

Вопросы по курсу
“Классическая дифференциальная геометрия.”
лектор А. А. Тужилин

- (1) Промежутки, параметрическая кривая в топологическом пространстве (выходящая из точки, приходящая в точки, соединяющая точки, замкнутая, незамкнутая), замена параметра, отношение эквивалентности на параметрических кривых, непараметрическая кривая.
- (2) Ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина параметрической кривой в метрическом пространстве, независимость длины от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, спрямляемость липшицевой кривой, обобщенное неравенство треугольника.
- (3) Функционал длины, операции над кривыми (ограничение, склейка, замена параметра), свойства функционала длины (аддитивность, непрерывность, независимость от параметра, согласованность с топологией).
- (4) Натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, безостановочные кривые, существование равномерного и натурального параметров на безостановочной кривой.
- (5) Кривые в арифметическом пространстве, их координатная запись, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, возможность гладкой параметризации угла, особые и регулярные точки гладкой кривой, регулярные кривые.
- (6) Три способа задания регулярных кривых в евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность, примеры.
- (7) Интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный, описание всех замен параметра, сохраняющих равномерность (натуральность).
- (8) p -регулярные кривые, бирегулярные кривые, базис Френе для $(n - 1)$ -регулярной кривой в \mathbb{R}^n , формулы Френе и кривизны кривой в \mathbb{R}^n (формулировка).
- (9) Доказательство формул Френе и явного вида кривизны кривой в \mathbb{R}^n .
- (10) Кривизны кривой в \mathbb{R}^n в произвольной параметризации, сохранение кривизны при аффинных преобразованиях, выражение кривизны через коэффициенты ортогонализации.
- (11) Кривые на плоскости: кривизна и ориентированная кривизна, главная нормаль, ориентированные и неориентированные формулы Френе; кривые в трехмерном пространстве: главная нормаль и бинормаль, кривизна и кручение, формулы Френе; вывод стандартных формул кривизны и ориентированной кривизны плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве из общих формул Френе.
- (12) Восстановление кривой по кривизнам, натуральные уравнения.
- (13) Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне, классификация плоских кривых постоянной кривизны.
- (14) Геометрия плоских кривых: радиус кривизны, ориентированный радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, особенности эволюты, эвольвента, восстановление исходной кривой из ее эволюты.
- (15) Порядок касания кривых, окружность кривизны или соприкасающаяся окружность, порядок касания кривой и окружности кривизны.
- (16) Огибающая семейства плоских кривых, задание огибающей системой уравнений.
- (17) Непрерывная параметрическая поверхность, координатная запись отображения, гладкая, регулярная, вложенная параметрическая поверхность.
- (18) Инвариантность области при регулярном отображении, замена координат в области, криволинейные координаты в области, координатные линии и координатные поверхности, примеры криволинейных координат (полярные, цилиндрические, сферические).
- (19) Непараметрические поверхности, задание поверхности графиком отображения и неявным отображением, локальная эквивалентность трех представлений поверхности, примеры.
- (20) Формализация понятия поверхности: множество точек поверхности, параметризация или введение координат, атлас, охватывающее пространство, погружение, координатная запись погружения, задание топологии на множестве точек поверхности, упрощение формализации для вложенной поверхности, расширение понятия поверхности в одномерном случае.
- (21) Отображение поверхностей, его координатная запись, непрерывное и гладкое отображения, диффеоморфизм, разница между поверхностью и промежутком или областью, (гладкие) кривые и функции на поверхности.
- (22) Запись кривой во внешних и внутренних координатах, касательный вектор к поверхности, его независимость от параметризации поверхности, внутренние координаты касательного вектора, зависимость внутренних координат касательного вектора от параметризации поверхности.

(23) Касательное пространство, его линейная структура и размерность, канонический базис касательного пространства, закон изменения внутренних координат касательного вектора при замене параметризации поверхности, касательное пространство к области, касательное пространство к поверхности как подпространство касательного пространства к объемлющему пространству.

(24) Дифференциал гладкого отображения поверхностей, его координатная запись, линейность дифференциала, изменение координатного представления дифференциала при замене параметризаций поверхностей.

(25) Дифференциал гладкой функции на поверхности как ковектор, отличие отображения в поверхность (или из нее) и в промежуток или область (или из них), дифференциалы координатных функций как двойственный базис кокасательного пространства, запись дифференциала функции — разложение по двойственному базису.

(26) Первая фундаментальная форма поверхности или индуцированная на поверхности метрика, примеры вычисления, вычисления с помощью первой фундаментальной формы (длины кривых и углы между кривыми).

(27) Изометричное отображение метрических пространств, изометрия и локальная изометрия метрических пространств, изометричность линейных отображений нормированных пространств, кусочно гладкие кривые и внутренняя метрика поверхности, дифференциал гладкого изометричного отображения поверхностей.

(28) Пример неизометричного гладкого отображения поверхностей с изометричным дифференциалом, биективное отображение с изометричным дифференциалом, пример изометричного биективного отображения.

(29) Тензорное произведение, билинейность тензорного произведения, тензорная запись билинейной формы, тензорная запись евклидовой метрики в \mathbb{R}^n и первой фундаментальной формы поверхности.

(30) Несимметричность тензорного произведения, определение операции симметричного тензорного произведения (на ковекторах), его билинейность, запись симметричной билинейной формы через симметричное тензорное произведение, запись евклидовой метрики и первой фундаментальной формы через симметричное тензорное произведение.

(31) Вычисление первой фундаментальной формы поверхности через тензорную запись: координатная запись ограничения ковектора и ее применение к вычислению первой фундаментальной формы, примеры, бесконечно малая длина дуги или элемент дуги (обоснование терминологии).

