Лекция 5

Дифференциальные свойства поверхностей

План. Отображение поверхностей, его координатная запись, непрерывное и гладкое отображения, кривые на поверхности, разница между поверхностью и промежутком или областью, запись кривой во внешних и внутренних координатах, касательный вектор к поверхности, независимость касательного вектора от параметризации, его внешние и внутренние координаты, касательное пространство, канонический базис касательного пространства, изменение внутренних координат касательного вектора при замене параметризации поверхности, касательное пространство к области, касательное пространство к поверхности как подпространство касательного пространства к объемлющему пространству, дифференциал гладкого отображения поверхностей, его координатная запись, линейность дифференциала, изменение координатного представления дифференциала при замене параметризаций поверхностей, дифференциал гладкой функции на поверхности как ковектор, отличие отображения в поверхность (или из нее) и в промежуток или область (или из них), дифференциалы координатных функций как двойственный базис кокасательного пространства, запись дифференциала функции — разложение по двойственному базису, первая фундаментальная форма поверхности или индуцированная на поверхности метрика, примеры вычисления, вычисления с помощью первой фундаментальной формы (длины кривых и углы между кривыми), изометричные отображение поверхностей, пример.

5.1 Поверхности и отображения

Пусть M и N — поверхности размерностей r и s в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Рассмотрим произвольное отображение $F\colon M\to N$ множества M во множество N. Параметризуем M и N, выбрав некоторые биекции $\varphi_\alpha\colon M\to\Omega_\alpha\subset\mathbb{R}^r$ и $\psi_\beta\colon N\to\Theta_\beta\subset\mathbb{R}^s$. Тогда *координатной записью отображения* F называется отображение $\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\Omega_\alpha\to\Theta_\beta$. На другом языке, то же самое можно сказать так. Введем на M и N координаты $u=(u^1,\dots,u^r)$ и $v=(v^1,\dots,v^s)$ соответственно и запишем F в этих координатах, тогда *координатная запись* F представляет собой набор из s *координатных функций* $v^i=v^i(u^1,\dots,u^r)$. Такое координатное представления будем записывать так: $F:\{v^i=v^i(u^1,\dots,u^r)\}_{i=1}^s$ или $F:v(u)$. Отображение $F\colon M\to N$ назовем *отображением поверхностей*, если координатная запись F — гладкое отображение (все координатные функции — гладкие). Так как все замены координат — регулярные, то гладкость координатной записи не зависит от выбора параметризаций.

Гладкое отображение F из области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ в область $\Theta\subset\mathbb{R}^n$ называется *регулярным*, если в каждой точке $P\in\Omega$ ранг матрицы Якоби отображения F максимальный, т.е. равен $\max\{m,n\}$. Отображение поверхностей $F\colon M\to N$ называется *регулярным*, если некоторая а, значит, и любая координатная запись этого отображения — регулярна. Взаимно однозначное отображение поверхностей $F\colon M\to N$ такое, что F и F^{-1} регулярны, называется *диффеоморфизмом.*

Пусть M — поверхность размерности s, а X — топологическое пространство. Рассмотрим отображение $F\colon X\to M$ или $F\colon M\to X$. Так как на M, в соответствии с замечанием 4.24, определена естественная топология, можно говорить про непрерывность отображения F, не прибегая ни к какой параметризации F. Тем не менее, как и в случае отображений в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, непрерывность бывает проще проверить, введя в рассмотрение координатную запись. А именно, параметризуем поверхность M с помощью $\varphi_\alpha\colon M\to\Omega_\alpha$, тогда отображения $\varphi_\alpha\circ F$ в первом случае и $F\circ\varphi_\alpha^{-1}$ во втором будем называть *координатными записями отображения* F. Отметим, что, как и в случае с $\mathbb{R}^n$, отображение F — *непрерывно*, если и только если непрерывна некоторая (а, значит, и любая) его координатная запись. Если $u^1,\dots,u^s$ — координаты на M, заданные параметризацией φ_α, то, в случае отображения $\varphi_\alpha\circ F$, координатная запись представляет собой s функций $u^i\colon X\to\mathbb{R}$, а непрерывность F равносильна непрерывности всех этих функций. Если в качестве X взять промежуток или область, то можно говорить не только о непрерывности, но и о *гладкости, регулярности, диффеоморфности отображения.*

Замечание 5.1. Разница между поверхностью и промежутком или областью состоит лишь в том, что на поверхности мы не фиксируем какие-то заранее заданные координаты, а на промежутке или области координаты считаем фиксированными, а именно, являющимися декартовыми координатами пространства, в котором лежит промежуток или область. Также для промежутка или области отсутствует явно заданное погружение в объемлющее пространство, которое, тем не менее, можно определить, считая его тождественным вложением. В этом смысле, дальнейшие построения, например, определение касательного вектора, касательного пространства или дифференциала отображения поверхностей (см. ниже), по сути остаются теми же при замене поверхностей на промежуток или область. Поэтому мы не будем каждый раз отдельно рассматривать подобные модификации.

Параметрической кривой на поверхности M называется произвольное гладкое отображение из промежутка I в поверхность M. Если перейти к классу эквивалентности параметрических кривых, то получим определение (*непараметрической*) *кривой на поверхности.*

Функцией на поверхности M называется каждое гладкое отображение $F\colon M \to \mathbb{R}$.

Замечание 5.2. В дальнейшем, все отображения поверхностей, областей и промежутков, если не оговорено противное, будут предполагаться гладкими, а слово "гладкий", для краткости, мы будем опускать.

