Лекция 1

Кривые

План. Промежутки, параметрическая кривая в топологическом пространстве (выходящая из точки, приходящая в точки, соединяющая точки, замкнутая, незамкнутая), замена параметра, кривая, ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина параметрической кривой в метрическом пространстве, независимость длины от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, обобщенное неравенство треугольника, функционал длины, операции над кривыми (ограничение, склейка, замена параметра), свойства функционала длины (аддитивность, непрерывность, независимость от параметра, согласованность с топологией), натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, безостановочные кривые, существование натурального параметра на безостановочной кривой, гладкие кривые в евклидовом пространстве, вектор скорости гладкой кривой, регулярные кривые, три способа задания регулярных кривых в евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность, интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный.

1.1 Общие определения

В разных приложениях области определения кривых могут быть существенно разного вида. Общее у всех этих областей — то, что они являются связными подмножествами вещественной прямой $\mathbb{R}$. Эти связные подмножества мы будем называть *промежутками.* Таким образом, в качестве промежутка можно взять интервал, полуинтервал, отрезок, причем первые два могут быть как конечными, так и бесконечными, а именно, бесконечный интервал — это или открытый луч, или вся прямая, а бесконечный полуинтервал — замкнутый луч. Если I — промежуток, то через $|I|$ обозначим его длину (величина $|I|$ может равняться бесконечности).

Отметим, что на каждом промежутке имеются индуцированные с прямой $\mathbb{R}$ метрика и топология, так что можно измерять расстояния между точками промежутка, длины промежутка и его подпромежутков; кроме того, определены непрерывные отображения из промежутков в топологические пространства. Далее, для каждого открытого промежутка и его отображения в линейное нормированное пространство V, например в $\mathbb{R}^n$, можно говорить о дифференцируемости и гладкости отображения. Если же промежуток I не является открытым, то он содержится в некотором открытом промежутке I', и под гладким отображением из I в V будем понимать ограничение некоторого гладкого отображения из I' в V.

Пусть X — топологическое пространство, а I — промежуток. *Параметрической кривой* будем называть каждое непрерывное отображение $\gamma\colon I \to X$; при этом будем говорить, что такая параметрическая кривая *параметризована промежутком* I. Если промежуток I ограничен снизу (сверху) и включает свой левый (правый) конец $a \in \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R}$), то говорим, что γ *выходит из* $\gamma(a)$ (*входит в* $\gamma(b)$); если I ограничен сверху и снизу и включает оба своих конца a и b, т.е. $I = [a, b]$, то говорим, что γ *соединяет* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$. Параметрическая кривая γ называется *замкнутой*, если она параметризована отрезком $I = [a, b]$ и $\gamma(a) = \gamma(b)$; иначе параметрическая кривая γ называется *незамкнутой.*

Пусть J — другой промежуток, гомеоморфный I, а $\varphi\colon J \to I$ — некоторый гомеоморфизм. Будем говорить, что параметрические кривые γ и $\delta = \gamma \circ \varphi$ получаются друг из друга *заменой параметра.* Если t – координата на I, а s — координата на J, то, в соответствии с традицией, вместо $\delta(s)$ пишут $\gamma(s)$, тем самым, отождествляя $\gamma(s)$ с $(\gamma \circ \varphi)(s)$. Понять это соглашение можно из следующих соображений.

Легко видеть, что отношение на множестве всех параметрических кривых в X, в котором кривые находятся в отношении, если и только если они получаются друг из друга заменой параметра, является эквивалентностью, поэтому множество всех параметрических кривых на X разбивается на классы этой эквивалентности. Под *непараметрической кривой* или просто *кривой* будем понимать каждый из этих классов. Тем самым, говоря про кривую γ, можно считать, что γ обозначает некоторый класс, а $\gamma(s)$ — это уже конкретный элемент этого класса (конкретная параметрическая кривая).

Если все параметрические кривые из класса эквивалентности γ обладают некоторым свойством P, то говорим, что и сама кривая γ удовлетворяет этому свойству. Так, все параметрические кривые из класса эквивалентности γ имеют один и тот же образ, а также замкнуты или не замкнуты одновременно. Первое позволяет корректно определить множество $\operatorname{im}\gamma$, являющееся образом произвольной параметрической кривой из этого класса. Будем говорить, что точка $x \in X$ *лежит на кривой* γ, если $x \in \operatorname{im}\gamma$. Второе дает возможность говорить о *замкнутой* или *незамкнутой* кривой γ.