(32) Алгебра (гладких) функций на поверхности, эквивалентное представление этой алгебры в виде кольца, дифференцирование функций на поверхности вдоль кривой и касательного вектора, свойства операции дифференцирования.

(33) Модуль векторных полей вдоль поверхности над кольцом гладких функций, линейная комбинация и функциональная линейная комбинация векторных полей, скалярное произведение векторных полей, ограничение векторного поля на кривую, производная векторного поля вдоль кривой и вдоль касательного вектора, свойства производной векторного поля вдоль касательного вектора.

(34) Нормальное пространство к поверхности в данной точке, подмодули нормальных и касательных полей вдоль поверхности, ковариантные производные касательного и нормального векторных полей, ковариантная производная функции.

(35) Свойства ковариантной производной, доказательство правила Лейбница для ковариантной производной от скалярного произведения касательных (нормальных) полей.

(36) Локальные векторные поля, продолжение касательного вектора до касательного векторного поля, продолжение нормального вектора до нормального локального векторного поля.

(37) Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму, символы Кристоффеля, симметричность символов Кристоффеля по нижним индексам, пример вычисления символов Кристоффеля.

(38) Векторные поля вдоль кривых, ковариантные производные полей вдоль кривых, запись ковариантной производной векторного поля вдоль кривой через символы Кристоффеля.

(39) Параллельные векторные поля, параллельный перенос, уравнения параллельного переноса, теорема существования и единственности параллельного переноса данного вектора вдоль данной кривой, пример вычисления параллельного переноса.

(40) Сохранение скалярного произведения при параллельном переносе, изометричность параллельного переноса, евклидовы координаты и евклидова метрика, параллельный перенос в евклидовых координатах, примеры цилиндра и конуса.

(41) Касающиеся поверхности, параллельный перенос вдоль кривой касания поверхностей, вычисление параллельного переноса вдоль параллелей на стандартной двумерной сфере.

(42) Определение геодезических, уравнение геодезических, постоянство длины вектора скорости, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки с данным вектором скорости, сохранение геодезических при аффинных заменах параметра.

(43) Существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении, сохранение геодезических при изометрии, сохранение угла между вектором скорости геодезической и вектором параллельного поля.

(44) Операции над поверхностями, переход к подобласти, произведение поверхностей, касательное расслоение, касательный вектор касательного расслоения.

(45) Теорема о зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начального условия, ее применение к случаю отображения касательного расслоения поверхности на саму поверхность, заданного с помощью геодезических, экспоненциальное отображение.

(46) Локальная диффеоморфность экспоненциального отображения, нормальные окрестности, радиальные геодезические.

(47) “Конструкция” однопараметрического семейства радиальных геодезических и ее свойства, лемма Гаусса о перпендикулярности геодезической соответствующей геодезической сфере.

(48) Лемма об оценке длины кривой, лежащей в нормальной окрестности, следствие про радиальную геодезическую.

(49) ε -вполне нормальные окрестности, теорема существования таких окрестностей, существование и единственность кратчайших геодезических в ε -вполне нормальной окрестности, определение выпуклой окрестности.

(50) Формулировка теоремы Хопфа–Ринова, план доказательства.

(51) Теоремы Хопфа–Ринова, предварительные леммы.

(52) Теоремы Хопфа–Ринова, доказательство того, что (1) влечет (5’).

(53) Теоремы Хопфа–Ринова, доказательство импликаций $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

(54) Коммутатор векторных полей, коммутатор касательных векторных полей, свойства коммутатора.

(55) Вторая фундаментальная форма, ее симметричность, вторая фундаментальная форма относительно нормального вектора.

(56) Оператор Вейнгартена, связь оператора Вейнгартена со второй фундаментальной формой, формулы Гаусса и Вейнгартена, вычисление в координатах второй фундаментальной формы и оператора Вейнгартена.

(57) Пример: вторая фундаментальная форма и оператор Вейнгартена для гиперповерхности, заданной графиком функции.

(58) Теорема о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду, главные направления и главные кривизны для второй фундаментальной формы относительно нормального вектора, пример вычисления.

(59) Сечение поверхности аффинными подпространствами, нормальные сечения, обоснование перехода к гиперповерхностям.

(60) Одномерные сечения гиперповерхностей, направление сечения, нормаль к сечению, оснащенное сечение, угол наклона сечения, касающиеся сечения, ориентированная кривизна сечения и ориентированная кривизна касающегося нормального сечения, теорема Менье.

(61) Теорема об отношении пары форм, формула Эйлера, главные направления, главные кривизны, инварианты пары форм, средняя и гауссовы кривизны гиперповерхности.

(62) Вычисление собственных чисел симметричного оператора через минимум, экстремальность наименьшего и наибольшего собственных чисел, применение предыдущего результата для определения без вычислений главных направлений двумерной поверхности вращения, пример такого вычисления главных направлений и главных кривизн для двумерной поверхности вращения в трехмерном пространстве.

(63) Минимальные поверхности, катеноид как пример минимальной поверхности, уравнение Лагранжа двумерной минимальной поверхности, заданной графиком функции.

(64) Средняя кривизна поверхности произвольной коразмерности, вектор средней кривизны и функция средней кривизны, минимальные поверхности и поверхности постоянной средней кривизны произвольной коразмерности, тор Клиффорда как пример поверхности постоянной кривизны.

(65) Уравнения Гаусса и уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для гиперповерхностей.

(66) Тензор Римана и его свойства, существенные компоненты тензора Римана, количество существенных компонент тензора Римана для двумерных гиперповерхностей, уравнения Гаусса для двумерных гиперповерхностей.

(67) Симметрии уравнений Петерсона–Майнарди–Кодацци, существенные уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для двумерных гиперповерхностей, блистательная теорема Гаусса, формулировка теоремы Бонне.