

# Вопросы по курсу “Геометрия-2.

лектор А. А. Тужилин

3 июня 2022 г.

- (1) Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, лемма о рукопожатиях, задача Эйлера, критерий эйлеровости графа.
- (2) Комбинаторные графы, их составные части, типы, свойства, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости.
- (3) Определение топологии и топологического пространства, открытые и замкнутые множества, задание топологии через замкнутые множества, примеры топологий (антидискретная, дискретная, топология Зарисского, индуцированная).
- (4) Метрика и метрические пространства, изометричные отображения и изометрии, нормированные пространства и пространства со скалярным произведением, метрики, порожденные нормой и скалярным произведением, открытый и замкнутый шары, сферы, метрическая топология, примеры из математического анализа.
- (5) Сравнение топологий, более грубая и более тонкая топологии, окрестность точки топологического пространства, критерий совпадения двух топологий, эквивалентность метрик и совпадение соответствующих им топологий, эквивалентность норм и соответствующих им метрик.
- (6) База топологии, индуцированная база, критерий совпадения топологий в терминах баз, эквивалентность евклидовой нормы и шах-нормы на  $\mathbb{R}^n$ .
- (7) Хаусдорфовы топологические пространства, последовательности, их сходимости и пределы, теорема о пределе сходящейся последовательности в хаусдорфовом пространстве, сходимости в дискретном и антидискретном пространствах, сходимости в метрическом пространстве, примеры из математического анализа.
- (8) Непрерывные и разрывные в точке отображения топологических пространств, непрерывность в точке отображения метрических пространств, непрерывность отображения через непрерывность в точке, а также через замкнутые и открытые множества, эквивалентность трех определений непрерывности, непрерывность в терминах баз.
- (9) Липшицево отображение, константа Липшица, равномерная непрерывность, непрерывность ограничения и продолжения непрерывного отображения.
- (10) Гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, метризация топологического пространства, примеры, гомеоморфность ограничения.
- (11) Кривые в топологическом пространстве, задание отрезка в нормированном пространстве в виде кривой, склейка кривых, непрерывность склейки, стыковка кривых, замена параметра, склейка стыкующихся кривых, ломаная в нормированном пространстве как кривая.
- (12) Структура подмножеств топологического пространства, точки прикосновения и замыкание, замыкание как наименьшее замкнутое надмножество, внутренние точки и внутренность, внутренность как наибольшее открытое подмножество, граничные точки и граница, формулы, связывающие границу, замыкание и внутренность.
- (13) Топология дизъюнктивного объединения, топология декартова произведения, совпадение стандартной топологии  $\mathbb{R}^n$  и топологии декартова произведения, канонические проекции из декартова произведения, координатные отображения для отображения в декартово произведение, непрерывность в терминах координатных отображений.
- (14) Кривые в  $\mathbb{R}^n$  и непрерывность их координатных функций, поверхности в  $\mathbb{R}^n$ , полярные координаты, стереографическая проекция и доказательство гомеоморфности сферы с выколотой точкой и плоскости.
- (15) Определение компактного пространства, примеры компактных и некомпактных пространств, формулировка теоремы Тихонова.
- (16) Ограниченные и неограниченные метрические пространства, диаметр метрического пространства, ограниченность метрического компакта, компактность непрерывного образа компакта, компактность замкнутого подмножества компакта, замкнутость компактного подмножества хаусдорфова пространства.

(17) Замкнутость и ограниченность компактного подмножества метрического пространства, критерий компактности подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , компактность образа кривой, замкнутость и ограниченность образа кривой в метрическом пространстве, теорема о непрерывной функции на компакте, положительность расстояния от точки вне кривой до кривой.

(18) Достаточное условие гомеоморфности непрерывной биекции, доказательство гомеоморфности замкнутой полуокружности и отрезка, доказательство гомеоморфности кольца и цилиндра.

(19) Вполне ограниченное метрическое пространство, полные метрические пространства, принцип вложенных шаров, критерий полноты подмножества полного пространства.

(20) Критерий компактности метрического пространства (формулировка), доказательство полноты и полной ограниченности компактного метрического пространства.

(21) Критерий компактности метрического пространства (формулировка), доказательство возможности выбрать счетное подпокрытие из открытого покрытия вполне ограниченного пространства.

(22) Критерий компактности метрического пространства (формулировка), доказательство возможности выбрать сходящуюся подпоследовательность из последовательности в полном вполне ограниченном пространстве.

(23) Критерий компактности метрического пространства.

(24) Секвенциальная компактность, теорема об эквивалентности компактности и секвенциальной компактности метрических пространств.

(25) Связные и несвязные топологические пространства, связные и несвязные подмножества топологических пространств, связность отрезка.

(26) Связность объединения пересекающихся связных множеств, связная компонента точки, разбиение пространства на связные компоненты, связность замыкания связного множества, замкнутость связных компонент.

(27) Связность непрерывного образа связного пространства, связность декартова произведения связных пространств.

(28) Линейно связные пространства, линейно связные компоненты, соотношение между связностью и линейной связностью.