Если среди кривых класса γ имеется параметрическая кривая $\gamma(s)$, удовлетворяющая некоторому свойству P, то будем говорить, что γ *может быть параметризована так, чтобы выполнялось свойство* P. Кроме того, мы будем неформально говорить то же самое не только про класс γ, но и про конкретную параметризацию $\gamma(s)$, а именно, "параметрическая кривая $\gamma(s)$ может быть параметризована так, чтобы выполнялось P". Ниже мы введем понятие натурального параметра и опишем те кривые, которые могут быть натурально параметризованы.

Если пространство X — метрическое, то естественным образом определяется длина кривой, функционал длины и спрямляемые кривые. Приведем соответствующие построения.

1.2 Длина кривой

В данном разделе X будет метрическим пространством. По аналогии с тем, как это делается в $\mathbb{R}^n$, конечную последовательность $L = (A_0, \dots, A_n)$ точек пространства X назовем *ломаной в* X; при этом пары (A_{i-1}, A_i) будем называть *ребрами ломаной* L, а числа $|A_{i-1}A_i|$ — *длинами* этих ребер. Сумма длин всех ребер ломаной L называется *длиной ломаной* L и обозначается $|L|$. Длину L одноточечной ломаной $L = (A_0)$ положим равной нулю.

Пусть I — некоторый промежуток. Множество всевозможных конечных строго монотонных последовательностей $(t_0 < t_1 < \dots < t_m) \subset I$ обозначим $\Theta(I)$. Пусть $\gamma\colon I \to X$ — произвольная параметрическая кривая. Для каждой монотонной последовательности $\xi = (t_0 < t_1 < \dots < t_m) \in \Theta(I)$ рассмотрим соответствующую ей ломаную $L_\gamma(\xi) = \big(\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)\big)$ (такие ломаные будем называть *вписанными в* γ), тогда величина

$$|\gamma| = \sup_{\xi \in \Theta(I)} \big|L_\gamma(\xi)\big|$$

называется *длиной параметрической кривой* γ.

Замечание 1.1. Так как множество всех ломаных, вписанных в кривую, не зависит от параметризации, то длина параметрической кривой не меняется при замене параметра. Тем самым, длина $|\gamma|$ корректно определена для всего класса эквивалентности γ параметрических кривых.

Параметрическая кривая $\gamma\colon I \to X$ называется *спрямляемой*, если для каждого отрезка $J = [a, b] \subset I$ параметрическая кривая $\gamma|_J$ имеет конечную длину: $\big|\gamma|_J\big| < \infty$.

Замечание 1.2. Так как непрерывные отображения сохраняют связность и компактность, а отрезки — это в точности все компактные промежутки, то свойство параметрической кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от параметризации. Таким образом, спрямляемость определена для кривых (классов эквивалентности).

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Напомним, что отображением $f\colon X \to Y$ из метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *липшицевым*, если существует такое $C > 0$, что для любых $x, x' \in X$ выполняется $\big|f(x)f(x')\big| \le C\,|xx'|$. Каждое такое C называется *константой Липшица*, а точная нижняя грань $\operatorname{dil} f$ констант Липшица — *растяжением отображения* f (обозначение происходит от английского слова dilatation). Иногда, для краткости, липшицево отображение с константой Липшица C называют *C-липшицевым*.

Пример 1.3. Каждая C-липшицева параметрическая кривая $\gamma\colon I \to X$ спрямляемая. Действительно, пусть $J \subset I$ — произвольный отрезок. Положим $\delta = \gamma|_J$. Тогда для любой монотонной последовательности $\xi = (t_0 < t_1 < \dots < t_m) \in \Theta(J)$ имеем

$$|L_\delta(\xi)| \le \sum_{i=1}^m \big|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\big| \le \sum_{i=1}^m C(t_i - t_{i-1}) \le C|J|.$$

Таким образом, $\big|\gamma|_J\big| \le C|J| < \infty$ для каждого отрезка $J \subset I$, поэтому кривая γ — спрямляема.

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

Предложение 1.4 (Обобщенное неравенство треугольника). *Пусть точки $x, y \in X$ лежат на кривой γ, тогда $|\gamma| \ge |xy|$.*

Пусть $\Omega(X)$ — семейство всех параметрических кривых в метрическом пространстве X.

