

## Лекции по Геометрии-2

А. А. Тужилин

21 мая 2023 г.  
14:03:39

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Элементы теории графов</b>	<b>4</b>
1.1	Основные понятия теории графов . . . . .	4
1.2	Эйлеровы графы . . . . .	6
1.3	Гамильтоновы графы . . . . .	8
	Упражнения к главе 1 . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Топологические пространства, примеры</b>	<b>12</b>
2.1	Элементы теории множеств . . . . .	13
2.2	Топологические пространства . . . . .	16
2.2.1	Метрические пространства . . . . .	18
2.2.2	Метрическая топология . . . . .	20
	Упражнения к главе 2 . . . . .	23
<b>3</b>	<b>База, хаусдорфовость, сходимость, непрерывность</b>	<b>24</b>
3.1	База топологии . . . . .	24
3.2	Хаусдорфовость или отделимость топологии . . . . .	26
3.3	Последовательности . . . . .	26
3.4	Непрерывные отображения . . . . .	27
	Упражнения к главе 3 . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Гомеоморфизм, кривые, структура подмножеств, конструкции</b>	<b>33</b>
4.1	Гомеоморфизм . . . . .	33
4.2	Кривые в топологических пространствах . . . . .	34
4.3	Структура подмножеств топологического пространства . . . . .	35
4.4	Топологические конструкции . . . . .	36
4.4.1	Дизъюнктное объединение . . . . .	36
4.4.2	Декартово произведение . . . . .	36
	Упражнения к главе 4 . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Компактность</b>	<b>41</b>
5.1	Компактность . . . . .	41
5.1.1	Простейшие свойства, связанные с компактностью . . . . .	43
5.1.2	Достаточное условие гомеоморфности непрерывного биективного отображения и примеры приложения . . . . .	44
5.2	Критерий компактности метрических пространств . . . . .	46
5.2.1	Полная ограниченность . . . . .	46
5.2.2	Фундаментальные последовательности и полнота . . . . .	46
5.2.3	Критерий компактности метрического пространства . . . . .	48
5.2.4	Секвенциально компактные пространства . . . . .	49
5.3	Фактор-топология . . . . .	49
	Упражнения к главе 5 . . . . .	52
	Дополнительные упражнения к главе 5 . . . . .	53

<b>6</b>	<b>Связность и линейная связность</b>	<b>54</b>
6.1	Связность . . . . .	54
6.2	Линейная связность . . . . .	56
6.3	Локальная линейная связность . . . . .	58
6.4	Локально постоянные отображения . . . . .	59
	Упражнения к главе 6 . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Теорема Жордана</b>	<b>61</b>
7.1	Теорема Жордана . . . . .	61
7.2	Ломаные и теорема Жордана . . . . .	63
7.3	Доказательство теоремы Жордана для ломаных . . . . .	64
	7.3.1 Стратегия доказательства теоремы 7.3 . . . . .	64
	7.3.2 Реализация пункта (1) . . . . .	64
	7.3.3 Реализация пункта (2) . . . . .	65
	7.3.4 Реализация пункта (3) . . . . .	66
	7.3.5 Реализация пункта (4) . . . . .	66
7.4	Лемма о четырех точках . . . . .	68
	Упражнения к главе 7 . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Плоские графы</b>	<b>71</b>
8.1	Геометрические графы . . . . .	71
8.2	Плоские и планарные графы . . . . .	72
8.3	Формула Эйлера для плоских графов . . . . .	73
8.4	Топологические графы . . . . .	75
8.5	Планарные графы. Критерий Понтрягина–Куратовского . . . . .	76
	Упражнения к главе 8 . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Многогранники в <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>79</b>
9.1	Пространственные многоугольники . . . . .	79
9.2	Многогранные поверхности и многогранники . . . . .	80
9.3	Графы, связанные с многогранными поверхностями . . . . .	82
9.4	Выпуклые многогранники . . . . .	83
9.5	Формула Эйлера для выпуклых многогранников . . . . .	87
9.6	Правильные многогранники . . . . .	87
9.7	Теорема о “еже” выпуклого многогранника . . . . .	88
	Упражнения к главе 9 . . . . .	90
<b>10</b>	<b>Лемма Шпернера</b>	<b>91</b>
10.1	Стандартные симплексы, их триангуляции, барицентрическое подразбиение . . . . .	91
10.2	Лемма Шпернера . . . . .	92
10.3	Теорема Брауэра о неподвижной точке . . . . .	94
	Упражнения к главе 10 . . . . .	96
<b>11</b>	<b>Равновеликость и равноставленность. Третья проблема Гильберта</b>	<b>97</b>
11.1	Критерий равноставленности многогранников . . . . .	99
11.2	Примеры вычисления инвариантов Дена . . . . .	99
11.3	Некоторые следствия из теоремы Дена . . . . .	100
11.4	Доказательство теоремы Дена . . . . .	101
11.5	Решение Третьей проблемы Гильберта . . . . .	102
11.6	Дальнейшее развитие . . . . .	103
	Упражнения к главе 11 . . . . .	104
	Комментарии к упражнению 11.11 . . . . .	105

<b>12 Двумерные поверхности</b>	<b>107</b>
12.1 Триангулированные поверхности . . . . .	107
12.2 Ориентация поверхностей . . . . .	109
12.3 Склейка ребер . . . . .	110
12.4 Склейка поверхностей . . . . .	111
12.5 Вырезание дырки и ее заклейка . . . . .	111
12.6 Разрезание поверхности вдоль кривой и вырезание полосы . . . . .	111
12.7 Вклейка ручки и пленки Мёбиуса . . . . .	112
12.8 Классификация ориентируемых поверхностей . . . . .	113
12.9 Классификация неориентируемых поверхностей . . . . .	117
Упражнения к главе 12 . . . . .	119
<b>13 Кривые</b>	<b>120</b>
13.1 Общие определения . . . . .	120
13.2 Длина кривой . . . . .	120
13.3 Натуральная и равномерная параметризации кривых . . . . .	121
13.4 Интегральная формула длины регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	122
13.5 Параллелепипеды и их объемы . . . . .	123
13.5.1 Ориентация конечномерного векторного пространства . . . . .	124
13.5.2 Параллелепипеды и их объемы . . . . .	124
13.6 Ортогонализация Грама–Шмидта . . . . .	125
Упражнения к главе 13 . . . . .	126
<b>14 Кривизны кривых</b>	<b>127</b>
14.1 Формулы Френе и кривизны . . . . .	127
Упражнения к главе 14 . . . . .	132
<b>15 Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых</b>	<b>134</b>
15.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .	134
15.2 Восстановление кривой по кривизнам . . . . .	135
15.2.1 Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне . . . . .	136
15.3 Геометрия плоских кривых . . . . .	137
15.3.1 Эволюты и эвольвенты . . . . .	138
15.3.2 Порядок касания кривых . . . . .	139
Упражнения к главе 15 . . . . .	141
<b>16 Дополнение 1: Элементы аффинной и выпуклой геометрии</b>	<b>142</b>
16.1 Элементы аффинной геометрии . . . . .	142
16.2 Элементы выпуклой геометрии . . . . .	144
16.2.1 Разделяющие гиперплоскости . . . . .	146
16.2.2 Опорные гиперплоскости . . . . .	147
Упражнения к главе 16 . . . . .	150
<b>17 Дополнение 2: Грани и двойственность выпуклых тел</b>	<b>151</b>
17.1 Грани и экстремальные точки . . . . .	151
17.2 Двойственность . . . . .	154
Упражнения к главе 17 . . . . .	157
<b>18 Дополнение 3: Выпуклые многогранники в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>158</b>
18.1 Метрическая проекция . . . . .	158
18.2 Выпуклые многогранники . . . . .	159
18.3 Формула Эйлера для выпуклых многогранников . . . . .	163
18.4 Правильные многомерные многогранники . . . . .	164
Упражнения к главе 18 . . . . .	166
<b>Литература</b>	<b>167</b>

# Лекция 1

## Элементы теории графов

**План.** Общее определение графов, вершины, ребра, отображение инцидентности, конечные графы, инцидентные вершины и ребра, вершины, соединенные ребром, смежные вершины, смежные ребра, петля, кратное ребро, кратная петля, кратность ребра, простой граф, лемма о рукопожатиях, степень вершины, задача Эйлера, маршрут, замкнутый маршрут, длина маршрута, путь, цикл, связный граф, эйлеров цикл или обход графа, эйлеров граф, критерий эйлеровости графа, простой цикл, гамильтонов цикл, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости, висячая вершина, дерево.

### 1.1 Основные понятия теории графов

Пусть  $V$  — произвольное (не обязательно конечное) множество,  $\#V$  или  $|V|$  — его мощность,  $k \in \mathbb{N}$ , а  $V^{(k)}$  — семейство всех  $k$ -элементных подмножеств  $V$ . Отметим, что при  $k > |V|$  множество  $V^{(k)}$  пусто. Нам будут нужны множество  $V^{(1)}$  одноэлементных и множество  $V^{(2)}$  двухэлементных подмножеств  $V$ .

**Определение 1.1.** *Графом*  $G$  называется тройка  $G = (V, E, \partial)$ , состоящая из множеств  $V$ ,  $E$  и отображения  $\partial: E \rightarrow V^{(1)} \cup V^{(2)}$ . Элементы из  $V$  называются **вершинами** графа  $G$ , элементы из  $E$  — **ребрами** графа  $G$ , а  $\partial$  — **отображением инцидентности**. Если задан граф  $G$ , но не введено обозначение для множеств вершин, ребер, или для отображения инцидентности, то соответствующие объекты будем обозначать  $V(G)$ ,  $E(G)$  и  $\partial_G$ .

**Замечание 1.2.** Всюду, если не оговорено противное, мы будем рассматривать **конечные графы**, т.е. графы, у которых множества  $V$  и  $E$  конечны. Также, для краткости, вместо  $\partial(e)$  мы будем писать  $de$ .

**Пример 1.3.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\partial(e_i) = \{v_j, v_k\}$  для любых  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Тогда граф  $(V, E, \partial)$  можно рассматривать как модель треугольника с множеством вершин  $V$  и множеством сторон  $E$ . При этом отображение инцидентности  $\partial$  показывает, к каким вершинам каждое из ребер  $e_i$  “приклеивается”, например,  $de_1 = \{v_2, v_3\}$ , так что  $e_1$  крепится к  $v_2$  и  $v_3$ .

Для наглядности графы представляют в виде точек-вершин, соединенных линиями-ребрами. На рис. 1.1 слева изображен граф из примера 1.3, а справа — граф более общего вида.

В теории графов принята следующая терминология (рис. 1.2):

- если  $v \in de$ , то говорят, что вершина  $v$  и ребро  $e$  **инцидентны**;
- если  $de = \{v, w\}$ , то говорят, что вершины  $v$  и  $w$  **смежны**, или же, что они **соединены ребром**  $e$ ;
- ребра  $e$  и  $e'$  называются **смежными**, если  $de \cap de' \neq \emptyset$ ;
- ребро  $e$ , инцидентное ровно одной вершине, т.е. если  $\#de = 1$ , называется **петлей**;
- если для ребра  $e$  существует ребро  $e' \neq e$  такое, что  $de = de'$ , то ребро  $e$  (а вместе с ним и ребро  $e'$ ) называется **кратным**;

**Кратностью ребра**  $e$  называется количество всех ребер  $e'$ , для которых  $de' = de$ . Ясно, что ребро  $e$  не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

**Определение 1.4.** Граф без петель и кратных ребер называется **простым**.

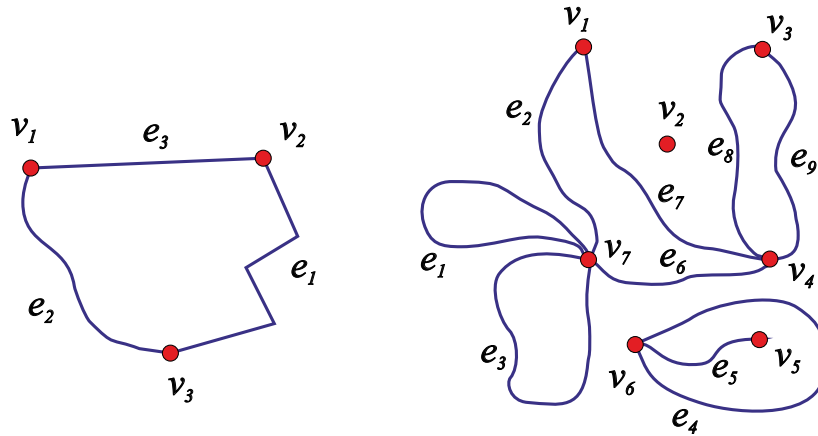


Рис. 1.1: Примеры изображения графов.

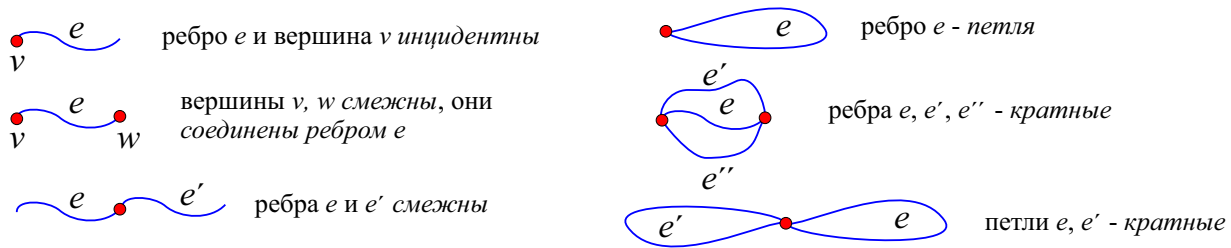


Рис. 1.2: Некоторые термины теории графов.

**Замечание 1.5.** Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин  $V$  и некоторое подмножество  $E$  в  $V^{(2)}$ .

В самом деле, пусть  $G = (V, E, \partial)$  — простой граф. Тогда  $\partial$  отображает множество  $E$  взаимно-однозначно на некоторое подмножество в  $V^{(2)}$ , что позволяет отождествить  $E$  и  $\partial E \subset V^{(2)}$ . Иными словами, ребро простого графа однозначно задается парой различных вершин, которые оно соединяет.

Таким образом, **простой граф** будем всегда представлять парой  $(V, E)$ , где  $E$  — некоторое подмножество в  $V^{(2)}$ .

Для простого графа  $G = (V, E)$  ребро  $e = \{v, w\} \in E$  удобно обозначать  $vw$  или  $wv$ .

Имеется большое количество задач, которые естественно решаются на языке теории графов.

**Задача 1.6 (Лемма о рукопожатиях).** Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины и одну очень полезную формулу.

**Определение 1.7.** Пусть  $v$  — произвольная вершина некоторого графа. Тогда **степенью**  $\deg v$  этой вершины называется количество инцидентных  $v$  ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных  $v$ :

$$\deg v = \#\{e \in E : \partial e \ni v, |\partial e| = 2\} + 2\#\{e \in E : \partial e = \{v\}\}.$$

Вычислим сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что каждое ребро вносит в эту сумму вклад, равный 2, поэтому

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v.$$

Обозначим через  $V_k \subset V$  множество всех вершин степени  $k$ . Тогда  $\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{k=0}^{\infty} k |V_k|$ , откуда

$$(1.1) \quad 2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k |V_k|.$$

**Решение задачи 1.6.** Рассмотрим граф  $G$ , который очевидным образом описывает рукопожатия: за вершины принимаем участников конференции, за ребра — все рукопожатия. При этом считаем, что ребро-рукопожатие инцидентно тем вершинам-участникам, которые это рукопожатие совершили. Тогда в задаче требуется доказать, что в нашем графе количество вершин с нечетными степенями четно. Иными словами, требуется доказать, что число  $\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |V_{2k+1}|$  четно.

Воспользуемся формулой (1.1):

$$(1.2) \quad 2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k |V_k| = \sum_{k=0}^{\infty} 2k |V_{2k}| + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) |V_{2k+1}| = \sum_{k=0}^{\infty} 2k |V_{2k}| + \sum_{k=0}^{\infty} 2k |V_{2k+1}| + \sum_{k=0}^{\infty} |V_{2k+1}|,$$

откуда мгновенно вытекает, что  $\sigma$  четно.

**Замечание 1.8.** Хотя естественно считать, что участники конференции пожимают друг другу руку лишь один раз (в графе  $G$  нет кратных ребер) и не пожимают руки самим себе (в графе  $G$  нет петель), т.е.  $G$  — простой граф, тем не менее, приведенные выше рассуждения были проведены для любого графа, не обязательно простого.

Отметим, что в теории графов имеется много интересных задач, решения которых основаны на вычислении различных соотношений между числовыми характеристиками графов. Некоторые из таких задач мы рассмотрим на семинаре.

## 1.2 Эйлеровы графы

Следующий круг вопросов связан с обходами графов. Вот пример классической задачи, которую решил Л. Эйлер, и с которой, как считается, берет начало теория графов.

**Задача 1.9 (Задача Эйлера).** В городе Кёнигсберге на реке Прегель имеется 7 мостов (их расположение показано на рис. 1.3 слева). Можно ли, выйдя из дома, вернуться назад, пройдя каждый мост ровно один раз?

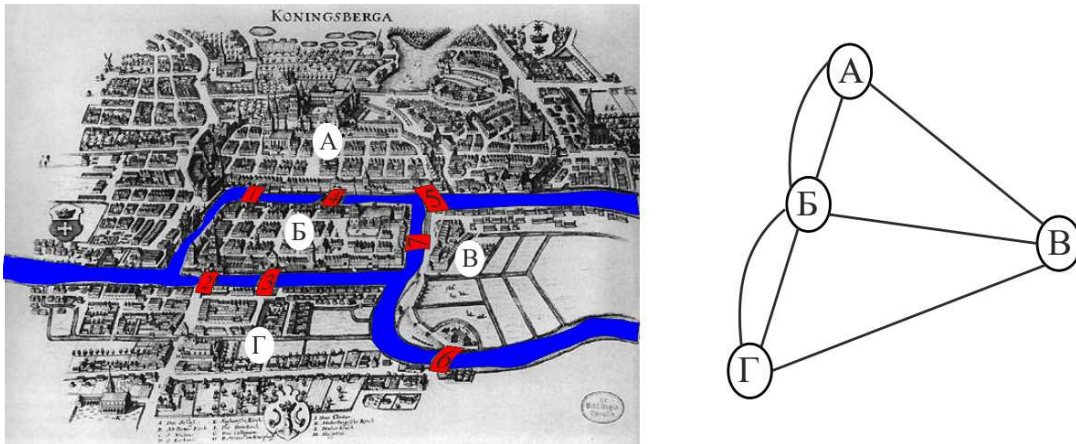


Рис. 1.3: Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый.

Эйлер изобразил части суши точками, а мосты — линиями, соединяющими эти точки и, таким образом, сформулировал эту задачу в терминах теории графов. Чтобы понять формулировку, нам понадобится ряд новых понятий.

**Определение 1.10.** *Маршрутом, соединяющим вершины  $v_0$  и  $v_k$ , называется последовательность*

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k,$$

где  $v_i$  — вершины графа, а  $e_i$  — его ребра, причем для каждого  $i$  ребро  $e_i$  соединяет вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$ . Маршрут называется *замкнутым*, если  $v_0 = v_k$ . В обоих рассмотренных случаях число  $k$  называется *длиной маршрута*. Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется *путем*. Маршрут назовем *невырожденным*, если он содержит хотя бы одно ребро. Если в замкнутом невырожденном маршруте различны все ребра  $e_i$ , то такой маршрут называется *циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.

**Замечание 1.11.** Если граф  $G$  не имеет кратных ребер, то при записи маршрута ребра указывать не обязательно, так как каждое ребро однозначно определяется вершинами, которые оно соединяет. Таким образом, в этом случае маршрут из определения 1.10 будем записывать в виде  $v_0 v_1 \dots v_k$  (без указания ребер и без разделения запятыми).

**Пример 1.12.** Приведем пример маршрута в графе с рис. 1.1, см. рис. 1.4:

$$\gamma = v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_7, v_4.$$

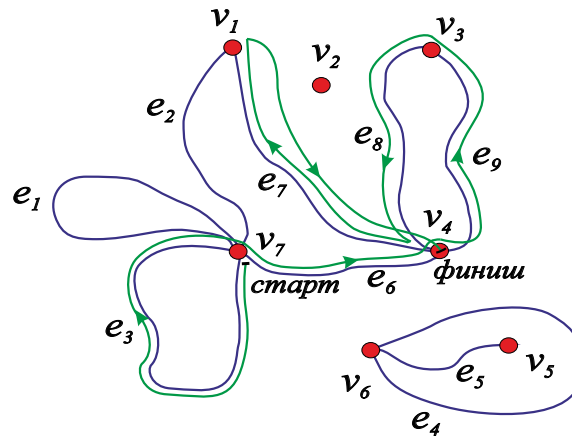


Рис. 1.4: Маршрут.

Этот маршрут выходит из вершины  $v_7$  и проходит сначала по одной из кратных петель, а именно, по  $e_3$ ; затем идет по ребру  $e_6$  кратности 1 в вершину  $v_4$ ; отсюда отправляется по одному из кратных ребер в  $v_3$  и возвращается назад по другому из кратных ребер в  $v_4$ ; затем он идет по ребру  $e_7$  кратности 1 в вершину  $v_1$  и сразу возвращается по этому же ребру назад в вершину  $v_4$ . Тем самым, при движении по маршруту допустимы всевозможные самопересечения. Этот маршрут не является замкнутым, так как начинается и заканчивается в разных вершинах. Но если его продолжить, добавив  $e_6, v_7$ , то он станет замкнутым. Длина незамкнутого маршрута  $\gamma$  равна 6, а длина замкнутого маршрута  $\gamma, e_6, v_7$  равна 7.

В  $\gamma$  имеются совпадающие вершины, поэтому  $\gamma$  путем не является. Заметим, что в путь не может входить петля, а также путь не может содержать несколько ребер, соединяющих одни и те же вершины. Вот пример пути:  $v_1, e_2, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3$ , причем этот путь имеет длину 3 и является максимальным в силу того, что его нельзя продолжить до более длинного пути.

Определенный выше замкнутый маршрут  $\gamma, e_6, v_7$  не является циклом, потому что в нем некоторые ребра встречаются несколько раз (таким является ребро  $e_7$ ). Примером цикла служит

$$v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_2, v_7.$$

Рассматриваемый граф не является связным, так как, скажем, вершины  $v_6$  и  $v_7$  маршрутом не соединяются. Однако если выкинуть из этого графа вершины  $v_5, v_6$ , вместе с ребрами  $e_4$  и  $e_5$ , то оставшийся граф будет связным.



**Определение 1.13.** Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Эйлеров граф можно нарисовать на плоском листе бумаги, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному ребру дважды (при этом некоторые вершины могут проходиться по несколько раз).

Итак, в задаче 1.9 спрашивается, существует ли для графа, изображенного на рис. 1.3 справа, эйлеров цикл, т.е. является ли этот граф эйлеровым. Мы решим общую задачу, из которой мгновенно вытекает, что в задаче 1.9 ответ отрицательный.

**Теорема 1.14** (Критерий эйлеровости графа). *Связный граф  $G$  эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны и положительны.*

**Доказательство.** Если  $G$  содержит только одну вершину, то все его ребра — петли, и эйлеров цикл получается при последовательном обходе этих петель. Пусть  $G$  содержит более одной вершины. Заметим, что выкидывание петли сохраняет связность графа, четности степеней его вершин, а также свойство графа содержать или не содержать эйлеров цикл. Таким образом, не ограничивая общности, мы будем сразу предполагать, что  $G$  не имеет петлю.

Предположим, что  $G$  содержит эйлеров цикл  $C = v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$ , где  $v_0 = v_k$ . Пусть  $v$  — произвольная вершина графа  $G$ . Тогда в цикле  $C$  каждое включение вершины  $v$  смежно двум ребрам этого цикла: предыдущего и последующего (если  $v = v_0 = v_k$ , то предыдущим является  $e_k$ , а последующим —  $e_1$ ). В силу отсутствия петель, эти ребра приходят в вершины, отличные от  $v$ . Так как в цикле все ребра различны, все ребра, инцидентные  $v$ , разбиваются на пары. Наглядно это можно представить так: мы обходим ребра графа по циклу  $C$  и группируем в пары последовательные ребра входа в  $v$  и выхода из  $v$ . Эти пары не пересекаются, поэтому степень вершины  $v$  четна.

Для доказательства обратного утверждения покажем справедливость следующей леммы.

**Лемма 1.15.** *Каждый граф, у которого степени всех вершин четные и имеется хотя бы одно ребро, содержит цикл.*

**Доказательство.** Действительно, начнем с произвольного ребра  $e_1$ , соединяющего вершины  $v_0$  и  $v_1$ . В силу четности степени вершины  $v_1$ , существует ребро  $e_2 \neq e_1$ , соединяющее  $v_1$  с некоторой вершиной  $v_2$ . Если  $v_2$  совпала с  $v_0$ , то получили цикл. Иначе продолжаем процесс. В силу конечности числа вершин, на некотором шаге добавленная вершина совпадет с одной из уже имеющихся, и мы получим искомым цикл.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Так как мы предполагаем, что граф  $G$  связан и в нем имеется не менее двух вершин, то  $G$  содержит по крайней мере одно ребро. Тогда, по лемме 1.15, в  $G$  содержится некоторый цикл  $C_1$ . Выкинув все ребра цикла  $C_1$  из  $E(G)$ , вновь получим граф, степени вершин которого четны. Если в полученном графе остались ребра, снова применим лемму 1.15 и построим цикл  $C_2$ . Отметим, что циклы  $C_1$  и  $C_2$  не имеют общих ребер. Продолжая этот процесс, мы представим множество ребер  $E(G)$  графа  $G$  в виде попарно непересекающихся множеств  $E(C_i)$ , где  $C_i$  — построенные циклы. Так как граф  $G$  связан, то для каждого цикла  $C_i$  имеется отличный от него цикл  $C_j$  такой, что  $V(C_i) \cap V(C_j) \neq \emptyset$  (убедитесь в этом).

Однако, каждые два реберно непересекающихся цикла, имеющих хотя бы одну общую вершину, всегда объединяются в один цикл: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом, мы последовательно объединим все циклы  $C_i$  в один и получим эйлеров цикл.  $\square$

**Задача 1.16.** Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

## 1.3 Гамильтоновы графы

Обсудим еще одну задачу, связанную с обходами. Предварительно дадим необходимые определения.

**Определение 1.17.** Цикл называется *простым*, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Задача о поиске гамильтонова цикла была предложена У. Гамильтоном в 1859 году в форме игры, которая называлась “Кругосветное путешествие”. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.5, вершинам которого будем представлять городами, а ребра — соединяющими города дорогами. Требуется, начав с некоторого города и переходя от одного города к другому по имеющимся дорогам, посетить каждый город ровно один раз и вернуться в исходный.

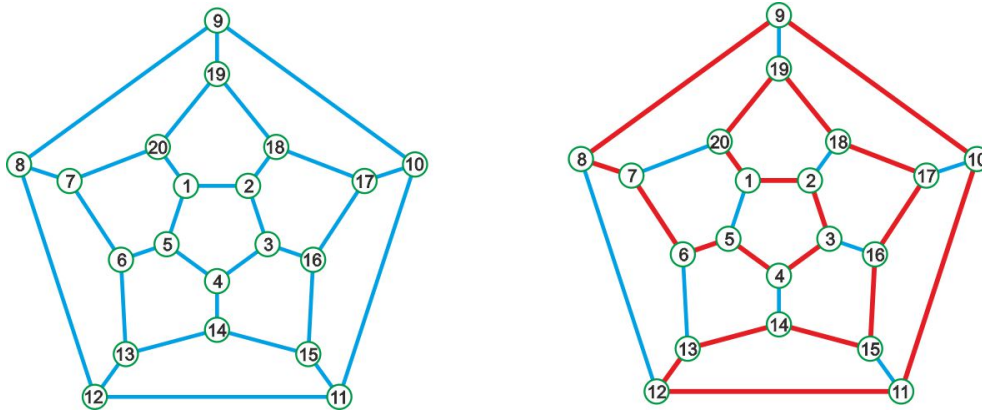


Рис. 1.5: Игра “Кругосветное путешествие”, предложенная У. Гамильтоном.

Приведем ряд простых замечаний.

