Лекция 4

Поверхности в евклидовом пространстве.

План. Непрерывная параметрическая поверхность, координатная запись отображения, гладкая, регулярная, вложенная параметрическая поверхность, инвариантность области при регулярном отображении, замена координат в области, криволинейные координаты в области, координатные линии и координатные поверхности, примеры криволинейных координат (полярные, цилиндрические, сферические), (непараметрические) поверхности, задание поверхности графиком отображения и неявным отображением, локальная эквивалентность трех представлений поверхности, формализация понятия поверхности.

4.1 Общие определения

В предыдущих лекциях мы изучали кривые, параметризованные промежутками. Теперь мы увеличим размерность, но не станем пока обобщать понятие промежутка в полной мере, а именно, мы запретим наличие граничных точек, так что обобщение будет относиться к промежуткам, являющимся открытыми подмножествами прямой $\mathbb{R}$. Связное открытое подмножество k-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^k$ называется *областью* в $\mathbb{R}^k$.

Замечание 4.1. В соответствии с задачей 41 из Введения, связность открытого подмножества $\mathbb{R}^n$ равносильна его линейной связности.

Итак, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — некоторая область, $n \geq k$. Непрерывное отображение $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ будем называть *непрерывной параметрической поверхностью*, а k — размерностью этой поверхности. Как и в случае с кривыми, такие отображения могут быть устроены совсем не похожими на интуитивное представление о поверхности (например, мы может отобразить всю Ω в одну точку). Следующий шаг — потребовать, чтобы отображение ρ было гладким. Точнее, пусть $u^1, \dots, u^k$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^k \supset \Omega$, а $y^1, \dots, y^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, тогда отображение ρ записывается в этих координатах в виде n функций $y^i = y^i(u^1, \dots, u^k)$. Этот набор функций называется *координатной записью отображения* ρ. Для непрерывной параметрической поверхности все эти функции непрерывны. Параметрическая поверхность называется *гладкой*, если все функции ее координатной записи — гладкие.

Отметим, что отображение в точку является примером не только непрерывной, но и гладкой параметрической поверхности. Также гладкие параметрические поверхности, даже в случае взаимно однозначного с образом отображения, могут иметь изломы (постройте соответствующий пример с помощью задачи 1.14). Чтобы избавиться от таких эффектов, нужно потребовать нечто аналогичное регулярности кривой. Неравенство нулю всех частных производных не спасает ситуацию (приведите пример). Адекватное требование — максимальность ранга матрицы Якоби отображения ρ.

Определение 4.2. Параметрическая поверхность $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ с координатной записью $\bigl\{y^i = y^i(u^1, \dots, u^k)\bigr\}_{i=1}^n$ называется *регулярной*, если она — гладкая, и в каждой точке области Ω матрица Якоби $(y^i_{u^j})$ имеет максимальный ранг, равный k.

Определение 4.3. Непрерывная параметрическая поверхность ρ называется *вложенной*, если ρ — гомеоморфизм с образом.

Предложение 4.4. *Если $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — вложенная регулярная параметрическая поверхность размерности n, то $\rho(\Omega)$ является областью.*

Доказательство. Действительно, по теореме 56 об обратном отображении, у каждой точки $p \in \Omega$ есть такая окрестность U^p, что ее образ $\rho(U^p)$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. В частности, каждая точка $\rho(p)$ является внутренней для множества $\rho(\Omega)$, так что $\rho(\Omega)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Линейная связность $\rho(\Omega)$ вытекает из задачи 40. $\square$

Замечание 4.5. Аналогичный результат также верен и без предположения регулярности. Однако теперь это — следствие сложной теоремы Брауэра об инвариантности области. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 4.6 (Об инвариантности области, Брауэр [1])**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество и $\rho\colon U \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда $V = \rho(U)$ также открыто и ρ — гомеоморфизм между U и V.*

Определение 4.7. Вложенная регулярная параметрическая поверхность $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ размерности n называется *заменой координат* u^i в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на координаты y^i в области $\rho(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$. Также y^i называются *криволинейными координатами в области* Ω.