Определение 1.5. Обозначим $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to [0, \infty]$ отображение, определенное правилом $\mathcal{L}\colon \gamma \mapsto |\gamma|$, и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на $\Omega(X)$ естественно определены следующие операции:

(1) *ограничение* каждой параметрической кривой $\gamma\colon I \to X$ на каждый подпромежуток $J \subset I$;

(2) *склейка* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ тех пар параметрических кривых $\gamma_1\colon I \to X$, $\gamma_2\colon J \to X$, для которых $I \cap J = \{b\}$ и $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, а именно, $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)\colon I \cup J \to X$ — параметрическая кривая, ограничения которой на I и J совпадают соответственно с γ_1 и γ_2;

(3) *замена параметра* и *эквивалентность*, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметра.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

Теорема 1.6. *Пусть $\mathcal{L}\colon \Omega(X) \to [0, \infty]$ — функционал длины, определенный на параметрических кривых метрического пространства X. Тогда $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами*:

(1) **аддитивность:** *если $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ — склейка кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$, то $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$*;

(2) **непрерывность:** *для любой спрямляемой $\gamma\colon I \to X$ функция $f(t) = \mathcal{L}\big(\gamma|_{I_t}\big)$, где $I_t = \{s \in I : s \le t\}$, — непрерывна*;

(3) **независимость от параметра:** *для каждой кривой $\gamma\colon I \to X$ и замены параметра $\varphi\colon J \to I$ выполняется $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \varphi)$*;

(4) **согласованность с топологией:** *для каждого $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $y \in X \setminus U_\varepsilon(x)$ и кривой $\gamma \in \Omega(X)$, соединяющей x и y, выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \ge \varepsilon$.*

Доказательство. Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное $t \in I$ и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при всех $s \in I \cap (t - \delta, t + \delta)$ выполняется $\big|f(t) - f(s)\big| < \varepsilon$. Положим $\ell = |\gamma|$. По определению, существует монотонная последовательность $\xi \in \Theta(I)$ такая, что $\ell - \varepsilon/2 < \big|L_\gamma(\xi)\big| \le \ell$. Если $t \notin \xi$, добавим его к ξ (полученную последовательность обозначим той же буквой). Ясно, что для полученной последовательности по-прежнему выполняется $\ell - \varepsilon/2 < \big|L_\gamma(\xi)\big| \le \ell$.

В качестве δ_1 возьмем расстояние от t до ближайшего отличного от t элемента последовательности ξ. Так как расширениями последовательности ξ мы можем менять длину ломаной $L_\gamma(\xi)$ лишь в пределах $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$, то для каждого $s \in I \cap (t - \delta_1, t + \delta_1)$ длина $\ell_{ts} = \big|f(t) - f(s)\big|$ фрагмента кривой γ между точками $\gamma(t)$ и $\gamma(s)$ отличается от $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big|$ менее чем на $\varepsilon/2$: длина этого фрагмента равна супремуму длин вписанных ломаных, а каждая такая ломаная, добавленная к $L_\gamma(\xi)$, может увеличить длину $L_\gamma(\xi)$ меньше чем на $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу непрерывности отображения γ, существует такое $\delta_2 > 0$, что при всех $s \in I \cap (t - \delta_2, t + \delta_2)$ имеем $\big|\gamma(t)\gamma(s)\big| < \varepsilon/2$. Осталось положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Дополнительный материал. Приведем еще одно важное свойство функционала длины $\mathcal{L}$.

Предложение 1.7 (Полунепрерывность снизу). *Функционал $\mathcal{L}$ полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности $\gamma_n\colon I \to X$ спрямляемых параметрических кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой параметрической кривой $\gamma\colon I \to X$, имеем*

$$\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n).$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших n выполняется $\mathcal{L}(\gamma) \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$, а раз так, то $\mathcal{L}(\gamma) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Выберем такую монотонную последовательность $\xi = (t_0 < t_1 < \cdots < t_m) \in I$, что $\mathcal{L}(\gamma) - \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \varepsilon/2$. Существует N такое, что для любого $n > N$ и всех i выполняется $\bigl|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4m}$. Отсюда мгновенно вытекает, что

$$\bigl|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)\bigr| < \bigl|\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)\bigr| + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому $\bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| < \bigl|L_{\gamma_n}(\xi)\bigr| + \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma) < \bigl|L_\gamma(\xi)\bigr| + \varepsilon/2 < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \le \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

1.3 Натуральная и равномерная параметризации кривых

Пусть, как и выше, X — метрическое пространство.

Определение 1.8. Параметрическая кривая $\gamma\colon I \to X$ называется *натурально параметризованной*, а параметр s промежутка I — *натуральным*, если для любого конечного подпромежутка $J \subset I$ выполняется $\bigl|\gamma|_J\bigr| = |J|$. Параметр t параметрической кривой $\gamma(t)$ называется *равномерным*, а $\gamma(t)$ — *равномерно параметризованной*, если для некоторого $\lambda \ge 0$ и каждого конечного подпромежутка $J \subset I$ выполняется $\bigl|\gamma|_J\bigr| = \lambda\,|J|$. При этом число λ называется *скоростью равномерно параметризованной* γ.

