Лекция 6

Тензорное исчисление на поверхностях

План. Тензорное произведение, билинейность тензорного произведения, тензорная запись билинейной формы, тензорная запись евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ и первой фундаментальной формы поверхности, несимметричность тензорного произведение, определение операции симметричного тензорного произведения (на ковекторах), его билинейность, запись симметричной билинейной формы через симметричное тензорное произведение, запись евклидовой метрики и первой фундаментальной формы через симметричное тензорное произведение, вычисление первой фундаментальной формы поверхности через тензорную запись, примеры, бесконечно малая длина дуги или элемент дуги (обоснование терминологии), кольцо функций на поверхности, дифференцирование функций на поверхности вдоль кривой и касательного вектора, свойства операции дифференцирования, модуль векторных полей вдоль поверхности, линейная комбинация и функциональная линейная комбинация векторных полей, ограничение векторного поля на кривую, производная векторного поля воль кривой и вдоль касательного вектора, свойства производной векторного поля вдоль касательного вектора, нормальное пространство к поверхности в данной точке, подмодули нормальных и касательных полей вдоль поверхности, ковариантные производные касательного и нормального векторных полей, а также функций, свойства ковариантной производной, доказательство правила Лейбница для ковариантной производной от скалярного произведения касательных (нормальных) полей, локальные векторные поля, продолжение касательного вектора до касательного векторного поля, продолжение нормального вектора до нормального локального векторного поля.

6.1 Тензорная запись первой фундаментальной формы

Выше мы выяснили, что дифференциалы функций порождают на касательных пространствах T_PM и $T_Q\mathbb{R}^n$ линейные функционалы — элементы двойственного пространств T_P^*M и $T_Q^*\mathbb{R}^n$ соответственно, т.е. тензоры типа $(0,1)$ в терминах раздела 2 введения. Более того, дифференциалы координатных функций некоторой параметризации образуют двойственный базис к каноническому, см. предложение 5.15. С другой стороны, евклидова метрика на $\mathbb{R}^n$ и первая фундаментальная форма поверхности (M,ρ) — это соответственно скалярное произведение на каждом $T_Q\mathbb{R}^n$ и индуцированное им скалярное произведение на каждом касательном пространстве $T_PM\subset T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$. Опять же, апеллируя к разделу 2, напомним, что такая билинейная форма является тензором типа $(0,2)$. Можно ли из тензоров типа $(0,1)$ получить тензоры типа $(0,2)$ и, тем самым, например, записать первую фундаментальную форму через дифференциалы координатных функций? Ответ на этот вопрос положительный, а искомое выражение как раз и называется тензорной записью индуцированной метрики.

Чтобы выполнить соответствующие построения, напомним определение тензорного произведения, см. задачу 10 из введения. Пусть на векторном пространстве V задан тензор S типа (p,q) и тензор T типа (r,s). Напомним, что, по определению, эти тензоры представляют собой полилинейные отображения на соответствующих декартовых произведениях пространств V^* и V, см. детали в разделе 2 введения. *Тензорное произведение* $S\otimes T$ определяется как тензор типа $(p+r,q+s)$, который на каждом наборе из $p+r$ ковекторов $\xi^1,\dots$ и $q+s$ векторов $v_1,\dots$ равен произведению значения S на первых p ковекторах и первых q векторах и значений T на последних r ковекторах и последних s векторах:

$$(S\otimes T)(\xi^1,\dots,\xi^{p+r},v_1,\dots,v_{q+s})=S(\xi^1,\dots,\xi^p,v_1,\dots,v_q)\,T(\xi^{p+1},\dots,\xi^{p+r},v_{q+1},\dots,v_{q+s}).$$

Так как обычное умножение билинейно, отображение $S\otimes T$ — полилинейно, т.е. является тензором. Также из определения тензорного произведения мгновенно вытекает ассоциативность и билинейность операции $\otimes$:

$$(R\otimes S)\otimes T=R\otimes(S\otimes T),$$
$$(a_1S_1+a_2S_2)\otimes T=a_1(S_1\otimes T)+a_2(S_2\otimes T),\quad S\otimes(a_1T_1+a_2T_2)=a_1(S\otimes T_1)+a_2(S\otimes T_2),$$

где R,S,S_1,S_2,T — произвольные тензоры на V и $a_1,a_2\in\mathbb{R}$.

