Лекция 3

Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых

План. Восстановление кривой по кривизнам, плоские кривые, классификация плоских кривых постоянной кривизны, радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, эвольвента, порядок касания кривых, огибающая семейства плоских кривых.

3.1 Восстановление кривой по кривизнам

Оказывается, кривизны кривой позволяют однозначно, с точностью до движения, сохраняющего ориентацию, восстановить кривую. Более того, нет никаких дополнительных ограничений на возможные кривизны кривых. Эти утверждения сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $f_1(s),\dots,f_{n-1}(s)$ — гладкие функции, определенные на промежутке I, и все из них, кроме, возможно, $f_{n-1}(s)$ — положительны. Тогда существует и единственна, с точностью до движения пространства, сохраняющего ориентацию, $(n-1)$-регулярная кривая $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^n$, для которой s — натуральный параметр, а функция $f_p(s)$ равна p-ой кривизне при всех p.*

Доказательство. Подставим в уравнения Френе (2.1) функции f_p вместо кривизн k_p. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на координаты векторов ν_p (всего n^2 уравнений). По теореме 63 (существования и единственности), эта система имеет единственное решение $\nu_1(s),\dots,\nu_n(s)$ (в смысле цитируемой теоремы) для каждого начального условия, в качестве которого мы возьмем произвольный положительно ориентированный ортонормальный базис $e_1,\dots,e_n$, т.е. $\nu_p(s_0)=e_p$ для некоторого $s_0\in I$ и каждого $p=1,\dots,n$. Кроме того, рассматриваемая система уравнений линейна с коэффициентами, зависящими от "времени" s, и на каждом отрезке $J\subset I$, содержащем s_0, все функции $f_p(s)$ ограничены, так что и линейные операторы, задающие эту систему, также ограничены в совокупности на каждом J, поэтому применима теорема 66 (о продолжении решений), гарантирующая, что каждое решение продолжается на каждый отрезок J. Тем самым, мы можем продолжить решение до любого $s'\in I$, и все эти продолжения совпадают на общей части. Тем самым, мы показали, что решение можно продолжить на весь промежуток I.

Для упрощения дальнейших вычислений, нам будет полезно привести уравнения системы (2.1) к одному и тому же виду, положив $f_0(s)=f_n(s)=0$ и $\nu_0=\nu_{n+1}=0$, тогда все уравнения из этой системы будут выглядеть так: $\dot\nu_p=-f_{p-1}\nu_{p-1}+f_p\nu_{p+1}$.

Лемма 3.2. *При каждом $s\in I$ векторы $\nu_1(s),\dots,\nu_n(s)$ образуют положительно ориентированный ортонормальный базис.*

Доказательство. Определим функции $a_{ij}(s)=\big\langle\nu_i(s),\nu_j(s)\big\rangle$, тогда $\dot a_{ij}$ выражается через функции f_k и другие a_{pq} так:

$$\begin{aligned}(3.1)\quad \dot a_{ij}&=\langle\dot\nu_i,\nu_j\rangle+\langle\nu_i,\dot\nu_j\rangle=\langle -f_{i-1}\nu_{i-1}+f_i\nu_{i+1},\nu_j\rangle+\langle\nu_i,-f_{j-1}\nu_{j-1}+f_j\nu_{j+1}\rangle=\\&=-f_{i-1}a_{(i-1)j}+f_ia_{(i+1)j}-f_{j-1}a_{i(j-1)}+f_ja_{i(j+1)}.\end{aligned}$$

Тем самым, мы приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на a_{ij} при $1\le i,j\le n$ (если одно из i, j или равно нулю, или равно $n+1$, то соответствующие a_{ij} равны нулю, и мы не рассматриваем их как переменные). По теореме существования и единственности, а также по теореме о продолжении решений, эти уравнения имеют на всем I единственное решение с данными начальными условиями. В качестве таких условий возьмем $a_{ij}(s_0) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$. Заметим, что функции $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$ удовлетворяют системе (3.1). Действительно, левая часть уравнений (3.1) всегда равна нулю. Что касается правой части, если i отлично от $j-1$ или $j+1$, то все элементы правой части также равны нулю. Если $i-1 = j$ или $i+1 = j$, то правая часть равна соответственно $-f_{i-1} + f_j = 0$ или $f_i - f_{j-1} = 0$. Таким образом, $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$ является единственным решением с данными начальными условиями, поэтому векторы $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$ ортонормальны при каждом s. Положительная ориентированность этих векторов вытекает из их непрерывной зависимости от параметра s и того, что $\nu_1(s_0), \dots, \nu_n(s_0)$ — это положительно ориентированный базис $e_1, \dots, e_n$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Построим кривую $\gamma(s)$, выбрав произвольную точку $P \in \mathbb{R}^n$ и положив $\gamma(s) = P + \int_{s_0}^{s} \nu_1(t)\,dt$ (т.е. решим систему дифференциальных уравнений $\dot\gamma = \nu_1$ с начальным условием $\gamma(s_0) = P$). Так как $\dot\gamma = \nu_1$ — единичный вектор при каждом s, то параметр s — натуральный в силу предложения 1.27. Покажем, что γ является $(n-1)$-регулярной, f_p — кривизны кривой γ, а ν_p — векторы базиса Френе кривой γ.

