

Введение

План. Синтетический характер дифференциальной геометрии, множества, основные операции с множествами (объединение, пересечение, дополнение, дизъюнктное объединение, произведение), покрытие и разбиение, отношения, отображения и их графики, частичный порядок, линейный порядок, эквивалентность, тензорные обозначения (верхние и нижние индексы, отсутствие символов суммирования, обозначение штрихами нового базиса и координат векторов в новом базисе), определение тензоров (инвариантное и координатное), примеры тензоров (векторы, ковекторы, билинейные формы), линейные комбинации тензоров одного типа и тензорные произведения, линейное пространство тензоров одного типа, базис этого пространства, тензорные свойства, ориентация конечномерного векторного пространства, квадратичные формы, матрица Грама билинейной формы, скалярное произведение, параллелепипеды и их объемы, ортогонализация Грама-Шмидта, сопряженные линейные отображения пространств со скалярными произведениями, приведение пары квадратичных форм к каноническому виду, нормированные пространства, норма и скалярное произведение, метрические пространства, ограниченные линейные отображения, норма линейного отображения, открытые и замкнутые шары, сферы, открытые и замкнутые окрестности множеств, ограниченные подмножества метрических пространств, ограниченные линейные отображения нормированных пространств и их нормы, топология, открытые множества, дискретная и антидискретная топологии, база и предбаза топологии, виды и конструкции топологий, индуцированная топология, метрическая топология, топология пространства ограниченных линейных отображений, топология дизъюнктного объединения, топология произведения или тихоновская топология, окрестности точек, проколотые окрестности, изолированные точки, точка прикосновения, внутренняя точка, граничная точка, замыкание, внутренность, граница, хаусдорфово пространство, связное пространство, компактное пространство, непрерывное отображение топологических пространств, кривая в топологическом пространстве, линейно связные и локально линейно связные пространства, последовательности, сходящиеся последовательности в топологическом пространстве, фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, полные метрические пространства, банаховы пространства, арифметическое пространство, евклидово пространство, дифференцирование, дифференциал, производная, частная производная, матрица Якоби, теорема о производной композиции отображений, дифференциалы высших порядков, гладкие отображения, теорема об обратном отображении, частный дифференциал, теорема о неявном отображении, дифференциальные уравнения, теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, обобщения (уравнения высоких порядков, автономные и неавтономные уравнения), теорема о продолжении решения неавтономного линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

В этом семестре мы будем изучать геометрические объекты в стандартном пространстве $\mathbb{R}^n$, а также геометрию Лобачевского.

Напомним, что арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ представляет собой совокупность всевозможных упорядоченных наборов $(x^1, \dots, x^n)$ из n вещественных чисел. Это пространство снабжено рядом структур, которые мы будем использовать. Прежде всего, $\mathbb{R}^n$ — векторное пространство, так что арсенал линейной алгебры будет неоднократно востребован. В частности, при изучении поверхностей нам особенно пригодится теорема о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду. Отметим также, что в следующем семестре мы будем преимущественно заниматься тензорным исчислением.

Важным частным случаем билинейной формы на $\mathbb{R}^n$ является стандартное скалярное произведение, называемое *евклидовым* и превращающее $\mathbb{R}^n$ в евклидово пространство. Наличие этого произведения приводит к таким понятиям, как ортогональный и ортонормальный базис, процессу ортогонализации Грама-Шмидта, ортогональным преобразованиям, матрице Грама, и др.

Скалярное произведение порождает норму, а норма — расстояние между точками (метрику), так что $\mathbb{R}^n$ превращается в метрическое пространство, которое можно изучать методами метрической геометрии.

Описанная выше метрика задает на $\mathbb{R}^n$ топологию, поэтому теория топологических пространств и непрерывных отображений также начинает играть.

Наличие топологии, структуры линейного пространства и нормы позволяет приближать разного рода отображения линейными отображениями, что приводит к понятию производной и дифференциала. Таким образом, подключается и математический анализ. Из математического анализа нам, прежде всего, будут нужны теоремы о неявной функции, об обратном отображении и о производной композиции отображений. Эти “три кита” будут постоянно возникать в том или ином контексте как в этом семестре, так и в следующем.

Дифференцирование приводит также к дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных. Особый интерес будут для нас представлять теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений.

Обратная операция к дифференцированию — интегрирование, будет использоваться нами, например, при вычислении площадей и объемов геометрических фигур. Кроме того, с помощью дифференцирования и интегрирования мы будем строить разные алгебраические инварианты геометрических объектов.

Заменяя вещественные числа на комплексные, мы приходим к комплексной дифференциальной геометрии. Кроме того, даже при изучении вещественной геометрии переход к комплексным функциям оказывается

чрезвычайно полезным. Так, комплексные отображения будут использоваться нами при изучении геометрии Лобачевского.

Напомним также про альтернативный подход к изучению линейных пространств, когда на векторы смотрят как на точки, а линейную структуру задают репером, разрешая в качестве начала координат выбирать любую точку пространства. Так возникает аффинная геометрия.

Все описанное выше не только демонстрирует синтетический характер дифференциальной геометрии, но, в первую очередь, прозрачно намекает, что слушателям нашего курса нужно тщательно ознакомиться с основными результатами перечисленных выше разделов математики. Ниже мы приведем ряд ссылок на выложенные в интернете лекции, на учебные пособия и монографии, посвященные изложению основ дифференциальной геометрии.

Предварительные определения и результаты

Напомним основные определения и результаты, которые были разобраны на других лекциях и семинарах и которые будут нам полезны в дальнейшем. Также введем обозначения, существенно сокращающие формулы. Отметим, что ряд определений мы будем давать в более общем виде. Цель этого — двоякая. С одной стороны, сущность многих конструкций раскрывается именно в общих формулировках, когда убирается разнообразие несущественные детали, сопровождающие упрощенное изложение. С другой стороны, понимание того, что конструкции, с которыми мы будем иметь дело, намного шире, открывают возможность поиска приложений, находящихся далеко за пределами нашего курса.

1 Множества

Пусть X — произвольное множество. Через 2^X будем обозначать множество всех подмножеств X . Рассмотрим семейство $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$, где множество индексов $\mathcal{A}$ может быть любым, в частности, пустым множеством. Объединение $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$ и пересечение $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$ будем иногда обозначать $\bigcup \mathcal{Y}$ и $\bigcap \mathcal{Y}$ соответственно. Если $\mathcal{A} = \emptyset$, то положим $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \emptyset$, а $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = X$.

Семейство $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ подмножеств X называется *покрытием* X , если $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$. Если при этом разные Y_α не пересекаются, то семейство $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ называется *разбиением* X . *Подпокрытие* — подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Если $Y, Z \subset X$, то $Y \setminus Z = \{y \in Y : y \notin Z\}$ определено даже если Z не является подмножеством Y . Если $Y \subset X$, то $X \setminus Y$ называется *дополнением* Y . Напомним, что

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus Y_\alpha) \quad \text{и} \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus Y_\alpha).$$

Отметим, что наше соглашение относительно объединений и пересечений для пустых семейств индексов $\mathcal{A}$ согласуются с предыдущими формулами.

Даже если множества X и Y пересекаются, то на них можно смотреть как на непересекающиеся множества, например, заменив X на $X \times \{1\}$, а Y — на $Y \times \{2\}$. *Дизъюнктное объединение* $X \sqcup Y$ — это объединение именно таких, рассматриваемых как непересекающиеся, множеств X и Y . Эта конструкция естественно переносится и на произвольные семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ (мы заменяем каждое X_α на $X_\alpha \times \{\alpha\}$) и приводит к дизъюнктному объединению $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$.

Произведение множеств семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — это множество всех отображений $x: \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ таких, что $x(\alpha) \in X_\alpha$ при каждом $\alpha \in \mathcal{A}$. Элемент $x(\alpha)$ обычно обозначается через x_α и называется α -ой *координатой точки* x . Для конечного множества $X_1, \dots, X_n$ произведение записывают в виде $X_1 \times \dots \times X_n$.

Отношением σ между множествами X и Y называется произвольное подмножество в $X \times Y$. Важным частным случаем отношения является *график* Γ_f *отображения* $f: X \rightarrow Y$, т.е. $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$. Если $X = Y$, то σ называется *отношением на* X .

Отношение σ на множестве X называется

- *рефлексивным*, если $(x, x) \in \sigma$ для любого $x \in X$;
- *симметричным*, если $(x, y) \in \sigma$ влечет $(y, x) \in \sigma$;
- *антисимметричным*, если $(x, y) \in \sigma$ и $(y, x) \in \sigma$ влечет $x = y$;
- *транзитивным*, если $(x, y), (y, z) \in \sigma$ влечет $(x, z) \in \sigma$.

Рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение называется *частичным порядком*. Пример — отношение включения (принадлежности одного множества другому), заданное на семействе всех (или некоторых) подмножеств данного множества. Частичный порядок часто обозначают “ $\leq$ ” или “ $\geq$ ”, имея в виду, что $y \geq x$ равносильно $x \leq y$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$ или $y > x$.

Элементы $x, y \in X$ называются *сравнимыми в частичном порядке σ* , если или $(x, y) \in \sigma$, или $(y, x) \in \sigma$. Порядок σ называется *линейным*, если в нем любые два элемента сравнимы. Пример — стандартный порядок на множестве вещественных чисел.

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*. Множество попарно эквивалентных элементов называется *классом эквивалентности*. Каждое множество, на котором задано отношение эквивалентности, разбивается на классы эквивалентности (проверьте). Обратно, каждое разбиение множества задает соответствующее отношение эквивалентности: элементы эквивалентны, если они принадлежат одному и тому же элементу разбиения.

Дополнительный материал. Для более глубокого ознакомления с теорией множеств, полезно изучить *аксиоматику фон Неймана–Бернайса–Гёделя*. Одной из “спорных” аксиом теории множеств является *аксиома выбора*: если $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество, элементы X_α которого являются непустыми множествами, то существует множество $\{x_\alpha : x_\alpha \in X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Иными словами, мы можем построить множество, выбрав в каждом X_α некоторый элемент x_α .

Эта аксиома приводит к разным “странным” результатам. Например, к *парадоксу Банаха–Тарского*: сферу единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно разбить на пять частей и так переместить эти части, чтобы в результате образовалось две сферы единичного радиуса. Этот парадокс демонстрирует, в частности, невозможность распространить на все подмножества пространства $\mathbb{R}^3$ понятие площади так, чтобы оно обладало естественными свойствами. Вот еще один пример.

Задача 1. Покажите, что существует функция на вещественной прямой, которая на каждом интервале принимает все возможные значения.

Тем не менее, без аксиомы выбора математика становится существенно беднее, так что мы не будем от нее отказываться.

Пусть на множестве X задан частичный порядок. Элемент $x \in X$ называется *минимальным* (*максимальным*), если не существует элемента y такого, что $y < x$ (соответственно, $y > x$). При этом x не обязан быть сравним со всеми элементами множества X . Если, дополнительно, x сравним со всеми элементами из X , то такой x называется *наименьшим* (соответственно, *наибольшим*).

Если Y — подмножество частично упорядоченного множества, то определены также *мажоранты* и *миноранты* Y — такие элементы $x \in X$, что в первом случае $y \leq x$, а во втором — $y \geq x$ для всех $y \in Y$. Отметим, что мажоранта и миноранта сравнимы со всеми элементами из Y , а также что они имеют и другое название — *верхняя грань* и *нижняя грань* соответственно.

Линейно упорядоченное множество, в котором каждое непустое подмножество имеет минимальный и, значит, наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным*.

Теорема 2 (Цермело). *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Эта теорема и ряд других свойств приводит к построению теории ординалов и кардиналов, трансфинитной шкалы и трансфинитной индукции — обобщению индукции на вполне упорядоченные множества произвольной мощности.

Задача 3. Семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств множества X называется *покрытием* X , если $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Покрытие называется *разбиением*, если его разные элементы не пересекаются. Покрытие $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества X называется *вписанным* в другое его покрытие $\{Y_\beta\}_{\beta \in B}$, если для каждого α существует β такое, что $X_\alpha \subset Y_\beta$. Докажите, что для каждого покрытия имеется вписанное в него разбиение.

Задача 4. Используя теорему Цермело, покажите, что пространство $\mathbb{R}^3$ можно разбить на окружности конечного ненулевого радиуса (т.е. точки — окружности нулевого радиуса, и прямые — окружности бесконечно радиуса, в разбиении не участвуют).

Подмножество частично упорядоченного множества называется *цепью*, если индуцированный на нем порядок — линейный.