Пусть теперь B — билинейная форма на векторном пространстве V размерности n. Выберем произвольный базис $e_1,\dots,e_n$, тогда $B_{ij}=B(e_i,e_j)$ — координаты формы B в этом базисе, и если $v=v^ie_i$, $w=w^ie_i$ —

векторы из V, то $B(v,w) = B_{ij}v^iw^j$. Пусть $e^1,\dots,e^n$ — двойственный базис, т.е. элементы пространства V^*. Каждый e^i является линейным отображением $e^i\colon V\to\mathbb{R}$, т.е. тензором типа $(0,1)$, поэтому для них определено тензорное произведение $e^i\otimes e^j$, являющееся тензором типа $(0,2)$, т.е. билинейной формой. По определению, $(e^i\otimes e^j)(v,w) = e^i(v)e^j(w) = v^iw^j$, поэтому

$$(B_{ij}e^i\otimes e^j)(v,w) = B_{ij}v^iw^j = B(v,w).$$

Итак, мы приходим к следующему результату.

Предложение 6.1. *Пусть $B\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — билинейная форма на векторном пространстве V размерности n. Выберем в V произвольный базис $e_1,\dots,e_n$, и пусть $e^1,\dots,e^n$ — двойственный базис пространства V^*. Положим $B_{ij} = B(e_i,e_j)$, тогда $B = B_{ij}e^i\otimes e^j$.*

Задача 6.2. Сформулируйте и докажите аналог предложения 6.1 для произвольного тензора.

Вернемся к поверхностям.

Следствие 6.3. *Пусть M — произвольная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $u^1,\dots,u^k$ — координаты на ней, $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, и $G = (g_{pq})$ — матрица первой фундаментальной формы поверхности M в координатах u^p. Тогда евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$ равна $\sum_i dx^i\otimes dx^i = \delta_{ij}dx^i\otimes dx^j$, а первая фундаментальная форма поверхности M в этих координатах u^p равна $g_{pq}du^p\otimes du^q$.*

Отметим, что евклидова метрика и первая фундаментальная форма симметричны, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ и $g_{pq} = g_{qp}$ в обозначениях предыдущего следствия. Само же тензорное произведение $du^p\otimes du^q$ — не симметрично. Например, если $p\ne q$, то

$$(du^p\otimes du^q)(\rho_{u^p},\rho_{u^q}) = du^p(\rho_{u^p})du^q(\rho_{u^q}) = 1, \quad \text{но} \quad (du^q\otimes du^p)(\rho_{u^p},\rho_{u^q}) = du^q(\rho_{u^p})du^p(\rho_{u^q}) = 0.$$

Для более комфортной работы с симметричными формами вводится *симметричное тензорное произведение*, которое мы определим только на ковекторах. Пусть снова V — векторное пространство, и $\varphi,\psi\in V^*$, тогда положим $\varphi\cdot\psi = (\varphi\otimes\psi+\psi\otimes\varphi)/2$. Теперь $\varphi\cdot\psi = \psi\cdot\varphi$, и, кроме того, симметричное тензорное произведение снова билинейно:

$$(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)\cdot\psi = \frac{1}{2}\big((a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)\otimes\psi+\psi\otimes(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)\big) = \\ = \frac{1}{2}(a_1\varphi_1\otimes\psi+a_2\varphi_2\otimes\psi+a_1\psi\otimes\varphi_1+a_2\psi\otimes\varphi_2) = a_1\,\varphi_1\cdot\psi+a_2\,\varphi_2\cdot\psi,$$

(аналогично имеет место линейность по второму сомножителю).

Заметим, что $\varphi\otimes\varphi = (\varphi\otimes\varphi+\varphi\otimes\varphi)/2 = \varphi\cdot\varphi$, а также что

$$a\,\varphi\otimes\psi+a\,\psi\otimes\varphi = 2a(\varphi\otimes\psi+\psi\otimes\varphi)/2 = a\,\varphi\cdot\psi+a\,\psi\cdot\varphi,$$

поэтому симметричная билинейная форма $B = B_{ij}e^i\otimes e^j$ запишется так: $B = B_{ij}e^i\cdot e^j$.