Замечание 4.8. По теореме 56 об обратном отображении, для замены координат ρ обратное отображение ρ^{-1} тоже регулярно.

Если в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $x^1 \dots, x^n$ заданы криволинейные координаты $y^1, \dots, y^n$, то определены *координатные кривые*, которые получаются фиксированием всех координат y^i, кроме любой одной (через каждую точку области Ω проходит ровно n координатных кривых). Более обще, определены *координатные поверхности размерности k* для каждого $1 \le k \le n-1$, которые получаются фиксированием любых $n-k$ координат y^i. Таким образом, координатные кривые — это одномерные координатные поверхности. Также особый интерес представляют *координатные гиперповерхности*, т.е. координатные поверхности размерности $n-1$. В случае $\mathbb{R}^3$ координатные гиперповерхности традиционно называют просто поверхностями.

Пример 4.9. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ декартовы координаты x, y, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, которая получается выбрасыванием из $\mathbb{R}^2$ неположительной части оси абсцисс: $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,0) : x \le 0\big\}$. Определим на Ω две функции r и φ, а именно, пусть $r = \sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от точки (x,y) до начала координат, а $-\pi < \varphi < \pi$ — аргумент этой точки, т.е. точка имеет вид $r(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Таким образом, если $y \ge 0$, то $\varphi = \arccos(x/r)$, а если $y \le 0$, то $\varphi = -\arccos(x/r)$. Отметим, что при $y = 0$, т.е. на оси абсцисс, эти функции непрерывно "склеиваются", так как обе равны 0. В результате мы определили непрерывное отображение $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\rho(x,y) = (r,\varphi)$. Легко видеть, что ρ взаимно однозначно с образом, а координатная запись обратного отображения — это $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$, поэтому и обратное отображение непрерывно. Обратное отображение ρ^{-1} является гладким, так как обе координатные функции гладкие при выбранных ограничениях на r и φ. Кроме того, матрица Якоби этого отображения имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, а ее определитель равен $r > 0$, поэтому матрица невырождена и, значит, ρ — также гладкое отображение по теореме об обратном отображении. Итак, мы доказали, что отображение ρ является заменой координат x, y на координаты r, φ, которые называются *полярными.*

Координатными кривыми в полярных координатах являются открытые являются лучи, выходящие из начала координат (эти лучи называются *r-кривыми*, так как вдоль них меняется координата r), а также окружности с центром в начале координат и выброшенной точкой пересечения с отрицательной часть абсциссы (это φ-кривые).

Пример 4.10. Аналогично можно определить и другие системы координат.

Выкинем из пространства $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z полуплоскость $\big\{(x,0,z) : x \le 0\big\}$, тогда на полученной области Ω можно задать функции r, φ и z, заменив координаты x, y на полярные координаты r, φ. Полученная система координат называется *цилиндрической.*

Пример 4.11. Для той же области Ω определим координаты r, φ, θ следующим образом. Теперь r обозначает расстояние от точки (x,y,z) до начала координат, т.е. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; координата φ определяется для x и y так же, как и для полярных координат; координата $0 < \theta < \pi$ — это угол между радиус-вектором точки (x,y,z) и направлением оси z, т.е. вектором $(0,0,1)$. Таким образом, координатная запись обратного отображения имеет вид:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Полученная система координат называется *сферической.*

Замечание 4.12. Отметим, что имеется и другое определение угла θ сферических координат: его полагают равным углу между радиус-вектором точки (x, y, z) и радиус-вектором точки $(x, y, 0)$, т.е. проекции первой точки на плоскость $z = 0$.

Задача 4.13. Опишите координатные кривые и координатные поверхности цилиндрической и сферической систем координат.

