} & -\cos\frac{t}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при движении вдоль кривой $y = c$ в сторону возрастания x параллельное поле получается равномерным вращение вектора (a, b) в отрицательном направлении с частотой $1/c$.

Пусть теперь промежуток $I = [a, b]$ — отрезок, тогда каждому начальному условию $\xi\in T_{\gamma(a)}M$ можно поставить в соответствие касательный вектор $T_\gamma(\xi)$, который получается так: рассмотрим единственное параллельное векторное поле X вдоль γ с начальным условием $X(a) = \xi$, тогда $T_\gamma(\xi) := X(b)$. Полученное отображение $T_\gamma\colon T_{\gamma(a)}M\to T_{\gamma(b)}M$ называется *параллельным переносом из $\gamma(a)$ в $\gamma(b)$ вдоль кривой γ*. Из линейности уравнений параллельного переноса вытекает, что линейные комбинации решений также являются решениями, поэтому параллельный перенос — линейное отображение.

Предложение 7.13. *Пусть X и Y — параллельные векторные поля вдоль кривой γ, тогда скалярное произведение векторов таких полей постоянно вдоль кривой. В частности, параллельное поле состоит из векторов одной и той же длины, а угол между векторами параллельных полей один и тот же.*

Доказательство. Имеем

$$\langle X, Y\rangle' = \partial_{\dot\gamma}\langle X, Y\rangle = \langle \partial_{\dot\gamma}X, Y\rangle + \langle X, \partial_{\dot\gamma}Y\rangle = \langle \nabla_{\dot\gamma}X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{\dot\gamma}Y\rangle = 0,$$

что и требовалось. □

Следствие 7.14. *Параллельный перенос является линейной изометрией касательных пространств.*

Пример 7.15. Предположим, что в некоторых координатах $u^1,\dots,u^m$ на поверхности M все символы Кристоффеля равны нулю. Тогда уравнение параллельного переноса имеет вид $dX/dt = 0$, т.е. при параллельном переносе вдоль любой кривой координаты параллельного поля X не меняются.

Задача 7.16. Покажите, что если символы Кристоффеля тождественно равны нулю, то индуцированная метрика — евклидова.

Таким образом, в соответствии с задачей 7.16, координаты u^i — евклидовы. Частным случаем поверхностей в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой являются цилиндры. В частности, если на цилиндре осуществить параллельный перенос вдоль замкнутой кривой, то угол между векторами поля и направляющими изменяться не будет. Другим примером поверхности с евклидовой метрикой являются стандартные конусы: при разрезании вдоль направляющей каждый такой конус разворачивается в сектор круга, и на этой развертке координаты параллельного поля уже постоянны (введите соответствующие координаты). Последнее позволяет вычислить, на сколько повернется вектор при параллельном переносе на стандартном конусе вдоль основания конуса.

Пусть (M,ρ) и (N,σ) — поверхности одной размерности в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эти поверхности *пересекаются в точке* $x\in\mathbb{R}^n$, если для некоторых $P\in M$ и $Q\in N$ выполняется $\rho(P)=\sigma(Q)=x$. Эти поверхности назовем *касающимися в точке* x, если $T_QM=T_PN\subset T_x\mathbb{R}^n$. Если γ — кривая в $\mathbb{R}^n$, лежащая в пересечение поверхностей, то будем говорить, что эти поверхности *пересекаются вдоль кривой* γ. Если при это во всех точках кривой γ поверхности касаются друг друга, то говорит, что эти поверхности *касаются вдоль кривой* γ.

Напомним, что ковариантная производная векторного поля вдоль вектора скорости кривой равна производной поля по параметру кривой, ортогонально спроецированной на касательную плоскость к поверхности, поэтому ковариантная производная поля, определенного вдоль кривой, по которой поверхности касаются, вычисленная по направлению векторов скоростей этой кривой, одна и та же, если считать ее вдоль каждой из поверхностей. Отсюда мгновенно вытекает следующий результат.

Следствие 7.17. *Если поверхности одной размерности касаются вдоль кривой, то общее касательное векторное поле вдоль этой кривой одновременно параллельно или не параллельно по отношению к каждой из поверхностей.*

Пример 7.18. Рассмотрим стандартную двумерную сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$ и вычислим, на сколько повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль параллели. Если параллель является экватором, то рассмотрим цилиндр, касающийся сферы вдоль этого экватора. Если же параллель отлична от экватора, рассмотрим конус, касающийся сферы вдоль этой параллели. Так как параллельные переносы вдоль касающихся поверхностей одинаковы, и мы знаем, как устроены параллельные переносы вдоль цилиндров и конусов, мы, тем самым, знаем и как устроен параллельный перенос вдоль параллели на сфере.

Упражнения к главе 7

Упражнение 7.1. Пусть m-мерная поверхность M в $\mathbb{R}^n$ задана в виде графика отображения $(x^{m+1}, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^m)$, причем в точке $P = (0, \ldots, 0)$ координатное подпространство, натянутое на первые m базисных векторов $\mathbb{R}^n$, касается M. Вычислите, чему равны символы Кристоффеля в координатах $x^1, \ldots, x^m$ в точке P.

Упражнение 7.2. Пусть M — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, \theta) = \big((a + b\cos\theta)\cos\varphi,\ (a + b\cos\theta)\sin\varphi,\ b\sin\theta\big), \quad 0 < b < a, \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой $\theta = 0$ или $\theta = \pi$

Упражнение 7.3. Пусть M — бесконечнолистная намотка на поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, z) = \big(f(z)\cos\varphi,\ f(z)\sin\varphi,\ z\big),$$

где $f(z)$ — гладкая положительная функция f. Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой $z = z_0$, где z_0 — критическая точка функции f.

Упражнение 7.4. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) задана регулярная кривая

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), 0\big), \quad t \in (a, b).$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность $\rho(t, z) = \big(x(t), y(t), z\big)$. Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

Упражнение 7.5. Пусть $\gamma(t)$, $t \in (a, b)$, — регулярная кривая на стандартной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим коническую поверхность $\rho(u, t) = u\gamma(t)$, $u > 0$. Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

Упражнение 7.6. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) задана конус $x^2 + y^2 = a\,z^2$, $a > 0$. Рассмотрим сечение этого конуса плоскостью $z = 1$. Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе воль этого сечения.

Упражнение 7.7. Пусть S^2 — стандартная двумерная сфера в $\mathbb{R}^3$. Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль параллели сферы S^2.

Упражнение 7.8. Покажите, что если символы Кристоффеля тождественно равны нулю, то индуцированная метрика — евклидова.

Упражнение 7.9. Выясните, как меняются символы Кристоффеля при переходе в другие координаты.

Упражнение 7.10. Пусть g_{ij} — компоненты первой фундаментальной формы поверхности M, а $(X^1, \ldots, X^m)$ — координатная запись касательного векторного поля X в некоторых координатах $u^1, \ldots, u^m$. Положим $g = \det(g_{ij})$. Докажите следующие формулы:

(1) $\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}(\ln g)_{u^j} = (\ln\sqrt{g})_{u^j}$;

(2) $\nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}X^j)_{u^j}$.