# Лекция 2

# Кривизны кривых

**План.** $p$-регулярные кривые, бирегулярные, базис Френе для $(n-1)$-регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$, формулы Френе, кривизны, явный вид кривизн, вывод стандартных формул кривизны и ориентированной плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве.

Чтобы охарактеризовать изменение формы кривой, мы введем в рассмотрение конечный набор функций и приведем условия, гарантирующие, что эти функции определяют форму кривой однозначно.

## 2.1 Формулы Френе и кривизны

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, и $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, где $I$ — некоторый промежуток. Мы начнем с доказательства технических результатов.

**Предложение 2.1.** *Пусть $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$ и $\eta\colon I \to \mathbb{R}^n$ — гладкие отображение, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\big\langle \xi(t), \eta(t)\big\rangle' = \big\langle \dot\xi(t), \eta(t)\big\rangle + \big\langle \xi(t), \dot\eta(t)\big\rangle.$$

*Доказательство.* Распишите это скалярное произведение в координатах и продифференцируйте по правилу Лейбница. □

**Предложение 2.2.** *Пусть $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, причем величина $\|\xi(t)\|$ постоянна. Тогда при каждом $t$ векторы $\xi(t)$ и $\dot\xi(t)$ ортогональны.*

*Доказательство.* Используя предложение 2.1, продифференцируем уравнение $\big\langle \xi(t), \xi(t)\big\rangle = \mathrm{const}$ и получим

$$2\big\langle \dot\xi(t), \xi(t)\big\rangle = 0,$$

что и требовалось. □

Далее, для гладкой кривой $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ и $1 \le p \le n$, будем говорить, что $\gamma$ является *$p$-регулярной в точке $t$*, если векторы

$$\dot\gamma(t),\ \ddot\gamma(t), \dots, \gamma^{(p)}(t)$$

линейно независимы.

**Задача 2.3.** Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая.

(1) Покажите, что свойство кривой $\gamma$ быть $p$-регулярной не зависит от параметризации (напомним, что для гладких кривых мы рассматриваем только регулярные замены параметра).

(2) Докажите, что если кривая $\gamma$ является $p$-регулярной в точке $t$, то она также $p$-регулярна в достаточно малой окрестности точки $t$.

Отметим, что при $p = 1$ кривая просто регулярна, а при $p = 2$ кривая также называется *бирегулярной*.

Если кривая $\gamma$ является $(n-1)$-регулярной, то применим ортогонализацию Грама–Шмидта к линейно независимым векторам $\dot\gamma(t)$, $\ddot\gamma(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)$ и построим ортонормальную систему векторов $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$. Дополним эту систему вектором $\nu_n$ до положительно ориентированного ортонормального базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Полученный базис называется *базисом Френе*.

**Задача 2.4.** Проверьте, что базис Френе не меняется при замене параметризации, сохраняющей направление движения.

Выясним, как раскладываются скорости $\dot\nu_p$ изменения векторов $\nu_p$ базиса Френе по этому базису. Положим $\Gamma_{i_1\cdots i_p} = \bigl(\gamma^{(i_1)}, \ldots, \gamma^{(i_p)}\bigr)$, так что если кривая $\gamma$ является $(n-1)$-регулярной, все $i_q$ различны и не превосходят $n-1$, то $\Gamma_{i_1\cdots i_p}$ — невырожденный $p$-параллелепипед, и для него определен объем $\operatorname{vol}(\Gamma_{i_1\cdots i_p})$, см. раздел 6 введения. Напомним, что в разделе 7 введения мы определили vol также для "пустого параллелепипеда", положив $\operatorname{vol}(\emptyset) = 1$. Кроме того, мы выберем стандартную ориентацию $\mathbb{R}^n$ в качестве положительной, тогда также определен ориентированный объем $\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})$. Отметим, что $n$-параллелепипед $\Gamma_{1\cdots n}$ может быть вырожденным, так как мы не предполагаем, что кривая $\gamma$ является $n$-регулярной, ограничиваясь $(n-1)$-регулярностью. Таким образом, $\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})$ может принимать как нулевое, так и отрицательные значения.