- (1) Каждый гамильтонов граф связный.
- (2) Добавление к гамильтонову графу петель или увеличение кратности его ребер оставляет граф гамильтоновым.
- (3) Если гамильтонов цикл проходит через петлю, то в этом графе имеется ровно одна вершина; обратно, гамильтоновы графы с одной вершиной — это все одновершинные графы, имеющие одну или более петель.
- (4) Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более одной вершины, то ни один его гамильтонов цикл не проходит ни через одну петлю. Следовательно, граф  $G$ , содержащий более одной вершины, — гамильтонов, если и только если граф, полученный из  $G$  выбрасыванием всех его петель, — гамильтонов.
- (5) Если гамильтонов цикл содержит два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такой граф имеет ровно две вершины; обратно, каждый граф, имеющий ровно две вершины и такой, что эти вершины соединены не менее чем двумя ребрами, является гамильтоновым.
- (6) Таким образом, если гамильтонов граф  $G$  содержит более двух вершин, то в его гамильтонов цикл не могут входить два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин. Следовательно, граф  $G$ , содержащий более двух вершин, — гамильтонов, если и только если граф, полученный из  $G$  выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного, — гамильтонов.

Таким образом, произвольный граф  $G$ , содержащий не менее трех вершин, гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоновым является граф  $G'$ , полученный из  $G$  отбрасыванием всех петель, а также выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного. Отметим, что каждый такой граф  $G'$  является простым.

*Итак, при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.*

**Пример 1.18.** *Полным графом  $K_n$*  называется простой граф с  $n$  вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром. Легко видеть, что при  $n \geq 3$  каждый полный граф  $K_n$  — гамильтонов.

Отметим, что до сих пор не известно ни одного критерия, описывающего гамильтоновы графы. Многочисленные условия, являющиеся по отдельности или необходимыми, или достаточными, можно, например, найти в [2] или [3]. Приведем и докажем одно из этих условий.

**Теорема 1.19** (Дирак). Пусть  $G = (V, E)$  — простой граф с  $n \geq 3$  вершинами. Предположим, что степени вершин графа  $G$  не меньше  $n/2$ . Тогда граф  $G$  гамильтонов, в частности, граф  $G$  — связный.

**Доказательство.** Пусть  $\gamma = v_0v_1 \cdots v_\ell$  — путь в графе  $G$ , имеющий максимально возможную длину среди всех путей в  $G$ . Покажем, что  $G$  содержит простой цикл  $C$  длины  $\ell + 1$ .

Так как  $n \geq 3$ , то степени вершин графа  $G$  не меньше 2 и, значит,  $\ell \geq 2$ . Отсюда вытекает, что если в графе есть ребро  $v_0v_\ell$ , то  $v_0v_1 \cdots v_\ell v_0$  является циклом, который можно взять в качестве искомого  $C$ .

Пусть теперь  $v_0v_\ell \notin E$ . Положим

$$X = \{v_i : v_0v_{i+1} \in E\}, \quad Y = \{v_j : v_\ell v_j \in E\}.$$

Обратите внимание на сдвиг индекса в определении множества  $X$ . Из-за него, например,  $v_0 \in X$ , но  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ . Также легко видеть, что  $v_0, v_\ell \notin Y$ .

Заметим, что каждая смежная с  $v_0$  вершина  $w$  графа  $G$  лежит на  $\gamma$ , так как иначе  $wv_0v_1 \cdots v_\ell$  — путь в  $G$  длины  $\ell + 1$ , что противоречит максимальной длине пути  $\gamma$ . Теперь нетрудно понять, что множество вершин, смежных с  $v_0$ , и множество  $X$  содержат одинаковое количество элементов, т.е.  $|X| = \deg v_0 \geq n/2$ . Аналогично, множество вершин, смежных с  $v_\ell$ , т.е. множество  $Y$ , также содержится во множестве вершин пути  $\gamma$ , поэтому  $|Y| = \deg v_\ell \geq n/2$ . Следовательно,  $|X| + |Y| \geq n$ .

Теперь докажем, что множества  $X$  и  $Y$  пересекаются. Напомним, что вершина  $v_\ell$  не принадлежит ни  $X$ , ни  $Y$ , поэтому  $v_\ell \notin X \cup Y$  и, значит,  $X \cup Y \neq V$ , откуда  $|X \cup Y| < n$ . Но тогда если бы  $X$  и  $Y$  не пересекались, то выполнялось бы равенство  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ . Учитывая доказанные выше неравенства, мы получили бы  $n > |X \cup Y| = |X| + |Y| \geq n$ . Следовательно, множества  $X$  и  $Y$  пересекаются.

Пусть  $v_k \in X \cap Y$ . Раньше мы показали, что  $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$ ; кроме того,  $v_0 \notin Y$ . Поэтому  $0 < k < \ell - 1$ .

Искомый цикл  $C$  строится следующим образом, см. рис. 1.6. Сначала из  $v_0$  вдоль пути  $\gamma$  идем в вершину  $v_k$ , из нее по ребру  $v_kv_\ell$  (оно существует, так как  $v_k \in Y$ ) идем в  $v_\ell$ , затем по  $\gamma$  идем в обратном направлении из  $v_\ell$  в  $v_{k+1}$ , наконец, соединяем  $v_{k+1}$  с  $v_0$  ребром  $v_{k+1}v_0$  (оно существует, так как  $v_{k+1} \in X$ ). Легко видеть, что длина построенного цикла  $C$  равна  $\ell + 1$ . Кроме того, цикл  $C$  простой, так как все его вершины — это вершины пути  $\gamma$ , каждая из которых (кроме первой и последней) проходится циклом  $C$  ровно один раз.

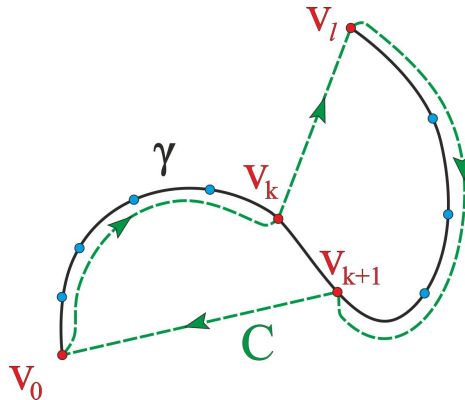


Рис. 1.6: Построение цикла  $C$ .

Докажем теперь, что цикл  $C$  — гамильтонов. Предположим противное, т.е. что существует вершина  $x \in V$ , через которую  $C$  не проходит. Покажем, что  $x$  должна быть смежна с некоторой вершиной  $v_p$  из  $C$ . Действительно, если это не так, то вне цикла  $C$  лежит вершина  $x$  и не менее чем  $n/2$  смежных с  $x$  вершин, т.е. не менее  $n/2 + 1$  вершина. С другой стороны, вершина  $v_0$  и не менее чем  $n/2$  смежных в  $v_0$  вершин лежат в  $C$ , поэтому  $C$  содержит не менее  $n/2 + 1$  вершины. Таким образом, в графе  $G$  содержится не менее  $n + 2 > n$  вершин, противоречие.

Итак,  $x$  и некоторая  $v_p$  смежны, и тогда путь, полученный из  $xv_p \cup C$  выкидыванием любого из двух ребер цикла  $C$ , инцидентных  $v_p$ , будет иметь длину  $\ell + 1$ , что противоречит предположению о максимальной длине  $\ell$ . Полученное противоречие показывает, что такая вершина  $x$  не существует и, значит,  $C$  проходит через все вершины графа  $G$ , т.е.  $C$  — гамильтонов цикл.  $\square$

## Упражнения к главе 1

**Упражнение 1.1.** Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

**Упражнение 1.2.**

- (1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).
- (2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.
- (3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

**Упражнение 1.3.** В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

**Упражнение 1.4.** Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

**Упражнение 1.5.**

- (1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.
- (2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

**Упражнение 1.6.**

- (1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.
- (2) Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

**Упражнение 1.7.** *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода  $C$ , имеющего валентность 4, и водорода  $H$ , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего  $n$  атомов углерода.

**Упражнение 1.8.** Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

**Упражнение 1.9.** На пир при дворе короля Артура собрались рыцари, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

## Лекция 2

# Топологические пространства, примеры

**План.** Определение топологии (аксиомы топологии) и топологического пространства, открытые множества, замкнутые множества, свойства замкнутых множеств, задание топологии через замкнутые множества, антидискретная топология, дискретная топология, топология Зарисского, индуцированная топология, подпространства, метрика и метрические пространства, изометричные отображения метрических пространств и изометрии, стандартное или евклидово расстояние на  $\mathbb{R}^n$ , нормированные пространства, метрика, порожденная нормой, пространства со скалярным произведением, норма, порожденная скалярным произведением, стандартная или евклидова норма на  $\mathbb{R}^n$ , стандартное или евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ , манхеттенская норма, шах-норма, правило параллелограмма, открытый и замкнутый шары, а также сферы в метрическом пространстве, метрическая топология, стандартная топология на  $\mathbb{R}^n$ , стандартная топология на отрезке, сравнение топологий, более грубая (слабая) и более тонкая (сильная) топологии, окрестность точки топологического пространства, критерий совпадения двух топологий, эквивалентность метрик и совпадение соответствующих им топологий, эквивалентность норм и соответствующих им метрик.

Основные понятия математического анализа, скажем, предел последовательности или непрерывность функции, могут быть сформулированы в терминах окрестностей рассматриваемых точек. В качестве таких окрестностей  $U^x$  точек  $x$  обычно рассматриваются интервалы  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , середины которых — выбранная точка  $x$ . Например, последовательность вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots$  сходится к числу  $x$ , если для любой окрестности  $U^x$  точки  $x$  существует  $N$  такое, что при всех  $n \geq N$  выполняется  $x_n \in U^x$ . Или же функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x$ , если для любой окрестности  $U^{f(x)}$  существует окрестность  $U^x$  такая, что  $f(U^x) \subset U^{f(x)}$ .

Можно расширить семейство окрестностей  $U^x$  точек  $x$ , разрешив выбирать интервалы, содержащие  $x$  не обязательно в виде середины. При этом данные выше определения приведут к тому же классу сходящихся последовательностей и непрерывных функций (проверьте).

Отметим, что семейство всех интервалов, как ограниченных, так и не ограниченных, не обладает рядом полезных свойств, а именно, пересечение интервалов может оказаться пустым, т.е. не интервалом, а объединение непересекающихся интервалов тоже интервалом не является. Если расширить понятие окрестности  $U^x$ , разрешив выбирать не только интервалы, но и произвольные их объединения, то, как несложно проверить, заменив в определении предела или непрерывности функции интервалы на такие объединения, мы снова получим те же самые классы сходящихся последовательностей и непрерывных функций (проверьте). Однако теперь полученное семейство множеств будет замкнуто относительно объединений. Кроме того, если к этому семейству добавить пустое множество, то оно также будет замкнуто и относительно конечных пересечений. Полученное семейство подмножеств называется **стандартной топологией** математического анализа, а элементы этого семейства — **открытыми множествами** этой топологии. При этом множество всех интервалов, порождающее с помощью операции объединения все открытые множества (если считать, что пустое множество получается объединением пустого семейства интервалов), называется **базой стандартной топологии** (сравните с тем, как базис векторного пространства порождает все векторное пространство с помощью линейных комбинаций).

Как оказывается, рассмотренные только что свойства семейства подмножеств являются вполне достаточными для построения содержательной теории пределов и непрерывности. Обобщение конструкции на произвольные множества приводит к определению топологического пространства. Мы введем соответствующие понятия и покажем, как классические теоремы математического анализа вытекают из аналогичных, но существенно более общих утверждений.

Кроме того, мы применим развитую в этой лекции теорию в последующих лекциях и для доказательства знаменитой теоремы Жордана, утверждающей, что непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости разбивает плоскость на две части (отметим, что даже в случае, когда кривая является ломаной, доказательство остается нетривиальным); и для формулы Эйлера, описывающей важное свойство графов, которые можно изобразить на евклидовой плоскости так, чтобы их ребра — непрерывные кривые без самопересечений — пересекались лишь по конечным точкам; и для классификации двумерных триангулированных поверхностей.

Мы сделаем очень краткое введение в общую топологию. Более детальные курсы топологии можно найти, например, в [4] и [5]. В [6] имеется много интересных задач как по топологии, так и по более общим темам. Для более глубокого осознания сути разных топологических объектов мы рекомендуем заглянуть в [7], где сложность восприятия хитрых структур преодолевается наглядным иллюстрированием.

## 2.1 Элементы теории множеств

Напомним основные понятия и формулы теории множеств. Принадлежность элемента  $x$  множеству  $X$  обозначается  $x \in X$ , а тот факт, что множество  $Y$  является подмножеством в  $X$  — через  $Y \subset X$ . Равенство множеств  $A = B$  означает, что они состоят из одних и тех же элементов:  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ . Это определение используется для проверки справедливости разных формул. Множество всех элементов из  $X$ , удовлетворяющих свойству  $P$ , обычно пишут так:  $\{x \in X : P\}$ . Например, множество всех целых чисел больших 5 записывается как  $\{n \in \mathbb{Z} : n > 5\}$ .

Семейство множеств, индексированное множеством  $I$ , обозначается  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Конечный набор множеств  $X_1, \dots, X_n$  можно записать в виде  $\{X_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  или  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ; счетный набор множеств  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} = \{X_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$  называют также **последовательностью множеств**.

Пусть задано семейство множеств  $\mathcal{S} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , а также множества  $X$  и  $Y$ . Напомним определение ряда операций над множествами.

- **Пересечение множеств семейства  $\mathcal{S}$ :**

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I, x \in X_\alpha\}.$$

Пересечение двух множеств  $X$  и  $Y$  обозначается  $X \cap Y$ , а пересечение конечного числа множеств  $X_1, \dots, X_n$  — через  $X_1 \cap \dots \cap X_n$ .

- **Объединение множеств семейства  $\mathcal{S}$ :**

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : \exists \alpha \in I, x \in X_\alpha\}.$$

Объединение двух множеств  $X$  и  $Y$  обозначается  $X \cup Y$ , а объединение конечного числа множеств  $X_1, \dots, X_n$  — через  $X_1 \cup \dots \cup X_n$ .

- Семейство  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , состоящее из подмножеств  $X_\alpha$  множества  $X$ , называется **покрытием**  $X$ , если  $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ . Если  $Y$  — подмножество  $X$ , то семейство  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — **покрытие**  $Y$ , если  $Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ . Подмножество покрытия, само являющееся покрытием, называется **подпокрытием**.
- **Декартово произведение множеств семейства  $\mathcal{S}$ :**

$$\prod \mathcal{S} = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha : \forall \alpha \in I, x(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Как и в случае последовательностей, вместо  $x(\alpha)$  пишут  $x_\alpha$  и называют  **$\alpha$ -ой координатой** элемента  $x \in X$ . Если множество  $\mathcal{A}$  состоит из двух элементов  $X_1$  и  $X_2$ , то  $X$  записывают в виде  $X_1 \times X_2$ , а его элементы — в виде  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1 \in X_1$ , а  $x_2 \in X_2$ . В случае конечного  $\mathcal{A}$ , например  $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ , пишут соответственно  $X_1 \times \dots \times X_n$  и  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X_i$ .

- **Несвязное или дизъюнктивное объединение множеств семейства  $\mathcal{S}$**  — это объединение множеств этого семейства при условии, что или они попарно не пересекаются, или же рассматриваются как непересекающиеся, т.е. каждое множество  $X_\alpha$  отождествляют с  $\{\alpha\} \times X_\alpha$ . Если множество  $X$  равно дизъюнктивному объединению его непустых подмножеств, то говорят, что  $X$  **разбито** на эти подмножества, а само семейство подмножеств называют **разбиением множества  $X$** .
- **График  $\Gamma_f$  отображения  $f: X \rightarrow Y$**  — это подмножество в  $X \times Y$ , состоящее из всех пар  $(x, f(x))$ ,  $x \in X$ , т.е.  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ .
- **Разность множеств  $X$  и  $Y$**  — это множество  $X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$ .

- Для  $Y \subset X$  **дополнение  $Y$  до  $X$**  — это множество  $Y^c = X \setminus Y$ . Часто в теории множеств такое дополнение обозначают  $\bar{X}$ , однако в топологии это обозначение занято для другой операции (см. ниже).

Имеют место следующие свойства.

- Пересечение и объединение — коммутативные и ассоциативные операции.
- Дистрибутивный закон для объединения и пересечения:

$$X \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \cap X_\alpha), \quad X \cup \left( \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \cup X_\alpha).$$

- Законы де Моргана

$$X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus X_\alpha), \quad X \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus X_\alpha).$$

Если все  $X_\alpha$  являются подмножествами  $X$ , то законы де Моргана можно сформулировать так: *дополнение до объединения равно пересечению дополнений, а дополнение до пересечения — объединению дополнений.*

Отображение множеств  $f: X \rightarrow Z$  называется

- **инъективным** или **вложением**, если оно “не склеивает” элементы:  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ ;
- **сюръективным** или **отображением на**, если оно отображает  $X$  на все  $Z$ , т.е.  $\forall z \in Z \exists x \in X : z = f(x)$ ;
- **биективным** или **взаимно однозначным**, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Пусть  $f: X \rightarrow Z$  — отображение множеств,  $X_\alpha \subset X$  для всех  $\alpha \in I$ ,  $Z_\beta \subset Z$  для всех  $\beta \in J$ , тогда

- для биективного отображения  $f$  определено **обратное** к нему отображение  $f^{-1}: Z \rightarrow X$  по формуле  $f^{-1}(z) = x \Leftrightarrow z = f(x)$ ;
- для  $A \subset X$  его **образ**  $f(A)$  состоит из образов  $f(a)$  всех элементов  $a \in A$ , т.е.  $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ ;
- **образ отображения  $f$**  — это образ  $f(X)$  всего множества  $X$ ;
- имеют место формулы:

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(X_\alpha), \quad f\left(\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(X_\alpha)$$

(приведите пример строго включения во второй формуле);

- **прообраз  $f^{-1}(B)$  подмножества  $B \subset Z$**  (не путать символ  $f^{-1}$  с обозначением обратного отображения) — это множество всех  $x \in X$ , образы которых принадлежат  $B$ , т.е.  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$  (отметим, что  $f^{-1}(B)$  может быть пустым);
- имеют место формулы:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in J} Z_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(Z_\beta), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in J} Z_\beta\right) = \bigcap_{\beta \in J} f^{-1}(Z_\beta);$$

- для  $B \subset Z$  выполняется  $f^{-1}(Z \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ ;
- для  $A \subset X$  выполняется  $A \subset f^{-1}(f(A))$  (приведите пример строгого включения).

Пусть  $X$  — произвольное множество. Семейство всех подмножеств  $X$  называется **булеаном  $X$**  и имеет различные обозначения. Мы будем обозначать булеан  $2^X$ . Это обозначение можно интерпретировать так. Если  $X$  и  $Y$  — множества, то  $X^Y$  естественно рассматривать как декартово произведение  $\prod_{y \in Y} X_y$ , где  $X_y = X$ , а каждый элемент  $f = \{\dots, x_y, \dots\} \in X^Y$  сопоставляет каждой точке  $y \in Y$  некоторую точку  $x_y \in X_y = X$  и, тем самым, элементы  $f$  из  $X^Y$  — это всевозможные отображения  $f: X \rightarrow Y$ . Если под  $2$  понимать множество из двух элементов  $\{0, 1\}$ , то каждая точка  $f \in 2^X$  — это отображение  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ , а каждому такому отображению соответствует подмножество  $X_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$ . Обратно, каждому подмножеству  $Z \subset X$  соответствует его **характеристическая функция**  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $f(x) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x \in Z$ .

Каждое отображение множеств  $f: X \rightarrow Z$  индуцирует естественные отображения булеанов:

- прямое отображение, которое мы будем обозначать той же буквой  $f$ , сопоставляет каждому  $A \subset X$  его образ  $f(A) \subset Z$ ;
- обратное отображение, которое мы будем обозначать той же буквой  $f^{-1}$ , сопоставляет каждому  $B \subset Z$  его прообраз  $f^{-1}(B) \subset X$ .

Следующая аксиома вызывает многочисленные споры математиков, так как ее наличие приводит к целому ряду интуитивно неочевидных результатов, скажем, таких, как парадокс Банаха–Тарского (об удвоении шара). Попытки обойтись без этой аксиомы породили такие направления в математике, как интуиционизм и конструктивизм.

**Аксиома Выбора.** Пусть  $\mathcal{S}$  — произвольное семейство, элементы которого — непустые множества. Тогда существует отображение  $f: \mathcal{S} \rightarrow \cup \mathcal{S}$  такое, что для каждого  $X \in \mathcal{S}$  выполняется  $f(X) \in X$ . Иными словами, это отображение “выбирает” из каждого множества  $X \in \mathcal{S}$  некоторый его элемент.

Отметим, что при построении декартова произведения множеств мы пользовались аналогичной конструкцией, при этом аксиома выбора гарантирует, что декартово произведение непустых множеств непусто.

### Отношение

Напомним, что *отношением  $\nu$  между множествами  $X$  и  $Y$*  называется каждое подмножество декартова произведения  $X \times Y$ . В частности, график  $\Gamma_f$  отображения  $f: X \rightarrow Y$  является частным случаем отношения. Традиционно принадлежность пары  $(x, y) \in X \times Y$  отношению  $\nu$  записывают так:  $x\nu y$ . Отметим, что, вообще говоря, не каждая пара элементов находится в заданном отношении. Элементы, которые находятся в отношении, называются *сравнимыми*, а которые нет — *несравнимыми*.

Если  $X = Y$ , то  $\nu$  называется *отношением на множестве  $X$* . Отношение  $\nu$  на  $X$  называется

- *рефлексивным*, если  $x\nu x$  для всех  $x \in X$ ;
- *симметричным*, если  $x\nu y$  влечет  $y\nu x$ ;
- *антисимметричным*, если  $x\nu y$  и  $y\nu x$  влечет  $x = y$ ;
- *транзитивным*, если  $x\nu y$  и  $y\nu z$  влечет  $x\nu z$ .

### Эквивалентность

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *эквивалентностью*. Если  $\nu$  — эквивалентность на множестве  $X$ , и  $x \in X$ , то множество всех  $y \in X$  таких, что  $x\nu y$ , обозначим  $[x]$  и назовем *классом эквивалентности  $\nu$  элемента  $x$* . Следующая теорема доказывается с стандартных курсах теории множеств.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\nu$  — отношение эквивалентности на множестве  $X$ , тогда

- для каждого  $x \in X$  имеем  $[x] \neq \emptyset$ ;
- для каждого  $y \in [x]$  имеем  $[y] = [x]$ ;
- для каждого  $y \notin [x]$  имеем  $[y] \cap [x] = \emptyset$ .

Таким образом, множество  $X/\nu := \cup_{x \in X} \{[x]\}$  является разбиением множества  $X$ . Обратно, каждое разбиение  $\mathcal{P}$  множества  $X$  порождается эквивалентностью  $\nu$ :

$x\nu y$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  лежат в одном элементе разбиения  $\mathcal{P}$ .

**Замечание 2.2.** В теореме 2.1 мы записывали разбиение  $X/\nu$  в виде  $\cup_{x \in X} \{[x]\}$ . Это делалось для того, чтобы при  $[x] = [y]$  получить только один элемент множества  $X/\nu$  за счет очевидного соотношения  $\{[x]\} \cup \{[y]\} = \{[x]\}$ . Таким образом,  $X/\nu$  — это коллекция попарно различных классов эквивалентности  $\nu$ .

Каждая эквивалентность  $\nu$  на множестве  $X$  порождает *каноническую проекцию*  $\pi: X \rightarrow X/\nu$ ,  $\pi: x \mapsto [x]$ .



### Порядок

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *порядком* или *частичным порядком*, а множество, на котором задан порядок — *упорядоченным множеством* или *частично упорядоченным множеством*. Отношение порядка часто обозначают значком  $\leq$ . Если  $x \leq y$ , то говорят, что  $x$  *меньше или равен*  $y$ , или что  $y$  *больше или равен*  $x$ . Последнее записывают так:  $y \geq x$ . Если  $x \leq y$  и  $x \neq y$ , то пишут  $x < y$  или  $y > x$  и говорят, что  $x$  *меньше*  $y$ , а  $y$  *больше*  $x$ . Иногда, когда хотят подчеркнуть отсутствие равенства, добавляют слово “строго”, т.е. *строго меньше* или *строго больше*. Если на множестве задан некоторый традиционный порядок, как, скажем, на множестве вещественных чисел, то для другого порядка часто используют символы  $\preceq, \prec, \succeq, \succ$ .

**Пример 2.3.** Приведем некоторые примеры упорядоченных множеств.

- Множество вещественных чисел, в котором  $x \leq y$  тогда и только тогда, когда  $y - x$  — положительное число или ноль.
- Булеан  $2^X$  множества  $X$ , в котором  $A \leq B$ , если и только если  $A \subset B$ .
- Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , в котором  $m \preceq n$ , если и только если  $n$  делится на  $m$ .

Если каждая пара элементов сравнима, то порядок называется *линейным*. Описанный выше порядок на вещественных числах  $\mathbb{R}$  является линейным.

Каждый порядок индуцирует частичный порядок на каждом подмножестве упорядоченного множества. Если индуцированный порядок на подмножестве — линейный, то это подмножество называется *цепью*.

Элемент, для которого нет больших его элементов, называется *максимальным*, а элемент, для которого нет меньших его элементов — *минимальным*. Отметим, что максимальный и минимальный элементы не обязаны быть сравнимы со всеми остальными. Если же максимальный (минимальный) элемент сравним со всеми остальными, то он называется *наибольшим* (соответственно, *наименьшим*). Пусть  $A$  — подмножество частично упорядоченного множества  $X$  (с индуцированным порядком). Элемент  $x \in X$  называется *верхней гранью для  $A$* , если для любого  $a \in A$  выполняется  $a \leq x$ . Следующий результат, эквивалентный аксиоме выбора, играет очень важную роль в разных разделах математики.

**Теорема 2.4** (Лемма Цорна). *Пусть  $X$  — частично упорядоченное множество, в котором у каждой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого  $x \in X$  существует максимальный в  $X$  элемент  $M$  такой, что  $x$  и  $M$  сравнимы и, значит,  $x \leq M$ .*

С помощью леммы Цорна можно, например, доказать существование *базиса Гамеля* для произвольного линейного пространства, т.е. линейно независимого семейства векторов (каждое конечно подмножество этого семейства линейно независимо) такого, что каждый вектор является конечной линейной комбинацией векторов этого семейства (условие полноты).

Приведем еще один важный результат про упорядоченные множества, эквивалентный аксиоме выбора. Множество с порядком называется *вполне упорядоченным*, если порядок линейный, и в каждом непустом подмножестве имеется наименьший элемент. Такой порядок называется *полным*.

**Теорема 2.5** (Цермело). *На всяком множестве можно ввести полный порядок.*

Идея введения полного порядка приводит к построению *трансфинитной шкалы* и определению *трансфинитной индукции* (обобщающей обычную индукцию).

## 2.2 Топологические пространства

Пусть  $\tau \subset 2^X$  — некоторое семейство подмножеств множества  $X$ , т.е.  $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in I}$ . Семейство  $\tau$  называется *топологией на  $X$* , если оно удовлетворяет следующим *аксиомам топологии*:

- пустое множество  $\emptyset$  и все  $X$  являются элементами  $\tau$ , т.е.  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- для любого  $J \subset I$  выполняется  $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно объединения, т.е. объединение любого набора элементов из  $\tau$  является элементом  $\tau$ );
- для любого **конечного**  $J \subset I$  выполняется  $\cap_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно **конечных** пересечений, т.е. пересечение любого конечного набора элементов из  $\tau$  является элементом  $\tau$ ).

Множество  $X$ , на котором задана топология  $\tau$ , называется **топологическим пространством**, а элементы топологии называются **открытыми множествами**.

Дополнения до открытых множеств называются **замкнутыми множествами**. Так как  $X = X \setminus \emptyset$  и  $\emptyset = X \setminus X$ , то  $X$  и  $\emptyset$  являются одновременно и открытыми, и замкнутыми множествами. Семейство всех замкнутых множеств будем обозначать  $\mathcal{F}$ . Таким образом,  $\mathcal{F} = \{F_\alpha : F_\alpha = X \setminus U_\alpha, U_\alpha \in \tau\}$ . Если на множестве  $X$  рассматривается какая-то одна топология, то часто, для удобства, эту топологию будем обозначать через  $\tau_X$ , а соответствующее семейство замкнутых множеств — через  $\mathcal{F}_X$ .

Так как дополнение до объединения равно пересечению дополнений, а дополнение до пересечения — объединению дополнений, семейство  $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  замкнутых подмножеств  $X$  удовлетворяет следующим свойствам:

- пустое множество  $\emptyset$  и все  $X$  являются элементами  $\mathcal{F}$ , т.е.  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ;
- для любого **конечного**  $J \subset I$  выполняется  $\cup_{\alpha \in J} F_\alpha \in \mathcal{F}$  (семейство  $\mathcal{F}$  замкнуто относительно **конечных** объединений, т.е. объединение любого конечного числа элементов из  $\mathcal{F}$  является элементом  $\mathcal{F}$ );
- для любого  $J \subset I$  выполняется  $\cap_{\alpha \in J} F_\alpha \in \mathcal{F}$  (семейство  $\mathcal{F}$  замкнуто относительно пересечений, т.е. пересечение любого набора элементов из  $\mathcal{F}$  является элементом  $\mathcal{F}$ ).