Замечание 6.4. Из сказанного выше вытекает, что с симметричным тензорным произведением можно работать как с обычными многочленами: вычисляя симметричное тензорное произведение ковекторов, равных линейным комбинациям других ковекторов, мы можем "раскрывать скобки и приводить подобные" будто мы имеем дело с многочленом (в силу симметричности произведения). Более того, как и в случае с обычным умножением, символ "$\cdot$" принято опускать, а также $\omega\cdot\omega$ записывать как ω^2.

В случае поверхностей, получаем следующий результат.

Следствие 6.5. *Пусть M — произвольная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $u^1,\dots,u^k$ — координаты на ней, $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, и $G = (g_{pq})$ — матрица первой фундаментальной формы поверхности M в координатах u^p. Тогда евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$ равна $\sum_i(dx^i)^2 = \delta_{ij}dx^idx^j$, а первая фундаментальная форма поверхности M в этих координатах u^p равна $g_{pq}du^pdu^q$.*

Покажем, как можно использовать тензорную запись для вычисления первой фундаментальной формы поверхности. По определению, чтобы получить метрику, индуцированную на k-мерной поверхности (M,ρ) в $\mathbb{R}^n$, мы должны ограничить евклидову метрику, заданную на касательном пространстве $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ к объемлющему пространству $\mathbb{R}^n$, на содержащееся в $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ касательное пространство T_PM к поверхности M. Наша задача — записать это ограничение в терминах билинейных форм $\delta_{ij}dx^idx^j$ и $g_{pq}du^pdu^q$. Собственно говоря, билинейная форма $g_{pq}du^pdu^q$ получается ограничением билинейной формы $\delta_{ij}dx^idx^j$ на T_PM: мы просто применяем последнюю форму только к векторам из T_PM. При этом, du^p — базисные ковекторы в T_P^*M, образующие двойственный базис к каноническому базису ρ_{u^p}. Дифференциалы dx^i — элементы пространства $T^*_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$. Тем самым, нам нужно ограничить dx^i на T_PM, т.е. получить элемент из T_P^*M, и затем выразить эти ограничения через базис du^p.

Проделаем соответствующие построение для произвольного пространства V и его конечномерного подпространства W, а затем применим результат к поверхностям. Итак, пусть в V задан произвольный ковектор $\xi\in V^*$, а в пространстве W выбран базис $e_1,\dots,e_k$. Для каждого вектора $w=w^pe_p$ имеем $\xi(w)=w^p\xi(e_p)$, поэтому если это ограничение обозначить той же буквой и разложить его по двойственному базису: $\xi=\xi_pe^p$, то получим

$$\xi(w)=\xi_pw^p=w^p\xi(e_p),$$

откуда, в силу произвольности выбора w^p, имеем $\xi_p=\xi(e_p)$ (проверьте). Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 6.6. *Пусть V — пространство, $\xi\in V^*$ — ковектор, $W\subset V$ — конечномерное подпространство, $e_1,\dots,e_k$ — базис в W, и $e^1,\dots,e^k$ — двойственный базис. Тогда ограничение ковектора ξ на W имеет вид $\xi(e_p)e^p$.*

Вернемся к поверхностям (будем использовать введенные выше обозначения). Из предложения 6.6 вытекает, что ограничение ковектора dx^i на T_PM равно $dx^i(\rho_{u^p})\,du^p=x^i_{u^p}\,du^p$. Если, как мы сделали выше, обозначить тем же символом dx^i его ограничение на T_PM, то в результате получим формулу:

$$dx^i=x^i_{u^p}\,du^p.$$

Еще раз подчеркнем, что, традиционно, символ dx^i использует в разных смыслах: и как ковектор в объемлющем пространстве, и как его ограничение на подпространство.

Вычислим теперь первую фундаментальную форму $g_{pq}du^pdu^q$ через евклидову метрику $\delta_{ij}dx^idx^j$. Воспользовавшись замечанием 6.4, будем проводить вычисления будто мы имеем дело с многочленами. Тогда

$$g_{pq}du^pdu^q=(\delta_{ij}dx^idx^j)|_{T_PM}=\delta_{ij}(x^i_{u^p}du^p)(x^j_{u^q}du^q)=(\delta_{ij}x^i_{u^p}x^j_{u^q})du^pdu^q,$$

откуда $g_{pq}=\delta_{ij}x^i_{u^p}x^j_{u^q}$, как и в формуле (5.1). Отметим, что традиционно символ ограничения $|_{T_PM}$ опускают и пишут просто $\delta_{ij}dx^idx^j=g_{pq}du^pdu^q$.