(29) Связность и линейная связность выпуклых подмножеств нормированных пространств, связные подмножества прямой, теорема о промежуточном значении непрерывной функции.

(30) Локально линейно связные пространства, эквивалентность связности и линейной связности в локально линейно связных пространствах.

(31) Локально постоянное отображение, непрерывность локально постоянного отображения, постоянство локально постоянного отображения на компонентах связности.

(32) Замкнутые и незамкнутые кривые, вложенная кривая (незамкнутая и замкнутая), теорема Жордана о вложенной кривой на плоскости (формулировка), верен ли аналог теоремы Жордана на сфере, цилиндре, торе и листе Мёбиуса?

(33) Замкнутые и незамкнутые ломаные, ломаная как простой граф, концевые (граничные) и внутренние вершины незамкнутой ломаной, внутренние вершины замкнутой ломаной, выкидывание ребра и выкидывание вершины из простого графа, выкидывание ребра и выкидывание вершины из ломаной, ломаная как кривая, ломаная как подмножество объемлющего пространства, концевая (граничная) и внутренняя точка ломаной, невырожденные ребра ломаной, вложенная ломаная (замкнутая и незамкнутая).

(34) Теорема Жордана для вложенных ломаных на плоскости, стратегия доказательства теоремы Жордана для ломаных.

(35) Доказательство того, что незамкнутая вложенная ломаная на плоскости не разбивает плоскость.

(36) Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не более чем на две компоненты.

(37) Доказательство того, что замкнутая вложенная ломаная на плоскости разбивает плоскость не менее чем на две компоненты.

(38) Лемма о четырех точках на плоской замкнутой вложенной ломаной.

(39) Геометрический граф в топологическом пространстве, вложенный геометрический граф, комбинаторная структура геометрического графа, отображение графов, изоморфизм графов, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве.

(40) Плоские геометрические графы, планарные и непланарные комбинаторные графы, полный двудольный граф, доказательство непланарности графа  $K_{3,3}$ .

(41) Грань плоского графа, лес, подграф, связная компонента графа, объединение, несвязное объединение и пересечение комбинаторных графов, разложение комбинаторного графа на связные компоненты, линейная связность дополнения плоского леса.

(42) Формула Эйлера для плоских графов (с доказательством для графов, в которых ребра — ломаные).

- (43) Топологическое представление геометрического графа, факторизация топологического пространства, каноническая проекция, фактор-пространство, топологический граф, его множество вершин и ребер, сеть, вершины и ребра сети, вложенная сеть, связь между геометрическими, топологическими графами, а также сетями.
- (44) Подразбиение ребер комбинаторного графа, гомеоморфные комбинаторные графы, формулировка теоремы Понтрягина–Куратовского (критерия планарности графа), классификация планарных полных и полных двудольных графов.
- (45) Плоский многоугольник, пространственный многоугольник, многогранная поверхность, элементы многогранной поверхности, замкнутые многогранные поверхности.
- (46) Формулировка теоремы Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности.
- (47) Выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^3$ , теорема о представлении выпуклого многогранника из  $\mathbb{R}^3$  в виде пересечения замкнутых полупространств.
- (48) Грани выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^3$ , доказательство того, что эти грани — выпуклые пространственные многоугольники.
- (49) Геометрическая реализация графа многогранной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников.
- (50) Правильный многогранник в  $\mathbb{R}^3$ , классификация правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ , платоновы тела.
- (51) Ёж выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^3$ , теорема о свойствах ежа, формулировка теоремы Минковского о еже.
- (52) Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, теорема Бойяи–Валласа–Гервина.
- (53) Разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, формулировка теоремы Дена, примеры вычисления инвариантов Дена.
- (54) Доказательство теоремы Дена, равнодополняемые многогранники, решение Третьей проблемы Гильберта, формулировка теоремы Дена–Сидлера.
- (55) Склейка симплексов по ребрам, триангулированное пространство, топологический симплекс, вершины, ребра и параметризация топологического симплекса, триангуляция пространства, вершины, ребра, граф триангуляции, подразбиение триангуляции.
- (56) Правильная склейка симплексов по ребрам, правильная триангуляция, триангулированная поверхность (или, короче, поверхность), смежные симплексы поверхности, граничные и внутренние ребра поверхности, граница или край поверхности, устройство компонент границы, замкнутые поверхности.
- (57) Ориентация ребра, ориентация двумерного симплекса, согласованность ориентаций ребер, ориентация трехмерного симплекса, согласованность ориентаций двумерных граничных симплексов, ориентация поверхности, ориентируемые и неориентируемые поверхности.
- (58) Склейка ребер, склейки из квадрата, склейка поверхностей, частный случай такой склейки по соответствующим ориентированным граничным окружностям, вырезание дырки, вырезание дырки из симплекса, заклейка дырки.
- (59) Разрезание поверхности по внутренним ребрам, разрезание вдоль кривой, полоска вдоль кривой, вырезание полоски, вклейка в поверхность ручки и пленки Мёбиуса, альтернативное представление вклейки пленки Мёбиуса.
- (60) Классификация ориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.
- (61) Классификация неориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.