Замечание 1.9. Если параметрическая кривая $\gamma(s)$, $s \in I$, параметризована равномерно и λ — ее скорость, то отображение γ является λ-липшицевым и, в силу примера 1.3, γ — спрямляемая кривая. Действительно, для любых $s_1, s_2 \in I$, $s_1 \le s_2$, промежуток $J = [s_1, s_2]$ содержится в I и $|J| = s_2 - s_1$, поэтому

$$\bigl|\gamma(s_1)\gamma(s_2)\bigr| = \lambda\,|J| = \lambda(s_2 - s_1),$$

что и требовалось.

Замечание 1.10. Пусть $\gamma\colon I \to X$ — равномерно параметризованная параметрическая кривая.

- Если промежуток I невырожденный, т.е. состоит более чем из одной точки и, значит, $|I| > 0$, то в нем можно выбрать ограниченный невырожденный подпромежуток J, и тогда скорость λ однозначно определяется из условия $|\gamma_J| = \lambda\,|J|$. В частности, если некоторый невырожденный промежуток отображается в точку (γ "останавливается" на невырожденном промежутке), то $\lambda = 0$ и, поэтому γ отображает и весь промежуток I в эту же точку.

- Если промежуток I вырожденный, то, формально говоря, λ может быть любым. Однако этот случай можно представить как предельный для последовательности отображений невырожденных промежутков в точку, а для этих отображений соответствующие λ равны нулю. Поэтому естественно принять следующее соглашение: **если промежуток I вырожденный, то положим** $\lambda = 0$.

Итак, в соответствии со сделанными наблюдениями и соглашением, равномерная параметрическая кривая имеет нулевую скорость, если и только если она — отображение в точку. Такие параметрические кривые будем называть *вырожденными*, а все остальные — *невырожденными*. Невырожденная кривая не имеет "остановок", т.е. для каждого невырожденного подпромежутка $J \subset I$ отображение $\gamma|_J$ не постоянно (не является отображением в точку). Тем самым, для кривых, имеющих остановки, не существует равномерной (в частности, натуральной), параметризации.

Параметрическую кривую $\gamma\colon I \to X$ назовем *безостановочной*, если для каждого невырожденного подпромежутка $J \subset I$ отображение $\gamma|_J$ не постоянно. Отметим, что если промежуток I — вырожденный, то в нем нет невырожденных подпромежутков, так что условие, гарантирующее безостановочность, выполнено. Таким образом, для вырожденного I кривая γ тоже безостановочна.

В примере 1.9 мы показали, что каждая равномерно параметризованная параметрическая кривая спрямляема. Приведем обратное утверждение.

Теорема 1.11. *Пусть $\gamma\colon I \to X$ — безостановочная спрямляемая кривая. Тогда γ может быть равномерно параметризована. Если промежуток I невырожден, то γ может быть параметризована даже натурально.*

Доказательство. Случай вырожденного I очевиден, поэтому будем сразу предполагать, что промежуток I невырожден.

Выберем произвольную внутреннюю точку $b \in I$ и разобьем промежуток на два подпромежутка I_1 и I_2, первый состоит из всех $t \in I$, не превосходящих b, а второй — из не меньших b. Таким образом, $I_1 \cap I_2 = \{b\}$ и для кривых $\gamma_k = \gamma|_{I_k}$ определена склейка. Если $s_k \in J_k$ — натуральный параметр для γ_k, то с помощью сдвигов $s_k - c_k$ на постоянные c_k, не меняющих свойства параметра быть натуральным (проверьте), добьемся того, чтобы J_1 и J_2 пересекались по точке, так что для параметрических кривых $\gamma_k(s_k)$ снова определена склейка. Ясно, что на склейке этих кривых параметры s_k склеиваются в натуральный. Более того, отображение $s_k \mapsto -s_k$ также сохраняет свойства параметра быть натуральным. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда промежуток I ограничен слева и содержит левый конец. Обозначим этот конец через a.

Далее, рассмотрим функцию $\psi(t) = |\gamma|_{[a,t]}|$. По теореме 1.6, функция ψ непрерывна и монотонно возрастает. Более того, это монотонное возрастание строгое, так как γ — безостановочна. Следовательно, ψ — гомеоморфизм с образом $J = \psi(I)$. Положим $\varphi = \psi^{-1}$, тогда φ — замена параметра. Пусть s — параметр на промежутке J. Выбираем любые $s_1, s_2 \in J$, $s_1 \le s_2$, полагаем $t_k = \varphi(s_k)$, тогда

$$\bigl|\gamma(s_1)\gamma(s_2)\bigr| = \psi(t_2) - \psi(t_1) = s_2 - s_1,$$

поэтому s — натуральный параметр на γ, что и требовалось. □

Дополнительный материал.