Приведем примеры.

Пример 6.7. (1) Зададим двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x,y,z) в виде графика функции $z=f(x,y)$, введем на этой поверхности координаты (x,y), и вычислим первую фундаментальную форму через тензорную запись. Для этого мы должны выразить дифференциалы dx, dy, dz функций $x=x$, $y=y$ и $z=f(x,y)$ через dx, dy и подставить в тензорную запись евклидовой метрики $dx^2+dy^2+dz^2$. Имеем $dx=dx$, $dy=dy$, $dz=f_xdx+f_ydy$, поэтому

$$dx^2+dy^2+dz^2=dx^2+dy^2+(f_xdx+f_ydy)^2=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dx^2=$$
$$=(1+f_x^2)dx^2+f_xf_ydxdy+f_xf_ydydx+(1+f_y^2)dx^2,$$

где последнее выражение мы написали для того, чтобы было видно, как получается матрица $G=(g_{ij})$: в силу симметричности первой фундаментальной формы, при вычислениях элементы g_{ij} и g_{ji} суммируются и приводятся к виду $2g_{ij}$.

(2) Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x,y,z) *поверхность Эннепера*:

$$(x,y,z)=\Big(u-\frac{u^3}{3}+u\,v^2,\ -v+\frac{v^3}{3}-u^2\,v,\ u^2-v^2\Big).$$

Тогда

$$dx=(1-u^2+v^2)du+2uv\,dv,\ dy=-2uv\,du+(-1+v^2-u^2)\,dv,\ dz=2u\,du-2v\,dv,$$

откуда

$$dx^2+dy^2+dz^2=\big[(1-u^2+v^2)du+2uv\,dv\big]^2+\big[-2uv\,du+(-1+v^2-u^2)\big]^2+[2u\,du-2v\,dv]^2=$$
$$=(1+u^2+v^2)^2(du^2+dv^2).$$

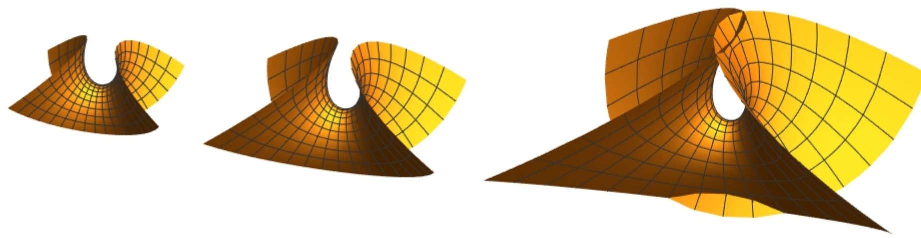

Рис. 6.1: Поверхность Эннепера.

Замечание 6.8. Традиционно, тензорная запись как евклидовой метрики, так и индуцированной метрики, обозначает ds^2 и говорится, что это — “бесконечно малая длина дуги” или “элемент дуги”. Поясним, что это означает на тензорном языке.

Рассмотрим в качестве поверхности M одномерную поверхность, т.е. кривую (M,γ). Тогда касательная плоскость T_PM — это касательная прямая, и ограничение евклидовой метрики, точнее, соответствующая квадратичная форма, — это квадрат евклидовой длины касательных векторов. Если t — координата на кривой, то канонический базис состоит из одного вектора γ_t — вектора скорости кривой, поэтому $ds^2(\gamma_t)=\|\gamma_t\|^2$ и, значит, $ds(\gamma_t)=\|\gamma_t\|$ — длина вектора скорости. По теореме 1.24, длина кривой γ равна $\int_I\|\dot\gamma\|\,dt$, где I — интервал изменения параметра t. Иными словами, длина кривой равна $\int_I ds(\gamma_t)$, т.е. “бесконечной сумме длин бесконечно малых дуг”, составляющих кривую, или, если такие бесконечно малые дуги представлять “элементами” кривой, то — бесконечной сумме этих элементов.