Теорема 5 (Лемма Цорна). *Предположим, что каждая цепь в частично упорядоченном множестве X имеет мажоранту, тогда для любого $x \in X$ существует сравнимый с x максимальный элемент.*

В следующей задаче мы рассмотрим произвольное (не обязательно конечномерное) линейное пространство. Все линейные комбинации векторов из V будут конечными. Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если в ней не все коэффициенты равны нулю. Система векторов называется *линейно независимой*, если в ней не существует равных нулю нетривиальных линейных комбинаций. Система векторов называется *полной*, если каждый вектор выражается в виде линейной комбинации векторов этой системы. *Базисом Гамеля* в векторном пространстве V называется всякая полная линейно независимая система векторов.

Задача 6. Докажите, что каждая линейно независимая система векторов произвольного линейного пространства содержится в некотором базисе Гамеля.

Задача 7. Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Покажите, что существует линейное над $\mathbb{Q}$ отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тождественное на $\mathbb{Q}$ и переводящее $\sqrt{2}$ в $\sqrt{3}$.

2 Тензоры

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться соглашениями, принятыми в тензорном исчислении. Эти соглашения призваны упростить вид формул за счет избавления от значков суммирования везде, где это возможно, а также более рациональной записи базисных векторов и координат при замене базиса. Важным требованием этих соглашений является правильный выбор между верхними и нижними индексами.

Итак, пусть V — векторное пространство конечной размерности n . Базисные векторы будем нумеровать нижними индексами, например $e_1, \dots, e_n$, а координаты векторов — верхними индексами, например $v = (v^1, \dots, v^n) \in V$. У элементов двойственного пространства V^* — все наоборот: ковекторы двойственного к $e_1, \dots, e_n$ базиса будем обозначать $e^1, \dots, e^n$, так что $e^i(e_j) = \delta_j^i$, где δ_j^i — символы Кронекера, а координаты ковектора будем нумеровать нижними индексами: $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Важное замечание: в формулах нужно следить за тем, чтобы индексы сохраняли свою высоту, т.е. верхние оставались верхними, а нижние — нижними.

Далее, если в формуле встречается дважды один и тот же индекс как в верхнем, так и в нижнем положении, то мы предполагаем, что по этому индексу происходит суммирование, хотя знак суммы мы не пишем. Например, $v = v^i e_i$ и $\xi = \xi_i e^i$ — разложения вектора и ковектора по двойственным базисам. Подобное соглашение может создавать проблемы, так как иногда по повторяющимся индексам суммировать не нужно. Договоримся, что по индексам, заданным числами, суммирование не производится, например в $v^1 e_1$ суммирования нет. Кроме того, отсутствие суммирования мы будем особо оговаривать (это оправдано тем, что суммирование встречается чаще, чем его отсутствие).

Пусть теперь мы хотим заменить базис e_i на другой. Конечно, можно изменить символ “ e ” на новый символ, скажем на “ f ”, а также поменять индекс i на другой индекс. Оказывается, более удобным вместо f воспользоваться штрихованным индексом, например $e^{i'}$ или $e^{i''}$. При этом индекс i также можно заменить на i' или i'' , в результате чего мы получим $e_{i'}$ или $e_{i''}$. Хотя сейчас все правильно, но, как видно, штрихов у нас слишком много. В тензорном исчислении принято соглашение не писать штрих при e , а считать, что если у индекса i стоит штрих, то $e_{i'}$ — это уже новый базисный вектор, а не старый с номером i' . Аналогично поступают и с координатами векторов и ковекторов. Таким образом, $e_1, \dots, e_n$ — новый базис, в котором вектор v имеет координаты $(v^1, \dots, v^n)$.

Сформулированные выше принципы позволяют автоматически писать многие формулы, не акцентируя внимание на том, координаты вектора или ковектора мы преобразуем. Приведем примеры. Пусть, как и выше, e_i и $e_{i'}$ — два разных базиса. Тогда переходы между этими базисами задаются взаимно обратными матрицами $(c_i^{i'})$ и $(c_{i'}^i)$, где последнее можно записать с помощью символов Кронекера (элементов единичной матрицы):

$$c_i^{i'} c_{i'}^j = \delta_j^i, \quad c_{i'}^j c_j^{i'} = \delta_{i'}^{i'}.$$

Эти матрицы определяются по разложениям векторов одного базиса по векторам другого, что можно записать чисто автоматически исходя из приведенных выше правил:

$$e_{i'} = c_{i'}^i e_i, \quad e_i = c_i^{i'} e_{i'}.$$

При этом закон изменения двойственных базисов, а также координат векторов и ковекторов тоже пишется автоматически:

$$e^{i'} = c_i^{i'} e^i, \quad e^i = c_i^{i'} e^{i'}, \quad v^{i'} = c_i^{i'} v^i, \quad v^i = c_{i'}^i v^{i'}, \quad \xi_{i'} = c_i^{i'} \xi_i, \quad \xi_i = c_{i'}^i \xi_{i'}.$$

Замечание 8. В линейной алгебре имеется соглашение относительно того, что называть матрицей перехода от одного базиса к другому. Запишем эту матрицу в наших терминах. Предположим, что мы переходим от базиса e_i к базису $e_{i'}$. Тогда *матрицей перехода C от нового базиса $e_{i'}$ к старому e_i* называется матрица, по столбцам которой расположены координаты векторов исходного базиса относительно нового, т.е. вектор e_i в новом базисе имеет вид $c_i^{i'} e_{i'}$, и коэффициенты $(c_i^{i'}, \dots, c_i^{i'})$ выписаны в i -ый столбец матрицы C :

$$C = \begin{pmatrix} c_1^{1'} & c_2^{1'} & \cdots & c_n^{1'} \\ c_1^{2'} & c_2^{2'} & \cdots & c_n^{2'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n'} & c_2^{n'} & \cdots & c_n^{n'} \end{pmatrix} = (c_i^{i'}).$$

Если $(v^1, \dots, v^n)$ — координаты вектора в базисе e_i , то в новом базисе координаты этого вектора будут

$$Cv = (c_i^{1'} v^i, \dots, c_i^{n'} v^i).$$

Полилинейные (линейные по каждому аргументу) отображения вида

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ штук}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ штук}} \rightarrow \mathbb{R}$$

называются *тензорами типа (p, q)* . Если e_i — базис V , а e^i — двойственный базис V^* , то числа

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$$

называются *компонентами* или *координатами тензора T в базисе e_i* . Легко видеть, что тензор T однозначно определяется своими координатами, так как его значение на наборе ковекторов $\xi^1, \dots, \xi^p$ и векторов $v_1, \dots, v_q$, в силу полилинейности, имеет вид

$$T(\xi_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \xi_{i_p}^p e^{i_p}, v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_q^{j_q} e_{j_q}) = \xi_{i_1}^1 \cdots \xi_{i_p}^p v_1^{j_1} \cdots v_q^{j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Приведем ряд частных случаев тензоров.

- Векторы — тензоры типа $(1, 0)$, так как их можно рассматривать как линейные отображения $v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $v(\xi) = v^i \xi_i$.
- Ковекторы — тензоры типа $(0, 1)$, так как они, по определению, являются линейными отображениями $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}$.
- Билинейные формы, например, скалярное произведение, — тензоры типа $(0, 2)$, так как они, по определению, являются билинейными отображениями $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Как меняются координаты тензора при замене базиса? Это легко понять, воспользовавшись полилинейностью:

$$(1) \quad T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = T(e^{i'_1}, \dots, e^{i'_p}, e_{j'_1}, \dots, e_{j'_q}) = T(c_{i_1}^{i'_1} e^{i_1}, \dots, c_{i_p}^{i'_p} e^{i_p}, c_{j_1}^{j'_1} e_{j_1}, \dots, c_{j_q}^{j'_q} e_{j_q}) = c_{i_1}^{i'_1} \cdots c_{i_p}^{i'_p} c_{j_1}^{j'_1} \cdots c_{j_q}^{j'_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Убедитесь, что этот *тензорный закон* согласуется с правилами преобразования координат векторов, ковекторов, билинейных форм и линейных операторов.

Тензорный закон позволяет дать эквивалентное определение тензоров, которое называется *координатным*: тензором типа (p, q) на векторном пространстве V размерности n называется отображение, которое ставит в соответствии каждому базису пространства V набор из n^{p+q} чисел вида $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, причем числа, поставленные разным базисам, связаны друг с другом по тензорному закону (1). Отметим, что исходное определение тензоров, называется *инвариантным*.

Приведем еще один пример тензоров, за одно применив координатное определение. Напомним, что *линейный оператор* на векторном пространстве V — это линейное отображение векторного пространства V в себя. Если A — матрица линейного оператора в некотором базисе e_i , а $C = (c_i^{i'})$ — матрица перехода от нового базиса $e_{i'}$ к старому, то матрица A' этого оператора в базисе $e_{i'}$ имеет вид $CA'C^{-1}$. Обозначим через $a(i, j)$ элементы матрицы A , а через $a(i', j')$ — элементы матрицы A' (мы пока не знаем, какие индексы должны быть верхними, какие — нижними). Тогда $a(i', j') = \sum_{i, j} c_i^{i'} c_j^j a(i, j)$, поэтому в $a(i, j)$ индекс i — верхний, а j — нижний. Таким образом, мы получаем $a_{j'}^{i'} = c_i^{i'} c_j^j a_j^i$, т.е. закон преобразования тензоров типа $(1, 1)$. Итак, линейный оператор, точнее, компоненты матрицы линейного оператора, — это тензор типа $(1, 1)$. Но тогда этот оператор должен соответствовать отображению $A: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Это отображение выглядит так: $A(\xi, v) = \xi(A(v))$.

Задача 9. Пусть V — векторное пространство размерности n и $e_1, \dots, e_n$ — некоторый его базис. Припишем этому базису n^{p+q} чисел $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, и, воспользовавшись тензорным законом (1), примененным к этим числам, припишем также n^{p+q} чисел каждому из всех остальных базисов. Покажите, что полученные наборы чисел связаны друг с другом по тензорному закону, т.е. порождают некоторый тензор. В частности, каждый базисный вектор e_i порождает тензор E_i типа $(1, 0)$: в базисе $e_1, \dots, e_n$ он имеет координаты $(E_i)^j = \delta_i^j$, а в базисе $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ — координаты $(E_i)^{j'} = c_j^{j'} \delta_i^j = c_i^{j'}$, где $c_j^{j'}$ — компоненты матрицы замены базиса, т.е. $e_j = c_j^{j'} e_{j'}$. Аналогично, каждый базисный ковектор e^i порождает тензор типа $(0, 1)$ (проделайте соответствующие построения).

Задача 10. Покажите, что тензорный закон сохраняет линейные комбинации $\lambda T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ и произведения $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}$. Таким образом, для тензоров T и S типа (p, q) определены линейные комбинации $\lambda T + \mu S$, а тензоры T и S типов (p, q) и (r, s) можно перемножать (эта операция называется *тензорным произведением* и обозначается $T \otimes S$). Проверьте, что тензорное произведение некоммутативно, но ассоциативно и дистрибутивно.

Задача 11. Выведите из предыдущих упражнений, что тензоры типа (p, q) образуют векторное пространство размерности n^{p+q} , и что для произвольного базиса $e_1, \dots, e_n$ и двойственного базиса $e^1, \dots, e^n$ тензоры $E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_p} \otimes E^{j_1} \otimes \dots \otimes E^{j_q}$ образуют базис этого пространства.

Свойство координат тензора назовем *тензорным*, если оно выполняется в каждом базисе. Например, для билинейной формы $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ к таким свойствам относится

- *симметричность*: $b_{ij} = b_{ji}$ при всех i и j ;
- *кососимметричность*: $b_{ij} = -b_{ji}$ при всех i и j ;
- *невыврожденность*: $\det(b_{ij}) \neq 0$ (более общо, сохранение ранга $\text{rank}(b_{ij})$);
- *положительная определенность*: $b(v, v) > 0$ для каждого ненулевого $v \in V$.

Обобщим свойства симметричности и кососимметричности на тензоры типа $(0, k)$. Обозначим через S_k группу перестановок элементов множества $\{1, \dots, k\}$. Напомним, что для каждой перестановки $\sigma \in S_k$ определен ее *знак*, который мы обозначим $(-1)^\sigma$. Если $p = (p_1, \dots, p_k)$ — упорядоченный набор элементов p_i произвольного множества, и $\sigma \in S_k$, то под $\sigma(p_1 \dots p_k) = \sigma(p)$ будем понимать упорядоченное множество $(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)})$.

Пусть теперь T — тензор типа $(0, k)$, и $T_{i_1 \dots i_k}$ — его координаты в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$.