**Замечание 2.6** (задание топологии замкнутыми множествами). Из сказанного выше вытекает, что для задания топологии мы можем определить семейство, удовлетворяющее перечисленным свойствам замкнутых множеств, и тогда дополнения до этих множеств будут образовывать топологию.

Приведем примеры топологий.

**Пример 2.7.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Следующие подмножества в  $2^X$  являются топологиями на  $X$  (проверьте):

- **антидискретная топология**  $\tau_a = \{\emptyset, X\}$ ;
- **дискретная топология**  $\tau_d = 2^X$ ;
- **топология Зарисского**  $\tau_z = \{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- пусть  $n$  — бесконечное кардинальное число и  $\tau_{<n} = \{U \subset X : |X \setminus U| < n\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- пусть  $n$  — бесконечное кардинальное число и  $\tau_{\leq n} = \{U \subset X : |X \setminus U| \leq n\} \cup \{\emptyset\}$ .

**Пример 2.8** (Индукцированная топология). Пусть  $Y$  — произвольное подмножество топологического пространства  $X$ . Положим

$$\tau_Y = \{Y \cap U_\alpha : U_\alpha \in \tau_X\},$$

тогда  $\tau_Y$  — топология, которая называется **индуцированной из  $X$** . Если не оговорено противное, то по умолчанию на каждом подмножестве  $Y$  топологического пространства  $X$  будем рассматривать именно индуцированную топологию. Если мы хотим подчеркнуть, что подмножество наделено индуцированной топологией, будем называть это подмножество  $Y$  **подпространством в  $X$** .

**Замечание 2.9.** Отметим, что открытые множества в индуцированной топологии не обязаны быть открытыми в топологии объемлющего пространства. Например, если  $X = \{x, y\}$  — двухточечное множество с антидискретной топологией  $\tau_X = \{\emptyset, X\}$ , а  $Y = \{y\}$ , то в индуцированной на  $Y$  топологии  $\tau_Y$  множество  $\{y\} = Y \cap X$  — открыто, хотя в объемлющем пространстве  $X$  такого открытого множества нет.

**Предложение 2.10.** *Все открытые подмножества подпространства  $Y$  топологического пространства  $X$  открыты в  $X$ , если и только если  $Y$  — открытое подмножество в  $X$ .*

**Доказательство.** Пусть все открытые подмножества подпространства  $Y$  открыты в  $X$ . Так как  $Y$  — открыто в  $Y$ , то  $Y$  также должно быть открытым и в  $X$ .

Обратно, пусть  $Y$  открыто в  $X$ . По определению индуцированной топологии, каждое открытое в  $Y$  множество  $V$  равно  $Y \cap U$  для некоторого открытого в  $X$  множества  $U$ . Но пересечение открытых множеств открыто, поэтому  $V = Y \cap U$  — открыто в  $X$ .  $\square$

Рассмотрим важный пример топологических пространств.

### 2.2.1 Метрические пространства

Напомним, что функция  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется **метрикой на  $X$** , если для любых  $x, y, z \in X$  выполняются следующие условия

- $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0$ , если и только если  $x = y$  (положительная определенность);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (симметричность);
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  (неравенство треугольника).

Множество  $X$ , на котором задана метрика  $\rho$ , называется **метрическим пространством**, а величина  $\rho(x, y)$  — **расстоянием между точками  $x$  и  $y$** . Подмножество метрического пространства, наделенное той же метрикой, называется **подпространством**, а его метрика — **индуцированной**. Часто бывает удобно (и мы это будем делать) расстояние между точками  $x$  и  $y$  обозначать  $|xy|$ , независимо от того, в каком метрическом пространстве они лежат.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется **изометричным**, если оно сохраняет расстояния:  $|f(x)f(x')| = |xx'|$  для любых  $x, x' \in X$ . Легко видеть, что изометричное отображение инъективно, и композиция изометричных отображений тоже изометрична (убедитесь в этом). Изометричное биективное отображение называется **изометрией**. Ясно, что тождественное отображение, а также обратное к изометрии являются изометриями. Если между метрическими пространствами имеется изометрия, то эти пространства называются **изометричными**.

**Пример 2.11.** На любом множестве  $X$  можно ввести метрику, положив расстояния между разными точками равным 1. Два таких пространства изометричны, если и только если они равномощны.

**Пример 2.12.** Для произвольных точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  положим

$$|xy| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Полученная функция положительно определена и симметрична. Ниже мы проверим, что эта функция также удовлетворяет неравенству треугольника, см. пример 2.16. Таким образом, мы определили метрику, которая называется **стандартным** или **евклидовым расстоянием на  $\mathbb{R}^n$** . Для  $n = 1$  это расстояние между точками  $x$  и  $y$  равно  $|x - y|$ . Можно показать, что отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является изометрией для евклидовой метрики, если и только если оно имеет вид  $f(x) = Ax + b$ , где  $A$  — ортогональная матрица, т.е.  $A^t A = E$ , а  $b$  — произвольный вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Здесь  $E$  — единичная матрица, а  $A^t$  — матрица, полученная транспонированием  $A$ .

### Нормированные пространства

Важный частный случай метрик на векторных пространствах задаются с использованием понятия нормы. Приведем соответствующие определения.

Пусть  $V$  — векторное пространство. Функция  $x \mapsto \|x\|$ ,  $x \in V$ , называется **нормой**, если для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  и любых  $x, y \in V$  выполняется

- $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0$ , если и только если  $x = 0$  (положительная определенность);
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (положительная однородность);
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (субаддитивность).

Векторное пространство, на котором задана норма, называется **нормированным**.

**Предложение 2.13.** Пусть  $V$  — нормированное пространство. Для каждой  $x, y \in V$  положим  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Тогда  $\rho$  — метрика на  $V$ .

**Доказательство.** Проверим, что  $\rho$  удовлетворяет всем определяющим свойствам метрики.

**Положительная определенность:**  $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ , т.е.  $x = y$ .

**Симметричность:**  $\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$ .

**Неравенства треугольника:**  $\rho(x, y) + \rho(y, z) = \|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - y + y - z\| = \|x - z\| = \rho(x, z)$ .  $\square$

Метрику  $\rho$  из предложения 2.13 будем называть **метрикой, порожденной нормой  $\|\cdot\|$** .

### Пространства со скалярным произведением

Некоторые нормы порождаются еще одной конструкцией, которая называется скалярным произведением.

Пусть  $V$  — векторное пространство, и  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — отображение  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , обладающее следующими свойствами: для любых  $x, y, z \in V$  и вещественных  $\lambda, \mu$  выполняется

- $\langle x, x \rangle \geq 0$ , причем  $\langle x, x \rangle = 0$ , если и только если  $x = 0$  (положительная определенность);
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (симметричность);
- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  и  $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$  (билинейность).

Такое отображение называется **скалярным произведением**.

**Предложение 2.14.** Пусть  $V$  — векторное пространство, на котором задано скалярное произведение. Тогда функция на  $V$ , ставящая в соответствии каждому вектору  $x \in V$  число  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , является нормой.

**Доказательство.** Проверим, что  $\|\cdot\|$  удовлетворяет всем определяющим свойствам нормы.

*Положительная определенность:*  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

*Положительная однородность:*  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$ .

Прежде чем проверить субаддитивность, докажем следующую лемму.

**Лемма 2.15** (Неравенство Коши–Буняковского). Для любых  $x, y \in V$  выполняется  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

**Доказательство.** Как мы уже доказали, для вещественной переменной  $t$  функция

$$f(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 t^2$$

неотрицательна при всех  $t$ . Так как  $f(t)$  — квадратный трехчлен относительно  $t$ , то его неотрицательность при всех  $t$  равносильна тому, что детерминант неположителен, т.е.

$$\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

что и требовалось. □

*Субаддитивность:* из леммы 2.15 следует, что

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

откуда мгновенно вытекает субаддитивность. □

Норму  $\|\cdot\|$  из предложения 2.14 будем называть **нормой, порожденной скалярным произведением**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Пример 2.16.** Рассмотрим важный частный случай, когда  $V = \mathbb{R}^n$ , а скалярное произведение векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  имеет вид  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Такое скалярное произведение будем называть **стандартным** или **евклидовым**. Из предложения 2.14 мгновенно вытекает, что функция  $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$  является нормой. Эту норму мы будем называть **стандартной** или **евклидовой**. Таким образом, евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$  порождает евклидову норму, которая, в свою очередь, порождает евклидово расстояние.

Приведем еще два важных примера норм на  $\mathbb{R}^n$ :

- $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$  (манхеттенская норма);
- $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  (max-норма).

**Замечание 2.17.** Не всякая норма на векторном пространстве  $V$  порождается скалярным произведением. Чтобы в этом разобраться, предположим, что норма  $\|\cdot\|$  задается скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Для векторов  $x, y \in V$  рассмотрим “параллелограмм”, натянутый на точки  $0, x, x + y, y$  и вычислим сумму квадратов длин его “диагоналей”, т.е.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ . Имеем

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Так как у параллелограмма сторона данной длины встречается дважды, мы заключаем, что в рассматриваемом случае *сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин сторон*. Это условие называется **правилом параллелограмма**.

Покажем, что *такс-норма не задается скалярным произведением*. Для простоты рассмотрим случай плоскости и положим  $x = (1, 0)$  и  $y = (0, 1)$ , тогда длины диагоналей соответствующего параллелограмма равны 1, а длины сторон — тоже 1, и так как  $2 \neq 4$ , не выполняется сформулированное выше правило параллелограмма.

**Замечание 2.18.** Отметим, что правило параллелограмма является **критерием**, т.е. необходимым и достаточным условием представимости нормы с помощью скалярного произведения, см. например [9].

## Шары и сферы

Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $x \in X$ , а  $r \geq 0$  и  $s > 0$  — вещественные числа. Тогда

- **открытым шаром с центром в  $x$  и радиусом  $s$**  называется множество

$$U_s(x) = \{y \in X : |xy| < s\};$$

- **замкнутым шаром с центром в  $x$  и радиусом  $r$**  называется множество

$$B_r(x) = \{y \in X : |xy| \leq r\};$$

- **сферой с центром в  $x$  и радиусом  $r$**  называется множество

$$S_r(x) = \{y \in X : |xy| = r\}.$$

**Замечание 2.19.** Каждая изометрия между метрическими пространствами переводит шары и сферы в шары и сферы с сохранением радиусов.

**Замечание 2.20.** Выше, в примере 2.12, мы говорили о том, как устроены изометрии евклидовой метрики. В случае метрики, заданной произвольной нормой, **теорема Мазура–Улама** утверждает, что изометрии  $f$  также задаются формулой  $f(x) = A(x) + b$ . Здесь  $A$  — линейное отображение, переводящая сферу  $S_1(0)$  биективно на себя. Это условие равносильно биективности  $f$  и тому, что  $A$  сохраняет норму (покажите это). То, что сдвиги  $s_b(x) = x + b$  являются изометриями, проверяется совсем легко:

$$|s_b(x)s_b(x')| = \|s_b(x) - s_b(x')\| = \|x + b - x' - b\| = \|x - x'\|.$$

Имеется много доказательств теоремы Мазура–Улама, см. например [8].

**Замечание 2.21.** Замечания 2.19 и 2.20 приводят к следующему результату: в нормированном пространстве  $V$  шары и сферы с центром в  $x \in V$  получаются из шаров и сфер с центром в  $0$  сдвигом на  $x$ .

### 2.2.2 Метрическая топология

На метрическом пространстве  $X$  имеется стандартная **метрическая топология**, которая определяется так:  $U \subset X$  считается открытым тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in U$  существует  $s > 0$  такое, что  $U_s(x) \subset U$ . Для пустого множества это условие считается также выполненным (проверьте, что определенное только что семейство подмножеств  $X$  является топологией).

**Предложение 2.22.** В метрическом пространстве  $X$

- (1) *открытый шар  $U_s(x)$  — открытое множество;*

- (2) замкнутый шар  $B_r(x)$  — замкнутое множество;
- (3) сфера  $S_r(x)$  — замкнутое множество.

**Доказательство.** (1) Берем произвольную точку  $y \in U_s(x)$ . Мы должны показать, что некоторый открытый шар  $U_t(y)$  содержится в  $U_s(x)$ . Положим  $t = s - |xy|$ . Так как  $y \in U_s(x)$ , то  $|xy| < s$ , поэтому  $t > 0$ . Для произвольной точки  $z \in U_t(y)$  по неравенству треугольника имеем  $|xz| \leq |xy| + |yz| < |xy| + t = s$ , поэтому  $z \in U_s(x)$  и, значит,  $U_t(y) \subset U_s(x)$ .

(2) Покажем, что дополнение  $Y := X \setminus B_r(x)$  открыто. Берем произвольную точку  $y \in Y$ . Мы должны показать, что некоторый открытый шар  $U_t(y)$  содержится в  $Y$ . Положим  $t = |xy| - r$ . Так как  $y \notin B_r(x)$ , то  $|xy| > r$ , поэтому  $t > 0$ . Для произвольной точки  $z \in U_t(y)$  по неравенству треугольника имеем  $|xz| \geq |xy| - |yz| > |xy| - t = r$ , поэтому  $z \notin B_r(x)$  и, значит,  $U_t(y) \subset X \setminus B_r(x) = Y$ .

(3) Если  $r = 0$ , то  $S_r(x) = B_r(x)$  и, значит,  $S_r(x)$  замкнуто по пункту (2). Если же  $r > 0$ , то, снова положив  $Y := X \setminus B_r(x)$  и воспользовавшись открытостью  $Y$ , получим, что  $S_r(x) = X \setminus (U_r(x) \cup Y)$  — замкнуто.  $\square$

**Замечание 2.23.** По определению, каждое открытое множество в метрической топологии представляет собой объединение открытых шаров. В силу предложения 2.22, верно и обратное: каждое объединение открытых шаров является открытым множеством. Таким образом, приходим к эквивалентному описанию метрической топологии: *открытыми множествами в метрической топологии являются в точности всевозможные объединения открытых шаров (пустое множество — это объединение пустого семейства шаров).*

**Пример 2.24.** *Стандартная топология на  $\mathbb{R}^n$*  — это соответствующая метрическая топология для евклидовой метрики, определенной в примере 2.12. Именно этой топологией пользуется математический анализ для определения сходимости последовательностей и непрерывности функций. Если не оговорено противное, то по умолчанию мы считаем, что топология на  $\mathbb{R}^n$  именно стандартная.

**Пример 2.25.** *Стандартная топология на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$*  может быть определена эквивалентным образом так (проверьте эквивалентность приведенных ниже определений):

- это — метрическая топология для стандартной функции расстояния между точками;
- это — топология, индуцированная на  $[a, b]$  из стандартной топологии на  $\mathbb{R}$ .

**Задача 2.26.** Покажите, что каждое открытое множество на прямой  $\mathbb{R}$  представляет собой объединение не более чем счетного числа непересекающихся интервалов, как ограниченных, так и неограниченных. Покажите, что каждое открытое множество на отрезке представимо в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся множеств, которые могут быть или интервалами, или полуинтервалами с концами в концах отрезка, или всем отрезком.

### Сравнение топологий

Рассмотрим множество  $\mathcal{T}_X$  всех топологий, определенных на множестве  $X$ . Если для  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_X$  выполняется  $\tau_1 \subset \tau_2$  или  $\tau_2 \subset \tau_1$ , то такие топологии назовем *сравнимыми*, иначе топологии *несравнимы*. Если  $\tau_1 \subset \tau_2$ , то говорят, что  $\tau_1$  *грубее* или *слабее*  $\tau_2$ , а  $\tau_2$  — *тоньше* или *сильнее*  $\tau_1$ . Ясно, что самая грубая топология — антидискретная, а самая тонкая — дискретная. Приведем простой, но часто облегчающий проверку, критерий совпадения топологий.

**Окрестностью точки** топологического пространства называется каждое открытое множество, содержащее эту точку.<sup>1</sup> Окрестность точки  $x$  мы, как правило, будем обозначать в виде  $U^x$ ,  $V^x$  и т.д. Если мы хотим отметить, что окрестность  $U^x$  рассматривается в топологии  $\tau$ , то такую окрестность будем обозначать  $U_\tau^x$ .

**Предложение 2.27.** *Топологии  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , заданные на множестве  $X$ , совпадают, если и только если для каждой точки  $x \in X$  выполняются следующие условия:*

- для любой окрестности  $U_{\tau_1}^x$  существует окрестность  $U_{\tau_2}^x$  такая, что  $U_{\tau_2}^x \subset U_{\tau_1}^x$ , и обратно,
- для любой окрестности  $U_{\tau_2}^x$  существует окрестность  $U_{\tau_1}^x$  такая, что  $U_{\tau_1}^x \subset U_{\tau_2}^x$ .

<sup>1</sup>Имеется более общее определение окрестности точки. А именно, определенные нами окрестности называются *открытыми*, а под окрестностью понимают каждое множество, содержащее точку вместе с некоторой открытой окрестностью. Мы не будем использовать это более общее определение и ограничимся открытыми окрестностями, которые для краткости будем называть просто окрестностями.

**Доказательство.** Если  $\tau_1 = \tau_2$ , то  $U_{\tau_1}^x = U_{\tau_2}^x$  удовлетворяют условиям на окрестности. Пусть теперь выполняются условия на окрестности. Тогда для каждого открытого  $U \subset \tau_1$  и каждой его точки  $x$  множество  $U$  является окрестностью  $x$ , поэтому, в силу условий на окрестности, существует  $U_{\tau_2}^x \subset U$ . Но тогда  $U = \cup_{x \in U} U_{\tau_2}^x$  — открыто в  $\tau_2$ , так как объединение открытых множеств — открыто. Итак, мы доказали, что  $\tau_1 \subset \tau_2$ . Аналогично доказывается и обратное включение, а, значит, имеет место равенство  $\tau_1 = \tau_2$ .  $\square$

Покажем, как можно применить предложение 2.27. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — метрики, заданные на множестве  $X$ . Говорят, что метрика  $\rho_1$  **эквивалентна** метрике  $\rho_2$ , если существуют положительные вещественные числа  $\lambda$  и  $\mu$  такие, что для любых  $x, y \in X$  выполняется

$$\lambda \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq \mu \rho_2(x, y).$$

Так как описанное выше условие равносильно  $1/\mu \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq 1/\lambda \rho_1(x, y)$ , то метрика  $\rho_2$  также эквивалентна метрике  $\rho_1$ , т.е. сформулированное условие симметрично, поэтому в случае выполнения любого из двух условий говорят, что метрики **эквивалентны**.

**Предложение 2.28.** *На любом множестве  $X$  эквивалентные метрики задают одинаковые топологии.*

**Доказательство.** Пусть  $\tau_i$  — топология, порожденная метрикой  $\rho_i$ , а  $V_{\tau_i}^x$  обозначает окрестность точки  $x \in X$  в топологии  $\tau_i$ . Через  $U_r^{\rho_i}(x)$  обозначим открытый шар радиуса  $r$  с центром в  $x$  в метрике  $\rho_i$ . Доказательство выведем из предложения 2.27, показав, что для произвольной точки  $x \in X$  каждая окрестность  $V_{\tau_1}^x$  содержит некоторый открытый шар  $U_s^{\rho_2}(x)$  и, аналогично, каждая окрестность  $V_{\tau_2}^x$  содержит некоторый открытый шар  $U_s^{\rho_1}(x)$ . Проверим первое утверждение.

По определению метрической топологии, существует открытый шар  $U_r^{\rho_1}(x)$ , содержащийся в  $V_{\tau_1}^x$ . Так как  $\rho_1(x, y) \leq \mu \rho_2(x, y)$ , то условие  $\mu \rho_2(x, y) < r$  влечет  $\rho_1(x, y) < r$ , откуда

$$U_r^{\rho_1}(x) = \{y \in X : \rho_1(x, y) < r\} \supset \{y \in X : \mu \rho_2(x, y) < r\} = U_{r/\mu}^{\rho_2}(x),$$

поэтому для  $s = r/\mu$  выполняется  $V_{\tau_1}^x \supset U_r^{\rho_1}(x) \supset U_s^{\rho_2}(x)$ .  $\square$

**Задача 2.29.** Приведите пример двух неэквивалентных метрик на одном и том же множестве, задающих одну и ту же топологию.

Пусть на векторном пространстве  $V$  заданы две нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$ . Говорят, что норма  $\|\cdot\|_1$  **эквивалентна** норме  $\|\cdot\|_2$ , если существуют положительные вещественные числа  $\lambda$  и  $\mu$  такие, что для любого  $x \in V$  выполняется

$$\lambda \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \mu \|x\|_2.$$

Как и в случае метрик, описанное выше условие равносильно  $1/\mu \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq 1/\lambda \|x\|_1$ , поэтому норма  $\|\cdot\|_2$  также эквивалентна норме  $\|\cdot\|_1$ , т.е. сформулированное выше условие симметрично, так что в случае выполнения любого из двух условия говорят, что нормы **эквивалентны**. Легко видеть, что *нормы эквивалентны, если и только если соответствующие им метрики эквивалентны* (убедитесь в этом). Таким образом, приходим к следующему результату.

**Следствие 2.30.** *На любом векторном пространстве  $V$  эквивалентные нормы задают одинаковые топологии.*

**Замечание 2.31.** Как будет выяснено ниже, на конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны. Таким образом, все нормы на конечномерном пространстве порождают одинаковые топологии.

## Упражнения к главе 2

**Упражнение 2.1.** Проверьте, что семейства множеств, которые мы называли топологией Зарисского, индуцированной топологией и метрической топологией, действительно удовлетворяют всем аксиомам топологии.

**Упражнение 2.2.** Предположим, что  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — симметричная положительно определенная функция, удовлетворяющая  $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$  для всех  $x, y, z \in X$ .

- (1) Покажите, что  $\rho$  — метрика (она называется *ультраметрикой*, а соответствующее метрическое пространство — *ультраметрическим*).
- (2) Убедитесь, что каждый “треугольник”  $xyz$  является равнобедренным, причем его основание не превосходит боковой стороны. Иными словами, среди трех расстояний  $\rho(x, y)$ ,  $\rho(y, z)$ ,  $\rho(x, z)$  два равны друг другу, а третье — не превосходит этих двух.
- (3) Обратите внимание, что в примере 2.11 определено ультраметрическое пространство.
- (4) Убедитесь, что каждая точка любого шара является его центром.
- (5) Покажите, что если два шара пересекаются, то один из них содержится в другом (в частности, шары могут совпадать).
- (6) Покажите, что каждый шар ненулевого радиуса одновременно и открыт, и замкнут.
- (7) Покажите, что каждое более чем одноточечное подмножество разбивается на два непустых множества, открытых в индуцированной топологии (ниже такие подмножества мы назовем *несвязными*).
- (8) Пусть  $G = (V, E)$  — простой связный конечный граф. Припишем каждому ребру  $e \in E$  положительное число  $\omega(e)$  — *вес* ребра  $e$ . *Весом*  $\omega(\gamma)$  *пути*  $\gamma$  в графе  $G$  назовем максимальный из весов его ребер. Для вершин  $v \neq w$  обозначим  $\Omega(v, w)$  множество всех путей, соединяющих  $v$  и  $w$ . Положим  $\rho(v, w) = \min\{\omega(\gamma) : \gamma \in \Omega(v, w)\}$ . Также для каждой вершины  $v \in V$  положим  $\rho(v, v) = 0$ . Покажите, что  $\rho$  — ультраметрика, и что все конечные ультраметрические пространства представимы в таком виде.

**Упражнение 2.3.** Пусть  $X$  — метрическое пространство, а  $B(X)$  — линейное пространство ограниченных функций на  $X$ , т.е. таких отображений  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$ . Это последнее число назовем *суп-нормой функции*  $f$  и обозначим  $\|f\|_\infty$ .

- (1) Покажите, что  $\|\cdot\|_\infty$  — действительно является нормой. Соответствующую функцию расстояния на  $B(X)$  обозначим аналогичным образом:  $\|fg\|_\infty = \|f - g\|_\infty$ .
- (2) Выберем произвольную точку  $x_0 \in X$ , и для каждой точки  $x \in X$  рассмотрим функцию  $d_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную так:  $d_x(y) = |xy| - |x_0y|$ . Покажите, что эта функция ограничена, а также что отображение  $x \mapsto d_x$  изометрично:  $\|d_x d_y\|_\infty = |xy|$ . Это отображение называется *вложением Куратовского*. Таким образом, каждое метрическое пространство можно рассматривать как подмножество линейного нормированного пространства, а его метрическую топологию — как индуцированную из этого линейного нормированного пространства.

### Упражнение 2.4.

- (1) Что представляют собой круги на манхеттенской плоскости и плоскости с тах-нормой?
- (2) Докажите, что манхеттенская плоскость и плоскость с тах-нормой изометричны.
- (3) Изометричны ли трехмерные пространства с манхеттенской нормой и тах-нормой?

**Упражнение 2.5.** Пусть  $\rho$  — метрика на множестве  $X$ . Для каждой пары точек  $x, y \in X$  положим  $d(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$ . Покажите, что  $d$  — метрика на  $X$ , задающая ту же самую метрическую топологию, что и  $\rho$ .

**Упражнение 2.6.** Покажите, что каждое открытое множество на прямой  $\mathbb{R}$  представляет собой объединение не более чем счетного числа непересекающихся интервалов, как ограниченных, так и неограниченных. Покажите, что каждое открытое множество на отрезке представимо в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся множеств, которые могут быть или интервалами, или полуинтервалами с концами в концах отрезка, или всем отрезком.

**Упражнение 2.7.** Приведите пример двух неэквивалентных метрик на одном и том же множестве, задающих одну и ту же топологию.



## Лекция 3

# База, хаусдорфовость, сходимость, непрерывность

**План.** База топологии, индуцированная база, критерий совпадения топологий в терминах баз, эквивалентность евклидовой нормы и шах-нормы на  $\mathbb{R}^n$ , хаусдорфовы или отделимые топологические пространства, примеры хаусдорфовых топологий, последовательности, сходимость последовательности, предел сходящейся последовательности, сходимость в дискретном и антидискретном пространствах, сходимость в метрическом пространстве, непрерывные (разрывные) в точке отображения топологических пространств, непрерывность в точке отображения метрических пространств, непрерывность отображения через непрерывность в точке, а также через замкнутые и открытые множества, эквивалентность трех определений непрерывности, непрерывность тождественного отображения, постоянного отображения, вложения, а также композиции непрерывных отображений, вещественнозначные функции и вектор-функции, база окрестностей точки, непрерывность в терминах баз и баз окрестностей, локальная ограниченность непрерывного отображения в метрическое пространство, проколота окрестность, критерий Коши существования предела, липшицево отображение, константа Липшица, равномерная непрерывность, непрерывность ограничения и продолжения непрерывного отображения, непрерывность по направлениям функции на евклидовом пространстве и связь с непрерывностью.

### 3.1 База топологии

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Семейство  $\mathcal{B} \subset \tau_X$  называется **базой топологии**  $\tau_X$ , если все непустые открытые множества пространства  $X$  могут быть получены объединением некоторых элементов из семейства  $\mathcal{B}$  (если считать, что объединение элементов пустого семейства является пустым множеством, то в определении базы можно выкинуть требование непустоты открытого множества). Если для топологического пространства  $X$  рассматривается какая-то одна база, то часто, для удобства, эту базу будем обозначать  $\mathcal{B}_X$ .

**Пример 3.1.** В метрическом пространстве  $X$  семейство открытых шаров  $U_s(x) \subset X$  по всем  $x \in X$  и  $s > 0$  образуют базу метрической топологии (убедитесь в этом).

**Задача 3.2.** Покажите, что семейство  $\mathcal{B} \subset 2^X$  является базой некоторой топологии, определенной на множестве  $X$ , если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ;
- для любых пересекающихся  $B, B' \in \mathcal{B}$  и любой точки  $x \in B \cap B'$  существует  $C \in \mathcal{B}$ , для которого  $x \in C \subset B \cap B'$ .

**Предложение 3.3.** Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $\mathcal{B}_X$  — база его топологии  $\tau_X$ . Пусть  $Y \subset X$  и  $\tau_Y$  — индуцированная топология. Зададим семейство  $\mathcal{B}_Y$  по аналогии с тем, как мы определяли индуцированную топологию, а именно, положим  $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}_X\}$ . Тогда  $\mathcal{B}_Y$  является базой топологии  $\tau_Y$ .

