

Вопросы по курсу “Геометрия-2.

лектор А. А. Тужилин

21 мая 2023 г.

- (1) Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, лемма о рукопожатиях, задача Эйлера, критерий эйлеровости графа.
- (2) Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости.
- (3) Определение топологии и топологического пространства, открытые и замкнутые множества, задание топологии через замкнутые множества, примеры топологий (антидискретная, дискретная, топология Зарисского, индуцированная).
- (4) Метрика и метрические пространства, изометричные отображения и изометрии, нормированные пространства и пространства со скалярным произведением, метрики, порожденные нормой и скалярным произведением, открытый и замкнутый шары, сферы, метрическая топология, примеры из математического анализа.
- (5) Сравнение топологий, более грубая и более тонкая топологии, окрестность точки топологического пространства, критерий совпадения двух топологий, эквивалентность метрик и совпадение соответствующих им топологий, эквивалентность норм и соответствующих им метрик.
- (6) База топологии, индуцированная база, критерий совпадения топологий в терминах баз, эквивалентность евклидовой нормы и шах-нормы на \mathbb{R}^n .
- (7) Хаусдорфовы топологические пространства, последовательности, их сходимости и пределы, теорема о пределе сходящейся последовательности в хаусдорфовом пространстве, сходимости в дискретном и антидискретном пространствах, сходимости в метрическом пространстве, примеры из математического анализа.
- (8) Непрерывные и разрывные в точке отображения топологических пространств, непрерывность в точке отображения метрических пространств, непрерывность отображения через непрерывность в точке, а также через замкнутые и открытые множества, эквивалентность трех определений непрерывности, база окрестностей точки, непрерывность в терминах баз и баз окрестностей.
- (9) Локальная ограниченность непрерывного отображения в метрическое пространство, проколота окрестность, критерий Коши существования предела.
- (10) Липшицево отображение, константа Липшица, равномерная непрерывность, непрерывность ограничения и продолжения непрерывного отображения, непрерывность по направлениям функции на евклидовом пространстве и связь с непрерывностью.
- (11) Гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, метризация топологического пространства, примеры, гомеоморфность ограничения.
- (12) Кривые в топологическом пространстве, задание отрезка в нормированном пространстве в виде кривой, склейка кривых, непрерывность склейки, стыковка кривых, замена параметра, склейка стыкующихся кривых, ломаная в нормированном пространстве как кривая.
- (13) Структура подмножеств топологического пространства, точки прикосновения и замыкание, замыкание как наименьшее замкнутое надмножество, внутренние точки и внутренность, внутренность как наибольшее открытое подмножество, граничные точки и граница, формулы, связывающие границу, замыкание и внутренность.
- (14) Топология дизъюнктного объединения, топология декартова произведения, совпадение стандартной топологии \mathbb{R}^n и топологии декартова произведения, канонические проекции из декартова произведения, координатные отображения для отображения в декартово произведение, непрерывность в терминах координатных отображений.
- (15) Кривые в \mathbb{R}^n и непрерывность их координатных функций, поверхности в \mathbb{R}^n , полярные координаты, стереографическая проекция и доказательство гомеоморфности сферы с выколотой точкой и плоскости.
- (16) Открытое покрытие, компактное пространство или компакт, примеры компактных и некомпактных пространств, принцип Кантора о вложенных отрезках, компактность отрезка и кирпича, формулировка теоремы Тихонова.

(17) Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, теорема о равномерной непрерывности отображения из компактного метрического пространства.

(18) Ограниченные и неограниченные метрические пространства, диаметр метрического пространства, ограниченность метрического компакта, компактность непрерывного образа компакта, компактность замкнутого подмножества компакта, замкнутость компактного подмножества хаусдорфова пространства.

(19) Замкнутость и ограниченность компактного подмножества метрического пространства, критерий компактности подмножеств \mathbb{R}^n , компактность образа кривой, замкнутость и ограниченность образа кривой в метрическом пространстве, теорема о непрерывной функции на компакте, положительность расстояния от точки вне кривой до кривой.

(20) Достаточное условие гомеоморфности непрерывной биекции, доказательство гомеоморфности замкнутой полуокружности и отрезка, доказательство гомеоморфности кольца и цилиндра.

(21) Вполне ограниченное метрическое пространство, полные метрические пространства, принцип вложенных шаров, критерий полноты подмножества полного пространства, формулировка критерия компактности метрического пространства, секвенциальная компактность, связь между компактностью и секвенциальной компактностью (формулировки).

(22) Связные и несвязные топологические пространства, связные и несвязные подмножества топологических пространств, связность отрезка.