Пусть теперь $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая поверхность размерности k, и $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ — замена координат. Пусть $V = \varphi(\Omega)$, тогда определена регулярная параметрическая поверхность $\rho \circ \varphi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^n$, про которую будем говорить, что она получается из исходной *заменой параметризации* $\varphi\colon \Omega \to V$ или *заменой координат.* Ясно, что отношение на множестве регулярных параметрических поверхностей, в котором поверхности находятся в отношении, если и только если они получаются друг из друга заменой параметризации, является эквивалентностью. Класс эквивалентности параметрических регулярных поверхностей будем называть *поверхностью.* Чтобы подчеркнуть, о какой поверхности идет речь, иногда такие поверхности называют *непараметрическими.*

Как видно, определение поверхностей вполне аналогично определению кривых, поэтому и оставшиеся рассуждения про свойства поверхностей или про возможность особой параметризации, про образ поверхности, точку на поверхности также имеют место. Мы пока не можем говорить про замкнутые поверхности (аналог замкнутых кривых), так как слишком сузили параметрическую область.

Отметим также, что, используя теорему 4.6 Брауэра об инвариантности области, мы можем определить замену координат и поверхности в непрерывном случае. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с регулярными поверхностями, так что такое общее определение нам не понадобится.

4.1.1 Задание поверхности в виде графика отображения

В предыдущих лекциях мы определили частный случай кривых, заданных в виде графиков отображений. Эта конструкция непосредственно обобщается на поверхности.

Итак, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — произвольная область, $1 \le k < n$, и $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ — непрерывное отображение. Рассмотрим график отображения g, а именно,

$$\Gamma_g = \Big\{\big(p, g(p)\big) : p \in \Omega\Big\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n.$$

Если $u^1, \dots, u^k$ — декартовы координаты в области Ω, а $x^1, \dots, x^{n-k}$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n-k}$, то отображение g задается набором непрерывных функций $\big(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^{n-k}(u^1, \dots, u^k)\big)$, то Γ_g можно представить как образ вложенной параметрической поверхности $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$\rho(u^1, \dots, u^k) = \big(u^1, \dots, u^k, x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^{n-k}(u^1, \dots, u^k)\big). \tag{4.1}$$

Отметим, что если отображение g — гладкое, то соответствующая параметрическая поверхность ρ — регулярная, так как матрица Якоби отображения ρ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x^1_{u^1} & x^1_{u^2} & \cdots & x^1_{u^k} \\ x^2_{u^1} & x^2_{u^2} & \cdots & x^2_{u^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-k}_{u^1} & x^{n-k}_{u^2} & \cdots & x^{n-k}_{u^k} \end{pmatrix},$$

и, значит, ранг матрицы Якоби максимален и равен k.

Соглашение 4.14. Так как интересующие нас геометрические свойства не зависят от того, на каких местах в правой части равенства (4.1) расположить координаты $u^1, \dots, u^k$ (не обязательно последовательно), мы будем также называть *графиком отображения* ρ и образ каждого отображения

$$(u^1, \dots, u^k) \mapsto \big(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, u^1, \cdots, x^{i_1}(u^1, \dots, u^k), \cdots, u^2, \cdots, x^{i_2}(u^1, \dots, u^k), \cdots\big).$$

Следующая задача решается по аналогии с тем, что мы проделывали для кривых в разделе 1.4.1.

Задача 4.15. Используя теорему 59 о неявном отображении, покажите, что каждая достаточно малая окрестность каждой точки регулярной параметрической поверхности представима в виде графика некоторого отображения.