**Доказательство.** Так как все элементы базы являются открытыми множествами, то все элементы семейства  $\mathcal{B}_Y$  открыты в  $Y$  по определению индуцированной топологии. Остается показать, что каждое непустое открытое в  $Y$  множество  $U$  представимо в виде объединения элементов из  $\mathcal{B}_Y$ . По определению индуцированной топологии, существует открытое в  $X$  множество  $V$  такое, что  $U = V \cap Y$ . Так как  $\mathcal{B}_X$  — база топологии  $\tau_X$ , существует  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{B}_X$  такое, что  $V = \cup_{\alpha \in J} B_\alpha$ . Но тогда

$$U = V \cap Y = \left( \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in J} (B_\alpha \cap Y),$$

и так как  $B_\alpha \cap Y \in \mathcal{B}_Y$  при всех  $\alpha$ , получаем требуемое.  $\square$

Базу  $\mathcal{B}_Y$  из предложения 3.3 будем называть **индуцированной базой**  $\mathcal{B}_X$  или, если не важно, из какой базы она была получена, то просто **индуцированной базой**.

**Пример 3.4.** Пусть  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  — стандартная окружность, заданная уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ , где  $x, y$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^2$ . Выберем в качестве базы стандартной топологии на  $\mathbb{R}^2$  всевозможные открытые круги. Тогда пересечение таких кругов с  $S^1$  — это всевозможные дуги окружности  $S^1$ , в частности, “полная” дуга, совпадающая с  $S^1$ , причем каждая дуга может быть получена таким образом. Следовательно, в силу предложения 3.3, семейство всех дуг окружности  $S^1$  образует базу индуцированной на  $S^1$  топологии. Так как объединение пересекающихся дуг — снова дуга окружности, то все открытые подмножества окружности — не более чем счетные **дизъюнктные**, т.е. состоящие из непересекающихся элементов, объединения ее дуг (сравните с задачей 2.26).

Переход к базам облегчает проверку совпадения топологий, которая осуществляется аналогично предложению 2.27. По аналогии с обозначением  $U_\tau^x$ , введенным для окрестности точки  $x$  в топологии  $\tau$ , через  $U_{\mathcal{B}}^x$  будем обозначать окрестность этой точки, принадлежащую базе  $\mathcal{B}$  топологии  $\tau$ .

**Предложение 3.5.** *Топологии на множестве  $X$  с базами  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  совпадают, если и только если для каждой точки  $x \in X$  выполняются следующие условия:*

- для любой окрестности  $U_{\mathcal{B}_1}^x$  существует окрестность  $U_{\mathcal{B}_2}^x$  такая, что  $U_{\mathcal{B}_2}^x \subset U_{\mathcal{B}_1}^x$  и обратно,
- для любой окрестности  $U_{\mathcal{B}_2}^x$  существует окрестность  $U_{\mathcal{B}_1}^x$  такая, что  $U_{\mathcal{B}_1}^x \subset U_{\mathcal{B}_2}^x$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\tau_i$  топологию с базой  $\mathcal{B}_i$ . Предположим сначала, что  $\tau_1 = \tau_2$ . Тогда каждая окрестность  $U_{\mathcal{B}_1}^x$  является открытым множеством в  $\tau_2$ . По определению базы, существует  $U_{\mathcal{B}_2}^x$ , содержащаяся в  $U_{\mathcal{B}_1}^x$ . Аналогично доказывается утверждение после перестановки  $1 \leftrightarrow 2$ .

Пусть теперь выполняются условия на окрестности. Мы должны показать, что  $\tau_1 = \tau_2$ . Берем произвольное  $U \in \tau_1$ , тогда  $U = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$  для некоторых  $B_\alpha \in \mathcal{B}_1$ . По условию, для каждой точки  $x \in B_\alpha$  найдется окрестность  $U_\alpha^x \in \mathcal{B}_2$  такая, что  $U_\alpha^x \subset B_\alpha$ . Таким образом,

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} \bigcup_{x \in B_\alpha} U_\alpha^x \in \tau_2.$$

Аналогично показывается, что каждое открытое множество в  $\tau_2$  содержится в  $\tau_1$ , откуда  $\tau_1 = \tau_2$ .  $\square$

**Следствие 3.6.** *Евклидова норма и max-норма на  $\mathbb{R}^n$  задают одинаковые топологии.*

**Доказательство.** Приведем два доказательства этого факта.

- 1) В силу следствия 2.30, утверждение вытекает из того, что рассматриваемые нормы эквивалентны:

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

- 2) В силу предложения 3.5 достаточно показать, что некоторые базы этих топологий удовлетворяют условиям предложения. В качестве баз возьмем семейства всех открытых шаров. Так как шары с центром в  $x$  получаются из шаров с центром в 0 сдвигом на  $x$ , а каждый сдвиг является изометрией, условие предложения достаточно проверить для шаров с центром в 0. Кроме этого, каждое из этих условий достаточно проверить для шаров одного любого радиуса, так как для всех остальных радиусов условия также будут выполняться потому, что эти условия сохраняются при умножении обеих частей включения на любое положительное число.

Итак, пусть  $U_\infty$  и  $U_2$  — открытые единичные шары с центром в нуле, первый для max-нормы, а второй — для евклидовой нормы. Шар  $U_\infty$  представляет собой внутренность куба, состоящую из всех точек  $(x_1, \dots, x_n)$  с  $|x_i| < 1$ , поэтому  $U_2 \subset U_\infty$ , так как евклидово расстояние от 0 до ближайшей точки границы куба  $U_\infty$  равно 1. С другой стороны, самые удаленные точки границы куба  $U_\infty$  — это его вершины  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ , евклидово расстояние до которых от 0 равно  $\sqrt{n}$ , поэтому  $U_\infty \subset \sqrt{n} U_2$ .  $\square$

## 3.2 Хаусдорфовость или отделимость топологии

Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* или *отделимым*, если у каждой пары различных точек имеются непересекающиеся окрестности. Пустое и одноточечные множества с единственными возможными топологиями также относятся к хаусдорфовым пространствам.

**Предложение 3.7.** *Следующие топологии хаусдорфовы:*

- (1) *дискретная;*
- (2) *антидискретная на не более чем одноточечных множествах и только на них;*
- (3) *Зарисского на конечных множествах и только на них;*
- (4) *метрическая, в частности, стандартная на  $\mathbb{R}^n$ ;*
- (5) *индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве  $\mathbb{R}^n$  (про такое свойство говорят, что оно наследуется на подмножествах).*

**Доказательство.** (1) В качестве непересекающихся окрестностей двух разных точек можно взять сами эти точки.

(2) В не более чем одноточечном пространстве нет двух разных точек, у которых нельзя выбрать непересекающиеся окрестности. Если точек более одной, то для них не существует непересекающихся окрестностей, так как единственной окрестностью является все пространство.

(3) Топология Зарисского конечного множества совпадает с дискретной топологией. Действительно, в топологии Зарисского, кроме пустого множества, открытыми являются дополнения до конечных. Но в конечных множествах все подмножества конечны. Если же множество  $X$  бесконечно, то окрестности  $U_1$  и  $U_2$  любых двух точек имеют вид  $U_i = X \setminus F_i$ , где  $F_i$  — конечные. Но тогда

$$U_1 \cap U_2 = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset,$$

так как объединение  $F_1 \cup F_2$  конечных множеств конечно, а  $X$  — бесконечно.

(4) Пусть  $x, y \in X$  — различные точки метрического пространства. По предложению 2.22, открытые шары являются окрестностями своих центров, чем мы сейчас и воспользуемся. Пусть  $r = |xy|$ . Так как  $x \neq y$ , то  $r > 0$ . Положим  $\varepsilon = r/2$  и покажем, что окрестности  $U_\varepsilon(x)$  и  $U_\varepsilon(y)$  точек  $x$  и  $y$  не пересекаются. Действительно, если это не так и  $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$ , то, по неравенству треугольника,  $|xy| \leq |xz| + |zy| < 2\varepsilon = r$ , противоречие.

(5) Пусть  $Y$  — подмножество хаусдорфова топологического пространства  $X$ , и  $y_1, y_2 \in Y$  — различные точки. В силу хаусдорфовости  $X$ , у этих точек существуют непересекающиеся окрестности  $U_{\tau_X}^{y_1}$  и  $U_{\tau_X}^{y_2}$  в топологии пространства  $X$ , но  $U_{\tau_Y}^{y_i} = Y \cap U_{\tau_X}^{y_i}$  — окрестности этих точек в индуцированной на  $Y$  топологии, и они тоже не пересекаются.  $\square$

## 3.3 Последовательности

**Последовательностью** в произвольном множестве  $X$  называется каждое отображение  $\mathbb{N} \rightarrow X$ . Образ натурального числа  $n$  при таком отображении обычно обозначают в виде  $x_n$ . Задавая последовательность, пишут или  $x_1, x_2, \dots$ , или просто  $x_n$ .

Последовательность  $x_n$  в топологическом пространстве  $X$  называется **сходящейся к точке  $x \in X$** , если для любой окрестности  $U^x$  существует  $N$  такое, что для всякого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N$ , выполняется  $x_n \in U^x$ . Иными словами, сходимости к  $x$  означает, что для всякой окрестности  $U^x$  вся последовательность, за исключением конечного числа ее членов, лежит в  $U^x$ . Другая интерпретация: последовательность  $x_n$  сходится к  $x$ , если для каждой окрестности  $U^x$  некоторый **хвост** последовательности  $x_n$ , т.е.  $x_N, x_{N+1}, \dots$  лежит в  $U^x$ . Точка  $x$  называется **пределом последовательности  $x_n$**  и обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Также сходимости последовательности  $x_n$  к  $x$  записывают так:  $x_n \rightarrow x$  (при  $n \rightarrow \infty$ ).

**Пример 3.8.** Пусть  $x_n$  — произвольная последовательность в пространстве  $X$  с антидискретной топологией  $\tau_X = \{\emptyset, X\}$ . Тогда у каждой точки  $x \in X$  имеется единственная окрестность, а именно  $U^x = X$ , поэтому вся последовательность лежит в этой окрестности и, значит,  $x_n$  сходится к  $x$ . Таким образом, в антидискретном пространстве все последовательности сходятся ко всем точкам одновременно.

**Пример 3.9.** Пусть  $x_n$  — последовательность в пространстве  $X$  с дискретной топологией  $\tau_X = 2^X$ , причем  $x_n \rightarrow x$ . Выберем в качестве окрестности точки  $x$  открытое множество  $U^x = \{x\}$ . Тогда сходимости означает, что, начиная с некоторого номера  $N$ , все точки последовательности  $x_n$  совпадают с  $x$ . Такие последовательности называются **стационарными**.

**Замечание 3.10.** В любом топологическом пространстве каждая стационарная последовательность является сходящейся (объясните почему).

Следующая теорема, вместе с предложением 3.7, объясняет, почему в математическом анализе предел каждой сходящейся последовательности определен однозначно.

**Теорема 3.11.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство. Тогда предел каждой сходящейся последовательности определен однозначно.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что у сходящейся последовательности  $x_n$  имеется хотя бы два разных предела  $x$  и  $y$ . В силу хаусдорфовости, существуют непересекающиеся окрестности  $U^x$  и  $U^y$ . По определению сходимости,  $x_n \in U^x$  начиная с некоторого  $N_1$ , и  $x_n \in U^y$  начиная с некоторого  $N_2$ . Но тогда для  $n \geq \max(N_1, N_2)$  точка  $x_n$  лежит и в  $U^x$ , и в  $U^y$ , поэтому  $U^x \cap U^y \neq \emptyset$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 3.12.** В каждом метрическом пространстве, в частности, в  $\mathbb{R}^n$  пределы сходящихся последовательностей определены однозначно.

Следующий результат активно используется в математическом анализе, особенно в случае последовательностей вещественных чисел или точек пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Предложение 3.13.** В метрическом пространстве сходимости последовательности  $x_n$  к точке  $x$  равносильна выполнению следующего условия: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N$  такое, что при каждом  $n \geq N$  выполняется  $|x_n - x| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $x_n \rightarrow x$ . Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что, начиная с некоторого номера, выполняется  $|x_n - x| < \varepsilon$ . Выберем в качестве окрестности точки  $x$  шаровую окрестность  $U_\varepsilon(x)$ . По определению сходимости, существует  $N$  такое, что для любого  $n \geq N$  выполняется  $x_n \in U_\varepsilon(x)$ , а это и означает  $|x_n - x| < \varepsilon$ .

Обратно, пусть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N$  такое, что для любого  $n \geq N$  выполняется  $|x_n - x| < \varepsilon$ . Мы должны показать, что  $x_n \rightarrow x$ , т.е. что для любой окрестности  $U^x$  точки  $x$  существует  $N$  такое, что для любого  $n \geq N$  имеем  $x_n \in U^x$ . По определению метрической топологии, существует открытый шар  $U_\varepsilon(x)$ , содержащийся в  $U^x$ , но тогда, по условию, начиная с некоторого номера, выполняется  $|x_n - x| < \varepsilon$ , т.е.  $x_n \in U_\varepsilon(x) \subset U^x$ .  $\square$

**Замечание 3.14.** Отметим важное свойство сходящейся последовательности  $x_n$  в метрическом пространстве  $X$ : она всегда является **ограниченным подмножеством**, т.е. лежит в некотором шаре  $U_r(x) \subset X$ . Действительно, возьмем в качестве  $x$  предел последовательности  $x_n$ , тогда существует  $N$  такое, что для всякого  $n > N$  выполняется  $x_n \in U_1(x)$ . Пусть  $r \in \mathbb{R}$  больше максимума чисел 1 и всех  $|x_n - x|$ ,  $n \leq N$ , тогда все  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  лежат в шаре  $U_r(x)$ .

**Задача 3.15.** Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.

**Задача 3.16.** Пусть  $X$  — более чем счетное топологическое пространство, в котором непустыми открытыми множествами являются дополнения до не более чем счетных подмножеств. Покажите, что в этом пространстве сходящимися являются лишь стационарные последовательности.

## 3.4 Непрерывные отображения

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение топологических пространств. Говорят, что  $f$  **непрерывно в точке**  $x \in X$ , если для любой окрестности  $V^{f(x)}$  существует окрестность  $U^x$ , для которой  $f(U^x) \subset V^{f(x)}$ . Отображение  $f$  называется **непрерывным**, если оно непрерывно в каждой точке. Отображения  $f: X \rightarrow Y$ , не являющиеся непрерывными (в данной точке), называются **разрывными** (в этой точке).

Приведем еще два определения непрерывного отображения, эквивалентных предыдущему.

**(Второе определение непрерывности)** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется **непрерывным**, если прообраз каждого открытого множества открыт.

**(Третье определение непрерывности)** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется **непрерывным**, если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

**Теорема 3.17.** Три приведенных выше определения непрерывного отображения топологических пространств эквивалентны.

**Доказательство.** Эквивалентность двух последних определений очевидна. Докажем, что эквивалентны первое и второе определения.

Итак, пусть сначала отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств непрерывно в каждой точке. Рассмотрим произвольное открытое множество  $V \in \tau_Y$ . Если  $U := f^{-1}(V) = \emptyset$ , значит  $U$  открыто в  $X$ . Пусть теперь  $U \neq \emptyset$ . Для каждого  $x \in U$  множество  $V$  является окрестностью точки  $f(x)$ , поэтому, в силу непрерывности  $f$  в точке  $x$ , существует  $U^x$  такая, что  $f(U^x) \subset V$  и, значит,  $U^x \subset U$ . Итак,  $U$  представимо в виде объединения окрестностей  $U^x$  своих точек и, значит, является открытым в  $X$  как объединение открытых множеств.

Обратно, предположим, что прообраз каждого открытого в  $Y$  множества открыт в  $X$ . Покажем, что  $f$  непрерывно в каждой точке  $x \in X$ . Выберем произвольную окрестность  $V^{f(x)}$ . Так как окрестность — открытое множество, то, по условию,  $U := f^{-1}(V^{f(x)})$  — открытое множество. Ясно, что  $x \in U$ , поэтому  $U$  — окрестность  $x$ , причем  $f(U) \subset V^{f(x)}$ , что и требовалось.  $\square$

**Предложение 3.18.** Следующие отображения непрерывны:

- (1) тождественное отображение топологического пространства на себя;
- (2) постоянное отображение, переводящее все топологическое пространство в некоторую точку другого топологического пространства;
- (3) для подмножества  $Y$  топологического пространства  $X$  — отображение включения  $\iota: Y \rightarrow X$ ,  $\iota: y \mapsto y$  для всех  $y \in Y$ ;
- (4) композиция непрерывных отображений топологических пространств.

**Доказательство.** Воспользуемся вторым определением непрерывности, т.е. тем, что “прообраз открытого множества открыт”.

(1) Тождественное отображение не меняет множеств, поэтому прообраз открытого множества открыт как совпадающий с исходным открытым.

(2) Прообраз любого открытого множества или пуст, или совпадает со всем пространством, поэтому в обоих случаях открыт.

(3) Прообраз  $\iota^{-1}(U)$  открытого множества  $U \subset X$  равен  $U \cap Y$  и, поэтому, открыт в индуцированной топологии.

(4) Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  — непрерывные отображения. Берем произвольное открытое множество  $U \subset Z$ , тогда  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ . Так как  $g$  непрерывно, то  $g^{-1}(U)$  открыто в  $Y$ . Так как  $f$  непрерывно, то  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  открыто в  $X$ .  $\square$

**Пример 3.19.** Каждое отображение  $f: X \rightarrow Y$  из произвольного топологического пространства  $X$  в антидискретное топологическое пространство  $Y$  непрерывно. Действительно, в  $Y$  есть ровно два открытых множества:  $Y$  и  $\emptyset$ . Непрерывность  $f$  вытекает из того, что оба множества  $f^{-1}(Y) = X$  и  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  открыты в  $X$ .

**Пример 3.20.** Каждое отображение  $f: X \rightarrow Y$  дискретного топологического пространства  $X$  в любое топологическое пространство  $Y$  непрерывно. Действительно, прообразы всех открытых подмножеств пространства  $Y$  открыты в  $X$ , так как в  $X$  открыты все подмножества.

Отображение в вещественную прямую  $\mathbb{R}$  называется **функцией**, а в  $\mathbb{R}^n$  — **векторнозначной функцией**.

**Пример 3.21.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда для  $c \in \mathbb{R}$  множество  $(-\infty, c)$  открыто, а множества  $\{c\}$  и  $(-\infty, c]$  — замкнуты в  $\mathbb{R}$ , поэтому  $\{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty, c))$  открыто, а множества  $\{x \in X : f(x) \leq c\} = f^{-1}((-\infty, c])$  и  $\{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$  — замкнуты в  $X$ .

Для проверки непрерывности отображения достаточно проверять открытость прообразов лишь элементов произвольной базы (см. ниже предложение 3.22). Более того, для проверки непрерывности в точке можно было бы ограничиться окрестностями, входящими в базу, однако семейство окрестностей, нужных для проверки, можно еще сильнее уменьшить. А именно, для точки  $x \in X$  топологического пространства  $X$  назовем **базой окрестностей  $\mathcal{B}_x$  точки  $x$**  каждый набор окрестностей  $x$  такой, что для любой окрестности  $U^x$  точки  $x$  существует  $U \in \mathcal{B}_x$ , удовлетворяющий  $U \subset U^x$ . Например, если  $X$  — метрическое пространство, а  $\mathcal{B}_X$  — база метрической топологии, состоящая из всевозможных открытых шаров, то в качестве части этой базы, в элементы которой входит  $x$ , нужно брать все содержащие  $x$  шары. А вот в качестве базы окрестностей  $x$  можно взять только те шары, у которых  $x$  — центр.

**Предложение 3.22.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение топологических пространств,  $x \in X$  — произвольная точка,  $\mathcal{B}_Y$  — база пространства  $Y$ , а  $\mathcal{B}_x$  и  $\mathcal{B}_{f(x)}$  — любые базы окрестностей точек  $x$  и  $f(x)$  соответственно. Тогда

- (1) отображение  $f$  непрерывно, если и только если прообраз любого  $V \in \mathcal{B}_Y$  открыт в  $X$ ;
- (2) отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ , если и только если для любой окрестности  $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$  существует окрестность  $U \in \mathcal{B}_x$ , для которой  $f(U) \subset V$ .

**Доказательство.** (1) Пусть сначала  $f$  непрерывно. Тогда прообраз любого открытого множества, в частности, каждого множества  $V \in \mathcal{B}_Y$ , открыт в  $X$ .

Обратно, пусть прообразы элементов базы  $\mathcal{B}_Y$  открыты в  $X$ . Выберем произвольное открытое множество  $W \in \tau_Y$ . По определению базы,  $W = \cup_{\alpha \in J} V_\alpha$ , где  $V_\alpha \in \mathcal{B}_Y$  при всех  $\alpha$ . Но  $f^{-1}(W) = \cup_{\alpha \in J} f^{-1}(V_\alpha)$ . Осталось воспользоваться тем, что все  $f^{-1}(V_\alpha)$  открыты в  $X$  по условию, а также что объединение открытых множеств открыто.

(2) Пусть сначала отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ . Тогда для  $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$  существует окрестность  $W^x \in \tau_X$  точки  $x$  такая, что  $f(W^x) \subset V$ . По определению базы окрестностей, существует  $U \in \mathcal{B}_x$  такая, что  $U \subset W^x$ , но тогда  $f(U) \subset V$ .

Обратно, пусть выполнено условие на базы окрестностей точек  $x$  и  $f(x)$ . Мы должны показать, что  $f$  непрерывно в  $x$ . Выберем произвольную окрестность  $W^{f(x)}$  точки  $f(x)$ , тогда, по определению базы окрестностей, существует  $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$  такая, что  $V \subset W^{f(x)}$ . По условию, найдется  $U \in \mathcal{B}_x$ , для которой  $f(U) \subset V \subset W^{f(x)}$ .  $\square$

Следующий результат, мгновенно вытекающий из предложения 3.22, используется математическим анализом в качестве определения непрерывности функции в точке.

**Следствие 3.23.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение метрических пространств и  $x \in X$ , тогда отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ , если и только если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого  $x' \in X$ ,  $|xx'| < \delta$ , выполняется  $|f(x)f(x')| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Достаточно в качестве баз точек  $x$  и  $f(x)$  выбрать всевозможные шары с центрами в этих точках.  $\square$

**Замечание 3.24.** Для непрерывного отображения  $f: X \rightarrow Y$  из топологического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  имеет место аналог замечания 3.14. А именно, произвольное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется **локально ограниченным**, если для любой точки  $x \in X$  существует такая окрестность  $U^x$ , что  $f(U^x)$  — ограниченное подмножество  $Y$ , т.е. содержится в некотором шаре  $U_r(y)$ . Покажем, что **каждое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  локально ограничено**. В качестве  $y$  возьмем  $f(x)$ , тогда это утверждение вытекает из непрерывности  $f$  в точке  $x$ .

### Задача 3.25.

- Покажите, что непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств переводит каждую сходящуюся к  $x \in X$  последовательность в последовательность, сходящуюся к  $f(x)$ .
- Покажите, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств непрерывно в точке  $x \in X$ , если и только если каждая сходящаяся к  $x$  последовательность переходит в последовательность, сходящуюся к  $f(x)$ .
- Приведите пример отображения  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств, разрывного в некоторой точке  $x \in X$ , однако переводящего все последовательности, сходящиеся к  $x$ , в последовательности, сходящиеся к  $f(x)$ .

Приведем еще один результат, часто применяемый в математическом анализе. Он также описывает условия непрерывности функции в точке, но, в отличие от предыдущих утверждений, никак не использует значение функции в рассматриваемой точке. Хотя этот результат имеет место в более общей ситуации, а именно, для отображения метрических пространств, мы ограничимся здесь лишь функциями, т.е. отображениями в вещественные числа, так как для общего случая требуется дополнительное обсуждение понятия полноты метрического пространства, что мы будем разбирать существенно ниже.

Нам понадобится понятие **проколотой окрестности** точки  $x$  топологического пространства  $X$ , а именно, так называется каждое множество  $U^x \setminus \{x\}$ , где, напомним,  $U^x$  обозначает окрестность точки  $x$ . Проколотую окрестность, полученную из  $U^x$ , будем обозначать  $\dot{U}^x$ .

**Теорема 3.26** (Критерий Коши существования предела функции). Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x$  — база окрестностей  $x$ , и  $f: X \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция. Тогда  $f$  продолжается в  $x$  до непрерывной в  $x$  функции  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , если и только если для любого  $\varepsilon > 0$  существует окрестность  $U^x \in \mathcal{B}_x$  такая, что для любых  $x_1, x_2 \in \dot{U}^x$  выполняется  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . В частности, если в качестве базы  $\mathcal{B}_x$  выбрать семейство открытых шаров с центром в  $x$ , то последнее условие можно переписать так: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x_1, x_2 \in X$ ,  $0 < |xx_1| < \delta$ ,  $0 < |xx_2| < \delta$  выполняется  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $f$  продолжается в точку  $x$  до непрерывной в  $x$  функции  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Воспользуемся предложением 3.22, в котором за базу окрестностей точки  $g(x)$  возьмем интервалы с центром в  $g(x)$ . Тогда, в силу этого предложения, для интервала  $V := (g(x) - \varepsilon/2, g(x) + \varepsilon/2)$  существует окрестность  $U^x \in \mathcal{B}_x$  такая, что  $g(U^x) \subset V$ , в частности, для всех  $x_1, x_2 \in \dot{U}^x$  выполняется  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

Докажем теперь обратное утверждение. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $\varepsilon_n = 1/n$  и выберем произвольную окрестность  $U_n^x$  точки  $x$ , для которой  $\dot{U}_n^x$  удовлетворяет условию для  $\varepsilon = \varepsilon_n$ . Перестроим последовательность  $\dot{U}_1^x, \dot{U}_2^x, \dots$ , заменив  $\dot{U}_n^x$  на  $\dot{V}_n^x = \bigcap_{m=1}^n \dot{U}_m^x$ . Тогда  $\dot{V}_n^x$  также удовлетворяет условию для того же  $\varepsilon = \varepsilon_n$  (отметим, что  $\dot{V}_n^x$  не обязана содержаться в  $\mathcal{B}_x$ ). Однако теперь  $\dot{V}_1^x \supset \dot{V}_2^x \supset \dots$ , откуда числа

$$a_n = \inf_{y \in \dot{V}_n^x} f(y) \quad \text{и} \quad b_n = \sup_{y \in \dot{V}_n^x} f(y)$$

образуют монотонные последовательности, причем  $a_n$  не убывают, в  $b_n$  не возрастают. Более того,  $|b_n - a_n| \leq 1/n$ , так что  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ . Таким образом, последовательность  $[a_n, b_n]$  состоит из вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Из принципа Кантора о вложенных отрезках<sup>1</sup> вытекает, что у этих отрезков существует единственная общая точка  $c \in \mathbb{R}$ , и мы положим  $g(x) = c$ . Покажем, что функция  $g$  непрерывна в точке  $x$ .

Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим интервал  $V := (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . По построению точки  $c$ , существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $[a_n, b_n] \subset V$ , так что для каждого  $y \in \dot{V}_n^x$  имеем

$$|f(y) - c| = |g(y) - g(x)| < \varepsilon.$$

Так как  $g(x) - g(x) = 0$ , то это неравенство выполняется и для всех  $y \in V_n^x$ , откуда и вытекает непрерывность функции  $g$  в точке  $x$ .  $\square$

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется **липшицевым**, если существует такое неотрицательное число  $L \in \mathbb{R}$ , что для всех  $x, x' \in X$  выполняется  $|f(x)f(x')| \leq L|xx'|$ . Число  $L$  называется **константой Липшица**, а отображение  $f$  также называется  **$L$ -липшицевым**.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется **равномерно непрерывным**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x, x' \in X$ , удовлетворяющих  $|xx'| < \delta$ , выполняется  $|f(x)f(x')| < \varepsilon$ . Из следствия 3.23 мгновенно вытекает, что **каждое равномерно непрерывное отображение метрических пространств непрерывно**.

**Задача 3.27.** Докажите, что

- каждое липшицево отображение равномерно непрерывно и, значит, непрерывно;
- если  $A \subset X$  — непустое подмножество метрического пространства  $X$  и  $d_A(x) = \inf_{a \in A} |ax|$ , то  $d_A$  является 1-липшицевым отображением и, потому, непрерывно; в частности, непрерывными являются функции  $d_p(x) = |px|$  для любых  $p \in X$ .

Следующие два предложения являются очень важными, несмотря на простоту их доказательств. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  отображение множеств,  $Z \subset X$ ,  $W \subset Y$ , причем  $f(Z) \subset W$ . Обозначим  $f|_{Z,W}$  отображение из  $Z$  в  $W$ , совпадающее с  $f$  на своей области определения. Отображение  $f|_{Z,W}$  будем называть **ограничением  $f$  на  $Z$  и  $W$** .<sup>2</sup>

**Предложение 3.28.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств,  $Z \subset X$ ,  $W \subset Y$ , причем  $f(Z) \subset W$ . Как и оговорено выше, мы рассматриваем  $Z$  и  $W$  как подпространства в  $X$  и  $Y$  соответственно, т.е. наделяем их индуцированной топологией. Тогда  $f|_{Z,W}: Z \rightarrow W$  — также непрерывное отображение.