5.1.1 Касательные векторы и касательное пространство

Пусть $P \in M$ — точка на k-мерной поверхности (M,ρ), и γ — кривая на M, проходящая через точку $P = \gamma(0)$. Кривую γ можно записывать двояко: или *во внешних координатах*, т.е. как отображение $\rho\circ\gamma$ в объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$, или *во внутренних координатах*, задав параметризацию $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ и рассмотрев отображение $\varphi_\alpha\circ\gamma$. *Касательным вектором к поверхности* M *в точке* P называется вектор скорости $\xi = (\rho\circ\gamma)'(t_0)$ для каждой такой кривой γ. Отметим, что этот вектор не зависит от выбора параметризации поверхности. Действительно, кривая — это отображение сразу в M (минующее выбор координат), а отображение ρ определено на M. С другой стороны, *записью касательного вектора* ξ *в координатах поверхности* M, заданных параметризацией φ_α, называется вектор скорости $(\varphi_\alpha\circ\gamma)'(t_0)$. Этот вектор уже зависит от выбора параметризации. Множество всех касательных векторов в точке P называется *касательным пространством* в этой точке и обозначается T_PM.

Предложение 5.3. *Касательное пространство* T_PM *для* k*-мерной поверхности* (M,ρ) *является линейным подпространством размерности* k *в объемлющем пространстве* $\mathbb{R}^n$*.*

Доказательство. Введем на M координаты $u = (u^1,\dots,u^k)$ и пусть $\rho : \{x^i = x^i(u^1,\dots,u^k)\}_{i=1}^n$ — координатная запись погружения ρ. Так как мы рассматриваем только регулярные поверхности, матрица Якоби $J = (x^i_{u^j})$ в каждой точке поверхности имеет максимальный ранг, равный k.

Пусть в этих координатах $P = (P^1,\dots,P^k)$. Рассмотрим проходящие через P координатные кривые $\gamma_j(t) = (P^1,\dots,P^j+t,\dots,P^k)$, тогда соответствующие касательные векторы $(\rho\circ\gamma_j)'(0)$ будут частными производными $\rho_{u^j} := (x^1_{u^j},\dots,x^n_{u^j})$, вычисленными в точке P. Эти векторы являются столбцами матрицы $J(P)$, поэтому они линейно независимы (так как ранг $J(P)$ равен k).

Пусть теперь ξ — произвольный касательный вектор. По определению, на поверхности M существует кривая γ, проходящая через $P = \gamma(t_0)$, и $\xi = (\rho\circ\gamma)'(t_0)$. Кривая γ записывается в координатах u^j в виде $\big(u^1(t),\dots,u^k(t)\big)$, поэтому $\rho\circ\gamma$ задается n гладкими функциями $x^i = x^i\big(u^1(t),\dots,u^k(t)\big)$. По теореме о дифференцировании сложной функции, имеем

$$\xi = (\rho\circ\gamma)' = (x^1_{u^j}\,\dot u^j,\dots,x^n_{u^j}\,\dot u^j) = \rho_{u^j}\,\dot u^j$$

(мы используем соглашение, в соответствии с которым по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Тем самым, мы разложили вектор ξ по векторам ρ_{u^j}.

Кроме того, каждая линейная комбинация $\rho_{u^j}\,a^j$ с вещественными коэффициентами является касательным вектором, порожденным кривой $P + a\,t$, где $a = (a^1,\dots,a^k)$. Таким образом, T_PM состоит из всевозможных линейных комбинаций линейно независимых k векторов $\rho_{u^j}(P)$, поэтому T_PM — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности k, а $\rho_{u^j}(P)$ — базис этого пространства □

Определение 5.4. Базис $\rho_{u^j}(P)$ касательного пространства T_PM называется *каноническим базисом, соответствующим координатам* u^j.

Теорема о дифференцировании сложной функции показывает, как меняется канонический базис при изменении координат.

Предложение 5.5. *При переходе от координат u^j к координатам $u^{j'}$ векторы канонического базиса меняются так: $\rho_{u^{j'}} = \rho_{u^j}\, u^j_{u^{j'}}$, $\rho_{u^j} = \rho_{u^{j'}}\, u^{j'}_{u^j}$. При этом, касательный вектор $\xi^j \rho_{u^j}$, имевший координаты $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k)$, в новом базисе запишется как $\xi^j u^{j'}_{u^j} \rho_{u^{j'}}$, поэтому его координаты $\xi' = (\xi^{1'}, \ldots, \xi^{k'})$ в базисе $\rho_{u^{j'}}$ будут равны $(u^{1'}_{u^j}\xi^j, \ldots, u^{k'}_{u^j}\xi^j)$, или, более компактно, $\xi' = u'_u\, \xi$, где u'_u — матрица Якоби замены координат, а ξ' и ξ обозначают здесь также соответствующие вектор-столбцы.*

Замечание 5.6. Обратите внимание, что штрих $'$ играет в наших записях двоякую роль: и как символ дифференцирования, и как указатель на замену координат. Пожалуйста, не смешивайте эти функции штриха.