4.1.2 Задание поверхности в виде неявного отображения

Как и в случае с кривыми, поверхности локально можно задавать и в виде неявных отображений. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ или некотором его открытом подмножестве m гладких функций $F^1(x^1,\dots,x^n),\dots,F^m(x^1,\dots,x^n)$, вектор c из вещественных констант, $c=(c^1,\dots,c^m)$, и пусть

$$M=\big\{(x^1,\dots,x^n): F^1(x^1,\dots,x^n)=c^1,\dots,F^m(x^1,\dots,x^n)=c^m\big\} \tag{4.2}$$

— решение системы уравнений $\{F^1=c^1,\dots,F^m=c^m\}$. Предположим, что $M\ne\emptyset$ и в некоторой точке $P=(P^1,\dots,P^n)$ выполняются условия теоремы 59 о неявном отображении (см. также замечание 61 из Введения), т.е. ранг матрицы Якоби $F_x(P):=\big(F^i_{x^j}(P)\big)$ максимален и, значит, равен m. Последнее означает, что строки матрицы $F_x(P)$ линейно независимы, а среди столбцов имеется m линейно независимых. Пусть эти столбцы имеют номера $i_1,\dots,i_m$, а оставшиеся $k=n-m$ столбцов — номера $j_1,\dots,j_k$. Будем считать, что как в первом, так и во втором списках номера упорядочены по возрастанию.

Положим $I=(i_1,\dots,i_m)$, $J=(j_1,\dots,j_k)$, и пусть $\mathbb{R}^n_I$ и $\mathbb{R}^n_J$ — соответствующие координатные подпространства в $\mathbb{R}^n$ в обозначениях 1.18, а P_I и P_J — проекции точки P на эти подпространства. По теореме 59 и замечанию 61, существуют окрестности $U^{P_J}\subset\mathbb{R}^n_J$ и $U^P\subset\mathbb{R}^n$ такие, что $U^P\cap M$ является графиком гладкого отображения $g\colon U^{P_J}\to\mathbb{R}^n_I$ с координатными функциями $x^i=x^i(x^{j_1},\dots,x^{j_k})$, $i\in I$. Если $\rho\colon U^{P_J}\subset\mathbb{R}^n$ — соответствующая вложенная регулярная параметрическая поверхность, заданная координатными функциями $x^j=x^j$ для $j\in J$, и $x^i=x^i(x^{j_1},\dots,x^{j_k})$ для $i\in I$, то $U^P\cap M$ — ее образ.

Обратно, если поверхность задана в виде графика отображения $g\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^k$, и $x^1,\dots,x^k$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^k$, то определим функции $F^i\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, положив $F^i=x^{k+i}-g^i(x^1,\dots,x^k)$, $i=1,\dots,m$, где $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Тогда график отображения g совпадает с $M=\{F^1=0,\dots,F^m=0\}$. Отметим, что последние m столбцов матрицы Якоби $(F^i_{x^j})$ формируют единичную матрицу, поэтому ранг матрицы $(F^i_{x^j})$ максимален.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.16. *Каждая регулярная поверхность в достаточно малой окрестности любой из своих точек является вложенной и может быть представлена в каждом из трех видов: параметрически, графиком отображения, неявным отображением.*

Пример 4.17. Рассмотрим стандартную (единичную с центром в нуле) сферу в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x,y,z. Эта сфера может быть задана (локально)

- параметрически: $\gamma(\varphi,\theta)=(\sin\theta\cos\varphi,\,\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)$, где (r,φ,θ) — сферические координаты;
- неявно: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$;
- если, скажем, $z\ne0$, то локально сфера задается графиком функции $g(x,y)$, разной в двух следующих случаях: при $z>0$ имеем $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, а при $z<0$ имеем $g(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Замечание 4.18. В лекции 3 мы определили неявные кривые как решения уравнений, удовлетворяющие во всех своих точках условиям теоремы о неявном отображении. Здесь мы обобщим это определение на случай поверхностей. А именно, непустое множество $M\subset\mathbb{R}^n$, заданной формулой (4.2), назовем *неявной поверхностью*, если в каждой точке $P\in M$ ранг матрицы Якоби $F_x(P)$ максимален. Размышления о том, стоит ли рассматривать все M, или под неявной поверхностью понимать его связные компоненты, аналогичны изложенным в замечании 3.16.