В силу натуральности параметра s, вектор ν_1 — первый вектор ортогонализации любой системы векторов, начинающейся с $\dot\gamma$.

Предположим, что для всех q, $q < p < n$, мы показали, что векторы $\dot\gamma, \dots, \gamma^{(q)}$ линейно независимы, а $\nu_1, \dots, \nu_q$ — это векторы ортогонализации системы $\dot\gamma, \dots, \gamma^{(q)}$, в частности, $\gamma^{(p-1)} = \alpha_{p-1}\nu_{p-1} + \dots$, где $\alpha_{p-1} > 0$. Дифференцируя последнее равенство, получаем $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1}\dot\nu_{p-1} + \dots = \alpha_{p-1} f_{p-1}\nu_p + \dots$.

Так как $p < n$, то $f_{p-1} > 0$, поэтому $\gamma^{(p)}$ линейно независим с $\dot\gamma, \dots, \gamma^{(p-1)}$ и, значит, вся система $\dot\gamma, \dots, \gamma^{(p)}$ линейна независима, причем начальные $p-1$ векторов ортогонализации этой системы — это $\nu_1, \dots, \nu_{p-1}$. Так как ν_p ортогонален всем предыдущим ν_q, и $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1} f_{p-1}\nu_p + \dots$, где "…" означает линейную комбинацию предыдущих ν_q, а коэффициент $\alpha_{p-1} f_{p-1}$ при ν_p — положительный, вектор ν_p является p-ым вектором ортогонализации системы $\dot\gamma, \dots, \gamma^{(p)}$.

Пока $p < n$, продолжаем эти же рассуждения. В результате мы покажем, что кривая $(n-1)$-регулярна, и векторы $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ являются результатом ортогонализации системы векторов $\dot\gamma, \dots \gamma^{(n-1)}$. Но тогда ν_n автоматически будет последним вектором базиса Френе для кривой γ.

Итак, мы показали, что кривая γ является $(n-1)$-регулярной, и что $\nu_1, \dots, \nu_n$ — векторы базиса Френе кривой γ. Так как для базиса Френе имеются те же самые разложения производных $\dot\nu_p$ по остальным линейно независимым векторам ν_q, то коэффициенты f_q этого разложения — это кривизны кривой γ.

Докажем единственность решения. Рассмотрим два разных начальных условия, состоящих из начальной точки P_i и положительно ориентированного ортонормального базиса $e_{i1}, \dots, e_{in}$, $i = 1, 2$. В силу сказанного выше, эти начальные условия однозначно задают соответствующие натурально параметризованные кривые $\gamma_i\colon I \to \mathbb{R}^n$ с одними и теми же кривизнами, причем $P_i = \gamma_i(s_0)$ для некоторого $s_0 \in I$, а $e_{i1}, \dots, e_{in}$ — базис Френе кривой γ_i в точке s_0. Пусть F — аффинное преобразование с линейной частью A такое, что $P_2 = F(P_1)$ и $Ae_{1j} = e_{2j}$ для всех $j = 1, \dots, n$, тогда A — ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию. По следствию 2.9, отображение F переводит кривую γ_1 в кривую $F \circ \gamma_1$ с теми же кривизнами, что и у γ_1, причем $(F \circ \gamma_1)(s_0) = P_2$, а $e_{21}, \dots, e_{2n}$ — базис Френе кривой $F \circ \gamma_1$ в точке s_0. Таким образом, кривые γ_2 и $F \circ \gamma_1$ имеют одни и те же начальные условия и одни и те же кривизны, поэтому, в силу теоремы 63, эти кривые совпадают. □

Натуральными уравнениями кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется система уравнений

$$k_1(s) = f_1(s), \dots, k_{n-1}(s) = f_{n-1}(s), \tag{3.2}$$

где $f_1, \dots, f_{n-1}$ — гладкие функции, определенные на некотором промежутке I, причем первые $(n-2)$ из них — положительные. *Решением* этой натуральной системы уравнений является $(n-1)$-регулярная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$, для которой $k_i(s)$ — функция i-ой кривизны. Отметим, что, в силу теоремы 3.1, такая кривая всегда существует и единственна с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства $\mathbb{R}^n$.

3.1.1 Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне

Рассмотрим альтернативный способ восстановления плоской регулярной кривой $\gamma(s)$, $s \in I$, по ориентированной кривизне $k_1(s)$, где s — натуральный параметр, а I — промежуток.