Задача 12. Докажите, что следующие свойства для тензора T являются тензорными:

- *симметричность*: $T_{\sigma(i_1 \dots i_k)} = T_{i_1 \dots i_k}$ при всех $i_1, \dots, i_k$ и $\sigma \in S_k$;
- *кососимметричность*: $T_{\sigma(i_1 \dots i_k)} = (-1)^\sigma T_{i_1 \dots i_k}$ при всех $i_1, \dots, i_k$ и $\sigma \in S_k$.

Пусть T — кососимметричный тензор типа $(0, n)$ и $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис пространства V . Тогда координаты $T_{i_1 \dots i_n}$ этого тензора в данном базисе однозначно определяются его координатой $T_{1 \dots n}$: если среди индексов $i_1, \dots, i_n$ есть совпадающие, то $T_{i_1 \dots i_n} = 0$; если нет, то $(i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, \dots, n)$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_n$, поэтому $T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{1 \dots n}$. Из сказанного ясно, что если для $v_1, \dots, v_n \in V$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, через A_v обозначить матрицу, в которой i -ый столбец состоит из координат вектора v_i в базисе $e_1, \dots, e_n$, то

$$T(v_1, \dots, v_n) = (\det A_v) T_{1 \dots n}.$$

В частности, если $T_{1 \dots n} = 1$, то $T(v_1, \dots, v_n)$ — это просто определитель матрицы A_v .

Для линейного оператора $a: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ к тензорным свойствам относится, например,

- *невыврожденность*: $\det(a_j^i) \neq 0$ (более общо, сохранение ранга $\text{rank}(a_j^i)$);
- *сохранение или изменение ориентации*: $\det(a_j^i) > 0$ (соответственно, $\det(a_j^i) < 0$).

Напомним, что такое ориентация конечномерного векторного пространства V .

3 Ориентация конечномерного векторного пространства

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Рассмотрим всевозможные базисы этого пространства и введем на них следующее отношение: базис $e_1, \dots, e_n$ находится в отношении с базисом $e_{1'}, \dots, e_{n'}$, если и только если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен. Отметим, что единичная матрица имеет положительный определитель, поэтому отношение рефлексивно. Далее, если C — матрица перехода от первого базиса ко второму, то C невырождена, C^{-1} — матрица перехода от второго базиса к первому и $\det C^{-1} = 1/\det C$, так что отношение симметрично. Наконец, если C_1 — матрица перехода от первого базиса ко второму, а C_2 — от второго к третьему, то $C_1 C_2$ — матрица перехода от первого базиса к третьему и $\det(C_1 C_2) = \det C_1 \det C_2$, поэтому отношение транзитивно. Таким образом, введенное отношение является эквивалентностью и, поэтому, разбивает все базисы на классы. Этих классов ровно два: если базисы $e_{i'}$ и $e_{i''}$ не эквивалентны базису e_i , то матрица перехода между $e_{i'}$ и $e_{i''}$ имеет положительный определитель (проверьте), т.е. эти базисы лежат в одном классе. Итак, имеется два класса эквивалентности базисов. Каждый из этих классов называется *ориентацией* пространства V . *Ориентировать конечномерное векторное пространство* означает выбрать один из этих двух классов и назвать его *положительным*, а оставшийся — *отрицательным*. Каждый базис из положительного класса называется *положительно ориентированным*, а из отрицательного — *отрицательно ориентированным*. Так как для задания класса эквивалентности достаточно выбрать любого его представителя, задание ориентации однозначно определяется выбором произвольно базиса и отнесением его к положительно ориентированному. *Стандартная ориентация арифметического пространства $\mathbb{R}^n$* задается стандартным базисом.

Напомним, что симметричная положительно определенная билинейная форма называется *скалярным произведением*.

Приведем ряд нужных в дальнейшем фактов, касающихся билинейных форм.

4 Билинейные формы и квадратичные формы

По каждой билинейной форме $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определенной на векторном пространстве V , строится *квадратичная форма* $b(v, v)$, которую мы обозначим той же буквой $b(v)$. Если билинейная форма симметрична, то она однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме:

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(b(v + w) - b(v) - b(w)).$$

Таким образом, многие результаты, верные для квадратичных форм, автоматически переносятся на соответствующие симметричные билинейные формы и обратно. Это приводит к тому, что часто результаты формулируются только или для квадратичных форм, или для соответствующих билинейных.

5 Матрица Грама билинейной формы

Пусть на векторном пространстве V задана билинейная форма $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Выберем произвольную систему векторов $v_1, \dots, v_m$, положим $b_{ij} = b(v_i, v_j)$, тогда матрица (b_{ij}) называется *матрицей Грама системы векторов $v_1, \dots, v_m$ относительно формы b* . Отметим, что в n -мерном векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_n$ и билинейной формой b , элементы матрицы Грама этого базиса по отношению к b представляют собой координаты формы b как тензора типа $(0, 2)$, вычисленные в рассматриваемом базисе.

Если b — скалярное произведение, то базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V называется *ортонормальным*, если матрица Грама этого базиса диагональна, и *ортонормальным*, если матрица Грама — единичная.

Задача 13. Пусть e_i и $e_{i'}$ — два базиса пространства V , на котором задана билинейная форма b , и пусть $C = (c_{ij}') — матрица перехода от второго базиса к первому, т.е. $e_i = c_{ij}' e_{j'}$. Тогда матрицы Грама B и B' формы b в базисах e_i и $e_{i'}$ соответственно связаны друг с другом так: $B = C^T B' C$, и, значит, $\det B = (\det C)^2 \det B'$. В частности, определитель матрицы Грама не меняется, если и только если $\det C = \pm 1$.$

6 Параллелепипеды и их объемы

Пусть V — линейное пространство и $k \in \mathbb{N}$ не превосходит размерности пространства V (если V бесконечномерно, то k — любое). Под *k -параллелепипедом* P будем понимать упорядоченный набор $(v_1, \dots, v_k)$ из k векторов $v_i \in V$. Параллелепипед $P = (v_1, \dots, v_k)$ назовем *вырожденным*, если векторы v_i линейно зависимы, иначе параллелепипед P — *невырожденный*.

Пусть теперь на V задано скалярное произведение. Определим *объем* $\text{vol}(P)$ *параллелепипеда* $P = (v_1, \dots, v_k)$ следующим образом.

- Если P вырожден, то положим $\text{vol}(P) = 0$.
- Если векторы v_i образуют ортонормальную систему, то $\text{vol}(P) = 1$.
- Если P невырожден, то через V_P обозначим линейное подпространство, натянутое на векторы v_i ; выберем в V_P произвольный ортонормальный базис $e = (e_1, \dots, e_k)$ (такой базис всегда можно выбрать, см. ниже раздел 7); через $A_{e,P}$ обозначим матрицу перехода от базиса e к базису P ; наконец, положим $\text{vol}^e(P) = |\det A_{e,P}|$. Отметим, что если $e' = (e'_1, \dots, e'_k)$ — другой ортонормальный базис пространства V_P , и C — матрица перехода от e' к e , то $A_{e',P} = C A_{e,P}$, поэтому

$$\text{vol}^{e'}(P) = |\det A_{e',P}| = |\det(C A_{e,P})| = |\det C \det A_{e,P}| = |\det A_{e,P}| = \text{vol}^e(P),$$

так что величина $\text{vol}^e(P)$ не зависит от выбора ортонормального базиса e в пространстве V_P . В силу этого, величину $\text{vol}^e(P)$ обозначим $\text{vol}(P)$ и возьмем ее в качестве объема параллелепипеда P .

Если P — параллелепипед, и пространство V_P ориентированно, то определим также *ориентированный объем* $\text{vol}_0(P)$ так. Для вырожденного параллелепипеда P положим $\text{vol}_0(P) = 0$. Для невырожденного P выберем произвольный *положительно ориентированный* ортонормальный базис e пространства V_P и положим $\text{vol}_0(P) = \det(A_{e,P})$. Ясно, что при замене базиса e на другой положительно ориентированный базис e' , имеем $\det(A_{e,P}) = \det(A_{e',P})$, что обосновывает корректность нашего определения. Таким образом, ориентированный объем $\text{vol}_0(P)$ невырожденного параллелепипеда P совпадает с $\text{vol}(P)$ для положительно ориентированного базиса P пространства V_P , и равен $-\text{vol}(P)$ для отрицательно ориентированного. Ориентированный объем мы в основном будем использовать в конечномерном пространстве V размерности n для невырожденных n -параллелепипедов.

Отметим, что объем 1-параллелепипеда (v) равен длине вектора v . Объем 2-параллелепипеда (v_1, v_2) равен площади параллелограмма, натянутого на векторы v_1 и v_2 . По известной формуле, эта площадь равна “произведению основания на высоту”. Обобщим эту формулу на произвольные невырожденные k -параллелепипеды при $k \geq 2$.

Выделим в параллелепипеде $P = (v_1, \dots, v_k)$ *основание* B , выбрав произвольные $(k-1)$ векторов. Пусть, для определенности, $B = (v_1, \dots, v_{k-1})$. Разложим вектор v_k на вектор h_k , перпендикулярный пространству V_B , натянутому на $v_1, \dots, v_{k-1}$, и вектор v'_k , лежащий в этом пространстве (это разложение однозначно). Тогда $\text{vol}_0(v_1, \dots, v_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, h_k)$ по свойствам определителя. Выберем теперь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_{k-1}$ в V_B и дополним его до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_k$ всего пространства V_P так, чтобы e_k был сонаправлен с h_k . Тогда $h_k = \|h_k\| e_k$, и, по свойству определителя, $\text{vol}_0(v_1, \dots, h_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, v_{k-1}) \|h_k\|$, откуда $\text{vol}(P) = \text{vol}(B) \|h_k\|$. Таким образом, $\|h_k\|$ играет роль высоты параллелепипеда, опущенной на основание B . Теми самым, мы приходим к следующему результату.

Предложение 14. *Объем k -параллелепипеда равен произведению объема любого его основания на высоту, опущенную на это основание.*

7 Ортогонализация Грама–Шмидта

Пусть на векторном пространстве V задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Теорема 15. *Пусть $v_1, \dots, v_m \in V$ — линейно независимые векторы, тогда существуют ненулевые ортонормальные векторы $w_1, \dots, w_m \in V$ такие, что при каждом $1 \leq k \leq m$ линейные оболочки векторов $v_1, \dots, v_k$ и $w_1, \dots, w_k$ совпадают.*

Векторы $w_1, \dots, w_m$ могут быть построены с помощью процесса *ортогонализации Грама–Шмидта*: на первом шаге $w_1 = v_1 / \|v_1\|$, и если ортонормальные векторы $w_1, \dots, w_{k-1}$ уже определены, то полагаем

$$w'_k = v_k - \langle w_1, v_k \rangle w_1 - \dots - \langle w_{k-1}, v_k \rangle w_{k-1}, \quad w_k = w'_k / \|w'_k\|.$$

В частности, для конечномерного пространства V этот процесс позволяет построить по произвольному базису пространства V соответствующий ортонормальный.

Если требуется построить лишь ортогональный базис w_i , то можно начать с $w_1 = v_1$, а затем последовательно применять формулу

$$w_k = v_k - \frac{\langle w_1, v_k \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle w_{k-1}, v_k \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1}.$$

Замечание 16. Из построения вытекает, что для линейного пространства с заданным скалярным произведением матрица C перехода к линейно независимой системе векторов $v_1, \dots, v_m$ от ортонормальной системы $w_1, \dots, w_m$, полученной ортогонализацией Грама–Шмидта, — верхнетреугольная. Найдем, чему равны диагональные элементы матрицы C .

На первом шаге $w_1 = v_1/\|v_1\|$, поэтому первый диагональный элемент равен $\|v_1\|$, т.е. $\text{vol}(V_1)$ — объему 1-параллелепипеда $V_1 = (v_1)$. Пусть теперь $1 < k \leq n$. Заметим, что на k -ом шаге мы получаем вектор w'_k как ортогональную проекцию вектора v_k на ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на $v_1, \dots, v_{k-1}$. Таким образом, в выражении v_k через векторы $w_1, \dots, w_k$ коэффициент перед w_k равен $\|w'_k\|$, т.е. высоте k -параллелепипеда $V_k = (v_1, \dots, v_k)$, опущенной на его основание $V_{k-1} = (v_1, \dots, v_{k-1})$. По предложению 14, этот коэффициент равен $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$. Чтобы для первого диагонального элемента получить такую же формулу, как и для k -ого при $k > 1$, мы положим $V_0 = (\emptyset)$ и $\text{vol } V_0 = 1$. Итак, теперь при каждом $1 \leq k \leq n$ формула для k -ого диагонального элемента матрицы C имеет вид $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$. Отметим, что, как следствие, мы получили: все диагональные элементы матрицы C положительны.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений показывает, что обратная матрица C^{-1} — тоже верхнетреугольная, а ее диагональные элементы — обратные к диагональным элементам исходной матрицы и, значит, также положительные, равные $\text{vol}(V_{k-1})/\text{vol}(V_k)$.