Замечание 5.7. В соответствии с замечанием 5.1, касательное пространство естественно определяется и в точках объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$, и в точках вообще любой области. Это определение можно свести к уже данному для поверхностей, если положить $M = \mathbb{R}^n$, параметризовать M тождественным отображением $\mathbb{R}^n$ на себя, и погрузить M в объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$ тем же тождественным отображением. Более прямой путь — определить касательный вектор в точке $Q \in \mathbb{R}^n$ как вектор скорости проходящей через Q гладкой кривой, вычисленный в точке Q. Пусть, как и выше, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, тогда *векторы канонического базиса* — это $x_{x^i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте. Таким образом, во всех касательных пространствах $T_Q\mathbb{R}^n$ канонический базис один и тот же и совпадает со стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Аналогичным образом определяется касательное пространство и для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если положить $M = \Omega$, параметризовать Ω тождественным отображением из той же области Ω, и погрузить Ω в $\mathbb{R}^n$ отображением включения (тождественным на Ω); или же просто рассмотреть векторы скоростей кривых в Ω. Канонический базис также одинаков во всех точках и совпадает со стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 5.7 позволяет уточнить предложение 5.3.

Предложение 5.8. *Касательное пространство T_PM для k-мерной поверхности (M, ρ) в $\mathbb{R}^n$ является линейным подпространством размерности k в касательном пространстве $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$ к точке $\rho(P)$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$.*

5.1.2 Дифференциал отображения поверхностей

Пусть (M, ρ) и (N, σ) — соответственно r-мерная и s-мерная поверхности, $F\colon M \to N$ — отображение поверхностей, $P \in M$ и $Q = F(P)$. Рассмотрим произвольный касательный вектор $\xi \in T_PM$, и пусть γ — кривая на поверхности M, задающая ξ, т.е. $\gamma(t_0) = P$ и $(\rho \circ \gamma)'(t_0) = \xi$. Так как и координатная запись кривой, и координатная запись отображения поверхностей задаются гладкими функциями, $F \circ \gamma$ — гладкое отображение, и, значит, является кривой на поверхности N, проходящей через $Q = F\big(\gamma(t_0)\big)$. Обозначим η порожденный этой кривой касательный вектор в точке Q, т.е. $\eta = (\sigma \circ F \circ \gamma)'(t_0)$. *Дифференциалом* dF отображения F называется сопоставление каждому касательному вектору ξ соответствующего касательного вектора η. Ограничение дифференциала dF на касательное пространство T_PM обозначается $dF|_P$.

Предложение 5.9. *Если на поверхности (M, ρ) заданы координаты $u = (u^1, \ldots, u^r)$, а на поверхности (N, σ) — координаты $v = (v^1, \ldots, v^s)$, то в соответствующих канонических базисах отображение $dF|_P$ является линейным, и его матрица в этих базисах — матрица Якоби $v_u = (v^j_{u^i})$, вычисленная в точке $(P^1, \ldots, P^r)$, являющейся координатами точки P. В частности, так как и касательное пространство, и дифференциал не зависят от выбора координат, дифференциал является линейным отображением касательных пространств.*

Доказательство. Выберем произвольный касательный вектор $\xi \in T_PM$, и пусть γ — задающая его кривая. Запишем всё во введенных координатах: $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^r)$, $\eta = dF(\xi) = (\eta^1, \ldots, \eta^s)$, $\gamma(t) = \big(u^1(t), \ldots, u^r(t)\big)$, $F : \{v^j = v^j(u^1, \ldots, u^r)\}_{j=1}^s$. Тогда

$$\eta = dF(\xi) = (\sigma \circ F \circ \gamma)' = \sigma_{v^j} v^j_{u^i} \dot{u}^i = \sigma_{v^j} v^j_{u^i} \xi^i,$$

откуда $\eta^j = v^j_{u^i}\xi^i$ или, в матричном виде, $\eta = v_u\, \xi$, что и доказывает как линейность отображения $dF|_P$ в выбранных координатах, так и равенство его координатного представления матрице Якоби v_u. □

Так как дифференциал — линейное отображение касательных пространств, то, при замене базиса, матрица Якоби, задающая этот дифференциал, должна меняться по известному из линейной алгебры закону. Тот же самый закон изменения непосредственно выводится и из теоремы о дифференцировании сложной функции.

Предложение 5.10. *Пусть, как и выше, $F\colon M\to N$ — отображение поверхностей, а v_u — матрица Якоби координатной записи дифференциала отображения F, где $u=(u^1,\dots,u^r)$ и $v=(v^1,\dots,v^s)$ — координаты на M и N соответственно. Рассмотрим на этих поверхностях новые координаты $u'=(u^{1'},\dots,u^{r'})$ и $v'=(v^{1'},\dots,v^{r'})$ соответственно. Тогда $v'_{u'}=v'_v\,v_u\,u_{u'}=v'_v\,v_u\,(u'_u)^{-1}$, или, в координатных функциях, $v^{i'}_{u^{j'}}=v^{i'}_{v^i}\,v^i_{u^j}\,u^j_{u^{j'}}$. Иными словами, координаты матрицы Якоби дифференциала $dF|_P$ ведут себя так, как и должны вести координаты линейного оператора $dF|_P\colon T_PM\to T_PN$ при замене базисов ρ_{u^i} и σ_{v^j} на соответственно базисы $\rho_{u^{i'}}$ и $\sigma_{v^{j'}}$, а именно, умножаются на прямую и обратную матрицы замены базисов.*

Замечание 5.11. Еще раз отметим, что приведенные выше формулы пишутся автоматически, если следить за “высотой” индексов. При этом, индексы, входящие в координаты, по которым мы дифференцируем, считаются нижними, а у координат, которые мы дифференцируем — верхними. Например, в выражении $v^i_{u^j}$ индекс i — верхний, а индекс j — нижний. Также написанные формулы — не что иное, как реализация “цепного правила” дифференцирования сложной функции.