<sup>1</sup>Мы поговорим о принципе Кантора подробнее в лекции 5, см. предложение 5.7

<sup>2</sup>Обычно под ограничением понимают лишь ограничение на  $Z$ . Нам же важно также рассматривать и ограничение на  $W$ , так как мы будем иметь дело с индуцированными топологиями.

**Доказательство.** Пусть  $U$  — произвольное открытое подмножество  $W$ . По определению индуцированной топологии, существует открытое в  $Y$  подмножество  $V$  такое, что  $U = W \cap V$ . Так как отображение  $f$  непрерывно, то  $f^{-1}(V)$  открыто в  $X$ . Наконец,

$$f|_{Z,W}^{-1}(U) = Z \cap f^{-1}(U) = Z \cap f^{-1}(V),$$

так что  $f|_{Z,W}^{-1}(U)$  открыто в  $Z$  (по определению индуцированной топологии).  $\square$

**Задача 3.29.** Докажите следующий локальный вариант предложения 3.28: пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение топологических пространств, непрерывное в точке  $x \in X$ , и пусть  $x \in Z \subset X$ ,  $W \subset Y$ , причем  $f(Z) \subset W$ , тогда  $f|_{Z,W}: Z \rightarrow W$  непрерывно в точке  $x$ .

**Предложение 3.30.** Пусть  $f: X \rightarrow Z$  — непрерывное отображение, причем  $Z$  — подпространство топологического пространства  $Y$ . Тогда отображение  $F: X \rightarrow Y$ , продолжающее  $f = F|_{X,Z}$  на  $Y$ , — также непрерывно.

**Доказательство.** Действительно, отображение  $F$  равно композиции  $f$  и включения  $i: Z \rightarrow Y$ . Осталось воспользоваться предложением 3.18.  $\square$

**Замечание 3.31.** В математическом анализе локальные свойства функций  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  пытаются извлечь из ограничений этих функций на лучи. Так, например, рассмотрим произвольную точку  $x \in \mathbb{R}$  и всевозможные лучи  $\ell_x$ , выходящие из  $x$ . Будем говорить, что  $f$  **непрерывна в  $x$  по всем направлениям**, если ограничение  $f$  на каждый луч  $\ell_x$  непрерывно в  $x$ . Так как приведенное только что определение локально, вместо функции  $f$ , заданной на всем  $\mathbb{R}^n$ , можно рассматривать  $f$ , определенную на открытом подмножестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Также можно рассматривать функцию, заданную на  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$  (или на  $\Omega \setminus \{x\}$ ) и говорить о возможности непрерывного продолжения в точку  $x$ . Мы не будем отдельно обсуждать все эти варианты, а ограничимся лишь случаем  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

По задаче 3.29, непрерывность  $f$  в точке  $x$  влечет непрерывность в этой точке всех ограничений  $f$  на каждый луч  $\ell_x$ , т.е. непрерывность влечет непрерывность по всем направлениям. Интересный вопрос: верно ли обратное утверждение, а именно, если  $f$  непрерывна по всем направлениям, то обязана ли  $f$  быть непрерывной в точке  $x$ ? В общем случае ответ отрицательный. Приведем соответствующий пример из [21]. Отметим, что в этом примере функция задана на плоскости и непрерывна везде, кроме начала координат, в котором она непрерывна не только по всем направлениям, но и на каждой прямой, проходящей через начало координат.

Пусть на евклидовой плоскости заданы декартовы координаты  $x, y$ , и  $f(0, 0) = 0$ , а в каждой точке  $(x, y) \neq (0, 0)$  имеем  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ . Мы покажем, что функция  $f$  непрерывна в  $(0, 0)$  на каждой прямой, проходящей через  $(0, 0)$ .

Прямые, проходящие через  $(0, 0)$ , бывают двух видов: или это прямая  $x = 0$ , или же прямая задается уравнением  $y = kx$ . В первом случае  $f(x, y) = 0$  всюду на прямой  $x = 0$ . Во втором, вне начала координат, имеем  $f(x, kx) = \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{k^2x}{1+k^4x^2}$ , потому ограничение  $f$  на каждую такую прямую также всюду непрерывно.

Покажем теперь, что  $f$  разрывна в  $(0, 0)$ . Для этого ограничим  $f$  на параболу  $(y^2, y)$ . Вне начала координат имеем  $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = 1/2$ , так что это ограничение разрывно в  $(0, 0)$ , где  $f(0, 0) = 0$ , так как в любой окрестности начала координат  $(0, 0)$  есть точки, значение в которых функции  $f$  равно  $1/2$ .



## Упражнения к главе 3

**Упражнение 3.1.** Покажите, что семейство  $\mathcal{B} \subset 2^X$  является базой некоторой топологии, определенной на множестве  $X$ , если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ;
- для любых пересекающихся  $B, B' \in \mathcal{B}$  и любой точки  $x \in B \cap B'$  существует  $C \in \mathcal{B}$ , для которого  $x \in C \subset B \cap B'$ .

**Упражнение 3.2.** Рассмотрим на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  семейство ее подмножеств  $\mathcal{B}$ , состоящее из всевозможных лучей  $(a, +\infty)$ . Докажите следующие утверждения.

- (1) Семейство  $\mathcal{B}$  — база некоторой топологии  $\tau$ . Обозначим  $X$  топологическое пространство, равное  $\mathbb{R}$  с топологией  $\tau$ .
- (2) Отображение  $f: X \rightarrow X$ ,  $f: x \mapsto 2x$ , — непрерывно.
- (3) Отображение  $g: X \rightarrow X$ ,  $g: x \mapsto -x$ , — разрывно в каждой точке.

**Упражнение 3.3.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств  $X$ :

- (1)  $\mathcal{B}_a = \{X\}$ ;
- (2)  $\mathcal{B}_d$ , совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;
- (3)  $\mathcal{B}_z$ , состоящее всех множеств  $U$ , для которых  $X \setminus U$  — конечный набор точек.

Докажите, что первое из них — база антидискретной топологии  $\tau_a$ , второе — дискретной  $\tau_d$ , а третье — топологии Зарисского  $\tau_z$ .

**Упражнение 3.4.** Рассмотрим отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , заданное формулой  $f(x) = \sin x$ . Выясните, является ли  $f$  непрерывным, если мы рассматриваем на  $\mathbb{R}$  и  $[-1, 1]$  следующие топологии из упражнения 3.3:

- (1)  $(\mathbb{R}, \tau_a), ([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (2)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_a)$ ;
- (3)  $(\mathbb{R}, \tau_d), ([-1, 1], \tau_z)$ ;
- (4)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_d)$ ;
- (5)  $(\mathbb{R}, \tau_z), ([-1, 1], \tau_z)$ .

**Упражнение 3.5.** Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.

**Упражнение 3.6.** Пусть  $X$  — более чем счетное топологическое пространство, в котором непустыми открытыми множествами являются дополнения до не более чем счетных подмножеств. Покажите, что в этом пространстве сходящимися являются лишь стационарные последовательности.

**Упражнение 3.7.**

- (1) Покажите, что непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств переводит каждую сходящуюся к  $x \in X$  последовательность в последовательность, сходящуюся к  $f(x)$ .
- (2) Покажите, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств непрерывно в точке  $x \in X$ , если и только если каждая сходящаяся к  $x$  последовательность переходит в последовательность, сходящуюся к  $f(x)$ .
- (3) Приведите пример отображения  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств, разрывного в некоторой точке  $x \in X$ , однако переводящего все последовательности, сходящиеся к  $x$ , в последовательности, сходящиеся к  $f(x)$ .

**Упражнение 3.8.** Докажите, что

- (1) каждое липшицево отображение равномерно непрерывно и, значит, непрерывно;
- (2) если  $A \subset X$  — непустое подмножество метрического пространства  $X$  и  $d_A(x) = \inf_{a \in A} |ax|$ , то  $d_A$  является 1-липшицевым отображением и, потому, непрерывно; в частности, непрерывными являются функции  $d_p(x) = |px|$  для любых  $p \in X$ .

## Лекция 4

# Гомеоморфизм, кривые, структура подмножеств, конструкции

**План.** Гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, метризация топологического пространства, кривые в топологическом пространстве, соединяющие данные точки, отрезок в линейном пространстве, задание отрезка в нормированном пространстве в виде кривой, склейка кривых, непрерывность склейки, стыковка кривых, замена параметра, склейка стыкующихся кривых, ломаная в векторном пространстве, вершины (внутренние и концевые) и ребра ломаной, ломаная в нормированном пространстве как кривая, структура подмножеств топологического пространства, точки прикосновения и замыкание, замыкание как наименьшее замкнутое надмножество, внутренние точки и внутренность, внутренность как наибольшее открытое подмножество, граничные точки и граница, топологические конструкции, дизъюнктное объединение и его топология, декартово произведение, топология произведения или тихоновская топология, стандартная топология  $\mathbb{R}^n$  совпадает с топологией произведения, канонические проекции из декартова произведения, координатные отображения для отображения в декартово произведение, непрерывность в терминах координатных отображений, замкнутая полуокружность гомеоморфна отрезку, а открытая — интервалу, кривые в  $\mathbb{R}^n$  и непрерывность их координатных функций, поверхности, доказательство непрерывности линейной комбинации, произведения и отношения непрерывных функций, стереографическая проекция.

### 4.1 Гомеоморфизм

В этом разделе мы определяем отображения, позволяющие отождествлять топологические пространства. Они являются аналогами биекций в теории множеств и изоморфизмов в теории линейных пространств.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется **гомеоморфизмом**, если оно биективно, а  $f$  и  $f^{-1}$  — непрерывны. Топологические пространства называются **гомеоморфными**, если между ними существует гомеоморфизм.

**Замечание 4.1.** Так как непрерывность отображения равносильна тому, что прообраз открытого множества открыт, то гомеоморфность отображения  $f: X \rightarrow Y$  означает, что подмножество  $X$  открыто, если и только если образ этого подмножества открыт в  $Y$ . Иными словами, гомеоморфизм устанавливает не только биекцию между точками пространств  $X$  и  $Y$ , но еще и между топологиями. Удобное наглядное представление гомеоморфизма состоит в восприятии его как переименования точек: каждая точка  $x \in X$  теперь просто называется “именем”  $y = f(x)$ , при этом открытые множества остаются теми же. При таком взгляде становится очевидным, что каждое свойство топологического пространства, которое формулируется только в терминах топологии (такие свойства называются **топологическими**) у гомеоморфных пространств одинаковы. Например, гомеоморфные пространства одновременно хаусдорфовы или нет. В частности, несчетное пространство с топологией Зарисского нельзя **метризовать**, т.е. ввести метрику так, чтобы топология Зарисского оказалась соответствующей метрической топологией.

**Пример 4.2.** Покажем, что прямая  $\mathbb{R}$  и интервал  $(a, b)$  гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда  $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$ , гомеоморфизм устанавливается функцией  $y = \operatorname{arctg} x$ , так как она и обратная к ней, равная ограничению функции  $x = \operatorname{tg} y$  на  $(-\pi/2, \pi/2)$ , являются непрерывными функциями.

В общем случае, интервал  $(a, b)$  сначала переводится гомеоморфно на интервал  $(-\pi/2, \pi/2)$  с помощью отображения вида  $y = kx + c$ , где  $k$  и  $c$  — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для параметров  $k$  и  $c$ ); затем можно воспользоваться следствием 4.3.

Из предложения 3.18 мгновенно вытекает следующий результат.

**Следствие 4.3.** Тожественное отображение топологического пространства на себя, обратное отображение к гомеоморфизму, а также композиция гомеоморфизмов являются гомеоморфизмами.

Ниже мы определим еще ряд топологических свойств и приведем примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств. Пока же ограничимся важным очевидным следствием из предложения 3.28.

**Следствие 4.4.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм,  $Z \subset X$  и  $W = f(Z)$ . Тогда  $f|_{Z,W}: Z \rightarrow W$  — также гомеоморфизм.

## 4.2 Кривые в топологических пространствах

Непрерывное отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  из отрезка  $[a, b]$  в топологическое пространство  $X$  называется **кривой** в  $X$ , **соединяющей точки  $\gamma(a)$  и  $\gamma(b)$** .

**Предложение 4.5.** Пусть  $V$  — нормированное пространство и  $A, B \in V$  — его произвольные точки. Зададим отображение  $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$ , положив  $\gamma: t \mapsto (1-t)A + tB$ . Тогда  $\gamma$  — непрерывно, т.е. является кривой в  $V$ , соединяющей  $A$  и  $B$ .

**Доказательство.** Так как  $[0, 1]$  и  $V$  являются метрическими пространствами для соответствующих метрик, для доказательства непрерывности  $\gamma$  воспользуемся следствием 3.23. Выберем произвольную точку  $t_0 \in [0, 1]$ , любое  $\varepsilon > 0$ , и покажем, что существует  $\delta > 0$ , для которого условие  $t \in [0, 1]$ ,  $|t - t_0| < \delta$ , влечет  $\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$ . Пусть  $d = \|B - A\|$ . Положим  $\delta = \varepsilon/d$ , тогда

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = \|(1-t)A + tB - (1-t_0)A - t_0B\| = \|(t-t_0)(B-A)\| = |t-t_0|\|B-A\| < \varepsilon,$$

что и требовалось.  $\square$

**Замечание 4.6.** Образ отображения  $\gamma$  из предложения 4.5, даже если  $V$  — линейное пространство, но не обязательно нормированное, называется **отрезком в пространстве  $V$ , соединяющим точки  $A$  и  $B$**  и обозначается  $[A, B]$ . Ясно, что отображение  $t \mapsto (1-t)B + tA$ ,  $t \in [0, 1]$ , задает то же самое множество, т.е.  $[A, B] = [B, A]$ .

Пусть  $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$  и  $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$  — кривые в топологическом пространстве  $X$ , причем  $b_1 = a_2$  и  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . Определим отображение  $\Gamma: [a_1, b_2] \rightarrow X$ , положив его равным  $\gamma_1$  на  $[a_1, b_1] \subset [a_1, b_2]$  и  $\gamma_2$  на  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_2]$ . Такое отображение назовем **склеивкой кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$**  и обозначим  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ .

**Предложение 4.7.** Определенная выше склейка кривых  $\Gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$  — непрерывное отображение, т.е.  $\Gamma$  — кривая в пространстве  $X$ .

**Доказательство.** Непрерывность  $\Gamma$  во всех точках  $t \neq b_1 = a_2$  вытекает из непрерывности соответствующего  $\gamma_i$ . Для доказательства непрерывности в точке  $t = b_1 = a_2$  выберем произвольную окрестность  $U$  точки  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ , тогда существуют  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$ , для которых  $\gamma_1((b_1 - \delta_1, b_1]) \subset U$  и  $\gamma_2([a_2, a_2 + \delta_2)) \subset U$ , поэтому  $\Gamma((b_1 - \delta_1, b_1 + \delta_2)) \subset U$ . Осталось заметить, что  $(b_1 - \delta_1, b_1 + \delta_2)$  — окрестность точки  $b_1 = a_2$  в отрезке  $[a_1, b_2]$ .  $\square$

**Замечание 4.8.** Если в приведенном выше примере  $b_1 \neq a_2$ , но, тем не менее, кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  **стыкуются**, т.е.  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ , то интуитивно ясно, что также можно определить склейку таких кривых, “пройдя сначала по одной из них, а затем — по другой”. Чтобы придать формальный смысл этой фразе, введем следующее понятие. Заметим, что для кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  в топологическом пространстве  $X$  каждый гомеоморфизм  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ , в силу предложения 3.18, порождает кривую  $\gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow X$ . Про кривую  $\gamma \circ \varphi$  говорят, что она получена из  $\gamma$  **заменой параметра**. Если  $t$  — стандартная координата на  $[a, b]$ , а  $s$  — на  $[c, d]$ , то часто вместо  $\gamma(\varphi(s))$  пишут  $\gamma(s)$ . Это связано с тем, что кривую иногда воспринимают как некоторый маршрут в пространстве  $X$ , по которому можно перемещаться в разных темпах. Иными словами, такой взгляд на кривые означает, что мы отождествляем кривые, отличающиеся на замену параметра. Теперь фразу “**склеим кривые, пройдя сначала по одной из них, а затем — по другой**” будем понимать так: сделаем такие замены параметров  $\varphi_i: [c_i, d_i] \rightarrow [a_i, b_i]$  на кривых  $\gamma_i$ , чтобы выполнялось  $d_1 = c_2$ . Тогда под результирующей кривой будем понимать склейку кривых  $\gamma_1 \circ \varphi_1$  и  $\gamma_2 \circ \varphi_2$ .

**Ломаной  $L$  в векторном пространстве  $V$** , соединяющей точки  $A$  и  $B$ , назовем последовательность точек  $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m$ , где  $A_0 = A$  и  $A_m = B$ . При этом,

- точки  $A_i$  называются **вершинами ломаной  $L$** ;

- каждая вершина  $A_i$  для  $0 < i < k$  — **внутренней**, а вершины  $A_0 = A$  и  $A_m = B$  — **концевыми** или **граничными**;
- отрезки  $[A_{i-1}, A_i]$  — **ребрами** ломаной  $L$ .

**Замечание 4.9.** Предложение 4.5 позволяет рассматривать каждый отрезок как непрерывную кривую. Так как последовательные ребра ломаной стыкуются, то *замечание 4.8 позволяет рассматривать ломаную как кривую*, что мы и будем делать в дальнейших лекциях.

### 4.3 Структура подмножеств топологического пространства

Пусть  $Z \subset X$  — произвольное подмножество топологического пространства  $X$ . Точка  $x \in X$  называется **точкой прикосновения для  $Z$** , если каждая окрестность  $U^x$  пересекает  $Z$ . В частности, все точки из  $Z$  являются его точками прикосновения. Множество точек прикосновения  $Z$  обозначается  $\bar{Z}$  и называется **замыканием  $Z$** .

Докажем следующую лемму.

**Лемма 4.10.** *Если открытое множество  $U \subset X$  не пересекает  $Z$ , то  $U$  также не пересекает  $\bar{Z}$ . Эквивалентный вариант: каждое открытое множество  $U \subset X$ , пересекающее  $\bar{Z}$ , также пересекает и  $Z$ .*

**Доказательство.** Пусть  $U \cap \bar{Z} \neq \emptyset$ , т.е. существует точка прикосновения  $x \in X$  множества  $Z$ , содержащаяся в  $U$ . Но тогда  $U$  — окрестность  $x$  и, значит, по определению точки прикосновения,  $U \cap Z \neq \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 4.11.** *Пусть  $Z$  — подмножество топологического пространства  $X$ , тогда множество  $\bar{Z}$  замкнуто, и для любого замкнутого  $F \supset Z$  выполняется  $F \supset \bar{Z}$ , т.е.  $\bar{Z}$  — наименьшее замкнутое множество, содержащее  $Z$ , или, эквивалентно,  $\bar{Z}$  равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих  $Z$ .*

**Доказательство.** Покажем, что множество  $\bar{Z}$  замкнуто. Пусть  $x \in X \setminus \bar{Z}$ , тогда  $x$  не является точкой прикосновения, поэтому существует окрестность  $U^x$ , не пересекающая  $Z$ . По лемме 4.10,  $U^x$  также не пересекает  $\bar{Z}$ , поэтому  $X \setminus \bar{Z}$  равно объединению таких  $U^x$  и, значит, является открытым множеством.

Пусть  $F$  — замкнутое множество, содержащее  $Z$ , тогда  $X \setminus F$  — открытое множество, не пересекающее  $Z$ . По лемме 4.10,  $X \setminus F$  также не пересекает  $\bar{Z}$ , следовательно,  $\bar{Z} \subset F$ . Таким образом, мы показали, что  $\bar{Z}$  содержится во всех замкнутых множествах, включающих в себя  $Z$  и, значит, содержится в пересечении этих множеств. Так как одним из таких  $F$  является само  $\bar{Z}$ , получаем требуемое.  $\square$

**Следствие 4.12.** *Пусть  $Z$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Тогда*

- (1) *множество  $Z$  замкнуто, если и только если оно совпадает со своим замыканием  $\bar{Z}$ ;*
- (2) *множество  $Z$  замкнуто, если и только если оно содержит все свои точки прикосновения.*

**Доказательство.** (1) Если  $Z$  замкнуто, то  $\bar{Z} = Z$  как наименьшее замкнутое множество  $F$ , содержащее  $Z$ . Если  $\bar{Z} = Z$ , то  $Z$  — замкнуто, так как замкнуто  $\bar{Z}$ .

(2) Если  $Z$  замкнуто, то, как мы уже отмечали,  $\bar{Z} = Z$  и, значит,  $Z$  содержит все свои точки прикосновения. Если  $Z$  содержит все свои точки прикосновения, то  $\bar{Z} \subset Z$ , но так как  $Z \subset \bar{Z}$ , заключаем, что  $Z = \bar{Z}$  и, значит,  $Z$  замкнуто.  $\square$

**Задача 4.13.** Пусть  $Y$  и  $Z$  — подмножества топологического пространства  $X$ . Покажите, что

$$\overline{Y \cup Z} = \bar{Y} \cup \bar{Z} \text{ и } \overline{Y \cap Z} \subset \bar{Y} \cap \bar{Z},$$

а также приведите пример, когда  $\overline{Y \cap Z} \neq \bar{Y} \cap \bar{Z}$ .

Точка  $x \in X$  называется **внутренней точкой подмножества  $Z$** , если некоторая ее окрестность  $U^x$  содержится в  $Z$ . Множество всех внутренних точек множества  $Z$  называется **внутренностью  $Z$**  и обозначается  $\text{Int } Z$ .

Докажем следующую лемму.

**Лемма 4.14.** Если открытое множество  $U \subset X$  содержится в  $Z$ , то  $U \subset \text{Int } Z$ .

**Доказательство.** Множество  $U$  является окрестностью каждой своей точкой, поэтому, в силу определения внутренней точки, все точки из  $U$  — внутренние.  $\square$

**Следствие 4.15.** Внутренность  $\text{Int } Z$  множества  $Z$  — наибольшее открытое множество, содержащееся в  $Z$ .

**Доказательство.** Внутренность  $Z$  открыта, так как вместе с каждой точкой  $x$  она, в силу леммы 4.14, содержит и окрестность этой точки, поэтому внутренность является объединением таких окрестностей и, значит, открыта. Максимальность внутренности также вытекает из леммы 4.14.  $\square$

**Задача 4.16.** Пусть  $Z$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Покажите, что  $\text{Int}(X \setminus Z) = X \setminus \overline{Z}$  и, аналогично,  $\text{Int } Z = X \setminus \overline{X \setminus Z}$ .

Точка  $x \in X$  называется **граничной точкой подмножества**  $Z$ , если каждая ее окрестность  $U^x$  пересекает как  $Z$ , так и его дополнение  $X \setminus Z$ . Множество всех граничных точек множества  $Z$  называется **границей**  $Z$  и обозначается  $\partial Z$ .

Непосредственно из определения границы вытекает следующий результат.

**Следствие 4.17.** Имеет место формулы  $\partial Z = \overline{Z} \cap \overline{X \setminus Z} = \overline{Z} \setminus \text{Int } Z$ .

**Задача 4.18.** Покажите, что подмножество  $Z$  топологического пространства  $X$  замкнуто, если и только если оно содержит все свои граничные точки.

## 4.4 Топологические конструкции

Приведем ряд конструкций, позволяющих собирать из одних топологических пространств другие.

### 4.4.1 Дизъюнктное объединение

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство топологических пространств. Рассмотрим дизъюнктное объединение  $X = \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  (мы рассматриваем все  $X_\alpha$  как непересекающиеся множества, см. раздел 2.1). **Топология  $\tau_X$  дизъюнктного объединения** — это топология, база которой равна  $\sqcup_{\alpha \in I} \tau_{X_\alpha}$ . Легко видеть, что открытыми множествами в топологическом пространстве  $X$  являются объединения  $\sqcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  для всех  $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ .

**Задача 4.19.** Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  и  $Y$  — топологические пространства. Докажите, что отображение  $f: \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow Y$  непрерывно, если и только если все ограничения  $f|_{X_\alpha}$  непрерывны.

### 4.4.2 Декартово произведение

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство топологических пространств и  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ . **Топологией произведения** или **тихоновской топологией**  $\tau_X$  называется топология, база которой состоит из всевозможных произведений  $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ , в которых все  $U_\alpha$ , за исключением конечного их числа, равны  $X_\alpha$ .

В случае конечных декартовых произведений  $X_1 \times \cdots \times X_n$  база топологии произведения — это всевозможные  $U_1 \times \cdots \times U_n$ , где  $U_i \in \tau_{X_i}$  при всех  $i = 1, \dots, n$ .

**Предложение 4.20.** Пусть  $\mathcal{B}_\alpha$  — база топологического пространства  $X_\alpha$ . Тогда всевозможные произведения  $\prod_{\alpha \in I} B_\alpha$ ,  $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ , в которых все  $B_\alpha$ , за исключением конечного их числа, равны  $X_\alpha$ , образуют базу топологии произведения. В частности, в конечном произведении  $X_1 \times \cdots \times X_n$  базой топологии является произведение баз  $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ .

**Доказательство.** По определению топологии произведения, ее базу образуют всевозможные произведения  $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ , в которых все  $U_\alpha$ , за исключением конечного их числа, равны  $X_\alpha$ . Но каждый  $U_\alpha$  равен объединению элементов базы:  $U_\alpha = \cup_{\beta_\alpha \in I_\alpha} B_{\alpha\beta_\alpha}$ , где  $B_{\alpha\beta_\alpha} \in \mathcal{B}_\alpha$ . Представим в таком виде все  $U_\alpha$ , отличные от  $X_\alpha$ , а для  $U_\alpha = X_\alpha$  положим  $B_{\alpha\beta_\alpha} = X_\alpha$ , тогда

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha = \prod_{\alpha \in I} \bigcup_{\beta_\alpha \in I_\alpha} B_{\alpha\beta_\alpha} = \bigcup_{\beta \in \prod_{\alpha \in I} I_\alpha} \prod_{\alpha \in I} B_{\alpha\beta_\alpha},$$

где для каждого  $\beta \in \prod_{\alpha \in I} I_\alpha$  в произведении  $\prod_{\alpha \in I} B_{\alpha\beta_\alpha}$  лишь конечное число  $B_{\alpha\beta_\alpha}$  отлично от  $X_\alpha$ .  $\square$

**Следствие 4.21.** *Стандартная топология в  $\mathbb{R}^n$  совпадает с топологией произведения  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** По предложению 4.20, база топологии произведения  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$  равна произведению баз сомножителей. Выбрав в качестве баз сомножителей семейства всевозможных ограниченных интервалов, получим, что базой произведения являются “открытые кирпичи”  $U := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ . Пусть  $2\varepsilon$  — длина наименьшего из интервалов  $(a_i, b_i)$ , а  $c_i$  — середина  $(a_i, b_i)$ . Если  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , то открытый шар  $U_\varepsilon(c)$  в шах-норме содержится в  $U$ . С другой стороны, каждый открытый шар в шах-норме является “открытым кирпичом”. Таким образом, в силу предложения 3.5, топология произведения совпадает с топологией, заданной шах-нормой. В силу следствия 3.6, топологии, заданные шах-нормой и евклидовой нормой, тоже совпадают, что и завершает доказательство следствия.  $\square$

Для декартова произведения  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  определены **канонические проекции**  $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ , заданные так: если  $x \in X$ ,  $x: I \rightarrow \cup_{\alpha \in I} X_\alpha$ , то  $\pi_\alpha(x) = x(\alpha) =: x_\alpha$ . Если  $f: Y \rightarrow X$  — отображение, то композиции  $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$  называется **координатным отображением**  $f$ .

**Предложение 4.22.** *Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — топологические пространства и  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ . Тогда*

- (1) *каждая каноническая проекция  $\pi_\alpha$  — непрерывное отображение;*
- (2) *отображение  $f: Y \rightarrow X$  из топологического пространства  $Y$  непрерывно, если и только если непрерывны все координатные отображения  $f_\alpha$  этого  $f$ .*

**Доказательство.** (1) Пусть  $U_\alpha$  — произвольное открытое множество в  $X_\alpha$ , тогда  $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$  равно произведению, в котором  $\alpha$ -ый сомножитель равен  $U_\alpha$ , а все остальные  $\beta$ -ые сомножители совпадают с  $X_\beta$ . Но, по определению топологии произведения, все такие произведения входят в базу топологии, поэтому открыты, а это и доказывает непрерывность  $\pi_\alpha$ .