8 Сопряженные линейные отображения

Пусть на конечномерном векторном пространстве V задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда для каждого вектора $v_0 \in V$ определен линейный функционал $\varphi_{v_0}(v) = \langle v_0, v \rangle$, т.е. элемент из V^* . Тем самым, скалярное произведение порождает отображение $\varphi: V \rightarrow V^*$, $v_0 \mapsto \varphi_{v_0}$. Так как скалярное произведение билинейно, то отображение φ линейно.

Задача 17. Покажите, что отображение φ — изоморфизм между V и V^* .

Пусть теперь V и W — конечномерные векторные пространства, наделенные скалярными произведениями, в $L: V \rightarrow W$ — линейное отображение. Рассмотрим билинейную форму $a(v, w) = \langle L(v), w \rangle$, тогда при фиксированном w отображение $\psi(v) = a(v, w)$ — линейный функционал на V , поэтому, в силу задачи 17, существует единственный вектор v_0 такой, что $\psi(v) = \langle v, v_0 \rangle$. Этот вектор зависит от выбора w , и мы обозначим его $L^*(w)$. Тем самым, $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L^*(w) \rangle$.

Задача 18. Покажите, что $L^*: W \rightarrow V$ — линейное отображение.

Отображение L называется *сопряженным* к линейному отображению L .

Задача 19. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если на V и W заданы ортонормальные базисы, то матрица сопряженного отображения L^* равна транспонированной матрице отображения L . Останется ли это верным, если не требовать ортонормальности базисов?
- (2) $(L^*)^* = L$.
- (3) $\ker L^\perp = \text{im } L^*$ и $\text{im } L^\perp = \ker L^*$, где, как всегда, $\ker$ обозначает ядро, im — образ, а $(\cdot)^\perp$ — ортогональное дополнение.
- (4) Отображение L называется *ортгональным*, если оно сохраняет скалярные произведения векторов:

$$\langle L(v_1), L(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ для всех } v_1, v_2 \in V.$$

Покажите, что L — ортгонально, если и только если $L^* \circ L = \text{id}_V$, что равносильно $L \circ L^* = \text{id}_W$, где id_V и id_W — тождественные отображения на V и W соответственно.

- (5) Если $W = V$, и $L = L^*$, то L называется *самосопряженным*. Покажите, что в ортонормальном базисе матрица L равна транспонированной матрице L^* . Останется ли это верным, если не требовать ортонормальности базиса?
- (6) Если $V = W$ и $U \subset V$ — подпространство такое, что $L(U) \subset U$, то U называется *L -инвариантным*. Покажите, что если L — самосопряженный оператор, $U \subset V$ — инвариантное подпространство, то ограничение L на U — тоже самосопряженный оператор, а $U^\perp$ — также инвариантное подпространство.

- (7) Покажите, что собственные подпространства самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу.
- (8) Покажите, у самосопряженного оператора имеется хотя бы одно собственное подпространство. Выведите отсюда, что для самосопряженного оператора имеется ортонормальный собственный базис, в котором матрица оператора диагональна.

9 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Будем говорить, что квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве имеет *канонический вид* в некотором базисе, если матрица Грама этого базиса относительно соответствующей симметричной билинейной формы диагональна.

Теорема 20. *Для любой симметричной билинейной формы на конечномерном векторном пространстве существует такой базис, в котором матрица Грама диагональна. Таким образом, каждая квадратичная форма приводится к каноническому виду.*

Пусть теперь даны две квадратичных формы. Всегда ли их можно одновременно привести к каноническому виду?

Задача 21. Пусть $\dim V = 2$, $e_1, e_2 \in V$ — базис V , $v = x e_1 + y e_2 \in V$, $a(v) = x^2$, $b(v) = xy$. Покажите, что не существует базиса, в котором обе квадратичные формы a и b имеют канонический вид.

Тем не менее, если одна из форм соответствует скалярному произведению, то одновременное приведение возможно.

Теорема 22. *Пусть a и b — квадратичные формы на конечномерном векторном пространстве, причем соответствующая a симметричная билинейная форма $a(v, w)$ положительно определена. Тогда существует такой ортонормальный относительно a базис, в котором форма b имеет канонический вид.*

Как найти базис, существование которого утверждается в теореме 22? Пусть размерность линейного пространства равна n . Выбираем сначала произвольный базис, записываем в нем матрицы квадратичных форм. Пусть A и B — матрицы форм a и b соответственно. Пишем *характеристическое уравнение* $f(\lambda) = \det(B - \lambda A) = 0$. Это — многочлен степени n , все корни которого — вещественные (вспомните, почему это так). Именно эти корни будут стоять на диагонали матрицы Грама формы b в искомом базисе, причем каждый корень будет встречаться столько раз, какова кратность корня. Чтобы найти этот базис, берем корень λ_i , находим подпространство, являющееся ядром матрицы $B - \lambda_i A$, и выбираем в этом ядре произвольный ортонормальный базис. Ядра, соответствующие разным λ_i , будут взаимно ортогональны (объясните почему). Собирая вместе все эти базисы, получаем искомый. Отметим, что в силу невырожденности формы a , ее матрица A невырождена, поэтому определена матрица $A^{-1}B$. Найденные выше λ_i — собственные числа матрицы $A^{-1}B$, кратности λ_i — кратности этих собственных чисел, а искомый базис — собственный ортонормальный базис матрицы $A^{-1}B$.

Задача 23. Докажите, что заданная в каждом базисе матрица $A^{-1}B$ порождает тензор T типа $(1, 1)$, т.е. линейный оператор.

Приведем теперь идею доказательства теоремы 22. Выберем ортонормальный базис по отношению к скалярному произведению a . Это можно сделать ортогонализацией Грама–Шмидта. Тогда в этом базисе матрица $A^{-1}B$ тензора T совпадает с матрицей B и, значит, симметрична. По пункту (1) задачи 19, матрица сопряженного оператора в этом базисе равна транспонированной матрице $A^{-1}B$, т.е. совпадает с $B^T = B$, откуда $T = T^*$, так что оператор T самосопряженный. Осталось воспользоваться пунктом (8) задачи 19.

10 Нормированные пространства

Пусть V — векторное пространство. Отображение $V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, называется *нормой*, если оно удовлетворяет следующим условиям на произвольные $v, w \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (1) $\|v\| \geq 0$, причем $\|v\| = 0$, если и только если $v = 0$ (положительная определенность);
- (2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (субаддитивность);
- (3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (положительная однородность).

Векторное пространство, на котором задана норма, называется *нормированным пространством*.

Пример 24. Пусть $V = \mathbb{R}$ — вещественная прямая, и для $v \in V$ положим $\|v\| = |v|$ — модуль вещественного числа. Проверьте, что эта функция — норма.

Если на V задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то отображение $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ является нормой (проверьте). Не всякая норма задается скалярным произведением.

Задача 25. Приведите необходимое и достаточное условие того, что данная норма порождается скалярным произведением.

Пусть на векторном пространстве V заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если существуют вещественные числа $0 < l \leq \Lambda < \infty$ такие, что для каждого $v \in V$ выполняется

$$\lambda \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \Lambda \|v\|_1.$$

Задача 26. Убедитесь, что если в предыдущей формуле поменять местами 1 и 2, то получится равносильное определение. Покажите, что в конечномерном пространстве все нормы попарно эквивалентны. Приведите примеры неэквивалентных норм (в бесконечномерном пространстве).

11 Метрические пространства

Пусть X — произвольное множество. Каждая функция $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для произвольных $x, y, z \in X$ выполняется

- (1) $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ (положительная определенность);
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);
- (3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (неравенство треугольника),

называется *метрикой*, величина $d(x, y)$ — *расстоянием между x и y* , а множество X , на котором задана метрика — *метрическим пространством*. В дальнейшем мы, как правило, не будем вводить для метрики специальный символ, например d , а вместо $d(x, y)$ будем писать $|xy|$. Если рассматривается несколько метрических пространств, то понять, в каком пространстве измеряется расстояние, можно по тому, где лежат точки x и y .

Задача 27. Пусть V — векторное пространство, а $\|\cdot\|$ — норма на нем. Для любых $v, w \in V$ положим $d(v, w) = \|v - w\|$. Покажите, что d — метрика.

Пример 28. Определенная в примере 24 норма задает на вещественной прямой $\mathbb{R}$ функцию расстояния $|v - w|$, $v, w \in \mathbb{R}$.

Выше мы определили понятие эквивалентных норм. Аналогичным образом определяются эквивалентные метрики. А именно, метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *эквивалентными*, если существуют такие вещественные $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, что

$$\lambda \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \Lambda \rho_1(x, y)$$

для всех $x, y \in X$.

Задача 29. Убедитесь, что если в предыдущей формуле поменять местами 1 и 2, то получится равносильное определение. Покажите, что на векторном пространстве две нормы эквивалентны, если и только если соответствующие им метрики эквивалентны.

Задача 30. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ стандартную метрику $\rho_1(x, y) = |x - y|$. Положим $\rho_2 = \rho_1/(1 + \rho_1)$. Покажите, что ρ_2 — метрика, не эквивалентная ρ_1 .

Пусть X — метрическое пространство. Тогда для любых $x \in X$, $r > 0$, $t \geq 0$,

- множество $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ называется *открытым шаром с центром x и радиусом r* ;
- множество $B_t(x) = \{y \in X : |xy| \leq t\}$ называется *замкнутым шаром с центром x и радиусом t* ; если $t = 0$, то шар $B_t(x)$ называется *вырожденным*, а если $t > 0$ — *невыврожденным*;

- множество $S_t(x) = \{y \in X : |xy| = t\}$ называется *сферой с центром x и радиусом t* ; если $t = 0$, то сфера $S_t(x)$ называется *вырожденной*, а если $t > 0$ — *невыврожденной*.

Пусть Y — непустое подмножество X . Тогда для $x \in X$, $r > 0$, $t \geq 0$,

- (1) $|xY| = \inf\{|xy| : y \in Y\}$ называется *расстоянием от точки x до подмножества Y* ;
- (2) множество $U_r(Y) = \{z \in X : |zY| < r\}$ называется *открытой r -окрестностью множества Y* ;
- (3) множество $B_t(Y) = \{z \in X : |zY| \leq t\}$ называется *замкнутой t -окрестностью множества Y* .

Подмножество Y метрического пространства X называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре $B_r(x)$.

Пусть V и W — линейные пространства, а $\mathcal{L}(V, W)$ — множество всех линейных отображений из V в W . Для любых $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ и любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ определена линейная комбинация $aL_1 + bL_2$, превращающая $\mathcal{L}(V, W)$ в векторное пространство. Пусть теперь V и W — нормированные пространства. Рассмотрим множество $\mathcal{B}(V, W) \subset \mathcal{L}(V, W)$, составленное из всех линейных отображений, каждое из которых переводит замкнутый единичный шар $B_1(0) \subset V$ в ограниченное подмножество в W . Линейные отображения из $\mathcal{B}(V, W)$ называются *ограниченными*. Так как линейная комбинация ограниченных линейных отображений ограничена (проверьте), множество $\mathcal{B}(V, W)$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}(V, W)$. Далее, для каждого ограниченного отображения $L \in \mathcal{B}(V, W)$ величина

$$(2) \quad \|L\| = \sup\{\|L(v)\| : v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

ограничена, а отображение $L \mapsto \|L\|$ является нормой (докажите). Ниже мы используем ограниченные линейные отображения при определении дифференцирования.

12 Топология

Пусть X — произвольное множество. Семейство $\tau \subset 2^X$ подмножеств X называется *топологией*, если τ обладает следующими свойствами:

- (1) $\emptyset, X \in \tau$;
- (2) для любого подсемейства $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ выполняется $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно произвольных объединений);
- (3) для любого **конечного** подсемейства $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ имеем $\cap_{i=1}^n U_i \in \tau$ (семейство τ замкнуто относительно конечных пересечений).

Множество, на котором задана топология, называется *топологическим пространством*, а элементы топологии — *открытыми множествами*. Часто, для краткости, топологическое пространство X с топологией τ записывают в виде пары (X, τ) . Также, если хотят подчеркнуть, что топология задана на множестве X , такую топологию обозначают τ_X .