Задача 4.19. Выясните, какие из трех представлений поверхностей могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

Соглашение 4.20. В дальнейшем, если не возникает путаницы, мы не будем каждый раз уточнять, какой тип поверхности рассматривается: параметрический, график или неявный, и будем говорить просто про поверхность. Конкретный выбор представления поверхности будет ясен из контекста.

4.2 Формализация понятия поверхности

Чтобы было удобно работать с поверхностями, приведем следующую конструкцию. Напомним, что при задании поверхности мы начинали с параметрической поверхности, а затем рассматривали всевозможные замены параметризации. На каждую параметризацию можно смотреть как на "оцифровку" множества, т.е. как на приписывание каждому элементу множества некоторых координат (точек арифметического пространства). Чтобы не делать различия между исходной параметрической поверхностью и остальными, получающимися из нее заменами параметризации, мы будем считать, что изначально у нас было дано некоторое множество M (без какой бы то ни было структуры) — *множество точек поверхности*, и для этого множества мы задали

- семейство биекций $\mathcal{P} = \{\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, называемых *параметризациями поверхности* или *картами*, где $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ — области, причем для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ биекция $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$ является заменой координат, и любая замена координат в каждой области Ω_α реализуется таким образом;
- отображение $\rho\colon M \to \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, такое, что для некоторой (и, значит, любой) биекции $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ отображение $\rho\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon \Omega_\alpha \to \mathbb{R}^n$ является регулярной параметрической поверхностью.

Под *поверхностью* мы будем понимать тройку $(M, \mathcal{P}, \rho)$. *Размерностью поверхности* называется размерность k областей Ω_α, а сама поверхность называется *k-мерной*. Семейство $\mathcal{P}$ будем называть *атласом* (атлас состоит из карт). Выбор параметризации $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ будем также называть *введением координат*, где в качестве координат выступают декартовы координаты $u = (u^1, \ldots, u^k)$ в $\mathbb{R}^k \supset \Omega_\alpha$. Иногда, говоря про введение координат, мы будем опускать упоминание об области Ω_α, а, вместо этого, будем сразу говорить, что на поверхности M мы вводим координаты $u = (u^1, \ldots, u^k)$. Пространство $\mathbb{R}^n$ назовем *объемлющим пространством*, а отображение ρ — *погружением* в пространство $\mathbb{R}^n$. Если $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, а $u = (u^1, \ldots, u^k)$ — координаты на поверхности, то погружение ρ задается набором из n гладких функций $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k)$. Такое представление погружения ρ будем называть его *координатной записью* и писать так: $\rho : \bigl\{x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k)\bigr\}_{i=1}^n$ или, для краткости, $\rho : x(u)$. Также будем говорить, что мы *рассматриваем поверхность в* $\mathbb{R}^n$, или что рассматриваемая поверхность *находится или лежит в* $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем похожая конструкция приведет нас к одному из центральных понятий дифференциальной геометрии — многообразию.

Замечание 4.21. Множество M мы могли бы получить из исходного определения поверхности как класса эквивалентности параметрической поверхности $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Для этого нужно было рассмотреть все замены координат $\{\varphi_\alpha\colon \Omega \to \Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, отождествить тождественную замену с Ω, взять несвязное объединение $\sqcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\Omega_\alpha$ и ввести на нем отношение эквивалентности: $p_\alpha \in \Omega_\alpha$ эквивалентно $p_\beta \in \Omega_\beta$, если $p_\beta = \varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(p_\alpha)$. Тогда M — это множество классов только что определенной эквивалентности.

Замечание 4.22. Для вложенной регулярной поверхности с представителем $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, под M можно понимать образ отображения ρ. Тогда ρ из тройки $(M, \mathcal{P}, \rho)$ будет тождественным отображением.

Замечание 4.23. В случае одномерных поверхностей, т.е. кривых, мы расширим определение, разрешив в качестве Ω_α брать не только интервалы, но и произвольные промежутки. В остальном конструкция ничем не отличается.