Пусть ν_1, ν_2 — базис Френе кривой γ, тогда $\nu_1 = \dot\gamma$ — единичный вектор, поэтому $\nu_1(s) = \big(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)\big)$, а $\nu_2(s) = \big(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s)\big)$, так как ν_1, ν_2 — положительно ориентированный ортонормированный базис. Отметим, что угол $\varphi(s)$ определен с точностью до $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3.3. Покажите, что функцию $\varphi(s)$ можно выбрать непрерывно и, значит, гладко зависящей от параметра s.

По формулам Френе, $\ddot\gamma = \dot\nu_1 = k_1\nu_2$, откуда

$$(-\sin\varphi,\,\cos\varphi)\dot\varphi = k_1(-\sin\varphi,\,\cos\varphi) \quad\Rightarrow\quad \dot\varphi(s) = k_1(s) \quad\Rightarrow\quad \varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{s_0}^{s} k_1(t)\,dt, \quad s_0 \in I.$$

Пусть (x, y) — декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, и $\gamma(s) = \big(x(s), y(s)\big)$, тогда

$$\dot\gamma = (\dot x, \dot y) = (\cos\varphi,\,\sin\varphi) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x(s) = x(s_0) + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)\,dt, \\ y(s) = y(s_0) + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)\,dt. \end{cases}$$

В дальнейшем, для краткости, начальные данные $\varphi(s_0)$, $x(s_0)$, $y(s_0)$ будем обозначать φ_0, x_0, y_0 соответственно.

Задача 3.4. Покажите, что все решения при фиксированной функции $k_1(s)$ отличаются на сдвиг, заданный начальными условиями (x_0, y_0), и поворот, заданный начальным условием φ_0.

Пример 3.5. Опишем все плоские кривые постоянной ориентированной кривизны k_1. Если $k_1 = 0$, то, во введенных выше обозначениях,

$$\varphi(s) = \varphi_0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x(s) = x_0 + (s - s_0)\cos\varphi_0, \\ y(s) = y_0 + (s - s_0)\sin\varphi_0, \end{cases}$$

так что получаем натурально параметризованную прямую. Напомним, что кривизна, по определению, не зависит от выбора параметризации, так что за одно мы получили и все прямые, получающиеся из приведенных выше заменами параметра. Обратно, у каждой прямой векторы скорости и ускорения коллинеарны, поэтому кривизна равна нулю. Итак, кривые нулевой кривизны — это, в точности, все прямые.

Пусть теперь $k_1(s) = c \neq 0$, тогда

$$\varphi(s) = \varphi_0 + c(s - s_0) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x(s) = x_0 + \dfrac{1}{c}\sin\big(\varphi_0 + c(s - s_0)\big), \\ y(s) = y_0 - \dfrac{1}{c}\cos\big(\varphi_0 + c(s - s_0)\big). \end{cases}$$

Тем самым, мы получили натурально параметризованную окружность с центром в (x_0, y_0) и радиусом $r = 1/|c|$. При $c > 0$ движение происходит в положительном направлении, а при $c < 0$ — в отрицательном. Обратно, каждая окружность имеет постоянную ненулевую ориентированную кривизну (проверьте). Таким образом, кривые постоянной ненулевой ориентированной кривизны — это, в точности, все окружности.

Обобщенной окружностью назовем или окружность (возможно, нулевого радиуса), или прямую (окружность бесконечного радиуса). Обобщенную окружность ненулевого радиуса назовем *невырожденной*. В этих терминах, *кривые постоянной* (*ориентированной*) *кривизны — это в точности все невырожденные обобщенные окружности.*

Замечание 3.6. Описание кривых постоянной (ориентированной) кривизны можно извлечь из теоремы 3.1. Действительно, легко видеть, что кривизна прямой равна нулю, а кривизна окружности радиуса r равна $1/r$, и, в зависимости от направления движения по окружности радиуса r, ориентированная кривизна будет равна $1/r$ или $-1/r$. Таким образом, все возможные значения постоянной ориентированно кривизны реализуются обобщенными окружностями. Осталось воспользоваться теоремой единственности.

3.2 Геометрия плоских кривых

Приведем ряд примеров изучения геометрии кривых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

3.2.1 Эволюты и эвольвенты

Напомним, что под *кривизной k кривой* γ мы понимаем $|k_1|$. Точка $\gamma(t)$ кривой γ называется *точкой спрямления*, если $k_1(t) = 0$ (равносильно, $k(t) = 0$). Если же $k_1(t) \neq 0$ (соответственно, $k(t) \neq 0$), то $\gamma(t)$ назовем *точкой бирегулярности*.

В точке бирегулярности $\gamma(t)$ определим *радиус кривизны* $R(t)$, положив $R(t) = 1/k(t)$, и *ориентированный радиус кривизны* $R_1(t)$ по формуле $R_1(t) = 1/k_1(t)$. Если ν_1, ν_2 — базис Френе регулярной кривой γ, а ν — главная нормаль в точке бирегулярности $\gamma(t)$, то имеет место равенство $k_1\nu_2 = k\nu$ и, как следствие, $R_1\nu_2 = R\nu$. *Центром кривизны* регулярной кривой γ в точке бирегулярности $\gamma(t)$ называется точка $C(t) = \gamma(t) + R(t)\nu(t) = \gamma(t) + R_1(t)\nu_2(t)$. Множество всех центров кривизны во всех точках бирегулярности называется *каустикой* или *эволютой* кривой γ.