Определение 1.12. Скажем, что параметрические кривые $\gamma\colon I \to X$ и $\bar\gamma\colon J \to X$ получены друг из друга ***монотонной заменой параметра***, если или существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon J \to I$ такое, что $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$, или же существует монотонное сюръективное отображение $\varphi\colon I \to J$ такое, что $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$.

Задача 1.13. Докажите, что для произвольной спрямляемой параметрической кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X существует натурально параметризованная параметрическая кривая $\bigl[0, |\gamma|\bigr] \to X$ и равномерно параметризованная кривая $[0,1] \to X$ со скоростью $|\gamma|$, причем обе эти кривые получены из γ некоторыми монотонными заменами параметра.

1.4 Кривые в арифметическом пространстве, разные способы их задания

Рассмотрим теперь кривые в арифметическом пространстве $X = \mathbb{R}^n$. Пусть сначала $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — параметрическая кривая, t — стандартная координата на промежутке I, а $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты на $\mathbb{R}^n$, тогда γ записывается в этих координатах в виде упорядоченного набора $\bigl(x^1(t), \dots, x^n(t)\bigr)$ функций, причем непрерывность (гладкость) этих функций равносильна непрерывности (гладкости) отображения γ. В дальнейшем, представление кривой γ в виде n таких функций $x^i(t)$ будем называть ***координатной записью кривой*** γ.

Пусть γ — гладкое отображение, $\gamma(t) = \bigl(x^1(t), \dots, x^n(t)\bigr)$ — ее координатная запись, тогда в каждой точке $\gamma(t)$ определен ***вектор скорости*** $\dot\gamma(t) = \bigl(\dot x^1(t), \dots, \dot x^n(t)\bigr)$. Точка гладкой параметрической кривой называется ***особой***, если в ней вектор скорости равен нулю. Точка, не являющаяся особой, называется ***регулярной***. Гладкая кривая, состоящая из одних регулярных точек, также называется регулярной. У регулярных кривых уже не может быть изломов.

Напомним, что под ***кривыми*** мы условились понимать классы эквивалентности параметрических кривых. Рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^n$ и произвольного ее представителя — параметрическую кривую $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что отображение γ — гладкое, т.е. γ — гладкая параметрическая кривая.

Задача 1.14. Покажите, что

(1) гладкость отображения γ еще не гарантирует отсутствие "изломов": так, каждый угол на плоскости можно представить как образ гладкой параметрической кривой (приведите пример параметризации прямого угла, воспользовавшись, например, функциями вида e^{-1/t^2}, продолженными нулем в точку $t = 0$);

(2) гладкую параметрическую кривую можно сделать негладкой некоторой заменой координат (например, ввести на гладкой кривой, образ которой — угол, натуральную параметризацию, при этом, переход от натурального параметра к исходному можно задать гладкой функцией).

Чтобы не портить гладкость кривой, нам придется ограничить возможные замены параметра. Под *регулярной заменой параметра* будем понимать замену, гладкую вместе со своей обратной. В силу теоремы 56 об обратной функции (см. также замечание 57 из Введения), последнее равносильно неравенству нулю производной функции замены параметра. Две параметрических кривых назовем *регулярно эквивалентными*, если они отличаются друг от друга на регулярную замену параметра. Под *гладкой кривой* будем понимать класс регулярной эквивалентности гладкой параметрической кривой.

Замечание 1.15. Отметим, что при регулярной замене тип точки кривой (регулярная или особая) остается неизменным (см. теорему 54 о производной сложной функции). Таким образом, *регулярные замены оставляют регулярные кривые регулярными.*

Регулярные кривые можно задавать не только как классы регулярной эквивалентности, но и другим образом. Приведем еще два способа задания регулярных кривых.

1.4.1 Задание кривой в виде графика отображения

Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon I\to\mathbb{R}^{n-1}$ и его график

$$\Gamma_f=\Big\{\big(t,f(t)\big):t\in I\Big\}\subset I\times\mathbb{R}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n.$$

Если $x^1,\dots,x^{n-1}$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n-1}$, и отображение f задается набором непрерывных функций $\big(x^1(t),\dots,x^{n-1}(t)\big)$, то Γ_f можно представить как образ параметрической кривой $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$,

$$\gamma(t)=\big(t,x^1(t),\dots,x^{n-1}(t)\big).$$

Отметим, что если отображение f — гладкое, то соответствующая кривая γ — регулярная, так как $\dot\gamma=(1,\cdots)$.

Соглашение 1.16. Так как интересующие нас геометрические свойства не зависят от того, на какое место в правой части предыдущего равенства поставить t, мы будем также называться *графиком отображения* f и образ каждого отображения

$$t\mapsto\big(x^1(t),\dots,x^{i-1}(t),\,t\,,x^{i+1}(t),\dots,x^{n-1}(t)\big).$$

Учитывая соглашение 1.16, мы покажем, что для регулярных кривых в достаточно малых окрестностях их точек верно и обратное.