Отметим, что на множестве X можно ввести, вообще говоря, много разных топологий, и на семействе этих топологий имеется частичный порядок, заданный включением (одна топология содержится в другой). Наименьшая топология в этом порядке называется *антидискретной* и имеет вид $\{\emptyset, X\}$; наибольшая топология — *дискретная*, равная 2^X . Ясно, что пересечение любого семейства топологий на X также является некоторой топологией. Таким образом, для каждого семейства $\sigma \subset 2^X$ топология, равная пересечению всех топологий на X , содержащих σ , является наименьшей топологией, содержащей σ . Говорят, что σ *порождает* эту топологию.

Подсемейство $\beta \subset \tau$ топологии τ называется *базой топологии* τ , если множество всевозможных объединений элементов из β совпадает с топологией τ . Отметим, что база β может не содержать пустого множества, так как разрешается брать объединение по пустому семейству индексов, что дает пустое множество.

Подсемейство $\sigma \subset \tau$ называется *предбазой топологии* τ , если всевозможные конечные пересечения образуют базу топологии τ . Отметим, что объединение всех элементов предбазы не обязано содержать X , так как разрешается брать пересечение по пустому семейству индексов, что дает все X .

Задача 31. Покажите, что семейство $\beta \subset 2^X$ является базой некоторой топологии на X , если и только если

- (1) $\cup \beta = X$ и

- (2) для любых пересекающихся $B_1, B_2 \in \beta$ и любого $x \in B_1 \cap B_2$ существует $B \in \beta$ такой, что $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Покажите, что любое семейство σ подмножеств X является предбазой некоторой топологии τ , при этом τ — наименьшая топология, содержащая σ .

Подмножество $F \subset X$ топологического пространства с топологией τ называется *замкнутым*, если $X \setminus F$ — открыто. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства X . Семейство $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$;
- (2) для любого подсемейства $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{F}$ выполняется $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$ (семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно произвольных пересечений);
- (3) для любого **конечного** подсемейства $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ имеем $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$ (семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных объединений).

Чтобы подчеркнуть связь семейства замкнутых множеств с данным топологическим пространством (X, τ) , иногда это семейство будем обозначать также или $\mathcal{F}_\tau$, или $\mathcal{F}_X$.

Отметим, что $\emptyset$ и X являются одновременно открытыми и замкнутыми. Подмножество $Y \subset X$ называется *открыто-замкнутым*, если оно одновременно открыто и замкнуто. Множества $\emptyset$ и X называются *тривиальными открыто-замкнутыми подмножествами*.

Задача 32. Проверьте, что семейство τ удовлетворяет свойствам, определяющим топологию, если и только семейство дополнений $\mathcal{F}_\tau$ удовлетворяет перечисленным выше свойствам замкнутых множеств.

Таким образом, топологическое пространство можно определять также и в терминах замкнутых множеств. Приведем ряд конструкций, строящих топологии.

- Пусть Y — подмножество топологического пространства (X, τ) . Тогда семейство $\{U \cap Y : U \in \tau\}$ является топологией на Y , которая называется *индуцированной*. Если не оговорено противное, на каждом подмножестве топологического пространства мы будем рассматривать именно индуцированную топологию.
- Пусть X — метрическое пространство. Тогда семейство всех открытых шаров образует базу (проверьте), а соответствующая топология называется *метрической*. Ясно, что открытые множества в метрической топологии — это всевозможные объединения открытых шаров.
- Пусть $\mathcal{B}(V, W)$ — линейное пространство ограниченных линейных отображений нормированных пространств, наделенное определенной выше нормой. Так как норма порождает метрику, то пространство $\mathcal{B}(V, W)$ наделается метрической топологией.
- Пусть $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — семейство топологических пространств. Тогда семейство $\sqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \tau_\alpha$, образует *топологию дизъюнктного объединения* на множестве $\sqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$.
- Пусть $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — семейство топологических пространств. Тогда семейство $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \tau_\alpha$, и лишь конечное число U_α отлично от X_α , образует *топологию произведения* или *тихоновскую топологию* на множестве $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Пример 33. Заданная в примере 28 метрика на вещественной прямой $\mathbb{R}$ порождает стандартную топологию на $\mathbb{R}$. На каждом подмножестве $\mathbb{R}$, в частности, на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, стандартная топология — индуцированная из стандартной топологии на $\mathbb{R}$. Эта топология совпадает с метрической топологией (проверьте).

Открытое множество, содержащее точку топологического пространства, называется *окрестностью* этой точки. Если $x \in X$ — точка топологического пространства, то окрестность этой точки часто будем обозначать через U^x . Также нам понадобится множество $U^x \setminus \{x\}$, которое мы обозначим $\dot{U}^x$ и назовем *проколотой окрестностью точки x* . Точка x называется *изолированной*, если $\{x\}$ — открытое множество.

Задача 34. Покажите, что точка не является изолированной, если и только если каждая ее проколота окрестность непуста.

Пусть Y — подмножество топологического пространства X . Точка $x \in X$ называется

- *точкой прикосновения* Y , если любая окрестность U^x пересекает Y ;
- *внутренней точкой* Y , если некоторая окрестность U^x содержится в Y ;
- *граничной точкой* Y , если каждая окрестность U^x пересекает как Y , так и $X \setminus Y$.

Множество всех точек прикосновения Y называется *замыканием* Y и обозначается $\bar{Y}$. Отметим, что замыкание Y равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих Y (проверьте), а потому является наименьшим замкнутым множеством, содержащим Y .

Множество всех внутренних точек Y называется *внутренностью* Y и обозначается $\text{Int } Y$. Внутренность представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в Y (докажите). Таким образом, множество Y является промежуточным между $\text{Int } Y$ и $\bar{Y}$, а именно, $\text{Int } Y \subset Y \subset \bar{Y}$.

Множество всех граничных точек Y называется *границей* Y и обозначается ∂Y . Граница является замкнутым множеством, равным $\bar{Y} \setminus \text{Int } Y$.

Пространство, в котором любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности, называется *хаусдорфовым*.

Задача 35. Покажите, что метрическое пространство хаусдорфово. Приведите пример нехаусдорфова пространства.

Пространство называется *связным*, если в нем нет нетривиальных открыто-замкнутых подмножеств.

Задача 36. Покажите, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ со стандартной топологией, определенной в примере 33, связан.

Покрывание топологического пространства называется *открытым*, если все его элементы — открытые множества. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 37. Докажите, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ со стандартной топологией, определенной в примере 33, компактен.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным*, если выполняется одно из трех эквивалентных условий:

- (1) для любой точки $x \in X$ и любой окрестность $U^{f(x)}$ существует такая окрестность U^x , что $f(U^x) \subset U^{f(x)}$;
- (2) для любого $U \in \tau_Y$ имеем $f^{-1}(U) \in \tau_X$ (прообраз открытого множества открыт);
- (3) для любого $F \in \mathcal{F}_Y$ имеем $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$ (прообраз замкнутого множества замкнут).

Задача 38. Покажите, что линейное отображение $L: V \rightarrow W$ между нормированными пространствами непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

*Кривой в топологическом пространстве X , соединяющей точки $x, y \in X$, называется каждое непрерывное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ из отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ такое, что $x = \gamma(a)$ и $y = \gamma(b)$. Если любые две точки топологического пространства можно соединить непрерывной кривой, то такое пространство называется *линейно связным*.*

Задача 39. Покажите, что линейно связное топологическое пространство связно. Приведите пример связного топологического пространства, не являющегося линейно связным.

Задача 40. Покажите, что образ связного (линейно связного) топологического пространства связан (линейно связан).

Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если у каждой точки имеется линейно связная окрестность.

Задача 41. Покажите, что в локально линейно связном пространстве связность эквивалентна линейной связности.

Последовательностью во множестве X называется каждое отображение $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ из множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Обычно элементы $x(i)$ обозначаются x_i , а последовательность записывается или как $x_1, x_2, \dots$, или просто x_i . Последовательность x_i точек топологического пространства X *сходится к точке $y \in X$* , если вне каждой окрестности U^y лежит лишь конечное число точек x_i . Такая точка y называется *пределом последовательности x_i* и обозначается $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$. Последовательность, для которой существует хотя бы один предел, называется *сходящейся*. Вообще говоря, последовательность в топологическом пространстве X может иметь много разных пределов (постройте пример), но если пространство X хаусдорфово, то предел каждой сходящейся последовательности однозначно определен (проверьте).

Заменяем теперь $\mathbb{N}$ на топологическое пространство Z и, вместо последовательности в X , рассмотрим отображение $f: Z \rightarrow X$. Выберем произвольную точку $z_0 \in Z$. Будем говорить, что отображение f *стремится к x_0 при $z \rightarrow z_0$* и писать $x_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, если для любой окрестности U^{x_0} существует проколота окрестность $\dot{U}^{z_0}$ такая, что $f(\dot{U}^{z_0}) \subset U^{x_0}$. Отметим, что отображение f непрерывно в точке z_0 , если и только если $x_0 = f(z_0)$.

Задача 42. Положим $Z = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ и зададим на Z топологию, в которой базой являются все одноточечные подмножества $\mathbb{N}$, а также множества вида $T_n := \{m \geq n : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ сходится к $y \in X$, если и только если продолжение f отображения x на все Z такое, что $f(\infty) = y$, непрерывно.

Пусть X — метрическое пространство. Последовательность x_i в X называется *фундаментальной*, если числовая последовательность $d_n = \sup\{x_p x_q : p \geq n, q \geq n\}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность сходится. Каждое конечномерное нормированное пространство полное. В общем случае, нормированное пространство (не обязательно конечномерное) называется *банаховым*, если оно полное.

Задача 43. Приведите примеры полных и неполных бесконечномерных нормированных пространств.

Задача 44. Покажите, что функция на линейном нормированном пространстве V , сопоставляющая каждому вектору v его норму $\|v\|$, непрерывна. В частности, каждый шар $\{v \in V : \|v\| \leq r\}$ — замкнутое ограниченное подмножество V .

Задача 45. Покажите, что

- (1) нормы на линейном пространстве (не обязательно конечномерном) эквивалентны, если и только если они задают одну и ту же топологию;
- (2) эквивалентные метрики на произвольном множестве задают одну и ту же топологию;
- (3) неэквивалентные метрики могут задавать одну и ту же топологию (приведите пример);
- (4) на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, в частности, задаваемые ими топологии одинаковы, а замкнутые ограниченные подмножества компактны (в частности, компактными являются все замкнутые шары);
- (5) приведите пример нормированного пространства, в котором невырожденный замкнутый шар некомпактен;
- (6) на бесконечномерном пространстве могут существовать неэквивалентные нормы (приведите пример).

Задача 46. Пусть V, W — нормированные пространства (не обязательно конечномерные), и $L: V \rightarrow W$ — линейное отображение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует хотя бы одна точка пространства V , в которой отображение L непрерывно.
- (2) Отображение L непрерывно в 0.
- (3) Существует такое число K , что $\|L(v)\| \leq K \|v\|$ для любого $v \in V$.
- (4) Отображение L ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества V в ограниченные подмножества W .
- (5) Норма $\|L\|$, определенная формулой (2), ограничена.

- (6) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *липшицевым*, если существует такое число C , что $|f(x)f(x')| \leq C|x x'|$ для любых $x, x' \in X$. В этом пункте утверждается, что L — липшицево отображение (на V и W мы рассматриваем метрики, порожденные нормами).
- (7) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x, x' \in X$ с $|x x'| < \delta$ выполняется $|f(x)f(x')| < \varepsilon$. В этом пункте утверждается, что L — равномерно непрерывно.

Из задачи 46 вытекает следующий результат.

Следствие 47. *Отображение нормированных пространств непрерывно, если и только если оно ограничено.*

Задача 48. Покажите, что линейные отображения из конечномерного нормированного пространства в произвольное нормированное пространство всегда непрерывно.

Задача 49. Приведите пример разрывного линейного отображения нормированных пространств.

13 Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$

Как мы уже отмечали, элементами арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ являются всевозможные упорядоченные наборы чисел $(x^1, \dots, x^n)$. На $\mathbb{R}^n$ определены естественные операции сложения элементов и умножения их на числа, превращающие $\mathbb{R}^n$ в линейное пространство:

$$(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \quad a(x^1, \dots, x^n) = (ax^1, \dots, ax^n).$$

Если $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, то числа x^i называются *декартовыми координатами вектора x* . Векторы, у которых одна из координат равна 1, а все остальные — нулю, образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$, называемый *стандартным*. Отметим, что каждое n -мерное векторное пространство V изоморфно $\mathbb{R}^n$, причем каждый изоморфизм однозначно определяется выбором базиса: если e_i — базис пространства V , то отображение $v^i e_i \mapsto (v^1, \dots, v^n)$ является изоморфизмом.