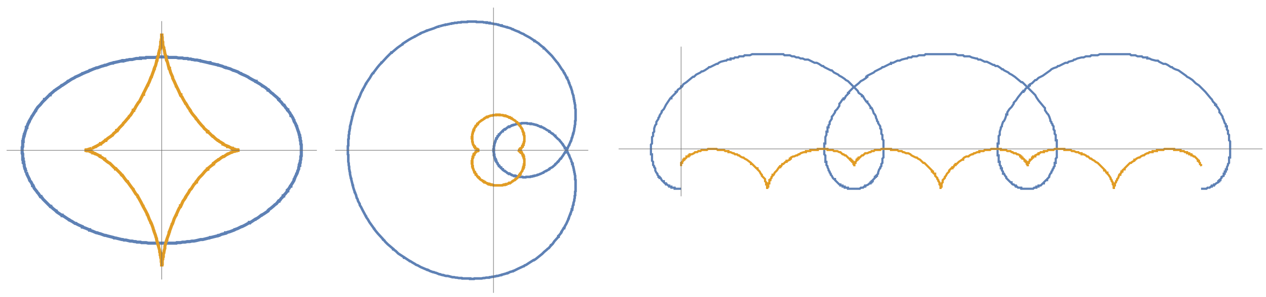

Рис. 3.1: Эволюты (желтые) эллипса, улитки Паскаля и циклоиды (синие).

Задача 3.7. Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую эволюты кривых, и постройте эволюты для основных классических кривых.

Пусть γ — регулярная кривая, и ν_1, ν_2 — ее базис Френе. *Эквидистантой* или *волновым фронтом* называется кривая $\gamma(t) + h\,\nu_2(t)$, где $h \in \mathbb{R}$.

Задача 3.8. Покажите, что множество всех особых точек всех волновых фронтов — это, в точности, эволюта кривой.

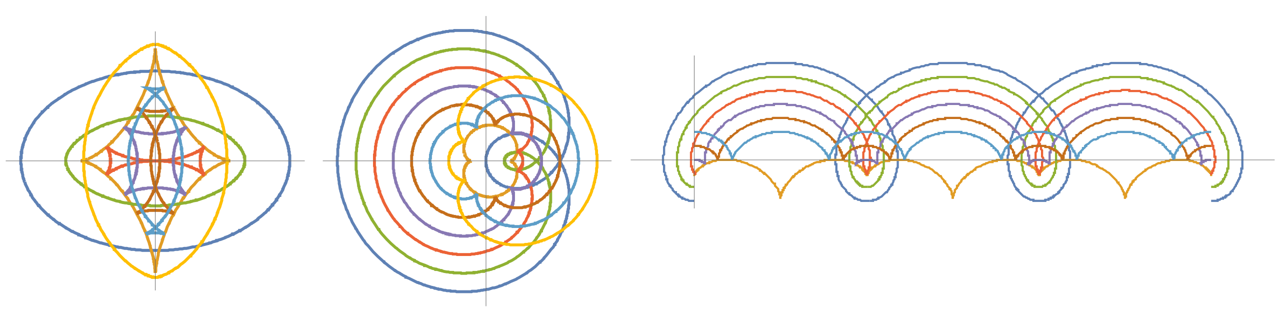

Рис. 3.2: Волновые фронты и эволюты.

Задача 3.9. Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую волновые фронты. Создайте анимацию волновых фронтов на той же картинке, где изображены кривая и эволюта. Наблюдайте, как особенности волнового фронта скользят по эволюте.

Как восстановить исходную кривую по ее эволюте? Для этого определим однопараметрическое семейство кривых, которые строятся по данной кривой $\Gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ и называются ее *эвольвентами*. В дальнейшем в качестве Γ мы возьмем эволюту, которая, вообще говоря, регулярна не везде. Для таких кривых эвольвенты строятся отдельно по каждому фрагменту, который является регулярным во всех своих внутренних точках, и у которого в граничных точках существуют пределы нормированной скорости. Поэтому сразу будем предполагать, что Γ удовлетворяет перечисленным выше условиям на такие фрагменты.

Для наглядности, представим, что на Γ намотана нить, которую мы сматываем с Γ, постоянно держа нить натянутой. Последнее означает, что в каждый момент времени конец нити лежит на касательной в той точке кривой Γ, до которой мы добрались, сматывая нить. Кроме того, то, что мы нить сматываем, означает, что разница расстояний между концами смотанной части нити в два разных промежутка времени равна длине кривой Γ между точками, соответствующими этим временам. Параметром семейства является длина части нити, не намотанной на кривую. Двигаясь по эвольвенте в обратную сторону, мы, наоборот, будем наматывать нить.