6.2 Векторные поля и ковариантные дифференцирования

В лекциях, посвященных кривым, мы видели на примере формул Френе, что для геометрического описания кривых оказывается полезным дифференцировать векторы, гладко зависящие от точки кривой. Такие семейства векторов называются векторными полями. Продолжим изучение дифференцирований векторных полей в более общем случае поверхностей.

Начнем же мы с дифференцирования гладких функций. Пусть (M,ρ) — поверхность в $\mathbb{R}^n$, и $f\colon M\to\mathbb{R}$ — гладкое отображение, называемое *функцией на* M. Отметим, что функции можно поточечно, т.е. в каждой точке, складывать, умножать на числа и перемножать: в результате этих операций вновь получается функция. Таким образом, семейство $\mathcal{F}(M)$ всех функций на поверхности M образует векторное пространство, на котором задана еще и билинейная операция умножения. Такая структура называется *алгеброй* на полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Отметим, что умножение функций на числа можно реализовать как умножение функций на постоянные функции, поэтому вместо алгебры можно пользоваться другим термином, а именно, рассматривать $\mathcal{F}(M)$ как *кольцо*, где имеются лишь две операции: поточечные сложения и умножения функций.

Выберем произвольный касательный вектор $\xi\in T_PM$, параметрическую кривую γ на M, задающую ξ, т.е. $\gamma(0)=P$ и $(\rho\circ\gamma)'(0)=\xi$, и назовем *производной функции f вдоль кривой γ в точке P* число $\partial_\gamma f:=(f\circ\gamma)'(0)$. Пусть δ — другая параметрическая кривая на поверхности M, задающая ξ. Введем на поверхности M координаты $u^1,\dots,u^k$, и пусть $(\xi^1,\dots,\xi^k)$ — координаты вектора ξ в каноническом базисе ρ_{u^i}, а $\gamma(t)=\big(\gamma^1(t),\dots,\gamma^k(t)\big)$ и $\delta(t)=\big(\delta^1(t),\dots,\delta^k(t)\big)$ — координатные записи кривых γ и δ в координатах u^i. Тогда

$$\partial_\gamma f=f_{u^i}\dot\gamma^i(0)=f_{u^i}\xi^i=f_{u^i}\dot\delta^i(0)=\partial_\delta f.$$

Таким образом, мы видим, что $\partial_\gamma f$ не зависит от выбора кривой, задающей ξ, поэтому производную $\partial_\gamma f$ будем обозначать $\partial_\xi f$ и называть *производной функции f вдоль вектора ξ*. Отметим, что дифференцирование $\partial_\xi\colon\mathcal{F}(M)\to\mathbb{R}$ — линейное отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница: для любых $f,g\in\mathcal{F}(M)$ выполняется $\partial_\xi(fg)=\partial_\xi f\cdot g(P)+f(P)\cdot\partial_\xi(f)$. Также при фиксированном f отображение $\xi\mapsto\partial_\xi f$ — линейное отображение из T_PM в $\mathbb{R}$, совпадающее с дифференциалом функции f.

Далее, каждое (гладкое) отображение $X\colon M\to\mathbb{R}^n$ называется *векторным полем вдоль* M. Векторное поле называется *невырожденным*, если оно всюду отлично от нуля.

Отметим, что, как и функции, поля можно поточечно складывать и умножать как на числа, так и на гладкие функции, определенные на M: в результате этих операций вновь получается поле. Таким образом, векторные поля образуют линейное пространство, для которого еще и определено умножение на элементы кольца функций. Снова можно считать, что умножение на числа реализовано как умножение на постоянные функции, т.е. ограничиться лишь операциями сложения полей и умножением на функции. В алгебре такой объект называется *модулем* над кольцом функций. Модуль векторных полей на X обозначим $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Если $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ — векторные поля вдоль M, и $a, b \in \mathbb{R}$, то поле $aX + bY \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ называется *линейной комбинацией* X и Y; если же $f, g \in \mathcal{F}(M)$ — гладкие функции на M, то $fX + gY \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ называется *функциональной линейной комбинацией* этих полей.