На $\mathbb{R}^n$ имеется стандартное скалярное произведение:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = xy = \delta_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^n x^i y^i.$$

Евклидовым пространством часто называется $\mathbb{R}^n$ с так определенным скалярным произведением.

Как было отмечено выше, стандартное скалярное произведение порождает норму, которая, в свою очередь, задает расстояние, а последнее — метрическую топологию.

14 Дифференцирование

Для более детального ознакомления с материалом этого раздела мы рекомендуем монографии [49] и [61].

Пусть V и W — нормированные пространства. Напомним, что норма порождает метрику, а метрика — топологию. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ назовем *бесконечно малым в точке $v_0 \in V$* и будем писать $\varphi = \bar{o}(1)$ при $v \rightarrow v_0$, если $\lim_{v \rightarrow v_0} \varphi(v) = 0 \in W$. Если же для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется $\varphi = \|v - v_0\|^k \bar{o}(1)$, то будем говорить, что φ — *бесконечно малая порядка k в точке v_0* и записывать это так: $\varphi = \bar{o}(\|v - v_0\|^k)$ при $v \rightarrow v_0$. Отметим, что $\bar{o}(1)$ — бесконечно малая порядка 0.

Будем говорить, что отображения $f, g: V \rightarrow W$ *касаются в точке v_0 с порядком k* , если $f(v) - g(v) = \bar{o}(\|v - v_0\|^k)$ при $v \rightarrow v_0$.

Задача 50. Покажите, что отображение $f: V \rightarrow W$ нормированных пространств непрерывно в точке $v_0 \in V$ тогда и только тогда, когда f и постоянное отображение $g(v) \equiv f(v_0)$ касаются в точке v_0 с нулевым порядком.

Отображение $f: V \rightarrow W$ называется *дифференцируемым в точке $v_0 \in V$* , если существует линейное ограниченное отображение $L: V \rightarrow W$ такое, что отображения $F(v) = f(v) - f(v_0)$ и $G(v) = L(v - v_0)$ касаются в точке v_0 с первым порядком. Отображение L называется *дифференциалом отображения f в точке v_0* и обозначается $df|_{v_0}$.

Задача 51. Покажите, что отображение нормированных пространств, дифференцируемое в точке, непрерывно в этой точке, а дифференциал определен однозначно.

Задача 52. Покажите, что дифференциал не меняется при замене нормы на эквивалентную.

Предположим, что пространства V и W конечномерны. Выберем в них базисы, тогда дифференциал $df|_{v_0}$ задается матрицей $f'(v_0)$, которая называется *производной отображения f* . Чтобы понять, чему равны элементы производной, введем понятие производной по направлению и частной производной.

Пусть $e \in V$ — произвольный ненулевой вектор и $v_0 \in V$ — некоторая точка. Для $f: V \rightarrow W$, определенного выше, рассмотрим отображение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow W$, заданное так: $\gamma(t) = f(v_0 + te)$. Если γ дифференцируемо в точке $t = 0$, то, по определению,

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(0)t + o(|t|),$$

откуда можно вычислить производную $\gamma'(0)$:

$$\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}.$$

Величина $\gamma'(0)$ называется *производной по направлению* и обозначается $\partial_e f|_{v_0}$.

Если V и W конечномерны, $e_1, \dots, e_m$ — базис V , $h_1, \dots, h_n$ — базис W , то, раскладывая $f(v^1, \dots, v^m) = f(v^i e_i)$ по базису h_i , получим n функций $f^j(v_1, \dots, v_m)$, где $f(v^1, \dots, v^m) = f^j(v_1, \dots, v_m)h_j$ (напомним, что по повторяющимся индексам, находящимся на разной высоте, мы предполагаем суммирование). Величины $\partial_{e_i} f^j$ называются *частными производными* и обозначаются $\frac{\partial f^j}{\partial v^i}(v_0)$. **Чтобы не загромождать обозначения, мы в дальнейшем заменим выражения $\frac{\partial f^j}{\partial v^i}(v_0)$ на более компактные, а именно, на $f_{v_i}^j(v_0)$, и если из контекста понятно, в какой точке вычисляются частные производные, то будем писать просто $f_{v_i}^j$.** Матрица

$$J_f = \begin{pmatrix} f_{v_1}^1 & f_{v_2}^1 & \cdots & f_{v_m}^1 \\ f_{v_1}^2 & f_{v_2}^2 & \cdots & f_{v_m}^2 \\ \dots\dots\dots \\ f_{v_1}^n & f_{v_2}^n & \cdots & f_{v_m}^n \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Якоби отображения f* в точке v_0 по отношению к выбранным базисам. Обратите внимание, что по столбцам матрицы Якоби стоят векторы $(f^1, \dots, f^n)$, продифференцированные по соответствующим переменным v^i .

Теорема 53. Пусть $f: V \rightarrow W$ — отображение конечномерных нормированных пространств, дифференцируемое в точке v_0 , тогда производная $f'(v_0)$ этого отображения равна матрице Якоби.

Приведем далее три основных результата, которые часто используются в нашем курсе, а именно, теоремы о дифференцировании композиции отображений, об обратном отображении и о неявном отображении. Две последних теоремы получаются естественным перенесением соответствующих результатов, касающихся линейных отображений.

Теорема 54. Пусть V , W и Z — три нормированных пространства, отображение $f: V \rightarrow W$ дифференцируемо в $v_0 \in V$, а отображение $g: W \rightarrow Z$ — в $w_0 = f(v_0)$. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо в v_0 и его дифференциал равен композиции дифференциалов f и g : $d(g \circ f)|_{v_0} = dg|_{f(v_0)} \circ df|_{v_0}$. В частности, если все эти пространства конечномерны и в них выбраны некоторые базисы, то матрица Якоби композиции отображений равна произведению матриц Якоби этих отображений: $J_{g \circ f}(v_0) = J_g(f(v_0)) J_f(v_0)$. В терминах элементов матриц Якоби последнее равенство записывается так: $(g \circ f)_{v_i}^k = g_{w_j}^k f_{v_i}^j$.

Задача 55. Покажите, что дифференциал тождественного отображения $\text{id}: V \rightarrow V$ также является тождественным отображением. Выведите отсюда, что если $f: V \rightarrow W$ — биективное отображение, дифференцируемое в $v_0 \in V$, а $f^{-1}: W \rightarrow V$ дифференцируемо в $w_0 = f(v_0)$, то дифференциал $df|_{v_0}$ является обратимым ограниченным линейным отображением, и $df^{-1}|_{w_0} = (df|_{v_0})^{-1}$.

Пусть теперь U — открытое подмножество нормированного пространства V и $f: U \rightarrow W$ дифференцируемо в каждой точке из U . По задаче 51, отображение f непрерывно. Рассмотрим отображение $df: U \rightarrow \mathcal{B}(V, W)$, заданное так: $df(v) = df|_v$. Так как пространство ограниченных линейных отображений $\mathcal{B}(V, W)$ также является нормированным, отображение df действует между нормированными пространствами, поэтому для него тоже можно говорить как про непрерывность, так и про дифференцируемость. Если это отображение непрерывно, то говорят, что f является *непрерывно-дифференцируемым* и относится к классу C^1 . Продолжая этот процесс,

мы определяем по индукции дифференциал порядка k (отображение df является дифференциалом порядка 1, а само f — дифференциалом нулевого порядка). Если существует дифференциал порядка k , то дифференциалы всех предыдущих порядков непрерывны в силу той же задачи 51. Если и дифференциал порядка k непрерывен, то говорят, что f непрерывно-дифференцируемо k раз и относится к классу C^k . Если f относится к классу C^k при всех k , то говорят, что отображение f гладкое и относится к классу C^∞ . Впрочем, в дифференциальной геометрии под *гладким отображением* часто понимают отображение класса C^k для столь большого k , которое достаточно для решения рассматриваемой задачи.

Сформулируем теперь теорему об обратном отображении. Эта теорема говорит о том, что если дифференциал является обратимым линейным отображением, то и само отображение обратимо в достаточно малой окрестности точки, где вычисляется дифференциал. Фактически, это утверждение говорит о том, что биективность линейного отображения (в нашем случае — дифференциала) не меняется при достаточно малом изменении этого отображения.

Впрочем, для того, чтобы это утверждение было верным, необходимо ввести еще ряд требований. Напомним, что полное нормированное пространство называется банаховым.

Теорема 56. Пусть $f: V \rightarrow W$ — гладкое отображение банаховых пространств и $v_0 \in V$. Если дифференциал $df|_{v_0}$ является обратимым, то существует такая окрестность $U = U^{v_0}$, что ограничение f на U взаимно однозначно с образом, $f(U)$ — открытое подмножество W , и обратное отображение $(f|_U)^{-1}$ также является гладким.

Замечание 57. Нас в основном будет интересовать конечномерный случай, а именно, когда $V = W = \mathbb{R}^n$. Если $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты на V , а $y^1, \dots, y^n$ — декартовы координаты на W , то отображение $f: V \rightarrow W$ записывается в виде n гладких функций $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$. Матрица Якоби этого отображения, вычисленная в точке p , имеет вид

$$df|_p = \begin{pmatrix} y_{x_1}^1 & y_{x_2}^1 & \cdots & y_{x_n}^1 \\ y_{x_1}^2 & y_{x_2}^2 & \cdots & y_{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{x_1}^n & y_{x_2}^n & \cdots & y_{x_n}^n \end{pmatrix}$$

(столбцы этой матрицы получаются дифференцированием “радиус-вектора” $(y^1, \dots, y^n)$ по соответствующим координатам x^i и подстановкой координат точки p ; мы опустили указание на точку p для упрощения формулы). В данном случае, условие обратимости дифференциала — это невырожденность матрицы $df|_p$, что эквивалентно условию $\det df|_p \neq 0$. В случае $n = 1$ отображение f — вещественная функция одной переменной, а ее невырожденность — неравенство нулю производной.

Введем понятие частного дифференциала. Пусть $V_1, \dots, V_k, W$ — нормированные пространства. На линейном пространстве $V_1 \times \cdots \times V_k$ введем норму $\|(v_1, \dots, v_k)\| = \max_i \|v_i\|$. Рассмотрим произвольное отображение $f: V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow W$ и любую точку $p = (p_1, \dots, p_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$. Фиксируем все $v_j, j \neq i$, положив $v_j = p_j$, и зададим отображение $f_i: V_i \rightarrow W$, $f_i(v_i) = f(p_1, \dots, v_i, \dots, p_k)$. Если это отображение дифференцируемо в точке p_i , то его дифференциал называется i -м *частным дифференциалом* в точке p и обозначается $\partial_i f|_p$.

Теорема 58. Во введенных выше обозначениях, отображение $f: V_1 \times \cdots \times V_k \rightarrow W$ гладкое, если и только если все его частные дифференциалы — гладкие отображения.

Сформулируем теперь теорему о неявном отображении.

Теорема 59. Пусть V, W — банаховы пространства и $f: V \rightarrow W$ — гладкое отображение. Выберем произвольное $c \in W$ и предположим, что $M := f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Возьмем некоторую точку $p \in M$ и предположим, что V представимо в виде $V_1 \times V_2$, где V_i — банаховы пространства, и для этого представления частный дифференциал $\partial_2 f|_p: V_2 \rightarrow W$ обратим. Пусть $p = (p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$, тогда существуют такие окрестности $U^{p_1} \subset V_1$, $U^p \subset V$, и гладкое отображение $g: U^{p_1} \rightarrow V_2$, что $M \cap U^p = \Gamma_g$, где Γ_g — график отображения g .

Замечание 60. Множество M из теоремы 59 является решением уравнения $f(v) = c$. В теореме предполагается, что это решение непусто, а также что в некоторой точке p из этого решения дифференциал отображения f раскладывается на два частных дифференциала, один из которых обратим. Тогда, утверждается, в окрестности точки p решение является графиком некоторого отображения, иными словами, решение (локально) однозначно проецируется на некоторое подпространство исходного пространства. Эта теорема очевидна для линейного отображения f и выполняется не только локально, но и глобально: в этом случае решение M является сдвигом

на с ядра отображение f , и M однозначно проецируется на любое дополнение к V_2 , в частности, на V_1 (убедитесь в этом). Если же f нелинейно, то в малой окрестности точки p оно “почти линейно”, что приводит к сохранению перечисленных выше свойств.