Итак, запишем эвольвенты параметрически. Пусть h — длина ненамотанной нити, τ — нормированный вектор скорости кривой Γ, и ℓ — длина кривой Γ от начального положения до текущего, тогда при сматывании нити эвольвента имеет вид $\delta^h = \Gamma - (h+\ell)\tau$.

Задача 3.10. Покажите, что при наматывании нити эвольвента выглядит так: $\delta^h = \Gamma + (h-\ell)\tau$, где h — начальный запас ненамотанной нити.

Проверим, что для некоторого h исходная кривая γ восстанавливается по регулярному фрагменту эволюты $C = \gamma + R_1\nu_2$. Имеем
$$\dot C = \dot\gamma + \dot R_1\nu_2 + R_1\dot\nu_2 = \nu_1 + \dot R_1\nu_2 - \nu_1 = \dot R_1\nu_2.$$
Из приведенной формулы вытекает следующий результат.

Предложение 3.11. *Точка $C(s)$ эволюты кривой γ является особой, если и только если в точке $\gamma(s)$ ориентированная кривизна $k_1(s)$, а вместе с ней и ориентированный радиус $R_1(s)$, экстремальны, т.е. $\dot k_1(s) = 0$ и $\dot R_1(s) = 0$.*

Из предложения 3.11 вытекает, что внутри рассматриваемого фрагмента эволюты производная $\dot R_1$ имеет один и тот же знак $\operatorname{sign}\dot R_1$. Кроме того, из той же формулы видно, что нормированный вектор скорости рассматриваемого фрагмента кривой C имеет вид $\tau = (\operatorname{sign}\dot R_1)\nu_2$.

Далее, длина ℓ кривой C между точками $C(a)$ и $C(s)$ равна
$$\int_a^s \big\|\dot C(t)\big\|\,dt = \int_a^s \big|\dot R_1(t)\big|\,dt = \big(R_1(s) - R_1(a)\big)\operatorname{sign}\dot R_1,$$
откуда
$$\begin{aligned}\delta^h(s) = C(s) - \big(h + \ell(s)\big)\tau(s) &= \\ = \gamma(s) + R_1(s)\nu_2(s) - \Big(h + \big(R_1(s) - R_1(a)\big)\operatorname{sign}\dot R_1\Big)(\operatorname{sign}\dot R_1)\nu_2 &= \\ = \gamma(s) - \big(h - R_1(a)\operatorname{sign}\dot R_1\big)(\operatorname{sign}\dot R_1).\end{aligned}$$

Осталось положить $h = R_1(a)\operatorname{sign}\dot R_1$, что и требовалось.

Задача 3.12. Подберите h для наматывания нити на регулярный фрагмент эволюты так, чтобы эвольвента совпала с фрагментом исходной кривой.

Отметим, что, например, восстановление эллипса происходит с чередованием сматывания и наматывания, см. рис. 3.3.

3.2.2 Порядок касания кривых

Пусть γ и δ — две регулярные кривые в $\mathbb{R}^n$, проходящие через одну точку P. Если при произвольной параметризации векторы скоростей этих кривых не коллинеарны, то говорим, что кривые γ и δ касаются в точке P лишь с *нулевым порядком*. Если же скорости коллинеарны, то параметризуем кривые некоторым параметром t так, чтобы $P = \gamma(0) = \delta(0)$ и $\dot\gamma(0) = \dot\delta(0)$. В этом случае будем говорить, что кривые γ и δ касаются в точке P с *первым порядком*. Более обще, если для некоторого k кривые можно параметризовать так, что все производные $\gamma^{(i)}(0)$ и $\delta^{(i)}(0)$ совпадают при каждом $i < k$, то говорим, что кривые γ и δ касаются в точке P *с порядком k*. Отметим, что если кривые касаются с k-ым порядком, то они также касаются и с i-ым порядком при всех $i \le k$.

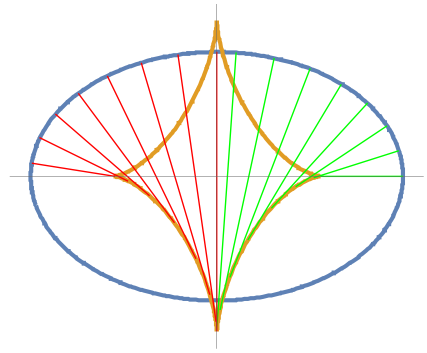

Рис. 3.3: Зеленые отрезки — сматывание, а красные — наматывание.

Пусть γ — плоская регулярная кривая, проходящая через точку P, в которой кривизна k отлична от нуля. Пусть $R = 1/k$ — радиус кривизны кривой γ в точке P, и ν — главная нормаль в этой точке, тогда $C = P + R\nu$ — центр кривизны. Окружность с центром в C и радиусом R назовем *окружностью кривизны* или *соприкасающейся окружностью.* Если кривизна регулярной кривой γ в точке P равна нулю, то *окружностью кривизны* назовем касательную прямую, рассматриваемую как окружность бесконечного радиуса.