Пусть $\xi \in T_P M$ — касательный вектор, и $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ — векторное поле вдоль M. Пусть γ — параметрическая кривая на M, задающая ξ, т.е. $\gamma(0) = P$ и $(\rho\circ\gamma)'(0) = \xi$. *Ограничением поля X на кривую* γ называется гладкое отображение $X \circ \gamma$. *Производной $\partial_\gamma X$ поля X вдоль γ в точке P* назовем вектор $(X\circ\gamma)'(0) \in T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$. Пусть δ — другая параметрическая кривая, задающая ξ. Введем на M произвольные координаты $u^1, \ldots, u^k$, и пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k)$ — координаты вектора ξ по отношению к u^i, а $\gamma(t) = \big(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^k(t)\big)$ и $\delta(t) = \big(\delta^1(t), \ldots, \delta^k(t)\big)$ — координатные записи этих кривых также в координатах u^i. Тогда

$$\partial_\gamma X = X_{u^i}\dot\gamma^i(0) = X_{u^i}\xi^i = X_{u^i}\dot\delta^i(0) = \partial_\delta X.$$

Таким образом, мы видим, что $\partial_\gamma X$ не зависит от выбора кривой, задающей ξ, поэтому производную $\partial_\gamma X$ будем обозначать $\partial_\xi X$ и называть *производной поля X вдоль вектора ξ в точке P*. Из явного вида производной мгновенно вытекает, что ∂_ξ сохраняет линейные комбинации векторных полей, т.е. является линейным отображение $\partial_\xi \colon \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathbb{R}^n$, а если $f \in \mathcal{F}(M)$ — функция на M, и $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ — векторное поле, то $\partial_\xi(fX) = (\partial_\xi f)X + f(\partial_\xi X)$ (правило Лейбница для произведения fX функции f и векторного поля X). Также при фиксированном X отображение $\xi \mapsto \partial_\xi X$ линейно отображает $T_P M$ в $\mathbb{R}^n$ и совпадает с дифференциалом отображения X.

Если $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ — векторные поля вдоль M, то для них определена функция $\langle X, Y\rangle$, равная в каждой точке $P \in M$ скалярному произведению векторов $\big\langle X(P), Y(P)\big\rangle$. Из явной формулы для скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ и дифференцирования мгновенно вытекает правило Лейбница: $\partial_\xi\langle X, Y\rangle = \langle\partial_\xi X, Y\rangle + \langle X, \partial_\xi Y\rangle$.

Для каждой точки $P \in M$ будем обозначать $N_P M$ ортогональное дополнение к $T_P M$ и называть *нормальным пространством к M в точке P*. Так как $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n = T_P M \oplus N_P M$, определены ортогональные проекции пространства $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ на слагаемые $T_P M$ и $N_P M$. Для произвольного вектора $v \in T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ обозначим $v^T \in T_P M$ и $v^\perp \in N_P M$ образы этих ортогональных проекций, тогда $v = v^T + v^\perp$. В частности, для любого векторного поля X вдоль поверхности M и любого касательного вектора $\xi \in T_P M$ имеем $\partial_\xi X = (\partial_\xi X)^T + (\partial_\xi X)^\perp$.

Если в каждой точке $P \in M$ выполняется $X(P) \in T_P M$, то поле $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ называется *касательным*, а если для каждой точки $P \in M$ выполняется $X(P) \in N_P M$, то поле $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ называется *нормальным*. Отметим, что семейства всех касательных (всех нормальных) векторных полей замкнуты относительно линейных комбинаций и умножений на функции, т.е. эти семейства образуют подмодули в модуле $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ всех векторных полей. Модуль касательных полей на M обозначим $\mathfrak{X}(M)$, а модуль нормальных будем обозначать $\mathcal{N}(M)$.

Важное наблюдение: Если X — касательное или нормальное векторное поле, то вектор $\partial_\xi X$ не обязан быть касательным или нормальным (приведите примеры). *Ковариантной производной касательного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ вдоль $\xi \in T_P M$* назовем касательное поле $(\partial_\xi X)^T \in \mathfrak{X}(M)$ и обозначим его $\nabla_\xi X$. *Ковариантной производной нормального поля $X \in \mathcal{N}(M)$ вдоль $\xi \in T_P M$* назовем нормальное поле $(\partial_\xi X)^\perp \in \mathcal{N}(M)$ и обозначим его также $\nabla_\xi X$. Определим еще *ковариантную производную $\nabla_\xi f$ функции f*, положив ее равной производной $\partial_\xi f$.