**Теорема 2.5.** *Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — произвольная $(n-1)$-регулярная кривая, тогда*

$$
\begin{cases}
\dot\nu_1 = k_1\,\nu_2,\\
\dot\nu_2 = -k_1\,\nu_1 + k_2\nu_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot\nu_{n-1} = -k_{n-2}\,\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n,\\
\dot\nu_n = -k_{n-1}\,\nu_{n-1},
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

*где*

$$
k_p = \begin{cases}
\dfrac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p-1})\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p+1})}{\operatorname{vol}^2(\Gamma_{1\cdots p})} & \text{при } 1 \le p \le n-2,\\[2ex]
\dfrac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots n-2})\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})}{\operatorname{vol}^2(\Gamma_{1\cdots n-1})} & \text{при } p = n-1,
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

*в частности, все $k_1, \ldots, k_{n-2}$ — положительные функции, а $k_{n-1}$ может принимать как отрицательные значения, так и быть равной нулю.*

*Доказательство.* По определению ортогонализации, $\nu_1 = \dot\gamma/\|\dot\gamma\|$ и, значит, $\dot\nu_1$ является линейной комбинацией $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$, а, поэтому, также является линейной комбинацией $\nu_1$ и $\nu_2$ (вспомните определение ортогонализации Грама–Шмидта). Так как $\|\nu_1\| = 1$, то, по предложению 2.2, имеем $\dot\nu_1 \perp \nu_1$, так что $\dot\nu_1 = k_1\nu_2$, где $k_1$ — некоторый коэффициент (функция параметра кривой $\gamma$).

Пусть теперь $1 < p < n-1$. По определению процесса ортогонализации, вектор $\nu_p$ является линейной комбинацией векторов $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(p)}$ с коэффициентами — функциями параметра кривой $\gamma$, поэтому $\dot\nu_p$ — это аналогичная линейная комбинация векторов $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(p+1)}$. Так как линейная оболочка векторов $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(p+1)}$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}$, то, тем самым, $\dot\nu_p$ — линейная комбинация векторов $\nu_1, \ldots, \nu_{p+1}$.

Далее, так как $\langle\nu_p, \nu_i\rangle = 0$ при $i < p$, то

$$0 = \langle\nu_p, \nu_i\rangle' = \langle\dot\nu_p, \nu_i\rangle + \langle\nu_p, \dot\nu_i\rangle.$$

Так как $\dot\nu_i$ является линейной комбинацией векторов $\nu_1, \ldots, \nu_{i+1}$, а векторы $\nu_j$ ортогональны, то при $i \le p-2$ выполняется $\langle\nu_p, \dot\nu_i\rangle = 0$, откуда, при таких $i$, имеем $\langle\dot\nu_p, \nu_i\rangle = 0$, т.е. $\dot\nu_p$ ортогонален всем $\nu_i$ при $i \le p-2$. Добавим сюда, что, в силу $\|\nu_p\| = 1$ и предложения 2.2, векторы $\dot\nu_p$ и $\nu_p$ ортогональны. Итак, при $1 < p < n$ вектор $\dot\nu_p$ является линейной комбинацией $\nu_{p-1}$ и $\nu_{p+1}$. Положим $\dot\nu_p = a_p\nu_{p-1} + k_p\nu_{p+1}$. Отметим, что это выражение превращается в полученное выше равенство $\dot\nu_1 = k_1\nu_2$, если положить $a_1 = 0$ и $\nu_0 = 0$, что мы и сделаем.

Продифференцируем теперь равенство $\langle\nu_{p-1}, \nu_p\rangle = 0$ и воспользуемся предыдущими результатами. Имеем

$$0 = \langle\dot\nu_{p-1},\, \nu_p\rangle + \langle\nu_{p-1},\, \dot\nu_p\rangle = \langle a_{p-1}\nu_{p-2} + k_{p-1}\nu_p,\, \nu_p\rangle + \langle\nu_{p-1},\, a_p\nu_{p-1} + k_p\nu_{p+1}\rangle = k_{p-1} + a_p = 0,$$

откуда $a_p = -k_p$.