Предложение 3.13. *В каждой точке регулярной кривой окружность кривизны касается кривой со вторым порядком.*

Доказательство. Пусть сначала кривизна равна нулю. Параметризуем кривую и касательную прямую натуральным параметром так, чтобы совпали векторы скоростей. При этом у натурально параметризованной прямой все производные порядка выше 1 равны нулю. Так как кривизна кривой равна нулю, то ее ускорение (в натуральной параметризации) тоже равно нулю, так что имеем касание второго порядка.

Пусть теперь кривизна в рассматриваемой точке отлична от нуля. Аналогичные рассуждения показывают, что при натуральной параметризации кривой и окружности кривизны и соответствующем выборе направления движения можно добиться касания первого порядка. Чтобы показать наличие касания второго порядки, проделаем следующие вычисления. Обозначим γ рассматриваемую натурально параметризованную кривую, ν — главная нормаль, R — радиус кривизны, и $C = \gamma + R\nu$ — центр кривизны. Тогда, при выбранных параметризациях, вектор ускорения при движении по окружности будет совпадать с $(1/R)\nu$ (проделайте соответствующие вычисления), но $(1/R)\nu = k\,\nu = \ddot{\gamma}$, что и требовалось. □

Задача 3.14. Покажите, что любая окружность, проходящая через точку P регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой γ с меньшим чем 2 порядком.

Задача 3.15. Будем приближать плоскую регулярную кривую квадрикой. Докажите, что теперь можно достичь четвертого порядка касания, причем квадрика, касающаяся с четвертым порядком, определена однозначно (будем называть ее *приближающей квадрикой*). Таким образом, точки кривой можно разделить на четыре класса: вырожденные (кривизна равна нулю), а также эллиптические, гиперболические и параболические, в зависимости от того, чем является приближающая квадрика.

3.2.3 Огибающие семейства кривых на плоскости

В данном разделе мы будем рассматривать неявные кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$. А именно, пусть $x = (x^1, x^2)$ декартовы координаты на $\mathbb{R}^2$ и $U \subset \mathbb{R}^2$ — некоторое открытое множество. Тогда под *неявной кривой* мы будем понимать решение $M \subset U$ уравнения $f(x^1, x^2) = c$, где $f\colon U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $c \in \mathbb{R}$, и для каждой точки $p \in M$ вектор $f_x(p) = \big(f_{x^1}(p), f_{x^2}(p)\big)$ отличен от нуля. Напомним, что, по теореме о неявном отображении, множество M в подходящей окрестности каждой своей точки является образом вложенной регулярной параметрической кривой.

Замечание 3.16. Определенные выше неявные кривые могут состоять из нескольких компонент связности, например, неявная кривая, заданная уравнением

$$f(x^1, x^2) = \big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 1\big)\big((x^1)^2 + (x^2)^2 - 4\big) = 0,$$

состоит из двух непересекающихся окружностей. Это не совсем в духе предыдущих определений кривых, так как и образы параметрических кривых, и кривые-графики являются связными. Можно было бы под неявной кривой понимать связную компоненту решения уравнения $f = c$. Последнее имеет как свои плюсы, так и минусы. К плюсам можно отнести то, что такое определение согласовывается с предыдущими (учитывает связность). Кроме того, точки одной из компонент могут удовлетворять условию невырожденности векторов f_x, а точки другой — не удовлетворять, как, скажем, для уравнения

$$f(x^1,x^2) = \big((x^1)^2+(x^2)^2-1\big)\big((x^1)^2+(x^2)^2\big) = 0,$$

задающего окружность и точку, в которой $f_x = 0$. Впрочем, если ограничить f на достаточно малую окрестность окружности $(x^1)^2+(x^2)^2 = 1$, то тогда у решения будет только одна компонента — невырожденная окружность. Аналогичная ситуация имеется и в общем случае: для всех точек "невырожденной" компоненты решения уравнения $f = c$, т.е. где $f_x \ne 0$, можно взять малые окрестности, где по-прежнему $f_x \ne 0$ (такие окрестности существуют потому, что функция f_x непрерывна), тогда ограничение f на объединение этих окрестностей будет иметь в качестве решения уравнения $f = c$ ровно эту компоненту.