Предложение 1.17. *Пусть $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ — регулярная кривая и $\gamma(t)=\big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$ — ее координатная запись. Тогда для каждой точки $t_0\in I$ существует $\delta>0$ такое, что ограничение γ на промежуток $I'=(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap I$ задается в виде графика некоторого гладкого отображения.*

Доказательство. Так как $\dot\gamma\ne0$, то для некоторого i имеем $\dot x^i(t_0)\ne0$. Так как производная функции $x^i(t)$ непрерывна, существует $\delta>0$ такое, что при всех $t\in I'$ также выполняется $\dot x^i(t)\ne0$. Таким образом, на промежутке I' функция $s=x^i(t)$ задает регулярную замену параметра на параметрической кривой $\gamma:\mathrm{I}'\to\mathbb{R}^n$ (тут формально надо писать $\gamma|_{I'}$). Обозначим обратную функцию через $t(s)$, тогда на промежутке I' рассматриваемая кривая записывается в виде

$$\Big(x^1\big(t(s)\big),\dots,x^{i-1}\big(t(s)\big),s,x^{i+1}\big(t(s)\big),\dots,x^n\big(t(s)\big)\Big),$$

так что является графиком соответствующего гладкого отображения. □

1.4.2 Задание кривой в виде неявного отображения

Еще один способ задания кривых использует неявные отображения. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ или некотором его открытом подмножестве $(n-1)$-у гладкую функцию $F^1(x^1,\dots,x^n),\dots,F^{n-1}(x^1,\dots,x^n)$, вектор c из вещественных констант, $c=(c^1,\dots,c^{n-1})$, и пусть

$$M=\big\{(x^1,\dots,x^n):F^1(x^1,\dots,x^n)=c^1,\dots,F^{n-1}(x^1,\dots,x^n)=c^{n-1}\big\}$$

— решение системы уравнений $\{F^1=c^1,\dots,F^{n-1}=c^{n-1}\}$. Предположим, что $M\ne\emptyset$ и в некоторой точке $P=(P^1,\dots,P^n)$ выполняются условия теоремы 59 о неявном отображении (см. также замечание 61 из Введения), т.е. ранг матрицы Якоби $F_x(P):=\big(F^i_{x^j}(P)\big)$ максимален, и, значит, равен $n-1$. Последнее означает, что строки матрицы $F_x(P)$ линейно независимы, а среди столбцов имеется $(n-1)$ линейно независимый. Выберем эти столбцы, и пусть остался невыбранным j-ый столбец.

Обозначения 1.18. Для дальнейшего нам будем полезно ввести обозначения, также популярные в тензорном исчислении. Если в последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$, например, в координатной записи вектора, пропущен некоторый элемент, скажем a_i, то этот факт будем обозначать с помощью “крышки” над этим символом, например, $(a_1, a_2, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots)$ означает, что $\widehat{a}_i$ пропущен. Кроме того, для удобства записи координатных подпространств в $\mathbb{R}^n$, мы будем рассматривать возрастающие последовательности $J = (j_1, \ldots, j_k)$ индексов $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ и обозначать $\mathbb{R}^n_J$ координатное подпространство, натянутое на векторы $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ стандартного базиса $\mathbb{R}^n$.

Положим $I = (1, \ldots, \widehat{j}, \ldots, n)$, и пусть $\mathbb{R}^n_I$ обозначает соответствующее координатное подпространство в $\mathbb{R}^n$, см. обозначения 1.18. По теореме 59 и замечанию 61, существуют $\delta > 0$ и окрестность $U^P \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $U^P \cap M$ является графиком отображения $f\colon (P^j - \delta, P^j + \delta) \to \mathbb{R}^n_I$, $f(t) = \big(x^1(t), \ldots, \widehat{x^j(t)}, \ldots, x^n(t)\big)$, и имеет вид

$$U^P \cap M = \Big\{\big(x^1(t), \ldots, x^{j-1}(t),\, t\,, x^{j+1}(t), \ldots, x^n(t)\big) : t \in (P^j - \delta, P^j + \delta)\Big\}.$$

Как было отмечено выше, множество $U^P \cap M$ также является образом соответствующей регулярной параметрической кривой

$$\gamma(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^{j-1}(t),\, t\,, x^{j+1}(t), \ldots, x^n(t)\big).$$

