

Вопросы по курсу
“Дифференциальная геометрия и топология.”
лектор А. А. Тужилин

- (1) Топологические многообразия, локально евклидовы пространства, локальная хаусдорфовость, локальная компактность, локальная связность, локальная линейная связность, первая аксиома счетности, локальная стягиваемость, локальная метризуемость, однозначная определенность размерности локально евклидова пространства, теорема Брауэра об инвариантности области.
- (2) Топологические многообразия, нехаусдорфовы локально евклидовы пространства, вторая аксиома счетности, сепарабельность, σ -компактность, компактное исчерпание, паракомпактность, линделёфовость.
- (3) Примеры многообразий: открытое подмножество евклидова пространства, дискретное топологическое пространство, триангулированные двумерные поверхности без края, неявная поверхность, вещественное проективное пространство, декартово произведение конечного числа многообразий, дизъюнктивное объединение не более чем счетного числа многообразий одной размерности.
- (4) Топологическая группа, примеры топологических групп, являющихся многообразиями, фактортопология, примеры факторпространств, являющихся многообразиями.
- (5) Действие группы на множестве, свойства действия, топология, индуцированная транзитивным действием топологической группы на множестве, действие группы на множестве с дополнительной структурой, случай действия на топологическом и метрическом пространствах, левое и правое действия, свободное действие конечной группы на многообразии, линзовые пространства.
- (6) Карты и атласы на множестве, задание топологии многообразия с помощью атласа, примеры, вещественное проективное пространство, многообразие Грассмана, многообразие Штифеля.
- (7) Топологические многообразия с краем, примеры, подмногообразия.
- (8) Гладкие атласы, максимальный топологический атлас, гладко согласованные карты, гладко согласованные атласы, максимальный гладкий атлас или гладкая структура, гладкое многообразие, стандартные гладкие структуры.
- (9) Стандартная гладкая структура на открытом подмножестве \mathbb{R}^n , на открытом подмножестве многообразия, на неявной поверхности, на декартовом произведении гладких многообразий, на несвязном объединении гладких многообразий, группы Ли.
- (10) Задание на множестве гладкой структуры с помощью атласа, эквивалентные гладкие структуры, экзотические гладкие структуры.
- (11) Гладкие отображения гладких многообразий и диффеоморфизмы, примеры.
- (12) Касательный вектор и касательное пространство (координатное определение, через классы эквивалентности гладких кривых, через дифференцирование в точке), канонический базис касательного пространства.
- (13) Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий, дифференциалы гладких функций как ковекторы, кокасательное пространство и его базис, двойственный каноническому, ранг дифференциала, ранг отображения, отображения постоянного ранга, отображения полного ранга, гладкое погружение и гладкая субмерсия.
- (14) Локальные представления отображения постоянного ранга гладких многообразий (теорема о ранге).
- (15) Локальный диффеоморфизм, гладкое вложение, гладкое подмногообразие, коразмерность подмногообразия, объемлющее многообразие, гиперповерхность, открытое подмногообразие.
- (16) Срезающие функции, вложение гладких многообразий в конечномерные арифметические пространства, формулировки теорем Уитни.
- (17) Ориентируемость гладких многообразий, ориентированный атлас, максимальный ориентированный атлас или ориентация гладкого многообразия, ориентируемые и неориентируемые гладкие многообразия, примеры.
- (18) Расслоения, пространство расслоения (тотальное пространство, расслоенное пространство), база расслоения, проекция расслоения, слой расслоения, тривиальное расслоение, ограничение расслоения, подрасслоение, глобальное и локальное сечения расслоения, индуцированное отображение баз, диаграмма, морфизм расслоений (с разными базами и с одной базой), изоморфизм расслоений.
- (19) Расслоение, индуцированное отображением в базу, декартово произведение расслоений, прямая сумма или сумма Уитни расслоений, диагональное отображение.
- (20) Локально тривиальное расслоение, тривиализация, тривиализующее открытое множество, модифицированные тривиализации, отображения склейки.
- (21) Конструкция расслоения по тривиализациям, дополнительные структуры на расслоении, гладкие расслоения, векторные расслоения, линейные и билинейные морфизмы векторных расслоений.