К "минусам" определения неявной кривой через компоненты можно отнести то, что при решении задач нужно будет выбирать некоторые компоненты, отбрасывая другие. Так как, в основном, наши рассуждения будут носить локальный характер и на результат будут автоматически влиять только связные компоненты, аккуратный выбор компонент приведет к неоправданному удлинению построений. Все только что сказанное демонстрирует необходимость принятия волевого решения. *Мы оставим определение неявной кривой каким его дали и не будем переходить к связным компонентам.*

Далее, мы будем рассматривать *однопараметрические семейства* неявных кривых, заданные функцией $F\colon U\times J\to\mathbb{R}$, где J — невырожденный промежуток с координатой α, называемой *параметром семейства*, а каждое множество $M^\alpha\subset U$, являющееся решением уравнения $F(x^1,x^2,\alpha) = c$ при каждом фиксированном α, представляет собой неявную кривую. *Огибающей* этого семейства называется каждая регулярная параметрическая кривая $\gamma(s)$, которая для каждого значения параметра s касается некоторой неявной кривой M^α. Последнее означает, что для каждого s выполняются следующие условия: (1) точка $\gamma(s)$ содержится в некотором M^α, т.е. $F\big(\gamma(s),\alpha\big) = c$ при всех s, и (2) если $\gamma^\alpha(t)$ — регулярная параметрическая кривая, параметризующая часть неявной кривой M^α в окрестности точки $\gamma(s)$, то векторы $\dot\gamma(s)$ и $\dot\gamma^\alpha(t)$ коллинеарны. Таким образом, у нас возникает функция $\alpha = \alpha(s)$.

Мы будем решать задачу в предположении, что функция $\alpha(s)$ — гладкая и ее производная всюду отлична от нуля. Тогда определена обратная функция, которую можно рассматривать как регулярную замену параметра s и, тем самым, сразу считать, что кривая γ параметризована α, что мы и будем делать. Отметим, что α, как параметр кривой γ, может быть определен не на всем промежутке J.

Для дальнейшего нам понадобится следующее предложение.

Предложение 3.17. *Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество, $x^1,\dots,x^n$ — декартовы координаты на $\mathbb{R}^n$, $k\le n$, $F = (F^1,\dots,F^k)\colon U\to\mathbb{R}^k$ — гладкое отображение, и $\gamma\colon I\to U$ — гладкая кривая такая, что $F\circ\gamma = c$ для некоторого вектора $c = (c^1,\dots,c^k)$. Тогда при каждом t векторы $\dot\gamma(t)$ и $F^i_x = (F^i_{x^1},\dots,F^i_{x^n})$, вычисленные в точке $\gamma(t)$, ортогональны.*

Доказательство. Действительно, если $\gamma(t) = \big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$ — координатная запись кривой γ, то при каждом i выполняется $F^i\big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big) = c^i$. Осталось продифференцировать последнее уравнение по t по теореме 54 о дифференцировании сложной функции. $\square$

Пусть $\gamma(\alpha) = \big(x^1(\alpha),x^2(\alpha)\big)$ — координатная запись огибающей γ. Тогда, в силу предложения 3.17, условие касания γ и неявных кривых M^α равносильно тому, что $\dot\gamma(\alpha)$ перпендикулярен $F_x\big(x^1(\alpha),x^2(\alpha),\alpha\big)$, т.е. $F_{x^1}\dot x^1 + F_{x^2}\dot x^2 = 0$. Но, так как $F\big(x^1(\alpha),x^2(\alpha),\alpha\big) = c$, имеем

$$F_{x^1}\dot x^1 + F_{x^2}\dot x^2 + F_\alpha = F_\alpha = 0,$$

поэтому условие перпендикулярности равносильно $F_\alpha\big(x^1(\alpha),x^2(\alpha),\alpha\big) = 0$. Итак, искомая кривая $\gamma(\alpha)$ является решением системы уравнений $\big\{F(x,\alpha) = c,\ F_\alpha(x,\alpha) = 0\big\}$. Эта система называется *уравнениями огибающих.*

При каких условиях решение этой системы можно представить в виде регулярной кривой $\gamma(\alpha)$, хотя бы локально? Теория огибающих рассматривает много разных случаев, однако нам, для первого знакомства, вполне будет достаточно следующего локального условия существования огибающей, мгновенно вытекающего из теоремы о неявном отображении.

Теорема 3.18. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $J \subset \mathbb{R}$ — невырожденный промежуток, $F\colon U \times J \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $F(x^1, x^2, \alpha)$ — ее координатное представление, и $c \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого фиксированного α множество $M^\alpha = \{(x^1, x^2) \in U : F(x^1, x^2, \alpha) = c\}$ непусто, и для некоторого $p \in M^\alpha$ матрица $\begin{pmatrix} F_{x^1} & F_{x^2} \\ F_{\alpha x^1} & F_{\alpha x^2} \end{pmatrix}$, вычисленная в точке (p, α), невырождена. Тогда в некоторой окрестности V этой точки уравнение $F(x^1, x^2, \alpha) = c$ задает однопараметрическое семейство неявных кривых $M^\alpha \cap V$, а система уравнений $\{F(x^1, x^2, \alpha) = c,\ F_\alpha(x^1, x^2, \alpha) = 0\}$, рассматриваемая на $V \times J$, — огибающую этого семейства.*

Задача 3.19. Докажите, что эволюта бирегулярной плоской кривой, у которой производная кривизны по натуральному параметру не обращается в ноль, является огибающей семейства прямых, проходящих через точки кривой в направлении ее нормалей.