Пусть $p = n-1$. Разложим $\dot\nu_{n-1}$ по базису $\nu_1,\dots,\nu_n$. Как и выше, доказываем, что $\dot\nu_{n-1} = -k_{n-2}\,\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n$. Вычислим теперь $\dot\nu_n$. Снова $\dot\nu_n = a_n\nu_{n-1}$, откуда

$$0 = \langle \nu_n, \nu_{n-1}\rangle' = \langle \dot\nu_n, \nu_{n-1}\rangle + \langle \nu_n, \dot\nu_{n-1}\rangle = a_n + \langle \nu_n, -k_{n-2}\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n\rangle = a_n + k_{n-1},$$

поэтому $a_n = -k_{n-1}$, и мы опять получаем формулы (2.1).

Найдем теперь все $k_p$. Предположим сначала, что все векторы $\dot\gamma,\dots,\gamma^{(n)}$ линейно независимы. Заметим, что вектор $\nu_n$ совпадает с последним вектором ортогонализации системы $\dot\gamma,\dots,\gamma^{(n)}$, если эта система положительно ориентирована. В противном случае, направление вектора $\nu_n$ противоположно последнему вектору ортогонализации. Отсюда и из замечания 16 вытекает, что при всех $1 \le p \le n$ выполняется

$$\gamma^{(p)} = \alpha_p\nu_p + \dots, \quad \text{где} \quad \alpha_p = \frac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p})}{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p-1})}, \quad \text{при } p<n, \text{ и } \quad \alpha_n = \frac{\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})}{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots n-1})}, \tag{2.3}$$

$$\nu_p = \beta_p\gamma^{(p)} + \dots, \quad \text{где} \quad \beta_p = \frac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p-1})}{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p})} \quad \text{при } p<n, \text{ и } \quad \beta_p = \frac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots n-1})}{\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})}; \tag{2.4}$$

в первой формуле “$\dots$” обозначает линейную комбинацию $\nu_q$ с $q<p$, а, во второй — линейную комбинация $\gamma^{(q)}$ с $q<p$.

Дифференцируя равенство (2.4) и подставляя в правую часть выражения для всех $\gamma^q$ из равенства (2.3), получаем

$$\dot\nu_p = \beta_p\gamma^{(p+1)} + \dots = \beta_p\alpha_{p+1}\nu_{p+1} + \dots,$$

где последнее $\dots$ обозначает линейную комбинацию $\nu_q$ с $q < p+1$. Следовательно,

$$k_p = \langle \dot\nu_p, \nu_{p+1}\rangle = \beta_p\alpha_{p+1},$$

откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь вектор $\gamma^{(n)}$ линейно зависим с $\dot\gamma,\dots,\gamma^{(n-1)}$. Тогда $\dot\nu_{n-1}$ лежит в линейной оболочке векторов $\nu_1,\dots,\nu_{n-1}$, поэтому $k_{n-1} = 0$, и этот $k_{n-1}$ удовлетворяет формуле (2.2), так как в этом случае $n$-параллелепипед $\Gamma_{1\cdots n}$ вырожден и, по определению, $\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n}) = 0$. Все остальные $k_p$ вычисляются точно так же. $\square$

В полученных формулах (2.1) и (2.2) коэффициенты $k_p$ зависят от параметризации. Чтобы получить характеристики кривой, из всех параметризаций выбирают некоторый подкласс, для которого все $k_p$ одни и те же. Традиционно в качестве такого подкласса берут семейство натуральных параметризаций, сохраняющих направление движения. По предложению 1.28, все такие параметризации отличаются сдвигом на константу, а такие замены не меняют производные, поэтому все $k_p$ сохраняются. Более того, все $k_p$ при $p<n$ также сохраняют свои значения при замене на натуральную параметризацию, обращающую направление движения.

**Задача 2.6.** Выясните, что происходит с $k_{n-1}$ при изменении направления движения на противоположное.

**Определение 2.7.** Величина $k_p$, вычисленная для натурально параметризованной $(n-1)$-регулярной кривой $\gamma$, называется *$p$-ой кривизной кривой* $\gamma$.