В соответствии с замечанием 5.1, аналогичное утверждение имеет место и для гладкого отображения поверхности M в вещественную прямую. Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 5.12. *Пусть $F\colon M\to\mathbb{R}$ — некоторая функция, тогда для каждой точки $P\in M$ дифференциал $dF|_P\colon T_PM\to T_{F(P)}\mathbb{R}=\mathbb{R}$ является линейным функционалом на T_PM, т.е. элементом двойственного пространства. Если на M заданы координаты $u=(u^1,\dots,u^r)$, а на $\mathbb{R}$ — стандартная (декартова) координата x, то координатная запись дифференциала имеет вид $F_u:=(x_{u^1},\dots,x_{u^r})$.*

Определение 5.13. Двойственное пространство к касательному пространству T_PM обозначается T^*_PM и называется *кокасательным пространством.*

Таким образом, дифференциалы функций, заданных на поверхности и рассматриваемые в фиксированной точке, — это элементы кокасательного пространства.

Замечание 5.14. Когда мы рассматриваем отображение из поверхности в прямую, промежуток или область, или из них, координаты могут меняться только на поверхности, поэтому возникают уже не линейные операторы, а объекты другого типа. Например, если $F\colon M\to\mathbb{R}$ — функция на поверхности, то нас интересует изменение дифференциала dF только при заменах координат на поверхности. Пусть мы переходим от координат $u=(u^1,\dots,u^r)$ к координатам $u'=(u^{1'},\dots,u^{r'})$, а стандартная (декартова) координата $\mathbb{R}$ обозначена x. Тогда, в соответствии с предложениями 5.12 и 5.10, координатная запись дифференциала $F_u=(x_{u^1},\dots,x_{u^r})$ заменится на $F_{u'}=(x_{u^{1'}},\dots,x_{u^{r'}})=F_u\,u_{u'}$, а это, как и было естественно ожидать, закон изменение координат ковекторов.

Рассмотрим частный случай функций на поверхности (M,ρ), являющихся координатными функциями некоторой параметризации. Пусть $u=(u^1,\dots,u^k)$ — координаты на поверхности M, и в качестве $F\colon M\to\mathbb{R}$ возьмем функцию $u^i\colon M\to\mathbb{R}$. Выясним, как действует дифференциал du^i на касательные векторы, записанные в каноническом базисе ρ_{u^j}. Для этого зададим базисный вектор ρ_{u^j} координатной кривой $\gamma(t)=(P^1,\dots,P^j+t,\dots,P^k)$, тогда $u^i\circ\gamma$ или равно P^i при $i\ne j$, или, иначе, P^j+t, поэтому $du^i(\rho_{u^j})=(u^i\circ\gamma)'(t_0)=\delta^i_j$.

Тем самым, мы доказали следующий результат.

Предложение 5.15. *Дифференциалы du^i координатных функций поверхности M образуют базис кокасательного пространства T^*_PM, двойственный к каноническому базису ρ_{u^i}. Дифференциалы dx^i координатных функций x^i объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$ образуют базис кокасательного пространства $T^*_Q\mathbb{R}^n$, двойственный к каноническому базису x_{x^i}.*

Рассмотрим теперь произвольную функцию $F\colon M\to\mathbb{R}$. По следствию 5.12, ее дифференциал, вычисленный в точке $P\in M$, является элементом кокасательного пространства T^*_PM, поэтому, в силу предложения 5.15, dF раскладывается по базису du^j этого пространства: $dF=a_j\,du^j$. С другой стороны, $dF(\rho_{u^i})=F_{u^i}=(a_j\,du^j)(\rho_{u^i})=a_i$, т.е. $dF=F_{u^i}du^i$. Тем самым, мы приходим к следующему выводу.

Предложение 5.16. *Известная из матанализа формула $dF=F_{u^j}du^j$ есть ни что иное, как разложение дифференциала — элемента кокасательного пространства — по базису этого пространства. В частности, если $\rho:\bigl\{x^i(u^1,\dots,u^r)\bigr\}_{i=1}^n$ — координатное представление погружения ρ поверхности M, то $dx^i=x^i_{u^j}du^j$ — разложение по базису du^j дифференциалов координатных функций этого погружения.*

5.2 Первая фундаментальная форма поверхности

Как мы уже говорили, в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется стандартное евклидово скалярное произведение: если $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ — элементы $\mathbb{R}^n$, то их скалярное произведение — это

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_i \xi^i \eta^i = \delta_{ij} \xi^i \eta^j$$

(правая часть верхнего равенства — тензорная запись скалярного произведения, допускающая не использование знака суммирования). Это скалярное произведение порождает скалярное произведение в каждом касательном пространстве $T_P\mathbb{R}^n$. Напомним, что, в силу замечания 5.7, канонические базисы всех касательных пространств одинаковы и совпадают со стандартным базисом $\mathbb{R}^n$, поэтому рассмотренные выше векторы ξ и η можно рассматривать как принадлежащие любому T_PM, и их скалярное произведение будет таким же. Это семейство скалярных произведений на всех касательных пространствах $T_P\mathbb{R}^n$ назовем ***евклидовой метрикой на*** $\mathbb{R}^n$.

Также мы говорили, что каждое касательное пространство поверхности (M, ρ) в $\mathbb{R}^n$ определяется не зависимо от параметризации поверхности и является линейным подпространством в $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$, поэтому на нем также определено скалярное произведение — ограничение скалярного произведения, заданного на $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$. Итак, заданное таким образом на каждом касательном пространстве скалярное произведение (билинейная форма), а также соответствующая ему квадратичная форма, называются ***первой фундаментальной формой поверхности*** M или ***метрикой, индуцированной на поверхности*** M (не путайте с метрикой как функцией расстояния).