Упражнения к главе 3

Упражнение 3.1. Решите на плоскости натуральное уравнение $k_1(s) = 1/s$, $I = \{s \in \mathbb{R} : s > 0\}$.

Упражнение 3.2. Докажите, что бирегулярные кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

Упражнение 3.3. Покажите, что любая окружность, проходящая через точку P регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой γ с меньшим чем 2 порядком.

Упражнение 3.4. Постройте две плоских кривых, совпадающих лишь в одной точке P и имеющих бесконечный порядок касания.

Упражнение 3.5. Для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, заданного на плоскости с декартовыми координатами x, y, напишите уравнение эволюты.

Упражнение 3.6. Покажите, что эволюта плоской кривой γ совпадает с множеством особых точек всех волновых фронтов, выпущенных с γ.

Упражнение 3.7. Найдите огибающую для следующих семейств кривых на плоскости с декартовыми координатами x, y:

(1) семейства окружностей γ_α, заданных уравнениями $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = 1$;

(2) семейства отрезков данной длины, концы которых расположены на взаимно перпендикулярных прямых;

(3) для семейства серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющих данную точку с точками данной прямой.

Упражнение 3.8 (Формула Крофтона)**.** Рассмотрим на плоскости всевозможные ориентированные прямые (для каждой прямой можно выбрать одну из двух ориентаций, т.е. единичный вектор, параллельный прямой). Это направление для ориентированной прямой ℓ обозначим $\nu(\ell)$. Также через $\varphi = \varphi(\ell)$ обозначим аргумент вектора $\nu = \nu(\ell)$, т.е. $\nu = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Далее, определим *ориентированное расстояние* $p = p(\ell)$ от ориентированной прямой ℓ до начала координат O следующим образом: если прямая ℓ проходит через O, то положим $p = 0$; если не проходит, то пусть A — ближайшая к O точка прямой; тогда $p = |OA|$, если базис OA, ν положительно ориентирован, и $p = -|OA|$ в противном случае.

Пусть γ — спрямляемая плоская кривая и ℓ — ориентированная прямая. Через $n_\gamma(\ell) = n_\gamma(\varphi, p)$ обозначим количество точек множества $\ell \cap \operatorname{im}\gamma$ (это количество может быть бесконечным). Тогда длина $|\gamma|$ кривой γ может быть вычислена по следующей формуле:

$$|\gamma| = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} n_\gamma(\varphi, p)\, dp\right] d\varphi.$$

Непрерывную параметрическую кривую назовем *кусочно-регулярной*, если она склеена из конечного числа регулярных кривых. Докажите эту формулу для кусочно-регулярных кривых таких, что количество пересечений с прямыми ограничены: для каждой кривой существует число N такое, что количество пересечений с каждой прямой не превосходит N.

Упражнение 3.9 (Кривые постоянной ширины)**.** В этом упражнении все кривые — плоские. Спроецируем замкнутую кривую на прямую, тогда образ — отрезок. Прообраз этого отрезка при рассматриваемой проекции назовем *полосой, ограничивающей кривую*, а каждое из двух направлений прямых, ограничивающих полосу, — *направлением полосы*. Расстояние между граничными прямыми полосы назовем *шириной кривой в направлении полосы*. Замкнутую кривую назовем *выпуклой*, если она ограничивает выпуклую область. Выпуклую кривую, ширина которой не зависит от направления ограничивающей ее полосы, назовем *кривой постоянной ширины*, при этом ширину любой полосы, ограничивающей такую кривую, назовем *шириной* этой *кривой*. Кривую постоянной ширины, отличную от окружности, будем называть *нетривиальной*.

(1) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного нечетного числа $n \geq 3$ регулярных кривых.

(2) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного четного числа $n \geq 6$ регулярных кривых.

(3) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из четырех регулярных кривых.

(4) Докажите, что длина кривой постоянной ширины w равна πw (теорема Барбье).

(5) Покажите, что каждая граничная прямая полосы, ограничивающей кривую постоянной ширины, пересекает кривую ровно в одной точке. Эти точки, для данной полосы, называются *противоположными точками кривой*, а соединяющий их отрезок — *диаметром кривой*, соответствующим данной полосе. Покажите, что диаметр кривой постоянной ширины перпендикулярен соответствующей ему полосе.

(6) Точку кривой $\gamma(t)$, $i \in I$, назовем *внутренней точкой регулярности*, если t — внутренняя точка промежутка I, а γ регулярна в t. Предположим, что концы диаметра кривой постоянной ширины являются внутренними точками регулярности. Докажите, что центры кривизны этих точек совпадают и, значит, сумма радиусов кривизны в таких точках равна ширине кривой.

Упражнение 3.10. *Овалом* на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется замкнутая кривая положительной кривизны, ограничивающая строго выпуклую область (для любых двух точек этой области внутренность соединяющего их отрезка лежит внутри области). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.