Замечание 61. Нас будет в основном интересовать конечномерный случай, когда $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $1 \leq m < n$ (случай $m = n$ относится к теореме об обратном отображении). Снова рассмотрим на V декартовы координаты $x^1, \dots, x^n$, а на W — декартовы координаты $y^1, \dots, y^m$. Отображение $f: V \rightarrow W$ задается m гладкими функциями $f^i(x^1, \dots, x^n)$, а множество M является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f^1(x^1, \dots, x^n) = c^1, \\ f^2(x^1, \dots, x^n) = c^2, \\ \dots\dots\dots \\ f^m(x^1, \dots, x^n) = c^m. \end{cases}$$

Далее, мы выбираем некоторую точку $p \in M$ и предполагаем, что пространство V раскладывается в произведение $V_1 \times V_2$, для которого частный дифференциал $\partial_2 f|_p: V_2 \rightarrow W$ обратим. В рассматриваемом конечномерном случае это равносильно тому, что дифференциал $df|_p$ является сюръективным отображением. Отметим, что этот дифференциал — линейное отображение, которое задается вычисленной в точке p матрицей Якоби

$$df|_p = \begin{pmatrix} f_{x_1}^1 & f_{x_2}^1 & \dots & f_{x_n}^1 \\ f_{x_1}^2 & f_{x_2}^2 & \dots & f_{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1}^m & f_{x_2}^m & \dots & f_{x_n}^m \end{pmatrix}$$

(по строкам стоят градиенты функций f^i). Сюръективность дифференциала означает в точности то, что ранг матрицы Якоби — максимально возможный и, значит, равный m .

Максимальность ранга означает, что в матрице Якоби есть квадратная подматрица размера $m \times m$, являющаяся невырожденной. Пусть столбцы этой матрицы имеют последовательные номера $(i_1, \dots, i_m)$, а все остальные — номера $(j_1, \dots, j_{n-m})$. В качестве пространств разложения V_1 и V_2 можно взять координатные подпространства, первое натянутое на стандартные базисные векторы $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-m}}$, а второе — на $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$. Обозначим через p_i проекцию точки p на пространство V_i , тогда $p_1 = (p^{j_1}, \dots, p^{j_{n-m}})$ и $p_2 = (p^{i_1}, \dots, p^{i_m})$. Теорема утверждает, что существуют окрестности U^{p_1} , U^p и гладкое отображение $g: U^{p_1} \rightarrow V_2$, для которых $M \cap U^p$ совпадает с графиком этого отображения. В координатах x^i , отображение g задается m гладкими функциями $g^i(x^{j_1}, \dots, x^{j_{n-m}})$, $i = 1, \dots, m$. Иногда, для удобства изложения, координаты x^i нумеруют так, чтобы $(i^1, \dots, i^m) = (1, \dots, m)$, тогда $(j_1, \dots, j_{n-m}) = (m+1, \dots, n)$, так что

$$M \cap U^p = \left\{ (g^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, g^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n) : (x^{m+1}, \dots, x^n) \in U^{p_1} \right\}.$$

Замечание 62. Проведенные выше построения, связанные с дифференцируемостью, локальные, т.е. зависят лишь от значений отображения в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки, поэтому при выборе области определения отображения мы можем заменить все пространство на произвольную окрестность этой точки.

15 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть V — произвольное векторное пространство. *Векторным полем на V* называется произвольное отображение $\xi: V \rightarrow V$. Если пространство V нормированное, то можно говорить про непрерывные и гладкие поля. *Интегральной кривой векторного поля ξ с начальным условием $v_0 \in V$* называется каждое гладкое отображение $v: [0, a] \rightarrow V$ из некоторого отрезка $[0, a] \subset \mathbb{R}$ такое, что $v(0) = v_0$ и $\dot{v}(t) = \xi(v(t))$ при всех $t \in [0, a]$.

Задачу поиска интегральной траектории для поля ξ принято записывать в виде (обыкновенного) *дифференциального уравнения* $\dot{v} = \xi(v)$, которое кодирует приведенное выше определение интегральной кривой. При этом, интегральную траекторию $v(t)$ называют *решением* этого дифференциального уравнения с начальным условием $v(0) = v_0$.

Теорема 63 (Существование и единственность). *Пусть V — банахово пространство и $\xi: V \rightarrow V$ — гладкое векторное поле. Тогда через каждую точку $v_0 \in V$ проходит интегральная траектория, единственная в*

следующем смысле: интегральные траектории, проходящие через v_0 , совпадают на общей части их областей определения. На эквивалентном языке, дифференциальное уравнение $\dot{\varphi} = \xi(v)$ с гладкой правой частью $\xi(v)$ имеет единственное решение с каждым начальным условием.

Замечание 64. Имеется много разных вариаций теоремы существования и единственности. Во-первых, не обязательно рассматривать векторное поле ξ на всем V . Во-вторых, вместо гладкой правой части можно рассматривать непрерывную с некоторыми дополнительными условиями. В-третьих, вместо $\dot{v}$ в левой части дифференциального уравнения можно поставить производную более высокого порядка. Наконец, можно изучать векторные поля, меняющиеся “со временем”, т.е. при изменении параметра $t \in [0, a]$. Ниже мы приведем два последних варианта модификаций.

Пусть V — произвольное нормированное пространство и $m \in \mathbb{N}$. Пусть ξ — векторное поле на V . Построим поле Θ на V^m следующим образом. Для $w = (v_1, \dots, v_m) \in V^m$ положим

$$\Theta(w) = \Theta(v_1, \dots, v_{m-1}, v_m) = (v_2, \dots, v_m, \xi(v_1)),$$

тогда интегральная траектория $w(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$ этого поля удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{v}_1 = v_2, \dots, \dot{v}_{m-1} = v_m, \dot{v}_m = \xi(v_1).$$

Положив $v_1 = v$, мы получим, что для этого решения выполняется $v^{(m)} = \xi(v)$, где $v^{(m)}$ — производная порядка m . Обратно, кривая $v(t)$ на V , удовлетворяющая условию $v^{(m)} = \xi(v)$, может быть найдена как интегральная траектория описанного выше векторного поля Θ . Таким образом, мы приходим к *дифференциальному уравнению* $v^{(m)} = \xi(v)$, для которого число m называется *порядком*. Из теоремы 63 вытекает, что, для однозначного задания решения, в качестве начальных условий теперь нужно брать не только точку $v_0 \in V$, для которой $v(0) = v_0$, но и начальные значения всех производных до порядка $(m-1)$, т.е. $v_{0,1}, \dots, v_{0,(m-1)} \in V$, для которых $v^{(k)}(0) = v_{0,k}$, $k = 1, \dots, m-1$.

Отметим, что поле Θ можно усложнить, заменив уравнение $v_m = \xi(v_1)$ от одной переменной v_1 на уравнение от всех переменных $v_1, \dots, v_{m-1}$. Получим общее дифференциальное уравнение m -ой степени, *разрешенное относительно старшей производной*.

Перейдем теперь к полям, “зависящим от времени”. Для этого в качестве отображения ξ рассмотрим $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, и в качестве интегральной траектории будем искать такие $v: [0, a] \rightarrow V$, что $\dot{v}(t) = \xi(t, v(t))$. Теорема существования и единственности здесь такая же: начальное условие по-прежнему — это точка $v_0 \in V$, для которой $v(0) = v_0$. Также аналогично определяются и уравнения n -ого порядка (сделайте это). Если поле ξ не зависит от времени, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *автономным*, если же зависит, то — *неавтономным*.

Замечание 65. Если вместо решений вида $v(t)$ рассматривать функции многих переменных, то похожие построения приедут к теории *дифференциальных уравнений в частных производных*. Здесь условия, однозначно определяющие решения, устроены сложнее, и мы поговорим об этом, когда возникнет необходимость.

Как мы видели в теореме 63, решения обыкновенного дифференциального с данным начальным условием отличаются лишь размерами промежутка, на котором они рассматриваются (на общей части решения совпадают). Возникает естественный вопрос: сколь далеко может простираться решение с данным начальным условием? Имеется много разных “теорем продолжения”. Мы приведем ту из них, которая достаточно скоро нам понадобится. Рассмотрим неавтономное *линейное* дифференциальное уравнение, т.е. такое, которое задается зависящим от времени $t \in \mathbb{R}$ векторным полем $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, удовлетворяющим условию “линейности”: при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $A^t: V \rightarrow V$, $A^t(v) = \xi(t, v)$, является ограниченным линейным. Напомним также, что в разделе 11 мы определили *норму* для таких A^t .

Теорема 66 (О продолжении решений). Пусть V — банахово пространство, а $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — гладкое векторное поле, зависящее от времени и линейное по v , т.е. $\xi(t, v) = A^t(v)$, где для каждого $t \in \mathbb{R}$ определен ограниченный линейный оператор $A^t: V \rightarrow V$. Предположим, что нормы операторов A^t ограничены в совокупности, т.е. $\sup_t \|A^t\| < \infty$. Тогда решение дифференциального уравнения $\dot{\varphi} = A^t(v)$ с произвольным начальным условием продолжается на любой промежуток.

Замечание 67. Преимущественно мы будем рассматривать поля на пространстве $V = \mathbb{R}^n$ или его подмножествах. Если $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты на $\mathbb{R}^n$, то поле $\xi: V \rightarrow V$ задается набором из n функций

$\xi^i(x^1, \dots, x^n)$. Соответствующее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \xi^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dot{x}^2 = \xi^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = \xi^n(x^1, \dots, x^n), \end{cases}$$

а его решением является каждая интегральная траектория $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ такая, что $\dot{\gamma}(t) = \xi(\gamma(t))$ при всех $t \in [0, a]$. Начальное условие — это точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, из которой выходит интегральная траектория $\gamma(t)$: $\gamma(0) = x_0$. Теорема существования и единственности утверждает, что из каждой точки выходит интегральная траектория, причем эта траектория единственна в том смысле, что любые две выходящие из данной точки интегральные траектории совпадают на общей части их областей определения.

Автономное дифференциальное уравнение порядка m , разрешенное относительно старшей производной, выглядит в этом случае так:

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = \xi^1(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ (x^2)^{(m)} = \xi^2(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = \xi^n(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}). \end{cases}$$

Решениями снова являются интегральные траектории $\gamma(t)$, а начальные условия теперь представляют собой не только точки, из которых выходят эти траектории, но и значения в этих точках всех производных функции $\gamma(t)$ вплоть до порядка $m-1$:

$$\gamma(0) = x_0, \dot{\gamma}(0) = x_{0,1}, \dots, \gamma^{(m-1)}(0) = x_{0,m-1},$$

где $x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,m-1} \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы.

Неавтономное уравнение получается из автономного добавлением зависимости от параметра t :

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = \xi^1(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ (x^2)^{(m)} = \xi^2(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = \xi^n(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}). \end{cases}$$

Начальные условия такие же.

Неавтономное уравнение является линейным, если все ξ^i линейно зависят от всех переменных, возможно, за исключением переменной t :

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = a_{0i}^1(t) x^i + a_{1i}^1(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^1(t) (x^i)^{(m-1)}, \\ (x^2)^{(m)} = a_{0i}^2(t) x^i + a_{1i}^2(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^2(t) (x^i)^{(m-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = a_{0i}^n(t) x^i + a_{1i}^n(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^n(t) (x^i)^{(m-1)}, \end{cases}$$

где $a_{qi}^p(t)$ — гладкие функции параметра t , а по повторяющимся индексам i , как принято в тензорном исчислении, предполагается суммирование.

Некоторые курсы лекций и монографии по дифференциальной геометрии

- [1] Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. *Введение в дифференциальную геометрию “в целом”*, М., Наука, 1973.
- [2] Бляшке В. *Введение в дифференциальную геометрию*, 2-е изд., исправл. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000.
- [3] Веблен О., Уайтхед Дж. *Основания дифференциальной геометрии*. М.: ИЛ, 1949.
- [4] Вербицкий М., *Дифференциальная геометрия и векторные расслоения*: <http://bogomolov-lab.ru/KURSY/BUNDLES-2013/>
- [5] Гусейн-Заде С.М. *Лекции по дифференциальной геометрии*. М.: МГУ, 2001: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Gusejn-Zade2001ru.pdf>
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения*, т.1, Изд. 6, URSS, 2013.
- [7] Дынников И.А. *Классическая дифференциальная геометрия*: <https://www.dropbox.com/s/70cipfsyn35hd5s/classdiffgeom2019.pdf>
- [8] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Лекции по классической дифференциальной геометрии*: <http://dfgm.math.msu.su/files/IvaTuzTerm1-2017.pdf>
- [9] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.1, 2, М.: Наука, 1981.
- [10] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, изд. 4, перераб. и доп. URSS. 2020.
- [11] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. URSS. 2016.
- [12] Моденов П.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, М., Учпедгиз, 1949.
- [13] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*, М.: Физматгиз, 1958.
- [14] Норден А.П. *Теория поверхностей*. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [15] Погорелов А.В. *Дифференциальная геометрия*, М.: Наука, 1974.
- [16] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия*, URSS, 2003.
- [17] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*. 2-е изд., перераб. и доп., М.: Наука, 1986.
- [18] Постников М.М. *Лекции по геометрии: Гладкие многообразия. Семестр III*, Изд. 2, URSS, 2017.
- [19] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия*, Учеб. пособие для вузов, М.: Наука, 1988.