(2) Если  $f: Y \rightarrow X$  непрерывно, то координатное отображение  $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$  также непрерывно как композиция непрерывных отображений, см. предложение 3.18. Пусть теперь все  $f_\alpha$  непрерывны. В силу предложения 3.22, для доказательства непрерывности  $f$  достаточно проверить, что  $f$ -прообраз каждого элемента базы пространства  $X$  открыт в  $Y$ . Пусть  $U \in \mathcal{B}_X$ , тогда  $U = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ , где все  $U_\alpha$ , за исключением конечного числа, совпадают с  $X_\alpha$ . Пусть  $J \subset I$  — конечное множество индексов  $\alpha$ , для которых  $U_\alpha \neq X_\alpha$ . Легко видеть, что

$$U = \bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

откуда

$$f^{-1}(U) = \bigcap_{\alpha \in J} f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = \bigcap_{\alpha \in J} f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

— открытое подмножество  $Y$  как пересечение конечного числа открытых множеств.  $\square$

**Задача 4.23.** Пусть  $X$  — метрическое пространство, и  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — его метрика. Покажите, что функция  $\rho$  непрерывна.

**Следствие 4.24.** *Пусть  $X$  — топологическое пространство.*

- (1) *Функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которая ставит в соответствие каждой точке  $x = (x_1, \dots, x_n)$  число  $x_k$ , непрерывна.*
- (2) *Функция  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , которая ставит в соответствие каждой точке  $x = (x_1, x_2)$  число  $x_1 + x_2$ , непрерывна.*
- (3) *Функция  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , которая ставит в соответствие каждой точке  $x = (x_1, x_2)$  число  $x_1 x_2$ , непрерывна.*
- (4) *Если  $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, то отображение  $h: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $h(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$  непрерывно.*
- (5) *Если  $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, то функция  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$  непрерывна.*
- (6) *Если  $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, то функция  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f_1(x) \cdots f_k(x)$  непрерывна.*

- (7) Если  $f_1, \dots, f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции, то любой многочлен от этих функций, например, любая линейная комбинация этих функций — непрерывная функция. В частности, любой многочлен от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , например, любая линейная комбинация этих переменных — непрерывная функция на  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $x_1, \dots, x_n$ .
- (8) Если  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — всюду отличная от нуля непрерывная функция, то и  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1/f(x)$  — также непрерывная функция. В частности, если  $P(x_1, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, \dots, x_n)$  — многочлены, причем многочлен  $Q$  отличен от нуля на некотором подмножестве  $Y$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $x_1, \dots, x_n$ , то рациональная функция  $P/Q: Y \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна.

**Доказательство.** (1) Это — частный случай утверждения из пункта (1) предложения 4.22.

(2) Воспользуемся следствием 3.23, т.е. выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что существует  $\delta > 0$ , для которого  $f(U_\delta(x)) \subset (x_1 + x_2 - \varepsilon, x_1 + x_2 + \varepsilon)$ . Пусть  $y \in U_\delta(x)$ , тогда

$$|x_1 + x_2 - y_1 - y_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < 2\delta,$$

поэтому можно положить  $\delta = \varepsilon/2$ .

(3) Снова воспользуемся следствием 3.23, т.е. выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что существует  $\delta > 0$ , для которого  $f(U_\delta(x)) \subset (x_1x_2 - \varepsilon, x_1x_2 + \varepsilon)$ . Чтобы найти  $\delta$ , сделаем предварительно оценку разности  $|x_1x_2 - y_1y_2|$ , где  $y \in U_\delta(x)$ , положив  $M = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  и учтя, что  $|x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \delta$  и, аналогично,  $|x_2 - y_2| < \delta$ :

$$|x_1x_2 - y_1y_2| = |x_1x_2 - x_1y_2 + x_1y_2 - y_1y_2| \leq |x_1| |x_2 - y_2| + |y_2| |x_1 - y_1| < M\delta + (M + \delta)\delta.$$

Правая часть предыдущей оценки — непрерывная функция от  $\delta$ , равная нулю при  $\delta = 0$ , поэтому всегда можно выбрать  $\delta > 0$ , для которого эта правая часть меньше  $\varepsilon$  (впрочем, этот выбор можно сделать и без апелляции к непрерывности функции от  $\delta$ ).

(4) Это — частный случай утверждения из пункта (2) предложения 4.22.

(5) Докажем сначала случай  $k = 2$ , а затем будем последовательно применять результат к парам  $f_1(x) + f_2(x)$  и  $f_3(x)$ ,  $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$  и  $f_4(x)$ , и т.д. Рассмотрим композицию отображений  $X \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

- первое  $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ , являющееся непрерывным в силу пункта (4),
- второе  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ , являющееся непрерывным в силу пункта (2).

Композиция этих отображений равна  $h$ , поэтому  $h$  — непрерывно в силу пункта (4) предложения 3.18.

(6) Аналогично пункту (5).

(7) По пункту (2) предложения 2, константы — непрерывные функции. Осталось воспользоваться пунктами (5) и (6). Для доказательства второй части нужно еще воспользоваться пунктом (1).

(8) Первая часть вытекает из того, что функция  $1/t$  непрерывна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , и из пункта (4) предложения 3.18. Вторая часть вытекает из первой и пункта (7).  $\square$

**Пример 4.25.** Пусть  $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ ,  $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — канонические проекции,  $x_i$  — стандартная координата на  $i$ -ом экземпляре  $\mathbb{R}$ , входящем в представление  $\mathbb{R}^n$  в виде произведения  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , а  $t$  — стандартная координата на  $[a, b]$ . Из предложения 4.22 вытекает, что  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — кривая тогда и только тогда, когда все ее координатные функции  $x_i(t) = (\pi_i \circ \gamma)(t)$  — непрерывны. При этом, в силу следствия 3.23, непрерывность функций  $x_i(t)$  совпадает с непрерывностью в смысле математического анализа. Например, если все функции  $x_i(t)$  — многочлены от  $t$ , то  $\gamma$  — непрерывная кривая.

**Пример 4.26.** Более общо, если  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество, то непрерывное отображение  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n > k$ , называется  $k$ -мерной **поверхностью**. Если  $u_1, \dots, u_k$  — стандартные координаты в  $\mathbb{R}^k$ , а  $x_1, \dots, x_n$  — стандартные координаты в  $\mathbb{R}^n$ , то координатные функции  $x_i(u_1, \dots, u_k) = (\pi_i \circ f)(u_1, \dots, u_k)$  представляют собой функции от  $k$  переменных, и непрерывность этих функций равносильно тому, что  $f$  — поверхность.

**Пример 4.27** (Полярные координаты). Пусть  $(x, y)$  — декартовы координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Выкинем из  $\mathbb{R}^2$  замкнутый луч  $\{(x, 0) : x \leq 0\}$  и полученное подмножество обозначим  $X$ . Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой точке  $P \in X$  пару чисел  $(r, \varphi)$ , где  $r$  — расстояние от  $P$  до начала координат, а  $\varphi$  — угол между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки  $P$ . Пара  $(r, \varphi)$  называется **полярными координатами точки  $P$** . Отметим, что угол  $\varphi$  определен неоднозначно. Чтобы добиться однозначности,

будем считать  $\varphi$  меняющимся в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ . При таких ограничениях рассматриваемое отображение переводит  $X$  биективно на открытую полуполосу  $Z = \{(r, \varphi) : r > 0, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$ . Полученное отображение из  $X$  в  $Z$  обозначим  $f$ .

Имеем  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а  $\varphi = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$  при  $y \geq 0$  и  $\varphi = -\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2})$  при  $y \leq 0$  (заметим, что при  $y = 0$  обе эти функции совпадают, так что данное определение корректно). Функция  $r$  непрерывна как композиция непрерывных функций, а функция  $\varphi$  “склеена” из двух непрерывных функций, поэтому она тоже непрерывна (проверьте). Таким образом, отображение  $f$  непрерывно.

Обратное отображение  $f^{-1}$  задается так:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Координатные функции этого отображения также непрерывны (как произведения непрерывных функций), поэтому и само отображение тоже непрерывно, а, значит,  $f$  — гомеоморфизм. Таким образом, мы доказали гомеоморфность плоскости без луча  $X$  и открытой полуполосы  $Z$ .

**Пример 4.28** (Стереографическая проекция сферы). Пусть  $x, y, z$  — декартовы координаты в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  множество  $\{(x, y, z) : z < 1\}$ , тогда  $\Omega$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим радиальную проекцию  $\nu: \Omega \rightarrow \{z = 0\}$  из точки  $N = (0, 0, 1)$ , которая каждой точке  $P \in \Omega$  ставит в соответствие точку  $\nu(P)$  пересечения луча  $NP$  с плоскостью  $\{z = 0\}$ , см. рис. 4.1.

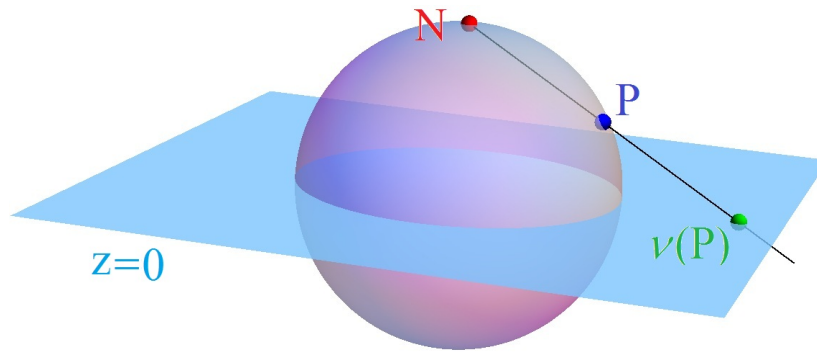


Рис. 4.1: Стереографическая проекция.

Пусть  $P = (x, y, z) \in \Omega$ , тогда луч  $NP$  задается в виде  $(0, 0, 1) + (x, y, z - 1)t$ , поэтому точка  $\nu(P)$  пересечения луча  $NP$  с плоскостью  $z = 0$  находится из условия  $1 + (z - 1)t = 0$ , откуда  $t = 1/(1 - z)$  и, значит,

$$\nu(P) = \left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right).$$

Так как полученные координатные функции непрерывны в силу пункта (8) следствия 4.24, то, в силу предложения 4.22, отображение  $\nu$  непрерывно.

Пусть  $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  — стандартная сфера. Ограничение отображения  $\nu$  на  $S^2 \setminus \{N\}$  также непрерывно в силу предложения 3.28 и называется **стереографической проекцией**; более того, легко видеть, что это ограничение взаимно однозначно. Покажем, что стереографическая проекция является гомеоморфизмом.

Найдем формулы для отображения, обратного к стереографической проекции. Если  $u = x/(1 - z)$  и  $v = y/(1 - z)$ , а точка  $P = (x, y, z) \neq N$  лежит на сфере  $S^2$ , т.е.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , то  $x = u(1 - z)$ ,  $y = v(1 - z)$ ,  $u^2(1 - z)^2 + v^2(1 - z)^2 = (1 - z)(1 + z)$ , откуда

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Рассмотрим отображение  $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное этими координатными функциями. Так как координатные функции непрерывны в силу пункта (8) следствия 4.24, то, по предложению 4.22, отображение  $\mu$  непрерывно. Заметим, что образ отображения  $\mu$  равен  $S^2 \setminus \{N\}$ , поэтому, в силу предложения 3.28, непрерывным является и соответствующее  $\mu$  отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $S^2 \setminus \{N\}$ , а это отображение совпадает с обратным к стереографической проекции, откуда вытекает гомеоморфность последней.



## Упражнения к главе 4

**Упражнение 4.1.** Рассмотрим на множестве  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел две топологии: индуцированную из стандартной топологии прямой  $\mathbb{R}$ , и топологию Зарисского. Гомеоморфны ли полученные топологические пространства?

**Упражнение 4.2.** Фиксируем произвольное простое число  $p$ . Ненулевое рациональное  $r \in \mathbb{Q}$  запишем в виде  $p^t(a/b)$ , где  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ , а  $t \in \mathbb{Z}$ . Ясно, то  $t$  определено однозначно, несмотря на неоднозначное представление  $r$ . Положим  $|r|_p = 1/p^t$ . Если же  $r = 0$ , то пусть  $|r|_p = 0$ . Для  $q, r \in \mathbb{Q}$  зададим  $d_p(q, r) = |q - r|_p$ . Покажите, что

- (1)  $|q + r|_p \leq \max\{|q|_p, |r|_p\}$ ;
- (2)  $d_p$  — ультраметрика;
- (3) метрическое пространство  $(\mathbb{Q}, d_p)$  не гомеоморфно дискретному пространству;
- (4) вычислите сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ .

**Упражнение 4.3.** Пусть  $X$  — это

- (1) или множество из 10 точек, наделенное антидискретной топологией;
- (2) или прямая  $\mathbb{R}$ , наделенная топологией Зарисского.

Можно ли две разных точки из  $X$  соединить непрерывной кривой?

**Упражнение 4.4.** Пусть  $X$  — произвольное метрическое пространство,  $x \in X$ ,  $r \geq 0$  и  $s > 0$ . Покажите, что

- (1)  $\partial U_s(x)$  и  $\partial B_s(x)$  не связаны никаким включением,
- (2)  $\partial U_s(x) \subset S_s(x)$ ,
- (3)  $\partial B_r(x) \subset S_r(x)$ ,

причем оба предыдущих включения могут быть строгими.

**Упражнение 4.5.** Пусть  $Y$  и  $Z$  — подмножества топологического пространства  $X$ . Покажите, что

$$\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z} \quad \text{и} \quad \overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z},$$

а также приведите пример, когда  $\overline{Y \cap Z} \neq \overline{Y} \cap \overline{Z}$ .

**Упражнение 4.6.** Пусть  $Z$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Покажите, что  $\text{Int}(X \setminus Z) = X \setminus \overline{Z}$  и, аналогично,  $\text{Int} Z = X \setminus \overline{X \setminus Z}$ .

**Упражнение 4.7.** Покажите, что подмножество  $Z$  топологического пространства  $X$  замкнуто, если и только если оно содержит все свои граничные точки.

**Упражнение 4.8.** Пусть даны топологические пространства  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , и  $Y$ . Докажите, что отображение  $f: \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow Y$  непрерывно, если и только если все ограничения  $f|_{X_\alpha}$  непрерывны.

**Упражнение 4.9.** Пусть  $X$  — метрическое пространство, и  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — его метрика. Покажите, что функция  $\rho$  непрерывна.

**Упражнение 4.10.** Запишем каждую матрицу размера  $n \times n$  в виде вектора длины  $n^2$ , разместив строки матрицы одну за другой на одной строке. Эта запись позволяет отождествить множество  $M(n)$  всех таких матриц с  $\mathbb{R}^{n^2}$  и, тем самым, превратить  $M(n)$  и все его подмножества в топологические пространства. Пусть  $O(2) \subset \mathbb{R}^4$  и  $SO(2) \subset O(2)$  обозначают соответственно пространство всех ортогональных  $2 \times 2$ -матриц и его подмножество, состоящее из всех матриц с определителем 1. Докажите, что  $O(2)$  и  $SO(2)$  — замкнутые и ограниченные подмножества  $\mathbb{R}^4$ .

**Упражнение 4.11.** Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в окружности и прямые.

# Лекция 5

## Компактность

**План.** Открытое покрытие, компактное пространство или компакт, примеры компактных и некомпактных пространств, принцип Кантора о вложенных отрезках, компактность отрезка и кирпича, теорема Тихонова, равномерная непрерывность, непрерывное отображение из компактного метрического пространства в произвольное равномерно непрерывно, ограниченное и неограниченное метрические пространства, диаметр метрического пространства, ограниченность метрического компакта, компактность непрерывного образа компакта, компактность замкнутого подмножества компакта, замкнутость компактного подмножества хаусдорфова пространства, замкнутость и ограниченность каждого компактного подмножества метрического пространства, критерий компактности подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , компактность образа кривой, замкнутость и ограниченность образа кривой в метрическом пространстве (например, в  $\mathbb{R}^n$ ), на компакте непрерывная функция ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения, положительность расстояния от точки вне кривой до кривой, достаточное условие гомеоморфности непрерывной биекции,  $\varepsilon$ -сеть, вполне ограниченное метрическое пространство, фундаментальные последовательности, полные метрические пространства, принцип вложенных шаров, критерий полноты подмножества полного пространства, критерий компактности метрического пространства, секвенциальная компактность, факторизация, фактор-топология как самая сильная среди оставляющих отображение непрерывным, фактор-пространство, построение фактор-пространства через разбиение, сюръективное отображение и эквивалентность, открытые и замкнутые отображения и их связь с факторизацией, гомеоморфность фактор-пространства и сюръективного образа непрерывного отображения из компакта в хаусдорфово пространство, склейка в точку, склейка концов отрезка, склейка в точку границы шара, склейка пространств по отображению, склейка границ двух шаров, расстояние между подмножествами метрического пространства, всюду плотное подмножество топологического пространства, сепарабельные топологические пространства, псевдометрика и псевдометрическое пространство, факторизация по нулевым расстояниям, пополнение метрического пространства, число Лебега и лемма Лебега, нигде неплотные подмножества топологического пространства, теорема Бэра, прямая Зоргенфрея.

### 5.1 Компактность

Покрытие топологического пространства называется *открытым*, если все элементы этого покрытия — открытые множества. Топологическое пространство называется *компактным* или *компактом*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Замечание 5.1.** Подпространство  $Y$  топологического пространства  $X$  компактно, если из любого его покрытия (как подмножества, см. раздел 2.1) открытыми в  $X$  множествами можно выделить конечное подпокрытие.

**Пример 5.2.** Каждое конечное топологическое пространство является компактным. Более общо, каждое топологическое пространство, имеющее конечное число открытых множеств, — компактно.

**Пример 5.3.** Бесконечное дискретное пространство некомпактно. Действительно, семейство всех одноточечных подмножеств такого пространства является открытым покрытием, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия.

**Пример 5.4.** Пространство  $X$  с топологией Зарисского компактно. Действительно, пусть  $\mathcal{U}$  — произвольное открытое покрытие  $X$ . Выберем любое (непустое)  $U_1 \in \mathcal{U}$ , тогда  $U_1 = X \setminus F$ , где  $F$  — конечное подмножество  $X$ . Для каждой точки  $x \in F$  выберем  $U_x \in \mathcal{U}$ , содержащее  $x$  (такое  $U_x$  существует, так как  $\mathcal{U}$  — покрытие). Тогда  $\{U_1\} \cup \{U_x\}_{x \in F}$  — конечное подпокрытие  $\mathcal{U}$ .

**Пример 5.5.** Пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , не является компактным. Действительно, рассмотрим открытое покрытие  $\{U_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , тогда из него нельзя выбрать конечного подпокрытия, так как объединение элементов каждого конечного подпокрытия — это открытый шар, дополнение которого до  $\mathbb{R}^n$  непусто.

**Пример 5.6.** Первыми примерами компактов, которые разбираются в математическом анализе, являются отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и его многомерное обобщение — “кирпич”  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ . Стандартные доказательства основаны на следующем принципе.

**Предложение 5.7** (Принцип Кантора о вложенных отрезках). *Последовательность отрезков вещественной прямой, в которой каждый следующий отрезок содержится в предыдущем, имеет общую точку, причем если длины отрезков стремятся к нулю, то такая точка единственна.*

**Доказательство.** Этот принцип является следствием из аксиомы полноты вещественных чисел: *для любых двух подмножеств вещественной прямой, одно из которых лежит слева от другого, найдется точка, лежащая между этими подмножествами.* Чтобы применить эту аксиому к последовательности вложенных отрезков, рассмотрим множество  $L$  левых и множество  $R$  правых концов отрезков. Так как отрезки вложенные,  $L$  лежит слева от  $R$ , поэтому, в силу цитированной выше аксиомы полноты, существует вещественное число  $x$ , находящееся между  $L$  и  $R$ . Но тогда для каждого отрезка  $[a_i, b_i]$  из последовательности число  $x$  лежит справа от  $a_i$  и слева от  $b_i$ , т.е.  $x \in [a_i, b_i]$ . Следовательно, все отрезки содержат  $x$ . Если все отрезки содержат еще и  $y \neq x$ , то они все содержат и отрезок  $[x, y]$ , но тогда длина каждого из них не меньше  $|x - y| > 0$ , поэтому не может стремиться к нулю.  $\square$

**Теорема 5.8.** *Кирпич  $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  компактен.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существует “плохое” открытое покрытие  $\mathcal{U}$  кирпича  $K$ , т.е. такое, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Поделим каждый отрезок пополам, тогда кирпич будет представлен в виде объединения конечного числа кирпичей  $K_i$ . Если для каждого из этих кирпичей из покрытия  $\mathcal{U}$  можно выбрать конечное подпокрытие, то объединение этих подпокрытий — конечное подпокрытие в  $\mathcal{U}$  исходного кирпича. Таким образом, для некоторого кирпича  $K_i$  покрытие  $\mathcal{U}$  “плохое”. Для выбранного кирпича  $K_i$  сделаем ту же самую операцию и этот процесс продолжим до бесконечности. В результате построим последовательность вложенных кирпичей  $K^p = [a_1^p, b_1^p] \times \cdots \times [a_n^p, b_n^p]$ , для каждого из которых из покрытия  $\mathcal{U}$  нельзя выбрать конечного подпокрытия. Заметим, что для каждого  $i$  отрезки последовательности  $[a_i^p, b_i^p]$ ,  $p = 1, 2, \dots$  — вложенные, и их длины стремятся к нулю. По предложению 5.7, эти отрезки содержат общую точку, которую мы обозначим  $x_i$ , так что точка  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$  содержится во всех кирпичах  $K^p$ . Так как  $\mathcal{U}$  — покрытие  $K$ , то существует  $U \in \mathcal{U}$  такое, что  $x \in U$ . Так как  $U$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , существует открытый шар  $U_r(x)$  радиуса  $r$  с центром  $x$  такой, что  $U_r(x) \subset U$ . Так как длины отрезков  $[a_i^p, b_i^p]$  стремятся к нулю, то и диаметры кирпичей  $K^p$  (диаметр подмножества  $\mathbb{R}^n$  — точная верхняя грань расстояний между точками этого подмножества) также стремятся к нулю. Но тогда кирпич  $K^p$  диаметра меньше  $r$  содержится в  $U_r(x)$  и, значит, в  $U$ . Таким образом, одноэлементное покрытие  $\{U\}$  является конечным подпокрытием в  $\mathcal{U}$  для такого  $K^p$ , противоречие.  $\square$

Ниже мы обобщим эти идеи на произвольные метрические пространства. Принцип полноты, который для прямой использует наличие линейного порядка, в таком виде не переносится, так как в произвольном метрическом пространстве подобный порядок отсутствует и мы не можем сказать, какое подмножество лежит левее, а какое правее. Вместо этого мы используем понятие фундаментальной последовательности, а полнота будет означать сходимости таких последовательностей. Также мы обобщим деление отрезка (кирпича) на конечное число уменьшающихся частей. Для этого мы будем рассматривать  $\varepsilon$ -сети — подмножества метрических пространств, являющихся центрами шаром радиуса  $\varepsilon$ , покрывающих пространство. Возможность выбрать конечную  $\varepsilon$ -сеть для каждого  $\varepsilon > 0$  и будет аналогом разбиения отрезка (кирпича) на конечное число сколь угодно маленьких частей.

**Замечание 5.9.** Фактически, компактность кирпича непосредственно вытекает из компактности отрезка. Более того, оказывается, компактность имеет место и для произведения *любого* числа компактов.

**Теорема 5.10** (Тихонов, см. например [4]). *Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — произвольное семейство компактных топологических пространств, тогда пространство  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  также компактно.*

Приведем еще один пример из математического анализа, связывающий компактность и равномерную непрерывность. Напомним, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется **равномерно непрерывным**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что из условия  $x_1, x_2 \in X$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta$  вытекает  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

**Теорема 5.11.** *Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств, где  $X$  — компактно, является равномерно непрерывным.*

**Доказательство.** Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и для каждого  $x \in X$ , в силу непрерывности  $f$  в точке  $x$ , найдем такой открытый шар  $U_{r_x}(x) \subset X$ , который переводится отображением  $f$  в открытый шар  $U_{\varepsilon/2}(f(x)) \subset$

$Y$ . Рассмотрим шары  $U_{r_x/2}(x)$  вдвое меньшего радиуса, и, в силу компактности  $X$ , из открытого покрытия  $\{U_{r_x/2}(x)\}_{x \in X}$  выберем конечное подпокрытие  $\{U_{r_i/2}(x_i)\}_{i=1}^n$ . Отметим, что если точки  $x, x' \in X$  лежат в одном шаре  $U_{r_i}(x_i)$ , то, в силу неравенства треугольника,

$$|f(x)f(x')| \leq |f(x)f(x_i)| + |f(x_i)f(x')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Пусть  $r = \min r_i$  и  $\delta = r/2$ . Покажем, что любые  $x, x' \in X$ , для которых  $|xx'| < \delta$ , лежат в некотором  $U_{r_k}(x_k)$ , что и завершит доказательство теоремы. Так как шары  $U_{r_i/2}(x_i)$  половинного радиуса образуют покрытие, то  $x \in U_{r_k/2}(x_k) \subset U_{r_k}(x_k)$  для некоторого  $k$ , т.е.  $|x_k x| < r_k/2$ . Снова по неравенству треугольника,

$$|x_k x'| \leq |x_k x| + |xx'| < r_k/2 + \delta \leq r_k/2 + r/2 \leq r_k/2 + r_k/2 = r_k,$$

откуда  $x' \in U_{r_k}(x_k)$ , что и требовалось.  $\square$

### 5.1.1 Простейшие свойства, связанные с компактностью

Метрическое пространство называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре, иначе оно называется *неограниченным*. Другое определение ограниченности получается с помощью понятия диаметра метрического пространства. А именно, *диаметром*  $\text{diam } X$  *метрического пространства*  $X$  называется точная верхняя грань расстояний между точками этого пространства, т.е. число  $\sup\{|xy| : x, y \in X\}$ . Следующее утверждение тривиально.

**Предложение 5.12.** *Метрическое пространство ограничено, если и только если оно имеет конечный диаметр.*

Из обсуждений примера 5.5 аналогичным образом получается следующий результат.

**Предложение 5.13.** *Если метрическое пространство или подмножество метрического пространства компактно, то оно ограничено.*

**Предложение 5.14.** *Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение компактного топологического пространства  $X$  в произвольное топологическое пространство  $Y$ . Тогда множество  $f(X)$  компактно.*

**Доказательство.** Возьмем произвольное покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  множества  $f(X)$  открытыми в  $Y$  множествами  $U_\alpha$ , тогда, в силу непрерывности  $f$ , семейство  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — открытое покрытие  $X$ . Так как  $X$  компактно, то в построенном покрытии существует конечное подпокрытие  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ , где  $J \subset I$  — конечное подмножество. Но тогда  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  — конечное подпокрытие в  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .  $\square$

**Предложение 5.15.** *Замкнутое подмножество  $Y$  компактного пространства  $X$  компактно.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — произвольное покрытие  $Y$  открытыми в  $X$  множествами  $U_\alpha$ . Так как  $Y$  замкнуто, то  $X \setminus Y$  открыто, поэтому  $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$  — открытое покрытие  $X$ . В силу компактности  $X$  из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \cup \{X \setminus Y\}$ , где  $J \subset I$  — конечное подмножество. Но тогда  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  — конечное подпокрытие в  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Предложение 5.16.** *Компактное подмножество  $Y$  хаусдорфова пространства  $X$  замкнуто.*

**Доказательство.** Мы должны показать, что  $X \setminus Y$  открыто. Выберем сначала произвольную точку  $x \in X \setminus Y$ , и для каждой точки  $y \in Y$  рассмотрим непересекающиеся окрестности  $U^y$  и  $U^x(y)$ , существующие в силу хаусдорфовости пространства  $X$ . Тогда  $\{U^y\}_{y \in Y}$  — открытое покрытие  $Y$ , из которого, в силу компактности  $Y$ , можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U^{y_1}, \dots, U^{y_n}\}$ . Так как  $U^x(y_i)$  не пересекает  $U^{y_i}$ , то конечное пересечение  $U^x = \bigcap_i U^x(y_i)$ , являющееся окрестностью точки  $x$ , не пересекает все  $U^{y_i}$  и, значит, их объединение, а с ним и содержащееся в нем  $Y$ .