Из свойств производной ∂_ξ и линейности ортогональных проекций мгновенно получаем, что ковариантная производная ∇ также является линейным отображением, линейна по ξ и удовлетворяет правилу Лейбница при дифференцировании произведения поля на функцию. Что касается правила Лейбница для скалярного произведения полей, то его доказательство чуть менее очевидно, поэтому мы это свойство докажем.

Предложение 6.9. *Пусть $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ — одновременно или касательные, или нормальные векторные поля вдоль поверхности M, определенные в окрестности точки $P \in M$, и $\xi \in T_P M$. Тогда ковариантная производная, примененная к скалярному произведению $\langle X, Y\rangle$ этих полей, удовлетворяет правилу Лейбница*:

$$\nabla_\xi\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_\xi X, Y\rangle + \langle X, \nabla_\xi Y\rangle.$$

Доказательство. Пусть сначала X и Y — касательные векторные поля, тогда

$$\langle\partial_\xi X,\, Y\rangle = \big\langle(\partial_\xi X)^T + (\partial_\xi X)^\perp,\, Y\big\rangle = \big\langle(\partial_\xi X)^T,\, Y\big\rangle = \langle\nabla_\xi X,\, Y\rangle.$$

Аналогично, $\langle X,\, \partial_\xi Y\rangle = \langle X,\, \nabla_\xi Y\rangle$. Осталось воспользоваться правилом Лейбница для ∂_ξ:

$$\nabla_\xi\langle X, Y\rangle = \partial_\xi\langle X, Y\rangle = \langle\partial_\xi X, Y\rangle + \langle X, \partial_\xi Y\rangle = \langle\nabla_\xi X,\, Y\rangle + \langle X,\, \nabla_\xi Y\rangle.$$

Доказательство для нормальных полей — такое же. □

Замечание 6.10. Все введенные производные вдоль касательного вектора $\xi \in T_P M$ зависят только от значений дифференцируемых полей в (любой) окрестности точки P. Напомним, что, в силу замечания 4.24, на множестве M задана естественная топология. Векторное поле, определенное не на всем M, а только на окрестности U^P точки P, называется *локальным векторным полем.* Для дальнейшего нам понадобится следующее техническое утверждение.

Предложение 6.11. *Пусть P — точка k-мерной поверхности (M, ρ) в $\mathbb{R}^n$ и $\eta \in T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Тогда*

(1) *если $\eta \in T_P M$, то существует касательное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $X(P) = \eta$;*

(2) *если $\eta \in N_P M$, то существует окрестность $U^P \subset M$ и в ней локальное нормальное векторное поле $X \in \mathcal{N}(U^P)$ такое, что $X(P) = \eta$;*

(3) *если вектор η отличен от нуля, то поле X можно выбрать нигде не нулевым, т.е. невырожденным.*

Доказательство. Если $\eta = 0$, то продолжим η до нулевого векторного поля X, которое является одновременно и касательным, и нормальным.

Пусть теперь $\eta \neq 0$. Будем сразу строить невырожденное поле X. В случае $\eta \in T_P M$ введем на M произвольные координаты $(u^1, \ldots, u^k)$, разложим η по каноническому базису ρ_{u^i} пространства $T_P M$, получим $\eta = \eta^i \rho_{u^i}$, где, в силу условия $\eta \neq 0$, не все числа η^i равны нулю. Продолжим это разложение до такого же во все точки поверхности M. Полученное векторное поле будет невырожденным касательным.

В случае $\eta \in N_P M$, пусть $\varphi_\alpha \colon M \to \Omega_\alpha$ — параметризация поверхности M и $P_\alpha = \varphi_\alpha(P)$. Воспользуемся теоремой 4.16 и представим в некоторой окрестности $U^{P_\alpha} \subset \Omega_\alpha$ точки P_α параметрическую поверхность $\rho \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon U^{P_\alpha} \to \mathbb{R}^n$ в неявном виде, т.е. как решение системы уравнений $\{F^i(x^1, \ldots, x^n) = 0\}_{i=1}^{n-k}$. Положим $U^P = \varphi_\alpha^{-1}(U^{P_\alpha})$. Тогда для каждой точке $Q \in U^P$ векторы $(F^i_{x^1}, \ldots, F^i_{x^n})|_{\rho(Q)}$ линейно независимы и ортогональны $T_Q M$, т.е. образуют базис нормального пространства $N_Q M$. Теперь поступим аналогично предыдущему решению: разложим η по этому базису в точке $\rho(P)$ и продолжим тем же образом разложение на все $N_Q M$, $Q \in U^P$. Доказательство закончено. $\square$

Упражнения к главе 6

Упражнение 6.1. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис трехмерного векторного пространства V, а e^1, e^2, e^3 – двойственный базис.