Выбирая различные параметризации, мы будем порождать различные базисы в касательных пространствах к поверхности и, записывая в этих базисах первую фундаментальную форму, будем получать различные матрицы — матрицы Грама этих базисов. Каждая такая матрица называется ***матрицей первой фундаментальной формой*** в выбранных координатах. Запишем ее в явном виде. Если $u^1, \ldots, u^k$ — координаты на поверхности M, и $\rho_{u^j} = (x^1_{u^j}, \ldots, x^n_{u^k})$ — векторы канонического базиса, но элементы g_{pq} этой матрицы имеют вид

$$g_{pq} = \langle \rho_{u^p}, \rho_{u^q} \rangle = \sum_i x^i_{u^p} x^i_{u^q} = \delta_{ij} x^i_{u^p} x^j_{u^q}. \tag{5.1}$$

Приведем примеры.

Пример 5.17. (1) Зададим $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ в виде графика функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ и запишем матрицу первой фундаментальной формы в координатах $(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Для этого рассмотрим соответствующую параметризацию поверхности $(x^1, \ldots, x^{n-1}) \mapsto \big(x^1, \ldots, x^{n-1}, f(x^1, \ldots, x^{n-1})\big) =: \rho$, тогда векторы канонического базиса — это $\rho_{x^i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, f_{x^i})$, где 1 стоит на i-ом месте. Таким образом, матрица Грама G этих векторов имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f^2_{x^1} & f_{x^1} f_{x^2} & \cdots & f_{x^1} f_{x^{n-1}} \\ f_{x^2} f_{x^1} & 1 + f^2_{x^2} & \cdots & f_{x^2} f_{x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^{n-1}} f_{x^1} & f_{x^{n-1}} f_{x^2} & \cdots & 1 + f^2_{x^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

(2) Зададим $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$ в неявном виде $F(x^1, \ldots, x^n) = c$. Будем предполагать, что в рассматриваемой точке $F_{x^n} \neq 0$, тогда, по теореме о неявной функции, в окрестности этой точки поверхность задается графиком функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Вычислим матрицу первой фундаментальной формы в координатах $x^1, \ldots, x^{n-1}$ через функцию F и ее производные. Так как $F\big(x^1, \ldots, x^{n-1}, f(x^1, \ldots, x^{n-1})\big) = 0$, то $F_{x^i} + F_{x^n} f_{x^i} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, откуда $f_{x^i} = -F_{x^i}/F_{x^n}$. Подставляя эти выражения в предыдущий пример и вынося из матрицы $1/F^2_{x^n}$, получаем

$$G = \frac{1}{F^2_{x^n}} \begin{pmatrix} F^2_{x^n} + F^2_{x^1} & F_{x^1} F_{x^2} & \cdots & F_{x^1} F_{x^{n-1}} \\ F_{x^2} F_{x^1} & F^2_{x^n} + F^2_{x^2} & \cdots & F_{x^2} F_{x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x^{n-1}} F_{x^1} & F_{x^{n-1}} F_{x^2} & \cdots & F^2_{x^n} + F^2_{x^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

(3) В предыдущем примере, вычислим индуцированную метрику на стандартной сфере $F(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1$ в окрестности точки, в которой $F_{x^n} \neq 0$. Имеем $F_{x^i} = 2x^i$, так что условие $F_{x^n} \neq 0$ равносильно

$x^n \neq 0$. В результате,

$$G = \frac{1}{(x^n)^2} \begin{pmatrix} (x^n)^2 + (x^1)^2 & x^1 x^2 & \cdots & x^1 x^{n-1} \\ x^2 x^1 & (x^n)^2 + (x^2)^2 & \cdots & x^2 x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} x^1 & x^{n-1} x^2 & \cdots & (x^n)^2 + (x^{n-1})^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2} \begin{pmatrix} 1 - \widehat{(x^1)^2} - (x^2)^2 - \cdots - (x^{n-1})^2 & x^1 x^2 & \cdots & x^1 x^{n-1} \\ x^2 x^1 & 1 - (x^1)^2 - \widehat{(x^2)^2} - \cdots - (x^{n-1})^2 & \cdots & x^2 x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} x^1 & x^{n-1} x^2 & \cdots & 1 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \cdots - (\widehat{x^{n-1}})^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Рассмотрим стандартную двумерную сферу в трехмерном пространстве, параметризованную сферическими координатами φ и θ, и вычислим первую фундаментальную форму в точке сферы, где эти координаты определены. Имеем $\rho := (x, y, z) = (\sin\theta \cos\varphi,\, \sin\theta \sin\varphi,\, \cos\theta)$,

$$\rho_\varphi = (-\sin\theta \sin\varphi,\, \sin\theta \cos\varphi,\, 0), \quad \rho_\theta = (\cos\theta \cos\varphi,\, \cos\theta \sin\varphi,\, -\sin\theta) \quad \Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как вычислить эту матрицу G без проделанных выкладок? Для этого нужно вспомнить, что канонический базис состоит из векторов скоростей координатных линий, в нашем случае, φ-линий и θ-линий. Эти линии, очевидно, ортогональны, поэтому на побочной диагонали стоят нули. Далее, φ-линия представляет собой окружность радиуса $\sin\theta$, а θ-линия является окружностью единичного радиуса, причем обе эти окружности параметризованы стандартно — углом поворота. Соответствующие элементы матрицы G — квадраты длин векторов скоростей движения по координатным линиям. Осталось проделать тривиальные вычисления и заметить, что при движении по окружности радиуса r, параметризованной углом, длина вектора скорости равна r.