- (22) Тензорные расслоения на гладких многообразиях, касательное и кокасательные расслоения.
- (23) Подрасслоения тензорных расслоений, расслоения ковариантных и контравариантных тензоров, расслоение кососимметричных тензоров, расслоение симметричных тензоров, расслоение невырожденных и положительно определенных симметричных тензоров.
- (24) Тензорные поля как гладкие сечения тензорных расслоений, нулевое сечение произвольного и локально тривиального векторного расслоения, линейные пространства сечений, гладкие функции как сечения тривиального линейного расслоения, векторные поля, дифференциальные формы, дифференциал гладкой функции как 1-форма, псевдориманова и риманова метрика, псевдоримановы и римановы многообразия.
- (25) Перенесение назад ковариантных тензорных полей, риманова метрика, индуцированная погружением, существование римановой метрики на каждом гладком многообразии.
- (26) Тензорные операции на тензорных расслоениях и тензорных полях, унарные операции, умножения на числа, перестановка индексов, свертка, симметрирование, альтернирование, диаграммы унарных операций.
- (27) Бинарные операции, сложение тензоров, тензорное произведение, симметричное тензорное произведение, внешнее произведение, подстановка ковектора, подстановка вектора, диаграммы бинарных операций.
- (28) Поднятие и опускание индексов, индуцированное псевдоскалярное произведение на тензорах.
- (29) Обобщенная операция “звездочка”.
- (30) Полилинейные отображения на сечениях и тензорные поля.
- (31) Определение внешнего дифференцирования через полилинейное отображение на векторных полях, доказательство его функциональной линейности.
- (32) Запись внешнего дифференциала формы в координатах, доказательство кососимметричности результата внешнего дифференцирования формы, формула внешнего дифференцирования через дифференциалы координатных функций.
- (33) Свойства внешнего дифференцирования: линейность, косая коммутативность, зануление композиции дифференцирований, коммутирование с перенесением форм назад.
- (34) Разбиение единицы, подчиненное покрытие, теорема существования разбиения единицы, применение разбиения единицы для доказательства существования римановой метрики на гладком многообразии, общее определение интеграла от дифференциальной формы с помощью разбиения единицы, его независимость от выбора разбиения единицы.
- (35) Множества меры ноль, брус, объем бруса, определение множества меры ноль в евклидовом пространстве, свойства множеств меры ноль, инвариантность множеств меры ноль при гладких отображениях в пространства той же или большей размерности, определение множества меры ноль в гладком многообразии, множества, измеримые по Жордану, неизмеримость по Жордану некоторых ограниченных открытых и компактных подмножеств евклидова пространства.
- (36) Интеграл Римана, критерий Лебега интегрируемости по Риману, свойства интеграла Римана, уточнение определения интеграла от дифференциальной формы, задача, позволяющая интегрировать дифференциальные формы без разбиения единицы, пример такого интегрирования — вычисление площади стандартной сферы.
- (37) Общая формула Стокса, ее доказательство.
- (38) Вывод формулы Грина, формулы Стокса для поверхностей, а также формулы Остроградского–Гаусса из общей формулы Стокса (обобщение на случай многообразий), теорема “о барабане”.
- (39) Замкнутые формы, точные формы, пространство когомологий, классы когомологий, когомологии диффеоморфных многообразий, перенесение форм назад индуцирует отображение в когомологиях.
- (40) Геометрический смысл нулевых когомологий, когомологии промежутка, когомологии окружности, когомологии и формула Стокса, старшие когомологии замкнутого ориентируемого многообразия.
- (41) Гомотопическая инвариантность когомологий, лемма Пуанкаре, первые когомологии сфер.
- (42) Точная последовательность Майера–Вьеториса (формулировка), применение точной последовательности Майера–Вьеториса для вычисления когомологий сфер, градуированная алгебра когомологий де Рама.
- (43) Регулярные и критические точки, а также регулярные и критические значения гладкого отображения гладких многообразий, теорема Сарда, топология множества регулярных значений, степень отображения по отношению к регулярному значению, структура прообраза регулярного значения, классификация (топологическая и гладкая) связных одномерных многообразий.
- (44) Теорема об инвариантности степени отображения относительно регулярного значения при гомотопии.
- (45) Диффеотопия, возможность перевести диффеотопией любую точку в любую на связном гладком многообразии с пустой границей, независимость степени от выбора регулярного значения, определение степени отображения, простейшие свойства степени отображения, теорема “о причисывании ежа”, основная теорема арифметики.
- (46) Степень отображения и интеграл от формы старшей степени и ее прообраза.

(47) Приложения теоремы о степени и интеграле: теорема Гаусса–Бонне, теорема об индексе векторного поля, теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема о барабане.

(48) Связность в векторных расслоениях, ковариантная производная сечения вдоль векторного поля, аффинная связность на касательном расслоении, символы Кристоффеля аффинной связности, существование аффинной связности, закон изменения символов Кристоффеля.

(49) Ковариантные производные тензорных полей, векторное поле вдоль кривой, поле скоростей кривой, продолжаемые поля вдоль кривой, ковариантная производная вдоль кривой, продолжаемые функции.

(50) Параллельные векторные поля вдоль кривых, геодезические, уравнения параллельного переноса, уравнения геодезических, параллельный перенос, симметричная связность, тензор кручения.

(51) Риманова связность или связность Леви–Чивиты, существование римановой связности, выражение символов Кристоффеля римановой связности через компоненты метрического тензора, зануление символов Кристоффеля в центре нормальных координат,

(52) Тензор кривизны Римана, его выражение через символы Кристоффеля, тензор Риччи, симметрии тензора кривизны, скалярная кривизна, многообразия Эйнштейна.