Итак, для каждого  $x \in X \setminus Y$  мы построили окрестность  $U^x$ , не пересекающую  $Y$ . Объединение таких окрестностей является открытым подмножеством  $X$  (как объединение открытых множеств) и равно  $X \setminus Y$ .  $\square$

**Следствие 5.17.** *Пусть  $X$  — метрическое пространство, тогда каждое его компактное подмножество — замкнуто и ограничено. В частности, это имеет место в случае  $X = \mathbb{R}^n$ .*

**Следствие 5.18** (Критерий компактности подмножеств  $\mathbb{R}^n$ ). *Подмножество  $X \subset \mathbb{R}^n$  компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено.*

**Доказательство.** То, что все компактные  $X$  — такие, утверждается в следствии 5.17. Обратно, если  $X \subset \mathbb{R}^n$  замкнуто и ограничено, то оно лежит в некотором кирпиче. В силу теоремы 5.8, кирпич компактен, поэтому, являясь замкнутым подмножеством компакта,  $X$  также компактно по предложению 5.15.  $\square$

**Следствие 5.19.** *Образ кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  в произвольном топологическом пространстве  $X$  компактен. Если  $X$  — метрическое пространство, в частности, если  $X = \mathbb{R}^n$ , то образ кривой замкнут и ограничен.*

Приведем следствие, являющееся одной из важных теорем математического анализа.

**Теорема 5.20.** *Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция на компактном топологическом пространстве  $X$ . Тогда  $f$  ограничена и достигает своих точных верхних и нижних граней, т.е. существуют  $x_{\min}, x_{\max} \in X$ , для которых  $f(x_{\min}) = \inf_{x \in X} f(x)$  и  $f(x_{\max}) = \sup_{x \in X} f(x)$ .*

**Доказательство.** Действительно, по предложению 5.14, множество  $f(X) \subset \mathbb{R}$  компактно, поэтому, в силу предложения 5.13, оно ограничено (а это и есть ограниченность функции  $f$ ), а, по предложению 5.16, оно замкнуто. Так как точные верхняя и нижняя грани множества  $f(X)$  являются его точками прикосновения, то замкнутость  $f(X)$ , в силу следствия 4.12, влечет принадлежность этих точек множеству  $f(X)$ , а это и означает достижимость точных верхней и нижней граней.  $\square$

**Следствие 5.21.** *Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  — кривая в метрическом пространстве  $X$ , например в  $\mathbb{R}^n$ , и  $P \in X$  — точка, не лежащая на этой кривой, т.е. не принадлежащая образу отображения  $\gamma$ . Тогда функция  $f(t) = |P\gamma(t)|$  расстояния от  $P$  до точек кривой  $\gamma(t)$  достигает своего минимума, и этот минимум положителен.*

**Доказательство.** Действительно, функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  как композиция непрерывного отображения  $\gamma$  и непрерывной функции расстояния до данной точки (см. задачу 3.27), поэтому, в силу теоремы 5.20, функция  $f$  достигает своего наименьшего значения в некоторой точке  $t_0 \in [a, b]$ . Но тогда  $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$ , так как  $P$  не лежит на кривой.  $\square$

### 5.1.2 Достаточное условие гомеоморфности непрерывного биективного отображения и примеры приложения

Комбинируя предложения 5.14, 5.15 и 5.16, приходим к следующей теореме, которая во многих случаях существенно облегчает проверку гомеоморфности топологических пространств, позволяя доказывать непрерывность только прямого отображения.

**Теорема 5.22.** *Непрерывное биективное отображение  $f: X \rightarrow Y$  компактного пространства  $X$  в хаусдорфово пространство  $Y$  — гомеоморфизм.*

**Доказательство.** Достаточно проверить, что обратное отображение  $f^{-1}$  непрерывно. Для доказательства последнего воспользуемся определением непрерывности через замкнутые подмножества: отображение непрерывно, если и только если прообраз каждого замкнутого множества замкнут. В нашем случае прообраз при отображении  $f^{-1}$  является образом отображения  $f$ . Таким образом, требуется проверить, что  $f$ -образ каждого замкнутого в  $X$  подмножества  $A$  замкнут в  $Y$ .

Так как  $X$  компактно, то, по предложению 5.15, множество  $A$  тоже компактно. По предложению 5.14, множество  $f(A)$  компактно. Наконец, так как  $Y$  — хаусдорфово, то, по предложению 5.16, множество  $f(A)$  замкнуто в  $Y$ , что и требовалось.  $\square$

Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

**Пример 5.23.** Отображение  $f$  из полуинтервала  $[0, 2\pi)$  в окружность  $\{x^2 + y^2 = 1\}$ , заданное формулой  $f: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ , взаимно однозначно и непрерывно, гомеоморфизмом не является, так как окружность компактна (замкнута и ограничена), а полуинтервал — нет.

Покажем, как можно использовать теорему 5.22 для доказательства гомеоморфности тех или иных пространств.

**Пример 5.24.** Рассмотрим на плоскости с координатами  $x, y$  окружность  $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ , и пусть  $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$  — замкнутая полуокружность. Покажем, что  $X$  гомеоморфно отрезку  $[-1, 1]$ .

Рассмотрим проекцию  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  на ось абсцисс  $\mathbb{R}$ , заданную так:  $\pi: (x, y) \rightarrow x$ . В силу следствия 4.24, это отображение непрерывно. В силу предложения 3.28, ограничение  $f$  отображения  $\pi$  на  $X$  и его образ  $\pi(X) = [-1, 1]$  — также непрерывно. Ясно, что  $f$  биективно, а  $X$  компактно как замкнутое ограниченное подмножество плоскости (см. следствие 5.18). Отрезок  $[-1, 1]$  — хаусдорфов, так как его топология — метрическая (предложение 3.7). Осталось применить теорему 5.22.

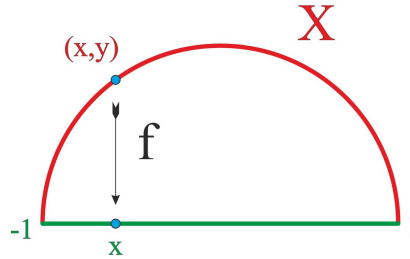


Рис. 5.1: Замкнутый полукруг гомеоморфен отрезку.

**Пример 5.25.** Если в примере 5.24 рассмотреть открытую полуокружность  $Y = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$ , то ограничение отображения  $f: X \rightarrow [-1, 1]$ , построенного в этом примере, на  $Y$  и его образ  $f(Y) = (-1, 1)$  будет гомеоморфизмом в силу следствия 4.4.

**Пример 5.26.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$  рассмотрим кольцо  $X = \{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$ , где  $0 < a < b < \infty$ . Также в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$  рассмотрим цилиндр  $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, a \leq z \leq b\}$ . Покажем, что  $X$  и  $Y$  гомеоморфны. Построим отображение  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  следующим образом:

$$F: (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Координатные функции этого отображения непрерывны в силу следствия 4.24 и предложения 3.18, поэтому  $F$  — непрерывное отображение в силу предложения 4.22. В силу предложения 3.28, ограничение  $f$  отображения  $F$  на  $X$  и его образ  $Y = F(X)$  — также непрерывно. Непосредственно проверяется, что  $f$  — биективное отображение. Так как  $X$  — замкнутое и ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^2$ , а  $Y$  — хаусдорфово, применима теорема 5.22, завершающая доказательство гомеоморфности  $X$  и  $Y$ .

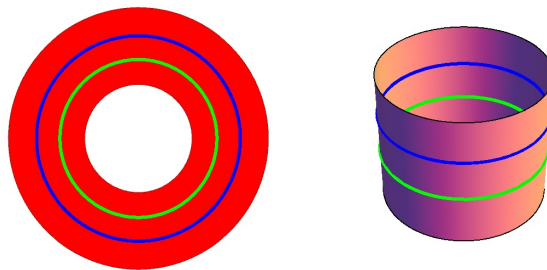


Рис. 5.2: Кольцо гомеоморфно цилиндру.

**Задача 5.27.** Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на  $360^\circ$ , см. рис. 5.3. Покажите, что полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру из задачи 5.26.

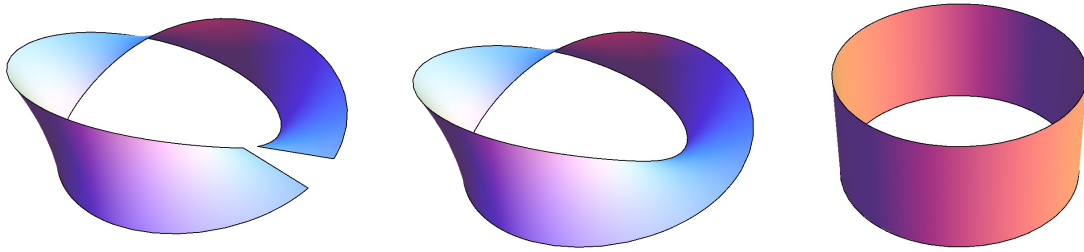


Рис. 5.3: Дважды перекрученная полоска гомеоморфна цилиндру.

## 5.2 Критерий компактности метрических пространств

Как мы отмечали при обсуждении компактности отрезка и кирпича (пример 5.6), для метрических пространств компактность можно вывести из аналогов аксиомы полноты вещественных чисел и возможности разбивать пространство на конечное число сколь угодно малых частей. Сейчас мы сформулируем два свойства метрических пространств, выполнение которых равносильно компактности.

### 5.2.1 Полная ограниченность

Пусть  $X$  — метрическое пространство. Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Подмножество  $S$  пространства  $X$  называется  $\varepsilon$ -сетью, если для каждой точки  $x \in X$  существует  $s \in S$  такая, что  $|xs| < \varepsilon$ . Иными словами,  $S$  является  $\varepsilon$ -сетью, если и только если семейство открытых шаров  $\{U_\varepsilon(s)\}_{s \in S}$  покрывает  $X$ .

Выше мы отметили (предложение 5.13), что для компактности метрического пространства требуется ограниченность. Однако это свойство еще не достаточно сильное, чтобы участвовать в критерии компактности. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для каждого  $\varepsilon > 0$  оно содержит конечную  $\varepsilon$ -сеть. Свойство пространства быть вполне ограниченным называют также **полной ограниченностью** этого пространства.

**Замечание 5.28.** Если пространство  $X$  вполне ограничено, то оно также и ограничено. Действительно, если  $S$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть, а  $d$  — максимальное расстояние между точками из  $S$ , то для любых  $x, y \in X$  существуют  $s_x, s_y \in S$ , для которых  $|xs_x| < \varepsilon$ ,  $|ys_y| < \varepsilon$ , поэтому  $|xy| < d + 2\varepsilon$ . Таким образом,  $\text{diam } X \leq d + 2\varepsilon$  и, значит, в силу предложения 5.12, пространство  $X$  ограничено.

**Пример 5.29.** Пусть  $X$  — бесконечное множество. Превратим  $X$  в метрическое пространство, положив расстояние между различными точками из  $X$  равным 1. Тогда это пространство дискретно и, в силу примера 5.3, некомпактно, хотя и ограничено. Отметим, что для  $\varepsilon < 1$  единственная  $\varepsilon$ -сеть такого  $X$  — это само  $X$ , так что  $X$  не является вполне ограниченным.

Отметим далее, что полной ограниченности для компактности недостаточно.

**Пример 5.30.** Пусть  $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ , тогда  $X$  — вполне ограничено, так как для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $m \in \mathbb{N}$ , для которого  $1/m < \varepsilon$  и, значит, множество точек  $\{k/m\}_{k=1}^m$  образует конечную  $\varepsilon$ -сеть. Однако  $X$  некомпактно, так как не является замкнутым подмножеством прямой, см. следствие 5.17.

### 5.2.2 Фундаментальные последовательности и полнота

Последовательность  $x_1, x_2, \dots$  точек метрического пространства называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N$  такое, что при всех  $p, q \geq N$  выполняется  $|x_p x_q| < \varepsilon$ . Метрическое пространство  $X$  называется **полным**, если каждая его фундаментальная последовательность сходится.

**Замечание 5.31.** Если в фундаментальной последовательности содержится сходящаяся подпоследовательность, то и вся последовательность сходится, причем к тому же пределу (проверьте).

**Замечание 5.32.** Аксиома полноты  $\mathbb{R}$ , в форме принципа Кантора о вложенных отрезках, эквивалентна сформулированной только что полноте в терминах фундаментальных последовательностей. Действительно, легко

видеть, что фундаментальность последовательности влечет ее ограниченность. Затем показывается, что каждая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. Это осуществляется методом деления отрезка пополам и построением последовательности вложенных отрезков, в каждом из которых содержится бесконечное число элементов последовательности: единственная общая точка этих отрезков и есть предел соответствующей подпоследовательности. И, наконец, делается тривиальное замечание: если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и вся фундаментальная последовательность тоже сходится (к тому же пределу). Тем самым, показывается, что принцип Кантора влечет сходимость фундаментальных последовательностей вещественных чисел. Обратное, если каждая фундаментальная последовательность сходится, то левые (правые) концы последовательности вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю, образуют фундаментальную последовательность, предельная точка которой является общей точкой отрезков, так как она лежит правее всех левых концов и левее всех правых, а поэтому принадлежит всем отрезкам.

В полных метрических пространствах на замену принципу вложенных отрезков приходит принцип вложенных шаров.

**Теорема 5.33** (Принцип вложенных шаров). Пусть  $X$  — полное метрическое пространство, а  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  — последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Тогда  $\bigcap B_i$  состоит ровно из одной точки.

**Доказательство.** Выбирая в каждом шаре  $B_i$  его центр  $x_i$ , получим фундаментальную последовательность, которая, в силу полноты пространства  $X$ , сходится к некоторому  $x \in X$ . Для каждого  $n$  вся подпоследовательность  $x_n, x_{n+1}, \dots$  лежит в  $B_n$ , поэтому  $x$  — точка прикосновения для  $B_n$ , так что  $x \in B_n$  в силу замкнутости шара. Это и доказывает, что  $x$  принадлежит всем шарам, а, значит, и их пересечению. Двух точек в пересечении быть не может, так как иначе расстояние  $r$  между этими точками положительно, но они обе не поместятся в шаре радиуса  $r/3$ .  $\square$

**Пример 5.34.** Пространство  $X = (0, 1] \subset \mathbb{R}$  из примера 5.30 не является полным. Действительно, последовательность  $x_n = 1/n$  фундаментальна, но не сходится, так как  $X$  не содержит 0.

**Пример 5.35.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  — полное. Действительно, фундаментальность последовательности точек  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$  равносильна фундаментальности **координатных последовательностей**  $x_{1k}, x_{2k}, \dots$  для всех  $k = 1, \dots, n$  (убедитесь в этом). Теперь полнота  $\mathbb{R}^n$  вытекает из полноты  $\mathbb{R}$ .

**Предложение 5.36.** Подпространство полного метрического пространства полное, если и только если оно замкнуто. В частности, все полные подпространства  $\mathbb{R}^n$  — это всевозможные замкнутые подмножества  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $X$  — полное метрическое пространство и  $Y \subset X$  — подпространство. Предположим, что пространство  $Y$  — полное. Возьмем произвольный  $x \in X$ , являющийся точкой прикосновения для  $Y$ , и выберем в каждой шаровой окрестности  $U_{1/n}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , некоторую точку  $x_n$ . Тогда  $x_n \rightarrow x$ , поэтому последовательность  $x_n$  фундаментальна. Так как  $Y$  — полное, предел  $x$  этой последовательности содержится в  $Y$ . Итак, мы показали, что все точки прикосновения множества  $Y$  содержатся в  $Y$ , следовательно,  $Y$  — замкнутое подмножество  $X$ .

Обратно, пусть теперь  $Y$  — замкнутое подмножество  $X$ . Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность  $x_n \in Y$ . Так как  $X$  — полное, то  $x_n$  сходится к некоторой точке  $x \in X$ . Но тогда в каждой окрестности  $U^x$  лежат точки  $x_n \in Y$ , поэтому  $x$  — точка прикосновения  $Y$ . В силу замкнутости,  $x \in Y$ . Таким образом, мы показали, что каждая фундаментальная последовательность в  $Y$  сходится к некоторой точке  $Y$ , поэтому пространство  $Y$  — полное.  $\square$

**Задача 5.37.** Докажите Критерий Коши о непрерывном продолжении отображения  $f: X \setminus \{x\} \rightarrow Y$ , где  $X$  — произвольное метрическое пространство, а  $Y$  — полное. А именно, покажите, что если  $\mathcal{B}_x$  — произвольная база окрестностей точки  $x$ , то  $f$  продолжается в  $x$  до отображения  $g: X \rightarrow Y$ , непрерывного в точке  $x$ , если и только если для любого  $\varepsilon > 0$  существует окрестность  $U^x \in \mathcal{B}_x$  такая, что для любых  $x_1, x_2 \in U^x$  выполняется  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . **Указание:** замените в доказательстве теоремы 3.26 отрезки  $[a_k, b_k]$  на вложенные шары и воспользуйтесь предложением 5.36.



### 5.2.3 Критерий компактности метрического пространства

Докажем теперь критерий компактности для общих метрических пространств.

**Теорема 5.38.** *Метрическое пространство компактно, если и только если оно полное и вполне ограниченное.*

**Доказательство.** Доказательство будет следовать из ряда лемм.

**Лемма 5.39.** *Пусть  $X$  — компактное метрическое пространство, тогда оно полное.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что пространство  $X$  не полно. Тогда существует фундаментальная последовательность  $x_1, x_2, \dots$ , которая не имеет предела. Это, в частности, означает, что для каждой точки  $x \in X$ , отличной от всех точек  $x_i$ , существует окрестность  $U^x$ , не содержащая точек  $x_i$ . Значит,  $U := X \setminus \{x_i\}$  — открытое множество.

Более того, так как каждая точка  $x_i$  также не является пределом последовательности, фундаментальность последовательности влечет, что  $x_i$  встречается в последовательности конечное число раз. Действительно, если бы существовала подпоследовательность  $x_{i_k}$  такая, что все  $x_{i_k}$  равны  $x_i$ , то, в силу замечания 5.31, вся последовательность сходилась бы к  $x_i$ , противоречие.

Итак, мы показали, что в последовательности  $x_1, x_2, \dots$  имеется бесконечное число различных точек. Без ограничения общности, будем считать, что все точки последовательности различны. Но тогда, так как ни одна из  $x_i$  не является пределом последовательности, существует  $U^{x_i}$ , в которой не содержится других точек последовательности. Рассмотрим открытое покрытие  $\mathcal{U} = \{U\} \cup \{U^{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$  пространства  $X$ . Так как для любого  $i$  семейство  $\mathcal{U} \setminus \{U^{x_i}\}$  покрытием не является, а все точки  $x_i$  различные, из покрытия  $\mathcal{U}$  нельзя выделить конечного подпокрытия. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.  $\square$

**Лемма 5.40.** *Пусть  $X$  — компактное метрическое пространство, тогда оно вполне ограничено.*

**Доказательство.** Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим открытое покрытие  $\{U_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$  пространства  $X$ . Так как пространство  $X$  компактно, в этом покрытии содержится конечное подпокрытие  $\{U_\varepsilon(x_1), \dots, U_\varepsilon(x_n)\}$ , но тогда  $\{x_1, \dots, x_n\}$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть, поэтому  $X$  — вполне ограничено в силу произвольности  $\varepsilon$ .  $\square$

Леммы 5.39 и 5.40 доказывают прямое утверждение теоремы, а именно, что каждое компактное метрическое пространство полно и вполне ограничено. Докажем теперь обратное утверждение. Для этого нам понадобятся еще две леммы.

**Лемма 5.41.** *Пусть  $X$  — вполне ограниченное метрическое пространство, тогда из каждого его открытого покрытия можно выбрать не более чем счетное подпокрытие.*

**Доказательство.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  выберем в  $X$  конечную  $(1/n)$ -сеть  $S_n$ , тогда  $\mathcal{U}_n = \{U_{1/n}(s)\}_{s \in S_n}$  — конечное покрытие  $X$ . Положим  $\mathcal{U} = \cup_n \mathcal{U}_n$ , тогда  $\mathcal{U}$  — не более чем счетное покрытие  $X$ .

Выберем произвольное открытое покрытие  $\mathcal{V}$  пространства  $X$  и покажем, как из  $\mathcal{V}$  можно выбрать не более чем счетное подпокрытие, пользуясь покрытием  $\mathcal{U}$ . Для каждого  $U \in \mathcal{U}$  рассмотрим все  $V \in \mathcal{V}$ , содержащие  $U$ . Если таких  $V$  нет, то положим  $V_U = \emptyset$ . Иначе выберем любой из этих  $V$  и положим  $V_U = V$ . Покажем, что семейство всех непустых  $V_U$  образует покрытие  $X$ .

Берем произвольную точку  $x \in X$ , тогда существует  $V \in \mathcal{V}$ , содержащее  $x$  (так как  $\mathcal{V}$  — покрытие). По определению метрической топологии, существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $U_\varepsilon(x) \subset V$ . Выберем  $n \in \mathbb{N}$  таким, чтобы выполнялось  $1/n < \varepsilon/2$ . Так как  $\mathcal{U}_n$  — покрытие  $X$ , существует  $U_{1/n}(s) \in \mathcal{U}_n$ , содержащее  $x$ . Но для любой точки  $y \in U_{1/n}(s)$  выполняется  $|xy| \leq |xs| + |sy| < 1/n + 1/n < \varepsilon$ , поэтому  $U_{1/n}(s) \subset U_\varepsilon(x) \subset V$ . Таким образом, для  $U = U_{1/n}(s)$  множество  $V_U$  непусто и, значит,  $x \in U \subset V_U$ . Таким образом, семейство всех непустых  $V_U$  является не более чем счетным подпокрытием в  $\mathcal{V}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.42.** *Пусть  $X$  — вполне ограниченное полное метрическое пространство, тогда из любой последовательности  $x_1, x_2, \dots$  в  $X$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

**Доказательство.** Так как  $X$  вполне ограничено, то для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует конечная  $(1/n)$ -сеть  $S_n$  и соответствующее ей конечное покрытие  $\mathcal{U}_n = \{U_{1/n}(s)\}_{s \in S_n}$ . Так как  $\mathcal{U}_1$  конечно, в одном из его элементов, скажем в  $U_1$ , содержится бесконечно много точек  $x_i$ . Эти элементы обозначим  $x_1^1, x_2^1, \dots$ . Аналогично, в одном из элементов, скажем в  $U_2$ , конечного покрытия  $\mathcal{U}_2$  содержится бесконечно много  $x_i^1$ . Эти элементы обозначим  $x_1^2, x_2^2, \dots$ . Продолжая этот процесс, мы для каждого  $n \in \mathbb{N}$  построим  $U_n \in \mathcal{U}_n$ , в котором содержится подпоследовательность  $x_1^n, x_2^n, \dots$  последовательности  $x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \dots$

Рассмотрим последовательность  $y_1 = x_1^1, y_2 = x_2^2, \dots$ , являющуюся подпоследовательностью в  $x_1, x_2, \dots$ . Тогда для каждого  $n \in \mathbb{N}$  все  $y_i$  при  $i \geq n$  лежат в  $U_n$ , поэтому для любых  $p, q \geq n$  имеем  $|y_p y_q| < 2/n$ , так что последовательность  $y_1, y_2, \dots$  фундаментальна. Так как  $X$  — полное, то эта последовательность сходится, что и завершает доказательство леммы.  $\square$

Завершим доказательство теоремы. Пусть  $X$  — вполне ограниченное полное метрическое пространство. По лемме 5.41, достаточно показать, что из каждого счетного открытого покрытия  $\mathcal{U}$  пространства  $X$  можно выбрать конечное подпокрытие. Предположим, что имеется некоторое  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ , из которого такого подпокрытия выбрать нельзя. Мы приведем к противоречию, показав, что тогда в  $X$  существует последовательность, из которой нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что невозможно в силу леммы 5.42.

Так как для каждого  $n \in \mathbb{N}$  семейство  $\{U_1, \dots, U_n\}$  не покрывает  $X$ , существует  $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Заметим, что, по построению, каждое  $U_i$  содержит лишь конечное число элементов последовательности  $x_1, x_2, \dots$ . Покажем, что последовательность  $x_1, x_2, \dots$  не содержит сходящихся подпоследовательностей, чем и завершим доказательство. Предположим противное, т.е. что некоторая подпоследовательность  $x_{n_k}$  сходится к некоторому  $x \in X$ . Так как  $\mathcal{U}$  — покрытие, существует  $U_m \in \mathcal{U}$  такое, что  $x \in U_m$ . Но тогда, в силу  $x_{n_k} \rightarrow x$  при  $k \rightarrow \infty$ , множество  $U_m$  содержит бесконечное число элементов последовательности  $x_1, x_2, \dots$ , противоречие.  $\square$

### 5.2.4 Секвенциально компактные пространства

Топологическое пространство называется *секвенциально<sup>1</sup> компактным*, если из каждой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Замечание 5.43.** Вообще говоря, компактность и секвенциальная компактность друг с другом не связаны: бывают топологические пространства, обладающие только одним из этих свойств (соответствующие примеры достаточно сложные, поэтому мы их не приводим). Тем не менее, в случае метрических пространств эти понятия эквивалентны.

**Теорема 5.44.** Пусть  $X$  — метрическое пространство. Тогда оно компактно, если и только если оно — секвенциально компактно.

**Доказательство.** Пусть сначала  $X$  компактно. По теореме 5.38, пространство  $X$  — полное и ограниченное. Осталось применить лемму 5.42.

Пусть теперь  $X$  секвенциально компактно. В силу теоремы 5.38, достаточно доказать, что  $X$  — полное и вполне ограниченное.

Докажем сначала полноту. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность в  $X$ . По условию, в этой последовательности имеется сходящаяся подпоследовательность. Но фундаментальность влечет, что и вся последовательность тоже сходится, см. замечание 5.31.

Докажем, что  $X$  вполне ограничено. Предположим противное, т.е. существует  $\varepsilon > 0$ , для которого нет ни одной конечной  $\varepsilon$ -сети. Возьмем произвольную точку  $x_1$ . Так как  $\{x_1\}$  не является  $\varepsilon$ -сетью, существует  $x_2$  такое, что  $|x_1 x_2| \geq \varepsilon$ . Так как  $\{x_1, x_2\}$  не является  $\varepsilon$ -сетью, существует  $x_3$  такое, что  $|x_3 x_i| \geq \varepsilon$  для  $i = 1, 2$ . Продолжая этот процесс, мы построим последовательность  $x_1, x_2, \dots$ , в которой расстояние между любыми двумя различными точками не меньше  $\varepsilon$ . Но тогда в этой последовательности нет ни одной сходящейся подпоследовательности, так как каждая сходящаяся последовательность фундаментальна.  $\square$

## 5.3 Фактор-топология

Следующая операция особенно важна в алгебраической топологии. Нам она пригодится при изучении топологических графов, которые мы будем получать, склеивая отрезки по их концам, а также триангулированных поверхностей, которые мы будем получать из треугольников, склеивая их стороны.

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — сюръективное отображение топологических пространств. Отображение  $f$  называется *факторизацией*, если подмножество  $U \subset Y$  открыто тогда и только тогда, когда  $f^{-1}(U)$  открыто.

**Предложение 5.45.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение факторизации топологических пространств, тогда  $f$  непрерывно, причем топология на  $Y$  — самая сильная среди всех топологий, для которых  $f$  непрерывно. В частности, топология на  $Y$  однозначно определяется  $f$ : для любой другой топологии отображение  $f$  не является факторизацией.

<sup>1</sup>Этот термин происходит от английского слова sequence — последовательность.

**Доказательство.** Обозначим топологию на  $Y$  через  $\tau_Y$ . Так как прообраз каждого открытого множества в  $Y$  открыт, факторизация  $f$  непрерывна. Если  $\tau$  — другая топология на  $Y$ , в которой  $f$  непрерывно, то для каждого  $V \in \tau$  множество  $f^{-1}(V)$  открыто, поэтому  $V \in \tau_Y$ . Итак, все топологии, для которых  $f$  непрерывно, содержатся в  $\tau_Y$ . Таким образом,  $\tau_Y$  — самая сильная топология среди всех топологий, для которых  $f$  — непрерывно. Такая топология однозначно определена, так как для двух наибольших топологий  $\tau_1$  и  $\tau_2$  выполняется одновременно оба включения  $\tau_1 \subset \tau_2$  и  $\tau_1 \supset \tau_2$ .  $\square$

Приведем несколько естественных способов задания факторизации. Все они основаны на построении некоторого разбиения  $\mathcal{P}$  топологического пространства  $X$ , так как каждое разбиение порождает каноническую проекцию  $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}$ , отображающую каждый  $x \in X$  в тот элемент разбиения  $\mathcal{P}$ , который этот  $x$  содержит. Варианты построения разбиения  $\mathcal{P}$ :

- с помощью сюръективного отображения  $f: X \rightarrow Y$  в некоторое множество  $Y$ , для которого  $\mathcal{P} = \{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ ; в этом случае разбиение  $\mathcal{P}$  будем также обозначать  $X/f$ ;
- задании на  $X$  отношения эквивалентности  $\nu$ , у которого классы эквивалентности — элементы разбиения  $\mathcal{P}$ ; в этом случае разбиение  $\mathcal{P}$  будем также обозначать  $X/\nu$ .