(23) Факторизация, фактор-топология как самая сильная среди оставляющих отображение непрерывным, фактор-пространство. Построение фактор-пространства через разбиение, сюръективное отображение и эквивалентность. Открытые и замкнутые отображения и их связь с факторизацией.

(24) Гомеоморфность фактор-пространства и сюръективного образа непрерывного отображения из компакта в хаусдорфово пространство, склейка в точку, склейка концов отрезка, склейка в точку границы шара, склейка пространств по отображению, склейка границ двух шаров.

(25) Связность объединения пересекающихся связных множеств, связная компонента точки, разбиение пространства на связные компоненты, связность замыкания связного множества, замкнутость связных компонент.

(26) Связность непрерывного образа связного пространства, связность декартова произведения связных пространств.

(27) Линейно связные пространства, линейно связные компоненты, соотношение между связностью и линейной связностью.

(28) Связность и линейная связность выпуклых подмножеств нормированных пространств, связные подмножества прямой, теорема о промежуточном значении непрерывной функции.

(29) Локально линейно связные пространства, эквивалентность связности и линейной связности в локально линейно связных пространствах.

(30) Локально постоянное отображение, непрерывность локально постоянного отображения, постоянство локально постоянного отображения на компонентах связности.

(31) Замкнутые и незамкнутые кривые, вложенная кривая (незамкнутая и замкнутая), теорема Жордана о вложенной кривой на плоскости (формулировка), верен ли аналог теоремы Жордана на сфере, цилиндре, торе и листе Мёбиуса?

(32) Замкнутые и незамкнутые ломаные, ломаная как простой граф, концевые (граничные) и внутренние вершины незамкнутой ломаной, внутренние вершины замкнутой ломаной, выкидывание ребра и выкидывание вершины из простого графа, выкидывание ребра и выкидывание вершины из ломаной, ломаная как кривая, ломаная как подмножество объемлющего пространства, концевая (граничная) и внутренняя точка ломаной, невырожденные ребра ломаной, вложенная ломаная (замкнутая и незамкнутая).

(33) Теорема Жордана для вложенных ломаных на плоскости, стратегия доказательства теоремы Жордана для ломаных.

(34) Доказательство того, что незамкнутая вложенная ломаная на плоскости не разбивает плоскость.

(35) Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не более чем на две компоненты.

(36) Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не менее чем на две компоненты.

(37) Лемма о четырех точках на плоской замкнутой вложенной ломаной.

(38) Геометрический граф в топологическом пространстве, вложенный геометрический граф, комбинаторная структура геометрического графа, отображение графов, изоморфизм графов, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве.

(39) Плоские геометрические графы, планарные и непланарные комбинаторные графы, полный двудольный граф, доказательство непланарности графа $K_{3,3}$.

(40) Грань плоского графа, лес, подграф, связная компонента графа, объединение, несвязное объединение и пересечение комбинаторных графов, разложение комбинаторного графа на связные компоненты, линейная связность дополнения плоского леса.

(41) Формула Эйлера для плоских графов (с доказательством для графов, в которых ребра — ломаные).

(42) Топологический граф, его множество вершин и ребер, сеть, вершины и ребра сети, погруженная сеть, связь между погруженными сетями и геометрическими графами, вложенная сеть, связь между вложенными сетями и вложенными геометрическими графами, эквивалентность вложенности геометрического графа и вложенности сети в хаусдорфовом топологическом пространстве.

(43) Подразбиение ребер комбинаторного графа, гомеоморфные комбинаторные графы, формулировка теоремы Понтрягина–Куратовского (критерия планарности графа), классификация планарных полных и полных двудольных графов.

(44) Плоский многоугольник, пространственный многоугольник, многогранная поверхность, элементы многогранной поверхности, замкнутые многогранные поверхности.

(45) Формулировка теоремы Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности.

(46) Выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 , теорема о представлении выпуклого многогранника из \mathbb{R}^3 в виде пересечения замкнутых полупространств.

(47) Грани выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 , доказательство того, что эти грани — выпуклые пространственные многоугольники.

(48) Геометрическая реализация графа многогранной поверхности в \mathbb{R}^3 с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников.

(49) Правильный многогранник в \mathbb{R}^3 , классификация правильных многогранников в \mathbb{R}^3 , платоновы тела.

(50) Ёж выпуклого многогранника в \mathbb{R}^3 , теорема о свойствах ежа, формулировка теоремы Минковского о еже.

(51) Аффинная и выпуклая комбинации, аффинная и выпуклая оболочки, аффинная независимость, k -мерный симплекс, его вершины, грани, гиперграни, относительная внутренность и относительная граница. Триангуляция симплекса, ее грани, вершины, гиперграни, внутренние и граничные грани.