Обратно, если кривая задана в виде графика отображения $f(t) = \big(f^1(t), \ldots, f^{n-1}(t)\big)$, то положим, например, $F^i(x^1, \ldots, x^n) = x^i - f^i(x^n)$, $c = (0, \ldots, 0)$, тогда график отображения f совпадает с M для этих функций F^i (напомним, что в соответствии с соглашением 1.16, нам не важно, на какое место при определении графика ставится параметр кривой). Более того, первые $(n-1)$-ин столбцов матрицы Якоби F_x формируют единичную матрицу, поэтому ранг матрицы F_x максимален.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.19. *Каждая регулярная кривая в достаточно малой окрестности любой из своих точек является вложенной и может быть представлена в каждом из трех видов: параметрически, графиком отображения, неявным отображением.*

Пример 1.20. Рассмотрим стандартную (единичную с центром в нуле) окружность на плоскости с координатами x, y. Эта окружность может быть задана

- параметрически: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$;
- неявно: $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$;
- если, скажем, $t \ne 0$ или π (с точностью до $2\pi k$), то локально окружность задается графиком функции $f(t)$, разной в двух следующих случаях: при $t \in (0, \pi)$ имеем $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$, а при $t \in (\pi, 2\pi)$ имеем $f(t) = -\sqrt{1 - t^2}$.

Задача 1.21. Выясните, какие из трех представлений кривых могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

Соглашение 1.22. В дальнейшем, если не возникает путаницы, мы не будем каждый раз уточнять, какой тип кривой рассматривается: параметрический, график или неявный, и будем говорить просто про кривую. Конкретный выбор представления кривой будет ясен из контекста.

1.5 Интегральная формула длины регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим теперь кривые в арифметическом пространстве $X = \mathbb{R}^n$. До конца следующих трех разделов мы будем иметь дело исключительно с невырожденными промежутками и невырожденными кривыми, что не станем обговаривать каждый раз.

Выше мы ввели понятие натурального параметра и доказали, что на безостановочной спрямляемой кривой всегда можно ввести натуральный параметр (теорема 1.11).

Задача 1.23. Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Для регулярных кривых натуральный параметр может быть введен более явно, с использованием интегральной формулы длины гладкой кривой.

Теорема 1.24. *Пусть $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, тогда*

$$|\gamma|=\int_I\|\dot\gamma\|\,dt.$$

Доказательство. Положим $\Theta:=\Theta(I)$ и разобьем Θ на подсемейства $\Theta(a,b)$, составленные из всех последовательностей вида $(a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b)$. Ясно, что $\bigl|\gamma|_{[a,b]}\bigr|=\sup_{\xi\in\Theta(a,b)}L_\gamma(\xi)$. Таким образом, с учетом аддитивности функционала длины и интеграла, достаточно доказать, что

$$\bigl|\gamma|_{[a,b]}\bigr|=\int_a^b\|\dot\gamma\|\,dt.$$

Итак, будем сразу предполагать, что $I=[a,b]$, а Θ состоит из всех последовательностей $\xi=(a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b)$. Такие последовательности в матанализе принято называть ***разбиениями отрезка*** $[a,b]$, что мы в дальнейшем и будем делать. Напомним, что для разбиения ξ определен его ***диаметр***: $\delta(\xi)=\max_k(t_k-t_{k-1})$. Так как подразбиения не уменьшают величину $L_\gamma(\xi)$, имеем $|\gamma|=\lim_{\delta(\xi)\to0}L_\gamma(\xi)$.

Оценим $L_\gamma(\xi)$. По теореме Лагранжа о среднем значении, $x^i(t_k)-x^i(t_{k-1})=\dot x^i(\eta_k^i)(t_k-t_{k-1})$, где $t_{k-1}<\eta_k^i<t_k$. Таким образом,

$$L_\gamma(\xi)=\sum_{k=1}^m\bigl|\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)\bigr|=\sum_{k=1}^m\sqrt{\sum_{i=1}^n\bigl[\dot x^i(\eta_k^i)\bigr]^2}(t_k-t_{k-1}),$$

и, значит,

$$|\gamma|=\lim_{\delta(\xi)\to0}\sum_{k=1}^m\sqrt{\sum_{i=1}^n\bigl[\dot x^i(\eta_k^i)\bigr]^2}(t_k-t_{k-1}).$$

С другой стороны,

$$\int_a^b\bigl|\dot\gamma(t)\bigr|\,dt=\lim_{\delta(\xi)\to0}\sum_{k=1}^m\sqrt{\sum_{i=1}^n\bigl[\dot x^i(\eta_k)\bigr]^2}(t_k-t_{k-1}),$$

где $\eta_k\in(t_{k-1},t_k)$. Заметим, что

$$\dot x^i(\eta_k^i)-\dot x^i(\eta_k)=\bar{o}(1)\ \text{при}\ \delta(\xi)\to0.$$

Стандартными приемами матанализа показываем (проделайте это), что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n\bigl[\dot x^i(\eta_k^i)\bigr]^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^n\bigl[\dot x^i(\eta_k)\bigr]^2}=\bar{o}(1)\ \text{при}\ \delta(\xi)\to0$$

равномерно по k, откуда и вытекает требуемое. □

Задача 1.25. Постройте пример неспрямляемой параметрической кривой $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ такой, что ограничение γ на $(0,1]$ является гладкой спрямляемой параметрической кривой.