(1) Вычислите значение тензора $T = e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes e^2$ на паре $(e^1 + e^2 + e^3,\ e_1 + 5e_2 + 4e_3)$.

(2) Вычислите значение тензора $T = e^2 \otimes e^1 + (e^1 + 2e^2 + 3e^3) \cdot e^2$ на паре $(e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + 5e_2 + 4e_3)$.

Упражнение 6.2. Используя тензорную запись, вычислите первую фундаментальную форму катеноида, заданного параметрически так:

$$\rho(z,\varphi) = \Big(a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos\varphi,\ a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin\varphi,\ z\Big).$$

Упражнение 6.3. Пусть M — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi,\theta) = \big((a + b\cos\theta)\cos\varphi,\ (a + b\cos\theta)\sin\varphi,\ b\sin\theta\big),\quad 0 < b < a,\quad (\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим векторные поля X и Y вдоль тора M: поле X — касательное, имеющее в координатах φ, θ координаты $(1, 0)$, а поле Y составлено из единичных внешних нормалей. Найдите ковариантные производные этих полей во всех точках тора и вдоль всех касательных векторов.

Упражнение 6.4. Пусть $\mathrm{M}(n)$ — векторное пространство всех матриц размера $n \times n$. Для $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n)$ обозначим $\operatorname{tr} A$ ***след матрицы*** A, т.е. $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(1) Для $A, B \in M(n)$ покажите, что $\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A)$.

(2) Записывая последовательные строки матрицы в одну строку, получим изоморфизм между $\mathrm{M}(n)$ и $\mathbb{R}^{n^2}$. Убедитесь, что стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n^2}$ в матричном виде запишется так: для $A, B \in \mathrm{M}(n)$ имеем
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\,B^t) = \operatorname{tr}(A^t\,B) = \operatorname{tr}(B^t\,A) = \operatorname{tr}(B\,A^t).$$

(3) Пусть $C \in \mathrm{O}(n)$ — ортогональная матрица, и $A, B \in \mathrm{M}(n)$. Покажите, что $X \mapsto C\,X$ является ортогональным преобразованием в $\mathrm{M}(n)$, т.е. для любых $A, B \in \mathrm{M}(n)$ выполняется $\langle C\,A,\ C\,B\rangle = \langle A, B\rangle$.

(4) Покажите, что $\mathrm{O}(n)$ лежит в сфере с центром в 0 и радиусом $\sqrt{n}$.

Упражнение 6.5. Пусть $M = \mathrm{O}(n)$ — неявная поверхность в $\mathbb{R}^{n^2} = \mathrm{M}(n)$, состоящая из всех ортогональных матриц размера $n \times n$.

(1) Покажите, что касательное пространство в единице $E \in M$ совпадает с подпространством всех кососимметричных матриц.

(2) Покажите, что нормальное пространство в единице $E \in M$ совпадает с подпространством всех симметричных матриц.

(3) Покажите, что касательное пространство в $C \in M$ совпадает с $C(T_E M)$.

(4) Покажите, что нормальное пространство в $C \in M$ совпадает с $C(N_E M)$.

(5) Пусть $A \in T_E M(n)$ — произвольная матрица, и X — векторное поле на M, заданное так: $X(C) = C\,A$, $C \in M$. Вычислите $\partial_\xi X$, где $\xi \in T_C M$.

(6) Пусть $A \in T_E M$ — произвольная кососимметричная матрица, и $X(C) = C\,A$, $C \in M$, — векторное поле на M. Убедитесь, что X — касательное поле к M и найдите $\nabla_\xi X$ при каждом $\xi \in T_C M$.

(7) Пусть $B \in N_E M$ — произвольная симметричная матрица, и $X(C) = C\,B$, $C \in M$, — векторное поле на M. Убедитесь, что X — нормальное поле к M и найдите $\nabla_\xi X$ при каждом $\xi \in T_C M$.