Замечание 4.24. Каждая биекция $\varphi_\alpha\colon M \to \Omega_\alpha$ определяет на M единственную топологию, в которой открытые множества — прообразы открытых множеств в Ω_α. Так как все замены координат $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ — гомеоморфизмы, то все $\varphi_\alpha \in \mathcal{P}$ определяют одну и ту же топологию, и именно ее мы будем всегда иметь в виду, говоря про топологические свойства поверхности.

Соглашение 4.25. В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем поступать с поверхностями так же, как поступают с метрическим или топологическим пространством. А именно, под топологическим пространством можно понимать пару (X, τ), где X — множество, а τ — топология на X, а можно понимать множество X, для которого задана некоторая топология τ. Таким образом, вместо того, чтобы говорить "пусть $(M, \mathcal{P}, F)$ — поверхность", мы скажем "пусть M — поверхность", имея в виду, что когда понадобится, мы сообщим про атлас, координаты на M, области Ω_α, объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$ и т.д.

Также иногда мы будем задавать поверхность своим параметрическим представителем, что однозначно определяет $\mathcal{P}$. В этом случае, если нам все-таки важно погружение ρ, поверхность будем сокращенно обозначать парой (M, ρ).

Наш дальнейший план таков: сначала мы определим понятие (гладкого) отображения поверхностей, в частности, это даст нам понятие кривой на поверхности; используя кривые, мы определим касательное пространство поверхности. Каждая параметризация будет задавать на касательном пространстве свой базис, так что разные структуры, которые мы будем определять на касательных пространствах, будут менять свой вид при замене параметризации, даже если эта структура пришла из не зависящей от параметризации структуры объемлющего пространства. Для (гладкого) отображения поверхностей мы определим понятие дифференциала этого отображение, которое будет линейным отображением между соответствующими касательными пространствами. Мы определим первую и вторую фундаментальные формы поверхности, позволяющие алгебраически описывать форму поверхности. Напишем деривационные формулы — аналог формул Френе для кривых. Сформулируем аналог теоремы о восстановлении кривой по кривизнам в случае двумерных поверхностей в трехмерном пространстве (оказывается, для этого достаточно знания первой и второй фундаментальных форм). Также мы определим аналог параллельного переноса, введя в рассмотрение ковариантное дифференцирование и заметив, что в случае евклидова пространства семейство векторов параллельно, если и только если его производная вдоль любой кривой равна нулю. Кривые, у которых поле скоростей параллельно, играют в геометрии важную роль и называются геодезическими. Эти кривые, как оказывается, являются кратчайшими между любой парой достаточно близких своих точек. Мы приведем ряд результатов из теории параллельных полей и геодезических.

Литература к главе 4

[1] Brouwer L.E.J. *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen, 1912, v. 71, pp. 305–315; а также Mathematische Annalen, 1912, v. 72, pp. 55–56.

Упражнения к главе 4

Упражнение 4.1. Опишите координатные кривые и координатные поверхности цилиндрической и сферической систем координат.

Упражнение 4.2. Составьте параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной регулярной кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется *развертывающейся*. Исследуйте развертывающуюся поверхность на регулярность.

Упражнение 4.3. Пусть в $\mathbb{R}^3$ введены стандартные координаты x, y, z. В плоскости $y = 0$ рассмотрим регулярную кривую γ, не пересекающую ось z, и будем вращать эту кривую вокруг оси z. Покажите, что полученное множество M можно представить как образ регулярной параметрической поверхности. В случаях, когда γ — это или окружность, для определенности, с центром на оси x, или график положительной гладкой функции $x = f(z)$, задайте M неявной функцией, т.е. как решение уравнения $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция, определенная на некоторой области и удовлетворяющая теореме о неявной функции во всех точках из M.

Упражнение 4.4. *Эллиптические координаты* λ, μ, z в $\mathbb{R}^3$ определяются с помощью формул

$$x = \lambda\,\mu, \quad y = \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z.$$

(1) Приведите одну из максимальных областей определения эллиптических координат.