(5) Рассмотрим в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$, представленном в виде $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, тор T^2, который получается декартовым произведением двух окружностей S^1, каждая из которых лежит в своей $\mathbb{R}^2$: первая окружность задается в виде $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0)$, а вторая — в виде $(0, 0, \cos\psi, \sin\psi)$, таким образом, тор T^2 параметризован так: $\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi)$. Тогда

$$\rho_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0, 0), \quad \rho_\psi = (0, 0, -\sin\psi, \cos\psi) \quad \Rightarrow \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица индуцированной метрики совпадает с единичной матрицей в некоторых координатах, то такая метрика называется *евклидовой*, и соответствующие координаты тоже называются *евклидовыми*. Отметим, что не каждая метрика является евклидовой, например, на сфере невозможно ни в одной сколь угодно малой окрестности ввести евклидову метрику. Это будем показано ниже как следствие из “Блистательной теоремы Гаусса”. Впрочем, для сферы этот факт можно доказать и более непосредственно.

Замечание 5.18. Индуцированная метрика позволяет вычислять разные метрические характеристики касательного пространства, например, длины касательных векторов и углы между векторами. Эти выкладки можно проделывать *во внешних координатах*, т.е. рассматривая векторы как элементы объемлющего пространства, или *во внутренних координатах*, записывая векторы в каком-нибудь каноническом базисе и используя матрицу первой фундаментальной формы. В качестве следующего шага, мы можем вычислять геометрические характеристики поверхности и разнообразных объектов, лежащих на поверхности, как в объемлющем пространстве, так и не переходя в него, а производя все выкладки исключительно в выбранных координатах. Последнее может оказаться предпочтительней. Приведем пример.

Пример 5.19. Рассмотрим разобранный выше случай тора T^2 в $\mathbb{R}^4$, и выберем на этом торе кривую, имеющую во введенных координатах параметризацию $(\varphi, \psi) = (3t, 4t)$, $t \in [0, 1]$. Конечно, мы можем рассмотреть эту кривую в четырехмерном пространстве, вычислить длину ее вектора скорости и проинтегрировать. Однако, раз мы знаем индуцированную метрику, причем она такая же, как на евклидовой плоскости, а кривая — обычный отрезок, соединяющий точки с координатами $(0, 0)$ и $(3, 4)$, то длина этой кривой находится мгновенно: она равна 5.

Также мы можем вычислять углы между пересекающимися кривыми, т.е. углы между векторами скоростей этих кривых в точке пересечения кривых. В случае с тем же тором, рассмотрим кривые $\gamma_1(t) = (2t, 2t)$ и

$\gamma_2(t) = (-3t, 3t)$, выходящие из точки, соответствующей $t = 0$, и вычислим угол между ними. В терминах объемлющего пространства, мы должны найти векторы скоростей кривых, посчитать скалярное произведение этих векторов, поделить на длины векторов и взять arccos. Однако, во внутренних координатах, мы сразу видим, что угол между этими кривыми равен $\pi/2$.

Пример 5.20. Покажем, как проводить вычисления с более сложной матрицей индуцированной метрики. Например, рассмотрим поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданную графиком функции $z = x^2 - y^2$, тогда матрица G индуцированной метрики имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & -4x\,y \\ -4x\,y & 1+4y^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$, тогда в точке $\gamma(t)$ матрица $G(t)$ равна $\begin{pmatrix} 1+4t^2 & -4t^2 \\ -4t^2 & 1+4t^2 \end{pmatrix}$, поэтому квадрат длины вектора скорости $\dot\gamma(t) = (1, 1)$ равен

$$(1,1)\begin{pmatrix} 1+4t^2 & -4t^2 \\ -4t^2 & 1+4t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

так что $|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}$.

Рассмотрим координатные кривые, проходящие через точку $P = (1, 2)$, тогда в этой точке $G = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$. Найдем угол между этими кривыми. Пусть $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(y)$ — это x- и y-кривая соответственно, тогда $\dot\gamma_1 = (1, 0)$, $\dot\gamma_2 = (0, 1)$, $|\dot\gamma_1| = \sqrt{5}$, $|\dot\gamma_2| = \sqrt{17}$, $\langle\dot\gamma_1, \dot\gamma_2\rangle = -8$, поэтому угол между этими кривыми равен $\arccos\frac{-8}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$.

5.2.1 Изометричные отображения поверхностей

Отображение $F\colon X \to Y$ метрических пространств называется *изометричным*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых $x, x' \in X$ выполняется $\bigl|F(x)F(x')\bigr| = |xx'|$. Биективное изометричное отображение называется *изометрией*. Отображение $F\colon X \to Y$ метрических пространств называется *локально изометричным*, если у каждой точки $P \in X$ есть такая окрестность, что ограничение F на эту окрестность — изометрия с образом. Если при этом отображение F является локальным гомеоморфизмом, то оно называется *локальной изометрией*.

В случае, когда F — линейное отображение линейных нормированных пространств, а функция расстояния порождается нормой, скажем, $|xx'| = \|x - x'\|$, то изометричность равносильна сохранению нормы (проверьте): $\bigl\|F(x)\bigr\| = \|x\|$ для любого $x \in X$. Если же нормы порождаются скалярными произведениями, то изометричность равносильна сохранению скалярного произведения: $\bigl\langle F(x), F(x')\bigr\rangle = \langle x, x'\rangle$ для любых $x, x' \in X$ (докажите). В последнем случае, для доказательства изометричности достаточно проверить, что F сохраняет длины и скалярные произведения базисных векторов произвольно взятого базиса (убедитесь в этом).