- [20] Прасолов В.В. *Дифференциальная геометрия*: <https://vvprasolov.livejournal.com/383931.html>
- [21] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*, М.: МЦНМО, 2016. <http://higeom.math.msu.su/people/sklyarenko/dgII.pdf> Просветов Г.И. *Дифференциальная геометрия и топология. Задачи и решения*, Изд-во: Альфа-Пресс, 2010. Подробнее: <https://www.labyrinth.ru/books/244503/>
- [22] Раппель П.К. *Курс дифференциальной геометрии*, изд. стереотип. URSS. 2019.
- [23] Розендорн Э.Р. *Задачи по дифференциальной геометрии*, М.: Наука, 1971.
- [24] Розендорн Э.Р. *Теория поверхностей*, 2-е изд., перераб. и доп., М.: Физматлит, 2006.
- [25] Сизый С.В. *Лекции по дифференциальной геометрии*, М.: Физматлит, 2007.
- [26] Скляренко Е.Г. *Курс лекций по классической дифференциальной геометрии*: <http://higeom.math.msu.su/teaching/students/difgeom/Sklyarenko%202.pdf>
- [27] Скопенков А.Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах*. М.: МЦНМО, 2008. <https://www.mcsme.ru/free-books/dubna/skoponkov-dg.pdf>
- [28] Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии*, М.: Мир, 1970.
- [29] Тайманов И.А. *Лекции по дифференциальной геометрии*, Изд-во: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005 г.
- [30] Торп Дж. *Начальные главы дифференциальной геометрии*, М.: Мир, 1982.
- [31] Троицкий Е.В. *Дифференциальная геометрия и топология*, М.: МГУ, 2003: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Troickij2003ru.pdf>
- [32] Феденко А.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, 2-е изд., перераб., М., Наука, 1979.
- [33] Фиников С.П. *Дифференциальная геометрия. Курс лекций*, М.: МГУ, 1961: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Finikov1961ru.djvu>.
- [34] Фоменко А.Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*. 2-е изд., исправл. и доп., Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
- [35] Чернавский А.В. *Лекции по классической дифференциальной геометрии*, 2011: <http://higeom.math.msu.su/people/chernavski/chernav-difgeom2011.pdf>
- [36] Шарипов Р.А. *Курс дифференциальной геометрии*, учебное пособие для вузов, издание Башкирского университета, Уфа 1996.
- [37] Шаров Г.С., Шелехов А.М., Шестакова М.А. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, МЦНМО, 2005.
- [38] Шарп Р.У. *Дифференциальная геометрия. Обобщение Кармана Эрлангенской программы Клейна*, МЦНМО, 2019.
- [39] Шафаревич А.И. *Классическая дифференциальная геометрия*, учебное пособие для вузов, издание МФТИ, 2010.
- [40] Шварц Дж. *Дифференциальная геометрия и топология*, М.: Мир, 1970.
- [41] Шуликовский В.И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М.: Физматгиз, 1963.
- [42] Abbena E, Salamon S., Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, (3rd ed.), Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [43] Bär C. *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010.

- [44] Berger M., Gostiaux B. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, Springer, 1988.
- [45] Blaga P.A. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Napoca Press, Cluj-Napoca, Romania, 2005.
- [46] Bloch E.D.. *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, Boston: Springer Science & Business Media, 2011.
- [47] Burke W.L. *Applied differential geometry*, Cambridge University Press, 1997.
- [48] Chern S.-S. *Studies in global geometry and analysis*, Prentice-Hall, 1967.
- [49] Coleman R. *Calculus on normed vector spaces*, Springer, 2012.
- [50] Conrad B. *Differential Geometry handouts*, Stanford University:
<http://math.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/>
- [51] Csikós B. *Notes on Differential Geometry*: <https://web.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif.html>
- [52] Do Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [53] *Encyclopedia of Mathematics: Differential geometry*, EMS Press, 2001:
https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Differential_geometry
- [54] Forsyth A R. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1920.
- [55] Guggenheimer H. *Differential Geometry*, Dover, 1997.
- [56] Henderson D. *Differential Geometry: A Geometric Introduction*, Prentice-Hall, 1997.
- [57] Hicks N.J. *Notes on differential geometry* (Van Nostrand Mathematical Studies No.3). D. Van Nostrand, New York, 1965.
- [58] Hsiung C.C. *A first course in differential geometry*, Wiley (Interscience), 1981.
- [59] Kreyszig E. *Differential Geometry*, New York: Dover Publications, 1991.
- [60] Kühnel W. *Differential Geometry: Curves–Surfaces–Manifolds* (Student Mathematical Library, Vol. 16, Second Edition, transl. by B. Hunt). American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [61] Lang S. *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer, 1999.
- [62] McCleary J. *Geometry from a differentiable viewpoint*, Cambridge University Press, 1994.
- [63] Millman R., Parker G. *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1997.
- [64] MIT OpenCourseWare: *Differential Geometry*, 2008:
<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-950-differential-geometry-fall-2008/>
- [65] Murray M. *Online differential geometry course*, 1996:
http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/teaching_old.html
- [66] O'Neill B. *Elementary Differential Geometry*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1997.
- [67] Oprea J. *Differential Geometry and its Applications*, Prentice-Hall, 1996.
- [68] Palais R.S. *A Modern Course on Curves and Surface*, 2003:
http://virtualmathmuseum.org/Surface/a/bk/curves_surfaces_palais.pdf
- [69] Palais R.S. *3DXM Surfaces Gallery*: <http://virtualmathmuseum.org>
- [70] Pressley A. *Elementary Differential Geometry*, Springer, London etc., 2nd ed, 2010.
- [71] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, v.1-5, Publish or Perish, Berkeley, 1999.

- [72] Stoker J.J. *Differential Geometry*, Wiley, New York, 1949.
- [73] Struik D. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.
- [74] Tapp K. *Differential geometry of curves and surfaces*, Springer, 2016.
- [75] Valiron G. *The Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Math. Sci. Press, Brookline 1950.

Упражнения к введению

В приведенных ниже задачах 1 – 7 тензоры рассматриваются на n -мерном векторном пространстве.

Упражнение 1. Для каждого базиса e_i зададим набор чисел δ_j^i . Покажите, что это соответствие задает тензор типа $(1, 1)$.

Упражнение 2. Пусть b — тензор типа $(0, 2)$ (билинейная форма). Предположим, что в некотором базисе e_i матрица (b_{ij}) , составленная из координат тензора b невырождена.

- (1) Докажите, что и в любом другом базисе $e_{i'}$ матрица $(b_{i'j'})$ из координат тензора b невырождена.
- (2) Рассмотрим в каждом базисе e_i матрицу (b^{ij}) , обратную к матрице (b_{ij}) . Докажите, что такое соответствие — тензор типа $(2, 0)$.

Упражнение 3. Пусть v и w — векторы, т.е. тензоры типа $(1, 0)$, а ξ — ковекторы, т.е. тензор типа $(0, 1)$. Тензор $v \otimes \xi$ — линейный оператор, т.е. тензор типа $(1, 1)$, поэтому его можно применить к вектору w . Чему равен результат?

Упражнение 4. Фиксируем некоторый базис e_i и рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому упорядоченному набору векторов определитель матрицы, столбцы которой — координаты выбранных векторов. Так как определитель матрицы — полилинейное отображение столбцов матрицы, получаем тензор T типа $(0, n)$.

- (1) Запишите координаты тензора T в базисе e_i .
- (2) Запишите координаты этого тензора в другом базисе $e_{i'}$.

Упражнение 5. Тензор называется *инвариантным*, если его координаты не меняются при переходе от одного базиса к другому. В соответствии с задачей 1, тензор, имеющий в некотором базисе координаты δ_j^i , является инвариантным тензором типа $(1, 1)$.

- (1) Докажите, что не существует инвариантных тензоров типа (p, q) при $p \neq q$.
- (2) Опишите все инвариантные тензоры типа $(1, 1)$ и $(2, 2)$.

Упражнение 6. Покажите, что свойство положительной определенности билинейной формы — тензорное. Для положительно определенной билинейной формы, покажите, что матрица Грама системы векторов невырождена, если и только если векторы этой системы линейно независимы. Останется ли это утверждение верным, если заменить “положительную определенность” на “невырожденность”?

Упражнение 7. Пусть G — матрица Грама базиса e_i . Как изменится матрица Грама при переходе к другому базису $e_{i'}$?

Упражнение 8. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше чем 3 с базисом $(1, x, x^2, x^3)$ и билинейной формой $b(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$. Покажите, что билинейная форма является скалярным произведением и ортогонализируйте этот базис.

Упражнение 9. Пусть $\dim V = 2$, $e_1, e_2 \in V$ — базис V , $v = x e_1 + y e_2 \in V$, $a(v) = x^2$, $b(v) = xy$. Покажите, что не существует базиса, в котором обе квадратичные формы a и b имеют канонический вид.

Упражнение 10. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}$ стандартную метрику $\rho_1(x, y) = |x - y|$. Положим $\rho_2 = \rho_1 / (1 + \rho_1)$. Покажите, что ρ_2 — метрика, не эквивалентная ρ_1 .

Упражнение 11. Положим $Z = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ и зададим на Z топологию, в которой базой являются все одноточечные подмножества $\mathbb{N}$, а также множества вида $T_n := \{m \geq n : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ сходится к $y \in X$, если и только если продолжение f отображения x на все Z такое, что $f(\infty) = y$, непрерывно.

Упражнение 12. Приведите примеры полных и неполных нормированных пространств.

Упражнение 13. Покажите, что функция на линейном нормированном пространстве V , сопоставляющая каждому вектору v его норму $\|v\|$, непрерывна. В частности, каждый шар $\{v \in V : \|v\| \leq r\}$ — замкнутое ограниченное подмножество V .

Упражнение 14. Покажите, что

- (1) нормы на линейном пространстве (не обязательно конечномерном) эквивалентны, если и только если они задают одну и ту же топологию;
- (2) эквивалентные метрики на произвольном множестве задают одну и ту же топологию;
- (3) неэквивалентные метрики могут задавать одну и ту же топологию (приведите пример);
- (4) на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, в частности, задаваемые ими топологии одинаковы, а замкнутые ограниченные подмножества компактны (в частности, компактными являются все замкнутые шары);
- (5) приведите пример нормированного пространства, в котором невырожденный замкнутый шар некомпактен;
- (6) на бесконечномерном пространстве могут существовать неэквивалентные нормы (приведите пример).

Упражнение 15. Пусть V, W — нормированные пространства (не обязательно конечномерные), и $L: V \rightarrow W$ — линейное отображение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует хотя бы одна точка пространства V , в которой отображение L непрерывно.
- (2) Отображение L непрерывно в 0.
- (3) Существует такое число K , что $\|L(v)\| \leq K \|v\|$ для любого $v \in V$.
- (4) Отображение L ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества V в ограниченные подмножества W .
- (5) Норма $\|L\|$ ограничена.
- (6) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *липшицевым*, если существует такое число C , что $|f(x)f(x')| \leq C |xx'|$ для любых $x, x' \in X$. В этом пункте утверждается, что L — липшицево отображение (на V и W мы рассматриваем метрики, порожденные нормами).
- (7) Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств является *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что для любых $x, x' \in X$ с $|xx'| < \delta$ выполняется $|f(x)f(x')| < \varepsilon$. В этом пункте утверждается, что L — равномерно непрерывно.

Упражнение 16. Покажите, что линейные отображения из конечномерного нормированного пространства в произвольное нормированное пространство всегда непрерывны. Приведите пример разрывного линейного отображения нормированных пространств.

Упражнение 17. Покажите, что отображение нормированных пространств, дифференцируемое в точке, непрерывно в этой точке, а дифференциал определен однозначно.

Упражнение 18. Покажите, что дифференциал не меняется при замене нормы на эквивалентную.