(2) Найдите и изобразите координатные кривые и координатные поверхности эллиптических координат.

(3) Вычислите якобианы перехода между эллиптическими и евклидовыми координатами.

Упражнение 4.5. *Эллипсоидальные координаты* в $\mathbb{R}^3$ вводятся с помощью уравнений ($a > b > c$):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \qquad (\lambda > -c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1 \quad (-b^2 > \nu > -a^2).$$

Докажите, что каждой точке $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует не более одной системы значений λ, μ, ν. Выясните, каким точкам $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует одна система значений λ, μ, ν.

Параметры λ, μ, ν называются *эллипсоидальными координатами*.

Выразите декартовы координаты x, y, z через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν.

Упражнение 4.6. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, сфера S^{n-1} задается неявно уравнением $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1$, $N = (0, 0, \ldots, 1) \in S^{n-1}$ — “северный полюс”, и Π — гиперплоскость $x^n = 0$. Рассмотрим отображение $\nu\colon S^{n-1}\setminus\{N\} \to \Pi$, сопоставляющее каждой точке $P \in S^{n-1}\setminus\{N\}$ единственную точку пересечения луча NP с плоскостью Π.

(1) Выпишите, как связаны координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ точки P и координаты $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ ее образа $\nu(P) \in \Pi$ (в Π рассматриваются декартовы координаты, индуцированные из $\mathbb{R}^n$). Проверьте, что $\nu^{-1}\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая поверхность. Координаты $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ на $S^{n-1} \setminus \{N\}$ называются *стереографическими*. Отметим, что имеются и другие варианты определения этих координат, получающиеся заменой точки N на другую точку сферы, например, на “южный полюс” $S = (0, 0, \ldots, -1) \in S^{n-1}$, а также заменой плоскости Π.

(2) *Инверсией* относительно сферы в $\mathbb{R}^k$ с центром в $C \in \mathbb{R}^k$ и радиусом R называется отображение из $\mathbb{R}^k\setminus\{C\}$ в себя, переводящее каждую точку P в такую точку Q, что P и Q лежат на одном луче, выпущенном из C, причем $|CP|\,|CQ| = R^2$. Покажите, что замена координат на $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ при замене N на S (при той же гиперплоскости Π) является инверсией в Π относительно единичной сферы с центром в начале координат.

(3) Покажите, что отражение сферы S^{n-1} относительно гиперплоскости Π в стереографических координатах представляет собой инверсию в Π относительно единичной сферы с центром в начале координат.

(4) Рассмотрите частный случай двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$, введите на Π вместо координат u^1, u^2 комплексную координату $z = u^1 + i\,u^2$, и запишите замену координат при замене N на S в комплексной форме.

Упражнение 4.7. *Ортогональная группа* $\mathrm{O}(3)$ состоит из матриц размера 3×3, сохраняющих стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, иными словами, $A \in \mathrm{O}(3)$, если и только если $A^T A = E$. Записывая три строки каждой ортогональной матрицы последовательно в строку, получим вектор из $\mathbb{R}^9$. Таким образом, $\mathrm{O}(3)$ можно рассматривать как подмножество $\mathbb{R}^9$. Докажите, что в окрестности каждой точки $A \in \mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^9$ ортогональная группа представляет собой регулярную трехмерную поверхность. Можно ли то же самое сказать про специальную ортогональную группу $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{O}(3)$, составленную из ортогональных матриц с определителем 1?

Упражнение 4.8. Специальная линейная группа $\mathrm{SL}(n)$ состоит из матриц размера $n \times n$, имеющих единичный определитель. Также рассмотрим $\mathrm{SL}(n)$ как подмножество $\mathbb{R}^{n^2}$. Покажите, что в окрестности каждой точки $A \in \mathrm{SL}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ специальная линейная группа представляет собой регулярную поверхность коразмерности 1, т.е. размерности $n^2 - 1$. Постройте локальное представление $\mathrm{SL}(n)$ в виде графика функции.