(52) Раскраска вершин триангуляции симплекса, шпернеровская раскраска, всецветные симплексы, лемма Шпернера.

(53) Диаметр подмножества метрического пространства, диаметр триангуляции, центр симплекса, барицентрическое подразбиение симплекса, кратное барицентрическое подразбиение, стандартный n -мерный симплекс, неподвижная точка отображения, теорема Брауэра о неподвижной точке.

(54) Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равноставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, теорема Бойяи–Валласа–Гервина.

(55) Разрезание многогранников, равноставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, формулировка теоремы Дена, примеры вычисления инвариантов Дена.

(56) Доказательство теоремы Дена, равнодополняемые многогранники, решение Третьей проблемы Гильберта, формулировка теоремы Дена–Сидлера.

(57) Склейка симплексов по ребрам, триангулированное пространство, топологический симплекс, вершины, ребра и параметризация топологического симплекса, триангуляция пространства, вершины, ребра, граф триангуляции, подразбиение триангуляции.

(58) Правильная склейка симплексов по ребрам, правильная триангуляция, триангулированная поверхность (или, короче, поверхность), смежные симплексы поверхности, граничные и внутренние ребра поверхности, граница или край поверхности, устройство компонент границы, замкнутые поверхности.

(59) Ориентация ребра, ориентация двумерного симплекса, согласованность ориентаций ребер, ориентация трехмерного симплекса, согласованность ориентаций двумерных граничных симплексов, ориентация поверхности, ориентируемые и неориентируемые поверхности.

(60) Склейка ребер, склейки из квадрата, склейка поверхностей, частный случай такой склейки по соответствующим ориентированным граничным окружностям, вырезание дырки, вырезание дырки из симплекса, заклейка дырки.

(61) Разрезание поверхности по внутренним ребрам, разрезание вдоль кривой, полоска вдоль кривой, вырезание полоски, вклейка в поверхность ручки и пленки Мёбиуса, альтернативное представление вклейки пленки Мёбиуса.

(62) Классификация ориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.

- (63) Классификация неориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.
- (64) Дифференцируемая и гладкая кривая в \mathbb{R}^n , ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина кривой в метрическом пространстве, независимость длины от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, спрямляемость липшицевой кривой, обобщенное неравенство треугольника.
- (65) Натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, вырожденные и невырожденные кривые, безостановочные кривые, существование равномерного и натурального параметров на безостановочной кривой.
- (66) Кривые в арифметическом пространстве, их координатная запись, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, возможность гладкой параметризации угла, особые и регулярные точки гладкой кривой, регулярные кривые.
- (67) Интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный, описание всех замен параметра, сохраняющих натуральность.
- (68) Ориентация конечномерного пространства, стандартная ориентация \mathbb{R}^n , k -параллелепипед, вырожденный и невырожденный параллелепипед, объем параллелепипеда, ориентированный объем параллелепипеда, основание и высота параллелепипеда, ортогонализация Грама–Шмидта.
- (69) p -регулярные кривые, брегулярные кривые, базис Френе для $(n-1)$ -регулярной кривой в \mathbb{R}^n , формулы Френе (без доказательства).
- (70) Формулы Френе кривой в \mathbb{R}^n (с доказательством).
- (71) p -ая кривизна кривой в \mathbb{R}^n , кривизны кривой в \mathbb{R}^n в произвольной параметризации, сохранение кривизн при аффинных преобразованиях, выражение кривизн через коэффициенты ортогонализации.
- (72) Кривые на плоскости: кривизна и ориентированная кривизна, главная нормаль, ориентированные и неориентированные формулы Френе. Кривые в трехмерном пространстве: главная нормаль и бинормаль, кривизна и кручение, формулы Френе.
- (73) Вывод стандартных формул кривизны и ориентированной кривизны плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве из общих формул Френе.
- (74) Зависящее от времени векторное поле, интегральная траектория, начальное условие, обыкновенное дифференциальное уравнение, теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, линейное дифференциальное уравнение, теорема о продолжении решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения.
- (75) Восстановление кривой по кривизнам, натуральные уравнения.
- (76) Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне, классификация плоских кривых постоянной кривизны.
- (77) Геометрия плоских кривых: радиус кривизны, ориентированный радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, особенности эволюты, эвольвента, восстановление исходной кривой из ее эволюты.
- (78) Порядок касания кривых, окружность кривизны или соприкасающаяся окружность, порядок касания кривой и окружности кривизны.