Понятие изометричного отображения и изометрии естественно обобщается на отображения поверхностей. А именно, каждую поверхность M можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние между точками $P, Q \in M$ как точную нижнюю грань длин всех кусочно-гладких кривых на M, соединяющих P и Q (кривая называется *кусочно-гладкой*, если она является склейкой конечного числа гладких кривых). Несложно показать, что эта функция расстояния в действительности является метрикой (проделайте это). Тем самым, изометричность отображения поверхностей означает сохранение этой внутренней метрики.[1]

Задача 5.21. Пусть $F\colon M \to N$ — изометричное отображение поверхностей. Покажите, что тогда для каждой точки $P \in M$ отображение $dF|_P\colon T_PM \to T_{F(P)}N$ также изометрично, где расстояния на касательных пространствах задаются первыми фундаментальными формами.

Отметим, что изометричность дифференциала не влечет сохранение внутренней метрики.

Пример 5.22. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y кольцо (N, σ), заданное неравенствами $1 < x^2 + y^2 < 4$, где погружение σ — вложение. В качестве (M, ρ) возьмем то же самое кольцо, но с выкинутым

[1]Если при определении внутренней метрики вместо кусочно-гладких кривых брать гладкие кривые, мы получим то же самое расстояние. Действительно, каждую кусочно-гладкую кривую можно так параметризовать в окрестности точки негладкости, чтобы она превратилась в гладкую кривую (по аналогии с тем, как гладким образом параметризуется угол). Если бы мы ограничились гладкими кривыми, то подобные проблемы у нас возникали бы при склейке гладких кривых. Чтобы каждый раз не оговаривать, почему склейка также может быть превращена в гладкую кривую, мы и ввели в рассмотрение кусочно-гладкие кривые. **В дальнейшем мы часто будем опускать термин кусочно-гладкий, считая, что это условие выполнено по умолчанию.**

интервалом I, соединяющим точки $(1,0)$ и $(2,0)$; погружение ρ — ограничение σ на M. В качестве $F\colon M \to N$ возьмем отображение, оставляющее точки на месте. Тогда dF будет тождественным отображением на каждом касательном пространстве и, значит, изометрией. Однако, точки из M, "близкие" к интервалу I, находятся на "большом" расстоянии в M (в смысле внутренней метрики), но на "маленьком" расстоянии в N, так что F — не изометрия (придайте точный смысл всем словам в кавычках).

Тем не менее, если дифференциал отображения F — изометрия в каждой точке, то F сохраняет длины кривых, поэтому если F взаимно однозначно с образом, а внутреннюю метрику вводить не на всем N, а на $F(M)$, то отображение $F\colon M \to F(M)$ будет сохранять внутреннюю метрику и, значит, будет изометрией. Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение 5.23. *Пусть $F\colon M \to N$ — биективное отображение поверхностей, для которого дифференциал $dF|_P\colon T_PM \to T_{F(P)}N$ является изометрией в каждой точке $P \in M$. Тогда F — изометрия метрических пространств M и N, где в качестве функций расстояния выбираются внутренние метрики.*

Из предложения 5.23 вытекает эквивалентное определение изометрии поверхностей. А именно, *отображение поверхностей $F\colon M \to N$ назовем* ***изометрией***, если оно взаимно однозначно и в каждой точке $P \in M$ дифференциал $dF|_P\colon T_PM \to T_{F(P)}N$ — изометрия.

Приведем пример.

Пример 5.24. Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы две поверхности M и N, см. рис. 5.1:

- поверхность M задается отображением из плоскости с координатами (φ, z) так: $\rho := (\operatorname{ch} z\cos\varphi,\, \operatorname{ch} z\sin\varphi,\, z)$ (она называется *бесконечнолистной намоткой катеноида*);
- поверхность N задается отображением из плоскости с координатами (φ, t) так: $\sigma := (t\,\cos\varphi,\, t\,\sin\varphi,\, \varphi)$ (она называется *геликоидом*).

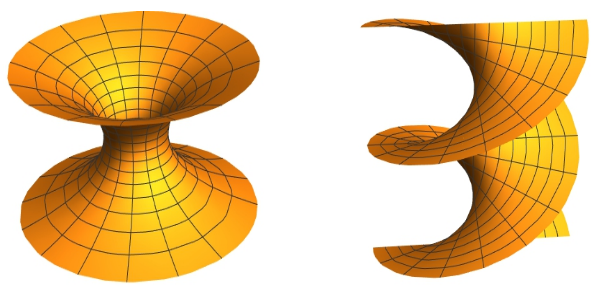

Рис. 5.1: Катеноид и геликоид.