Отметим, что в теореме 2.5 мы провели вычисления для произвольной параметризации и для коэффициентов $k_p$ получили формулы одного и того же вида. По задаче 2.4, базис Френе не зависит от выбора параметризации, сохраняющей направление движения. А что происходит с производными векторов базиса Френе? Пусть $s$ — натуральный параметр, $t$ — произвольный, причем $s_t > 0$, тогда $\frac{d\nu_p}{dt} = \frac{d\nu_p}{ds}s_t$, откуда выражение для $\frac{d\nu_p}{dt}$ получается из формулы Френе для $\frac{d\nu_p}{ds}$ делением всех коэффициентов на $s_t = \|\gamma_t\|$. Итак, мы приходим к следующему результату.

**Следствие 2.8** (Формула кривизн кривой в произвольной параметризации)**.** *Пусть $\gamma(t)$, $t\in I$, — произвольная $(n-1)$-регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$ и $k_1,\dots,k_{n-1}$ — ее кривизны (коэффициенты в формулах Френе кривой $\gamma$, параметризованной натурально с сохранением направления). Пусть $\Gamma_{1\cdots p}$ обозначает $p$-параллелепипед $(\dot\gamma,\cdots,\gamma^{(p)})$, где производные берутся относительно исходного параметра $t$. Тогда*

$$k_p = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p-1})\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots p+1})}{\operatorname{vol}^2(\Gamma_{1\cdots p})\,\|\dot\gamma\|} & \text{при } 1\le p\le n-2, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{vol}(\Gamma_{1\cdots n-2})\operatorname{vol}_0(\Gamma_{1\cdots n})}{\operatorname{vol}^2(\Gamma_{1\cdots n-1})\,\|\dot\gamma\|} & \text{при } p=n-1, \end{cases} \tag{2.5}$$

**Следствие 2.9.** *Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — аффинное преобразование, равное композиции сохраняющего ориентацию ортогонального преобразования $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и некоторого сдвига $x \mapsto x + \tau$, где $x, \tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда $A$ не меняет кривизны каждой $(n-1)$-регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$.*

*Доказательство.* Действительно, пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная $(n-1)$-регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$. Так как $F$ — аффинное отображение, то $(F\gamma)^{(k)} = A\gamma^{(k)}$. С другой стороны, ортогональное преобразование не меняет как длины векторов, так и объемы $p$-параллелепипедов, что легко доказать индукцией по $p$ (сделайте это). Кроме того, если преобразование $A$ сохраняет ориентацию, то оно также не меняет и ориентированные объемы $n$-параллелепипедов. Осталось заметить, что формулы (2.5) выражают кривизны исключительно через объемы $p$-параллелепипедов и ориентированные объемы $n$-параллелепипедов от производных $\gamma^{(k)}$. $\square$

Отметим, что на практике вычисление кривизн кривой $\gamma$ проще проводить во время ортогонализации системы векторов из производных $\gamma^{(i)}$. Следующий результат вытекает из вычислений, проделанных в доказательстве теоремы 2.5.

**Следствие 2.10.** *Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — произвольная $(n-1)$-регулярная кривая, $\nu_1, \dots, \nu_n$ — ее базис Френе, а $k_1, \dots, k_{n-1}$ — кривизны. Пусть, как и в доказательстве теоремы, $\gamma^{(p)} = \alpha_p \nu_p + \dots$, или, другими словами, $\alpha_p = \langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle$, тогда*

$$k_p = \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p\, \alpha_1} = \frac{\langle \gamma^{(p+1)}, \nu_{p+1} \rangle}{\langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle\, \|\dot\gamma\|}.$$

Обсудим, как выглядят некоторые кривизны и векторы базиса Френе, а за одно приведем формулы для кривых на плоскости и в трехмерном пространстве. Так как для натурального параметра имеем $\|\dot\gamma\| = 1$, то $\nu_1 = \dot\gamma$. Выбор вектора $\nu_2$ отличается для случаев $n = 2$ и $n > 2$. Если $n > 2$, то, в силу $\|\dot\gamma\| = 1$, имеем $\ddot\gamma \perp \dot\gamma$, поэтому $\nu_2 = \ddot\gamma / \|\ddot\gamma\|$ и, таким образом, $k_1 = \|\ddot\gamma\|$.