Задача 1.26. Пусть параметрическая кривая $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ — гладкая. Покажите, что отображение γ — липшицево и, значит, γ — спрямляемая кривая. Постройте пример гладкой параметрической кривой, не являющейся липшицевой. Может ли гладкая спрямляемая параметрическая кривая не быть липшицевой?

Из теоремы 1.24 теперь легко доказывается существование натурального параметра на регулярной кривой. А именно, если $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ — параметрическая кривая, s координата на промежутке I, то условие того, что параметр s натуральный, выглядит так: для любых $s_1,s_2\in I$, $s_1\le s_2$, выполняется

$$\int_{s_1}^{s_2}\|\dot\gamma(s)\|\,ds=s_2-s_1.$$

Дифференцируя предыдущее равенство по s_2, получаем $\bigl\|\dot\gamma(s_2)\bigr\|=1$. Таким образом, из натуральности параметра вытекает, что длина вектора скорости кривой равна 1. Легко видеть, что и обратное утверждение тоже имеет место. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Предложение 1.27. *Параметр s на регулярной кривой $\gamma(s)$ в $\mathbb{R}^n$ натуральный, если и только если $\big\|\dot\gamma(s)\big\| = 1$ при всех s.*

Предложение 1.27 мгновенно приводит к уравнению, позволяющему найти натуральный параметр.

Пусть t — произвольный параметр на регулярной кривой, а s — натуральный. Тогда, по теореме о дифференцировании сложной функции, $1 = \|\gamma_s\| = \|\gamma_t\|\,|t_s|$. По теореме о производной обратной функции, имеем $t_s = 1/s_t$, откуда $s_t = \|\gamma_t\|$, так что $s = \pm\int\big\|\gamma_t(\tau)\big\|\,d\tau$.

Предложение 1.28. *Пусть $\gamma(t)$ — регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$, тогда все натуральные параметры s находится из формулы $s = \pm\int\big\|\gamma_t(\tau)\big\|\,d\tau$, в частности, они отличаются друг от друга на замену вида $s \mapsto \pm s + c$, где $c \in \mathbb{R}$.*

Упражнения к главе 1

Упражнение 1.1. Постройте непрерывную кривую, проходящую через все точки квадрата.

Упражнение 1.2. Постройте на плоскости гладкую параметрическую кривую, образ которой — прямой угол.

Упражнение 1.3. Постройте пример неодноточечного линейно связного метрического пространства, в котором нет ни одной невырожденной спрямляемой кривой.

Упражнение 1.4. Выясните, какие из трех представлений кривых (параметрическое, графиком отображения, неявным отображением) могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

Упражнение 1.5. Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Упражнение 1.6. Пусть X — метрическое пространство, γ — кривая в X, и точки $x, y \in X$ лежат на γ. Покажите, что $|\gamma| \geq |xy|$.

Упражнение 1.7. Докажите пункты (1), (3) и (4) теоремы 1.6.

Упражнение 1.8. Пусть параметрическая кривая $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая. Покажите, что отображение γ — липшицево и, значит, γ — спрямляемая кривая. Постройте пример гладкой параметрической кривой, не являющейся липшицевой. Может ли гладкая спрямляемая параметрическая кривая не быть липшицевой?

Упражнение 1.9. Постройте пример неспрямляемой параметрической кривой $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ такой, что ограничение γ на $(0,1]$ является гладкой спрямляемой параметрической кривой.

Упражнение 1.10. Введите натуральный параметр на следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами x, y или в пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z:

(1) на отрезке прямой $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

(2) на дуге окружности $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$;

(3) на графике функции $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $a > 0$, задающей кривую, по которой прогибается тяжелая цепь (кривая называется *цепной линией*);

(4) на винтовой линии $\bigl(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)\bigr) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b\varphi)$.

Упражнение 1.11. Круг K на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ “катится без проскальзывания”

(1) по прямой;

(2) по окружности снаружи круга, ограниченного этой окружностью;

(3) по окружности внутри круга, ограниченного этой окружностью.

Точка M жестко связана с кругом K (она может лежать вне круга). Задайте траекторию движения точки M параметрически. Изобразите соответствующие кривые. Напишите компьютерную программу (например, в пакете Математика), которая рисует эти кривые в зависимости от параметров задачи.