Покажем, что эти поверхности изометричны. Вычислим матрицы G_ρ и G_σ индуцированных метрик для этих поверхностей во введенных координатах. Для катеноида:

$$\rho_\varphi = (-\operatorname{ch} z\sin\varphi,\, \operatorname{ch} z\cos\varphi,\, 0), \quad \rho_z = (\operatorname{sh} z\cos\varphi,\, \operatorname{sh} z\sin\varphi,\, 1) \quad \Rightarrow G_\rho = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 z & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 z \end{pmatrix};$$

для геликоида:

$$\sigma_\varphi = (-t\,\sin\varphi,\, t\,\cos\varphi,\, 1), \quad \sigma_t = (\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, 0) \quad \Rightarrow G_\sigma = \begin{pmatrix} t^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $F\colon M \to N$, координатная запись которого равна $\{\varphi = \varphi,\, t = \operatorname{sh} z\}$, тогда $dF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} z \end{pmatrix}$. Векторы ρ_φ и ρ_z имеют в этом же базисе координаты $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, поэтому их образы при действии dF имеют вид $dF(\rho_\varphi) = (1,0)$ и $dF(\rho_z) = (0, \operatorname{ch} z)$, откуда

$$\begin{aligned}
\big\langle dF(\rho_\varphi), dF(\rho_\varphi)\big\rangle &= t^2+1 = 1+\operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch}^2 z = \langle \rho_\varphi, \rho_\varphi\rangle,\\
\big\langle dF(\rho_\varphi), dF(\rho_z)\big\rangle &= 0 = \langle \rho_\varphi, \rho_z\rangle,\\
\big\langle dF(\rho_z), dF(\rho_z)\big\rangle &= \operatorname{ch}^2 z = \langle \rho_z, \rho_z\rangle,
\end{aligned}$$

так что бесконечнолистная намотка катеноида и геликоид изометричны, хотя на первый взгляд это совсем не очевидно.

Упражнения к главе 5

Упражнение 5.1. Вычислите первую фундаментальную форму следующих двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

(1) поверхности вращения
$$\rho(\varphi, t) = \big(f(t)\cos\varphi,\ f(t)\sin\varphi,\ g(t)\big),$$
где $f(t), g(t)$ — гладкие функции, причем функция f всюду положительна;

(2) эллипсоида, заданного параметрически в виде
$$\rho(\varphi, \theta) = (a\cos\varphi\cos\theta,\ b\sin\varphi\cos\theta,\ c\sin\theta).$$

Упражнение 5.2. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид
$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

(1) Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых
$$u = \pm\frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

(2) Найдите углы этого криволинейного треугольника.

Упражнение 5.3. Найдите на поверхности
$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$
кривые, пересекающие каждую кривую $v = \mathrm{const}$ под постоянным углом θ (**локсодромии**).

Упражнение 5.4. Покажите, что ни в одном открытом подмножестве стандартной двумерной сферы нельзя ввести евклидовых координат (для этого можно использовать вид кратчайших кривых на евклидовой плоскости и сфере, а также формулы для суммы углов треугольников).

Упражнение 5.5. В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) рассмотрим тор T^2, заданный неявно функцией $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$, где $0 < b < a$, и стандартную сферу S^2, заданную $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть $F\colon T^2 \to S^2$ — *гауссово отображение*, сопоставляющее каждой точке $P \in T^2$ единичную нормаль к касательной плоскости $T_P T^2$, направленную наружу области, ограниченной тором T^2. Введите на торе и сфере координаты, найдите соответствующую координатную запись отображения F, и запишите в этих координатах дифференциал гауссова отображения.

Упражнение 5.6. Пусть $\mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$ — группа ортогональных матриц, и $E \in \mathrm{O}(3)$ — единичная матрица. Рассмотрим матрицу
$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9.$$
Докажите, что ξ — касательный вектор к $\mathrm{O}(3)$ в точке E, и найдите образ ξ при действии дифференциала отображения $F\colon \mathrm{O}(3) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, которое ставит в соответствие каждой матрице из $\mathrm{O}(3)$ векторное произведение ее первого и второго столбцов.

Упражнение 5.7. Стереографические координаты на стандартной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ определены в упражнении 4.6. Следующие задания относятся к двумерной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и стереографической проекции из “северного полюса”.

(1) Запишите индуцированную метрику в стереографических координатах.

(2) Покажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми.

(3) Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в обобщенные окружности. Выведите отсюда, что инверсия переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняет углы между кривыми.

Упражнение 5.8. Проверьте, что

(1) изометричность линейного отображение нормированных пространств эквивалентна сохранению нормы;

(2) изометричность линейного отображение пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению скалярного произведения;

(3) изометричность линейного отображение пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению длин и скалярных произведений векторов какого-нибудь базиса.

Упражнение 5.9. Пусть M — поверхность. Для каждой пары точек $P, Q \in M$ определим расстояние $|PQ|$ как точную нижнюю грань длин всех кусочно-гладких кривых на M, соединяющих P и Q. Покажите, что построенная функция является метрикой.

Упражнение 5.10. Пусть отображение поверхностей $F\colon M \to N$ сохраняет внутренние метрики. Покажите, что тогда для каждой точки $P \in M$ отображение $dF|_P\colon T_PM \to T_{F(P)}N$ изометрично, где расстояния на касательных пространствах задаются первыми фундаментальными формами.

Упражнение 5.11. Рассмотрим две параметрические поверхности в $\mathbb{R}^3$:

$$\rho(r,v) = (r\cos v, r\sin v, r+v),\ \ (r,v)\in\mathbb{R}^2 \ \ \text{(коноид)},$$
$$\sigma(z,\varphi) = \bigl(\sqrt{1+z^2}\cos\varphi, \sqrt{1+z^2}\sin\varphi, z\bigr),\ \ (z,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \ \ \text{(бесконечнолистная намотка на гиперболоид вращения)}.$$

Докажите, что отображение $F : \{z = r,\ \varphi = v + \operatorname{arctg} r\}$ задает изометрию этих поверхностей.