Если же $n = 2$, то, в соответствии с нашей договоренностью о выборе вектора $\nu_n$, вектор $\nu_2$ выбирается так, чтобы пара $\nu_1, \nu_2$ была положительно ориентированным ортонормальным базисом. Таким образом, для определения вектора $\nu_2$ не требуется выполнение условия $k_1 \ne 0$, равносильное 2-регулярности кривой. Если $k_1 \ne 0$, то, в зависимости от ориентации ортогонального базиса $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, имеем $\nu_2 = \pm\ddot\gamma/\|\ddot\gamma\|$. В этом случае, вектор $\nu := \ddot\gamma/\|\ddot\gamma\|$ традиционно называется *главной нормалью*, а величина $k = \|\ddot\gamma\|$ — кривизной кривой, в отличии от величины $k_1$, которая называется *ориентированной кривизной*. Формулы Френе из теоремы 2.5 выглядят так: $\dot\nu_1 = k_1\nu_2$, $\dot\nu_2 = -k_1\nu_1$ и называются *ориентированными формулами Френе*. В отличие от них, (неориентированные) формулы Френе связывают кривизну $k$, главную нормаль $\nu$ и скорость $\tau = \dot\gamma$. Они выглядят абсолютно аналогично ориентированным формулам Френе: $\dot\tau = k\nu$, $\dot\nu = -k\tau$, однако они имеют место только для бирегулярных кривых (ориентированные формулы Френе обслуживают более широкий класс регулярных кривых).

Выпишем теперь, как выглядит ориентированная кривизна $k_1$ и обычная кривизна $k$ для плоской кривой. Имеем

$$k_1 = \frac{\mathrm{vol}_0(\dot\gamma, \ddot\gamma)\,\mathrm{vol}(\emptyset)}{\mathrm{vol}^2(\dot\gamma)\,\|\dot\gamma\|} = \frac{[\dot\gamma, \ddot\gamma]}{\|\dot\gamma\|^3}, \quad k = \frac{\mathrm{vol}(\dot\gamma, \ddot\gamma)\,\mathrm{vol}(\emptyset)}{\mathrm{vol}^2(\dot\gamma)\,\|\dot\gamma\|} = \frac{\big|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big|}{\|\dot\gamma\|^3}, \tag{2.6}$$

где через $[\dot\gamma, \ddot\gamma]$ мы обозначили площадь ориентированного параллелограмма, натянутого на векторы $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$, т.е. определитель матрицы, столбцы которой — координаты этих векторов. В явном виде, если $x$, $y$ — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, и $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, то

$$k_1 = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}, \quad k = \frac{|\dot x\ddot y - \dot y\ddot x|}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}. \tag{2.7}$$

Для трехмерного случая имеем две $k_i$: первая из них, $k_1 = k = \|\ddot\gamma\|$, называется *кривизной* (теперь тут нет двух типов кривизны), а вторая, $k_2$, обозначается $\varkappa$ и называется *кручением*. Как и в двумерном случае, $\tau := \nu_1 = \dot\gamma$ — *скорость*; $\nu := \nu_2 = \ddot\gamma/k$ — *главная нормаль*; третий вектор $\nu_3$, который обозначается $\beta$ и называется *бинормалью*, дополняет $\tau$ и $\nu$ до положительно ориентированного ортонормированного базиса, поэтому $\beta = [\tau, \nu]$, где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Формулы Френе в трехмерном случае даются теоремой 2.5 и имеют вид:

$$\begin{cases} \dot\tau = k\nu, \\ \dot\nu = -k\tau + \varkappa\beta, \\ \dot\beta = -\varkappa\nu. \end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом, кручение можно вычислить по формуле $\varkappa = -\langle \dot\beta, \nu \rangle$.

Снова воспользуемся следствием 2.8 и запишем, как выглядят кривизна и кручение произвольно параметризованной бирегулярной кривой в трехмерном пространстве. Кривизна записывается почти такой же формулой

$$k = \frac{\big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\|}{\|\dot\gamma\|^3}, \tag{2.9}$$

где $[\dot\gamma, \ddot\gamma]$ теперь — векторное произведение векторов $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$. Выпишем кручение:

$$\varkappa = \frac{\mathrm{vol}_0(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)\,\mathrm{vol}(\dot\gamma)}{\mathrm{vol}^2(\dot\gamma, \ddot\gamma)\,\|\dot\gamma\|} = \frac{\langle \dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma \rangle}{\big\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\big\|^2}, \tag{2.10}$$

где через $\langle \dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma \rangle$ обозначено смешанное произведение векторов, т.е. определитель матрицы, столбцами которой являются координаты этих векторов.

## Упражнения к главе 2

**Упражнение 2.1.** Вычислите кривизну, ориентированную кривизну и базис Френе для плоских регулярных кривых, заданных

(1) графиком функции $y = f(x)$;

(2) неявной функцией $F(x, y) = c$.

**Упражнение 2.2.** Для следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами $x$, $y$, вычислите кривизну, ориентированную кривизну и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

(2) для дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$;

(3) для графика функции $y = \operatorname{ch}(x)$;

(4) для эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

**Упражнение 2.3.** Для следующих кривых, заданных в трехмерном пространстве с декартовыми координатами $x$, $y$, $z$, вычислите кривизну, кручение, и найдите базис Френе:

(1) для отрезка прямой;

(2) для винтовой линии $\gamma(t) = (a\,\cos t,\, a\sin t,\, b\,t)$, $a > 0$;

(3) для кривой $\gamma(t) = (t^2,\, 1 - t,\, t^3)$.

**Упражнение 2.4.** Рассмотрим следующую кривую в четырехмерном пространстве:

$$\gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right).$$

Вычислите базис Френе и кривизны кривой $\gamma$.

**Упражнение 2.5.** Для кривых в трехмерном пространстве, докажите, что

(1) регулярная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю;

(2) бирегулярная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Выясните, верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой $\gamma$ выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = 0$, то $\gamma$ лежит в некоторой плоскости?

**Упражнение 2.6.** Покажите, что $(n-1)$-регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой $k_{n-1} = 0$, лежит в $(n-1)$-мерном аффинном пространстве.

**Упражнение 2.7.** Покажите, что натурально параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$, у которой тождественно равна нулю некоторая производная порядка $k > 1$, является отрезком прямой.

**Упражнение 2.8.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^3$ имеет постоянную кривизну $k > 0$, если и только если существует натурально параметризованная кривая $\tau(\sigma)$ на единичной сфере и точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{k}\int_{ka}^{ks} \tau\, d\sigma.$$

**Упражнение 2.9.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^3$ имеет постоянное кручение $\varkappa \neq 0$, если и только если на единичной сфере существует натурально параметризованная кривая $\beta(\sigma)$ ненулевой геодезической кривизны (проекция вектора ускорения $\beta_{\sigma\sigma}$ на касательную плоскость к сфере всюду отлична от нуля), а в пространстве — точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{\varkappa}\int_{\varkappa a}^{\varkappa s} [\beta, \beta_\sigma]\, d\sigma.$$

**Упражнение 2.10.** Докажите, что кривизна бирегулярной кривой в $\mathbb{R}^3$ пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор $u$ такой, что $\langle u, \tau\rangle = \mathrm{const} \neq 0$.

**Упражнение 2.11.** Докажите, что натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^3$ с кривизной $k$, для которой $\dot{k} \neq 0$, и с ненулевым кручением $\varkappa$ лежит на сфере радиуса $R$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

Приведите пример бирегулярной натурально параметризованной кривой, не лежащей на сфере, для которой выполнены все условия задачи, кроме $\dot{k} \neq 0$.