В каждом случае мы порождаем на  $\mathcal{P}$  единственную топологию, для которой каноническая проекция  $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}$  — факторизация. Для этого мы рассматриваем на  $\mathcal{P}$  систему подмножеств  $\tau$ , определенную так же, как и выше:  $U \in \tau$ , если и только если  $\pi^{-1}(U)$  — открытое подмножество  $X$ . Непосредственно проверяется (сделайте это), что семейство  $\tau$  — топология, поэтому она и является той единственной, которая превращает  $\pi$  в факторизацию. Построенное семейство  $\tau$  называется **фактор-топологией**, а разбиение  $\mathcal{P}$  вместе с этой топологией — **фактор-пространством**.

Отображение топологических пространств, переводящее открытые множества в открытые (замкнутые — в замкнутые) называется **открытым (замкнутым)**.

**Предложение 5.46.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — открытое или замкнутое непрерывное сюръективное отображение топологических пространств, тогда  $f$  — факторизация.

**Доказательство.** Пусть  $f$  открыто. Рассмотрим произвольное подмножество  $A \subset Y$ . Так как  $f$  сюръективно, то  $A = f(f^{-1}(A))$ . Таким образом, если  $A$  открыто, то  $f^{-1}(A)$  открыто в силу непрерывности  $f$ . Если же  $f^{-1}(A)$  открыто, то  $A$  открыто в виду открытости  $f$ . Для разбора случая замкнутости  $f$  достаточно воспользоваться тем, что  $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ .  $\square$

Приведем пример семейства замкнутых отображения, который фактически уже обсуждался выше. В доказательстве теоремы 5.22 мы уже собирали вместе предложения 5.15, 5.14 и 5.16, однако дополнительным условием была биективность отображения. Если отказаться от биективности, то придем к следующему результату.

**Следствие 5.47.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение компактного пространства  $X$  в хаусдорфово пространство  $Y$ . Тогда  $f$  — замкнутое отображение. В частности, если  $f$  сюръективно, то  $f$  — факторизация, а если  $f$  — биективно, то  $f$  — гомеоморфизм.

Отметим, что не всякая факторизация является открытым (замкнутым) отображением.

**Пример 5.48** (Факторизация, не являющаяся открытым отображением). Пусть  $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow [0, 2]$ , заданное так:  $f(x) = x$  при  $x \in [0, 1]$ , и  $f(x) = x - 1$  при  $x \in [2, 3]$ . По следствию 5.47, отображение  $f$  — факторизация. Тем не менее,  $f$  не является открытым, поскольку, например, отрезок  $[0, 1]$  открыт в  $[0, 1] \cup [2, 3]$ , но не открыт в  $[0, 2]$ .

**Пример 5.49** (Факторизация, не являющаяся замкнутым отображением). Рассмотрим проекцию  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi: (x, y) \mapsto x$ . Это отображение открыто, так как открытое подмножество  $\mathbb{R}^2$  является объединением множеств вида  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ , а его  $\pi$ -образ — объединением интервалов  $(a_1, b_1)$ . Однако замкнутое множество — гипербола  $xy = 1$  переходит при отображении  $\pi$  в незамкнутое  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Следующий результат во многих случаях позволяет понимать, чему же гомеоморфно рассматриваемое фактор-пространство.

**Теорема 5.50.** Пусть  $X$  — компактное пространство,  $Y$  — хаусдорфово пространство, а  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное сюръективное отображение. Тогда  $Y$  гомеоморфно фактор-пространству  $X/f$ .

**Доказательство.** В силу следствия 5.47, отображение  $f$  является факторизацией. Кроме того,  $f$  порождает биекцию  $g: Y \rightarrow X/f$ , для которой  $g: y \mapsto f^{-1}(y)$ . Эта биекция позволяет перенести топологию с  $Y$  в  $X/f$ . Пусть  $\pi: X \rightarrow X/f$  — каноническая проекция, которая ставит каждому  $x \in X$  то  $f^{-1}(y)$ , которое этот  $x$  содержит. Иными словами, мы заменили каждый  $y$  соответствующим элементов  $f^{-1}(y)$  разбиения  $X/f$ , сохранив топологию, а отображение  $f$  переименовали в  $\pi$ . Следовательно,  $\pi$  — факторизация, перенесенная на  $X/f$  топология является фактор-топологией, так что  $X/f$  с этой топологией — фактор-пространство, а  $g$  — гомеоморфизм по построению.  $\square$

В алгебраической топологии часто из одних топологических пространств получают другие, склеивая подмножества в точки или приклеивая одно подпространство к другому. Определим эти операции. Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $Z$  — подмножество  $X$ . Рассмотрим отношение эквивалентности  $\nu$ , у которого один из классов — это  $\{Z\}$ , а все остальные классы — одноточечные, порожденные элементами, не попавшими в  $Z$ . Тогда фактор-пространство  $X/\nu$  получается *склеивкой  $Z$  в точку*. Например, пусть  $X = [0, 1]$ , а  $Z$  состоит из одного класса  $\{0, 1\}$ . Говорят, что соответствующее пространство получается из отрезка  $[0, 1]$  склеиванием его концов.

**Пример 5.51.** Пусть  $X = [0, 1]$ , а  $Y$  получается из  $X$  склеиванием его концов. Если  $\nu$  — соответствующая эквивалентность, то  $X/\nu$  гомеоморфно окружности  $S^1$ . Действительно, пусть  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $f: t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . Тогда  $f$  — сюръективное и непрерывное отображение из компактного пространства в хаусдорфово. По теореме 5.50,  $[0, 1]/f = [0, 1]/\nu$  гомеоморфно  $S^1$ .

Ровно также показывается, что если склеить границу круга в точку, то получится сфера.

Другой тип склейки позволяет склеивать разные пространства. Рассмотрим пример: пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $Z \subset X$ , и  $f: Z \rightarrow Y$  — отображение (обычно гомеоморфизм). Тогда на пространстве  $X \sqcup Y$  возникает отношение эквивалентности, в котором точки, не попавшие в  $Z \sqcup f(Z)$ , порождают одноточечные классы, а попавшие — классы вида  $f^{-1}(y) \sqcup \{y\}$ ,  $y \in f(Z)$ . Полученное фактор-пространство обозначается  $X \cup_f Y$  и называется *склеивкой пространств  $X$  и  $Y$  по отображению  $f$* .

**Пример 5.52.** Если склеить два круга по гомеоморфизму их граничных окружностей, то получится сфера. Прделаем это для (совмещенных) кругов  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , и сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Один круг отобразим на верхнюю полусферу  $(x, y, 0) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ , а другой — на нижнюю  $(x, y, 0) \mapsto (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . В результате получим непрерывное сюръективное отображение из компактного пространства — дизъюнктного объединения кругов, в хаусдорфово и применим теорему 5.50.

## Упражнения к главе 5

**Упражнение 5.1.** Пусть  $A$  и  $B$  — непустые подмножества метрического пространства. *Расстоянием*  $|AB|$  между ними назовем число  $\inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$ .

- (1) Покажите, что это расстояние не обязано удовлетворять неравенству треугольника.
- (2) Приведите пример двух замкнутых непересекающихся подмножеств, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Покажите, что между непересекающимися непустыми компактными подмножествами это расстояние всегда положительно (разрешается воспользоваться теоремой Тихонова).

**Упражнение 5.2.** Докажите, что дважды перекрученная лента (см. рис. 5.3 из лекции) гомеоморфна цилиндру.

**Упражнение 5.3.** Запишем каждую матрицу размера  $n \times n$  в виде вектора длины  $n^2$ , разместив строки матрицы одну за другой на одной строке. Эта запись позволяет отождествить множество  $M(n)$  всех таких матриц с  $\mathbb{R}^{n^2}$  и, тем самым, превратить  $M(n)$  и все его подмножества в топологические пространства.

- (1) Чему гомеоморфно пространство  $SO(2) \subset \mathbb{R}^4$ , состоящее из всех ортогональных  $2 \times 2$ -матриц с определителем 1?
- (2) Чему гомеоморфно пространство  $O(2) \subset \mathbb{R}^4$ , состоящее из всех ортогональных  $2 \times 2$ -матриц?

**Упражнение 5.4.** Подмножество топологического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит не более чем счетное всюду плотное подмножество. Покажите, что компактное метрическое пространство сепарабельно. Отметим, что компактное топологическое пространство сепарабельным быть не обязано.

**Упражнение 5.5.** *Прямой Зоргенфрея* называется прямая  $\mathbb{R}$  со следующей *топологией Зоргенфрея*: базой это топологии являются всевозможные полуинтервалы  $[a, b)$ .

- (1) Покажите, что топология Зоргенфрея тоньше, чем стандартная топология, т.е. что все открытые подмножества в стандартной топологии открыты и в топологии Зоргенфрея. В частности, каждый полуинтервал  $[a, b)$  — открыто-замкнутое множество.
- (2) Покажите, что прямая Зоргенфрея некомпактна.
- (3) Покажите, что каждое компактное подмножество прямой Зоргенфрея не более чем счетно.
- (4) Приведите пример счетного подмножества прямой Зоргенфрея, не являющегося компактным.
- (5) Покажите, что последовательность  $x_i$  сходится к  $x$  в топологии Зоргенфрея, если и только если последовательность  $x_i$  сходится к  $x$  справа в стандартной топологии.
- (6) Покажите, что прямая Зоргенфрея сепарабельна.

**Упражнение 5.6** (лемма Лебега). Покажите, что для каждого открытого покрытия компактного метрического пространства  $X$  существует такое число  $\lambda > 0$ , называемое *числом Лебега*, что для каждого подмножества  $Y \subset X$  с диаметром меньшим  $\lambda$  имеется содержащий его элемент покрытия.

**Упражнение 5.7** (теорема Бэра). Подмножество топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность.

- (1) Покажите, что в полном метрическом пространстве пересечение не более чем счетного семейства открытых всюду плотных множеств — всюду плотно.
- (2) Покажите, что в полном метрическом пространстве объединение не более чем счетного числа нигде не плотных подмножеств не имеет внутренних точек, в частности, не совпадает с этим пространством.

## Дополнительные упражнения к главе 5

**Упражнение 5.8.** Функцию  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  на множестве  $X$  назовем *псевдометрикой*, если она удовлетворяет всем аксиомам метрики, кроме определенности. Иными словами, расстояние между разными элементами из  $X$  может равняться 0. Множество  $X$ , на котором задана псевдометрика, называется *псевдометрическим пространством*. Как и в случае метрики, псевдометрическое расстояние  $\rho(x, y)$  будем обозначать  $|xy|$ . Введем на псевдометрическом пространстве отношение: точки  $x$  и  $y$  из  $X$  находятся в этом отношении, если и только если  $|xy| = 0$ .

- Покажите, что введенное отношение является эквивалентностью. Через  $[x]$  обозначим класс этой эквивалентности, содержащий  $x$ .
- Покажите, что для любых  $x' \in [x]$  и  $y' \in [y]$  выполняется  $|x'y'| = |xy|$ . Таким образом, на множестве  $Y$  классов эквивалентности корректно определена функция  $\nu([x], [y]) = |xy|$ .
- Покажите, что  $\nu$  — метрика на  $Y$ . Будем говорить, что метрическое пространство  $Y$  получено из псевдометрического пространства  $X$  *факторизацией по нулевым расстояниям*.

**Упражнение 5.9.** Пусть  $X$  — произвольное метрическое пространство, а  $C$  — семейство всех его фундаментальных последовательностей.

- (1) Покажите, что для двух последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots)$  из  $C$  последовательность чисел  $|x_i y_i|$  сходится. Положим  $\rho(x, y) = \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i y_i|$ .
- (2) Покажите, что  $\rho$  — псевдометрика на  $C$ .
- (3) Покажите, что каждая подпоследовательность фундаментальной последовательности сама является фундаментальной, и расстояние  $\rho$  между этими последовательностями равно нулю.
- (4) Покажите, что в каждой фундаментальной последовательности  $x_1, x_2, \dots$  имеется подпоследовательность  $y_1, y_2, \dots$  такая, что  $|y_i y_j| \leq 1/\min\{i, j\}$ .
- (5) Обозначим  $Y$  метрическое пространство, полученное из  $C$  факторизацией по нулевым расстояниям. Покажите, что  $Y$  — полное метрическое пространство.
- (6) Покажите, что отображение  $f: X \rightarrow Y$ , ставящее в соответствие каждой точке  $x \in X$  класс эквивалентности постоянной последовательности  $(x, x, \dots)$ , изометрично.
- (7) Покажите, что  $f(X)$  всюду плотно в  $Y$ .
- (8) Полное метрическое пространство  $Z$  называется *пополнением* пространства  $X$ , если существует изометрия  $g: X \rightarrow Z$  такая, что  $g(X)$  всюду плотно в  $Z$ . Покажите, что любые два пополнения  $X$  изометричны, в частности, каждое пополнение  $Z$  пространства  $X$  изометрично построенному выше метрическому пространству  $Y$ .

# Лекция 6

## Связность и линейная связность

**План.** Открыто-замкнуты множества, связанное и несвязное топологические пространства, связность отрезка, связность объединения пересекающихся связных множеств, связная компонента точки, разбиение пространства на связные компоненты, связность замыкания связного множества, замкнутость связных компонент, связность непрерывного образа связного пространства, связность декартова произведения связных пространств, линейно связные пространства, линейно связные компоненты, соотношение между связностью и линейной связностью, связность и линейная связность выпуклых подмножеств нормированных пространств, связные подмножества прямой, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, пример связного, но не линейно связного пространства, локально линейно связные пространства, эквивалентность связности и линейной связности в локально линейно связных пространствах, непрерывность локально постоянного отображения, постоянство локально постоянного отображения на компонентах связности.

### 6.1 Связность

Как было отмечено выше, в каждом топологическом пространстве все пространство и пустое множество являются одновременно открытыми и замкнутыми. Такие множества иногда называют *открыто-замкнутыми*. Если нет других открыто-замкнутых подмножеств, то топологическое пространство называется *связным*, а иначе — *несвязным*. Таким образом, топологическое пространство несвязно, если его можно представить в виде объединения непустых непересекающихся открытых множеств (равносильно, непустых непересекающихся замкнутых множеств). Приведем еще один вариант формулировки несвязности. Как мы уже отмечали выше, объединение множеств называется *дизъюнктым*, если входящие в него множества попарно не пересекаются. Представление множества в виде дизъюнктивного объединения называется *разбиением* этого множества. Итак, топологическое пространство несвязно, если его можно разбить на непустые открытые (равносильно, непустые замкнутые) подмножества.

Говоря про связность (несвязность) подмножества топологического пространства, мы имеем в виду его соответствующее свойство как подпространства, т.е. как топологического пространства, наделенного индуцированной топологией. Итак, подмножество  $Y$  топологического пространства  $X$  несвязно, если существуют такие открытые подмножества  $U$  и  $V$  пространства  $X$ , что  $Y \cap U$  и  $Y \cap V$  непусты и разбивают  $Y$ , т.е.  $Y \subset U \cup V$ .

**Пример 6.1.** Дискретное топологическое пространство, состоящее не менее чем из двух точек, несвязно. Действительно, любое разбиение этого пространства на непустые подмножества является разбиением на открытые подмножества, а это и означает несвязность.

**Пример 6.2.** Любое антидискретное топологическое пространство связно. Действительно, это пространство не содержит непустого множества, отличного от всего пространства.

**Пример 6.3.** Подмножество  $[0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$  несвязно.

**Предложение 6.4.** Отрезок  $[a, b]$  связан.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют непустые непересекающиеся замкнутые подмножества  $A$  и  $B$  отрезка  $[a, b]$  такие, что  $A \sqcup B = [a, b]$ . Без ограничения общности предположим, что  $a \in A$ , и пусть  $c \in [a, b]$  — точная нижняя грань множества  $B$ . Так как точная нижняя грань  $B$  является точкой прикосновения  $B$ , а множество  $B$  замкнуто, то  $c \in B$ . Так как  $a \in A$  и  $A \cap B = \emptyset$ , то  $a \neq c$  и, значит,  $a < c$ . Снова, так как  $c$  — точная нижняя грань  $B$ , то  $[a, c] \subset A$ . Но тогда  $c$  — точка прикосновения для  $A$ , поэтому  $c \in A$  в силу замкнутости  $A$ . Итак, мы показали, что  $A \cap B \neq \emptyset$ , противоречие.  $\square$

Приведем ряд свойств связных подмножеств. Следующая лемма мгновенно вытекает из определения связности.

**Лемма 6.5.** Пусть  $Y$  — связное подмножество топологического пространства  $X$ , и  $U, V \subset X$  — открытые множества такие, что  $U \cap Y$  и  $V \cap Y$  не пересекаются и  $Y \subset U \cup V$ . Тогда одно из пересечений  $U \cap Y$  и  $V \cap Y$  пусто, а другое содержит  $Y$ .

**Предложение 6.6.** Если  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство связных подмножеств топологического пространства  $X$ , причем  $\bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$ , то множество  $Y = \bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$  — также связно.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $Y$  несвязно, тогда существуют открытые  $U, V \subset X$  такие, что  $\{U \cap Y, V \cap Y\}$  — разбиение  $Y$  на непустые подмножества. Так как каждое  $Y_\alpha$  содержится в  $U \cup V$  и  $(U \cap Y_\alpha) \cap (V \cap Y_\alpha) = \emptyset$ , применима лемма 6.5, в силу которой одно из множеств  $U, V$  содержит  $Y_\alpha$ , а другое с ним не пересекается. Пусть некоторое  $Y_\beta$  содержится в  $U$ . Так как  $Y \cap V \neq \emptyset$ , существует  $Y_\gamma$  такое, что  $Y_\gamma \cap V \neq \emptyset$ , но тогда, снова в силу леммы 6.5,  $Y_\gamma \subset V$ . Так как  $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ , то  $Y_\beta \cap Y_\gamma = \emptyset$ , что противоречит условию  $\bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$ .  $\square$

**Связной компонентой**  $[x]$  точки  $x$  топологического пространства  $X$  назовем объединение всех связных подмножеств  $X$ , содержащих  $x$ . По предложению 6.6, связная компонента является связным множеством, а, поэтому, и максимальным связным множеством, содержащем данную точку. Отсюда мгновенно вытекает, что если  $y \in [x]$ , то  $[y] = [x]$ . Действительно,  $[y] \supset [x]$ , так как  $[x]$  связно и содержит  $y$ . Если  $[y] \neq [x]$ , то  $[y]$  — еще большее связное множество, содержащее  $x$ , что противоречит максимальной связной компоненте.

**Предложение 6.7.** Каждое топологическое пространство разбивается на связные компоненты, причем это разбиение однозначно определено.

**Доказательство.** Действительно, каждая точка входит в свою связную компоненту, поэтому объединение всех связных компонент совпадает со всем пространством. Если две связные компоненты пересекаются, то, по лемме 6.5, их объединение также связно, поэтому, в силу максимальной связной компоненты, каждая из рассматриваемых компонент содержится в другой, поэтому они совпадают. Если есть два разных разбиения на связные компоненты, то некоторые элементы одного и другого разбиений пересекаются, но не совпадают, а это снова противоречит лемме 6.5 и максимальной связных компонент.  $\square$

**Предложение 6.8.** Пусть  $Y \subset X$  — связное подмножество топологического пространства  $X$ , тогда каждое  $Z$  такое, что  $Y \subset Z \subset \bar{Y}$  — связно. Здесь, как и выше,  $\bar{Y}$  обозначает замыкание множества  $Y$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $Z$  несвязно, тогда существуют открытые множества  $U, V \subset X$  такие, что  $\{U \cap Z, V \cap Z\}$  — разбиение  $Z$  на непустые подмножества. По условию, каждая точка  $x \in Z$  содержится в  $x \in \bar{Y}$ , т.е. является точкой прикосновения для  $Y$ . По лемме 4.10, непустота множеств  $U \cap Z$  и  $V \cap Z$  влечет также непустоту  $U \cap Y$  и  $V \cap Y$ , а это означает, что  $\{U \cap Y, V \cap Y\}$  — разбиение  $Y$  на непустые подмножества, что противоречит связности  $Y$ .  $\square$

**Следствие 6.9.** Каждая связная компонента замкнута.

**Пример 6.10.** Если число связных компонент конечно, то объединение всех компонент, кроме одной, — замкнутое множество, поэтому сама компонента открыта. Итак, в случае конечного числа связных компонент, каждая компонента открыто-замкнута. Однако в общем случае связные компоненты не обязаны быть открытыми.

Рассмотрим  $X = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$  с индуцированной топологией. Тогда каждое более чем одноточечное подмножество несвязно (покажите это). Таким образом,  $\{0\}$  — связная компонента  $X$ . Однако  $\{0\}$  не является открытым подмножеством, так как каждое открытое множество получается пересечением открытого  $U$  в  $\mathbb{R}$  с  $X$ , а такое  $U$ , вместе с 0, содержит еще и интервал  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  и, значит, это  $U$  содержит и другие, отличные от 0 точки из  $X$ .

**Предложение 6.11.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств, и пространство  $X$  — связно. Тогда множество  $f(X)$  также связно.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют открытые в  $Y$  множества  $U$  и  $V$  такие, что  $f(X) \cap U$  и  $f(X) \cap V$  непусты и разбивают  $f(X)$ . Но тогда  $f^{-1}(U)$  и  $f^{-1}(V)$  — непустые открытые подмножества  $X$ , разбивающие  $X$ , а это означает несвязность  $X$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 6.12.** Непрерывный образ отрезка связан.

**Следствие 6.13.** Топологическое пространство  $X$  связно, если и только если каждое непрерывное отображение из  $X$  в двуточечное дискретное пространство постоянно.



**Доказательство.** Пусть  $\Delta_2 := \{0, 1\}$  обозначает двухточечное дискретное пространство. Если  $X$  связно и  $f: X \rightarrow \Delta_2$  — непрерывное отображение, то, в силу предложения 6.11,  $f(X)$  связно, поэтому  $f(X) \neq \Delta_2$ , так как  $\Delta_2$  несвязно и, значит,  $f$  постоянно. Обратно, если  $X$  несвязно, то оно разбивается на два непустых открытых множества  $U$  и  $V$ , поэтому отображение, переводящее  $U$  в 0, а  $V$  в 1, непрерывно.  $\square$

Покажем, как можно применять следствие 6.13.

**Предложение 6.14.** Пусть  $X$  и  $Y$  — связные топологические пространства, тогда их декартово произведение  $X \times Y$  тоже связно. Тем самым, декартово произведение конечного числа связных пространств связно.

**Доказательство.** Выберем произвольную точку  $(x, y) \in X \times Y$  и рассмотрим два подмножества в  $X \times Y$ : одно  $X \times \{y\}$ , а другое  $\{x\} \times Y$ . Выберем в качестве базы топологии семейство произведений  $U \times V$  всевозможных  $U \in \tau_X$  и  $V \in \tau_Y$ . Тогда индуцированная на  $X \times \{y\}$  база состоит из множеств  $U \times \{y\}$  по всем  $U \in \tau_X$ , т.е. при естественном отождествлении  $X \times \{y\}$  с  $X$  совпадает с топологией  $\tau_X$ . По предложению 3.3, эта индуцированная база является базой индуцированной топологии. Таким образом,  $X \times \{y\}$  гомеоморфно  $X$  и, аналогично,  $\{x\} \times Y$  гомеоморфно  $Y$ . Следовательно,  $X \times \{y\}$  и  $\{x\} \times Y$  связны, и так как они пересекаются по  $(x, y)$ , их объединение тоже связно в силу предложения 6.6.

Пусть  $f: X \times Y \rightarrow \Delta_2$  — произвольное непрерывное отображение в двухточечное дискретное пространство. Выберем произвольные точки  $(x, y)$  и  $(x', y')$  из  $X \times Y$ . Мы покажем, что  $f(x, y) = f(x', y')$  и воспользуемся следствием 6.13. Как было доказано выше, множества

$$(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \quad \text{и} \quad (X \times \{y'\}) \cup (\{x'\} \times Y)$$

связны, поэтому, в силу следствия 6.13, отображение  $f$  на них постоянно. Но эти множества пересекаются, например, по точке  $(x, y')$ , поэтому  $f$  постоянно и на объединении этих множеств, так что  $f(x, y) = f(x', y')$ , что и требовалось.  $\square$

**Замечание 6.15.** Аналогичным образом можно показать, что декартово произведение любого числа связных топологических пространств связно.

## 6.2 Линейная связность

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если каждая пара точек соединяется кривой. Максимальные линейно связные подмножества топологического пространства называются *компонентами линейной связности*.

Замечание 4.8 показывает, что отношение на топологическом пространстве, для которого точки находятся в этом отношении, если и только если они соединяются некоторой кривой, является эквивалентностью. Классы этой эквивалентности как раз являются максимальными линейно связными подмножествами, т.е. компонентами линейной связности. Таким образом, имеет место следующий результат.

**Следствие 6.16.** Множество компонент линейной связности топологического пространства  $X$  является разбиением  $X$ .

Проверку линейной связности облегчает следующее очевидное утверждение.

**Предложение 6.17.** Зафиксируем в топологическом пространстве  $X$  некоторую точку  $x_0$ . Тогда  $X$  линейно связно, если и только если любую точку из  $X$  можно соединить кривой с  $x_0$ .

Так как компонента связности и компонента линейной связности — чисто топологическое понятие, то при гомеоморфизме количество этих компонент сохраняется (см. обсуждения в замечании 4.1). Покажем, как это свойство можно использовать для доказательства негомеоморфности некоторых топологических пространств.

**Пример 6.18.** Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  букву  $\Gamma$ , наделим ее индуцированной топологией, и полученное топологическое пространство обозначим  $X$ . Пространство  $Y$  — обычный отрезок прямой. Требуется доказать, что эти пространства негомеоморфны. Предположим противное, т.е. существует гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$ . Пусть  $p \in X$  — точка крепления горизонтального отрезка к вертикальному. Тогда пространство  $X \setminus \{p\}$  состоит из трех компонент линейной связности. В силу следствия 4.4, пространства  $X \setminus \{p\}$  и  $Y \setminus \{f(p)\}$  гомеоморфны, однако при выкидывании из отрезка любой точки мы не получим больше двух компонент линейной связности.

Этот прием позволяет выяснить, какие буквы алфавита негомеоморфны друг другу.

Следующий результат показывает, как соотносятся понятия связности и линейной связности.

**Следствие 6.19.** *Линейно связное топологическое пространство  $X$  связно.*

**Доказательство.** Если это не так, то разобьем  $X$  на непустые открытые  $U$  и  $V$ , выберем  $A \in U$  и  $B \in V$ , соединим  $A$  и  $B$  кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ , тогда  $\gamma^{-1}(U)$  и  $\gamma^{-1}(V)$  — непустые открытые подмножества  $[a, b]$ , разбивающие  $[a, b]$ , противоречие с предложением 6.4.  $\square$

**Пример 6.20.** Дискретное топологическое пространство, состоящее не менее чем из двух точек, не является линейно связным, что вытекает из примера 6.1 и следствия 6.19.

**Пример 6.21.** Любое антидискретное топологическое пространство линейно связно. Действительно, любое отображение любого отрезка в это пространство непрерывно, см. пример 3.19.

Подмножество  $X$  линейного пространства называется **выпуклым**, если вместе с каждой парой точек  $x, y \in X$  оно содержит отрезок  $[x, y]$ .

**Следствие 6.22.** *Каждое выпуклое подмножество  $C$  в линейном нормированном пространстве  $V$  линейно связно и, значит, связно.*

**Доказательство.** Пусть множество  $C \subset V$  выпукло. Тогда для любых  $x, y \in C$  выполняется  $[x, y] \subset C$ , поэтому  $x$  и  $y$  соединяются в  $C$  непрерывной кривой  $t \mapsto (1-t)x + ty$ ,  $t \in [0, 1]$ , и, значит,  $C$  — линейно связно, что влечет связность  $C$  в силу следствия 6.19.  $\square$

**Следствие 6.23.** *Подмножество вещественной прямой связно тогда и только тогда, когда оно выпукло. Вот полный список таких подмножеств: отрезки  $[a, b]$ , полуинтервалы  $[a, b)$  и  $(a, b]$ , интервалы  $(a, b)$ , замкнутые лучи  $[a, \infty)$  и  $(-\infty, b]$ , открытые лучи  $(a, \infty)$  и  $(-\infty, b)$  и вся прямая  $\mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Пусть множество  $C \subset \mathbb{R}$  выпукло, тогда оно связно в силу следствия 6.22. Пусть теперь  $C$  — не выпукло. Тогда существуют точки  $x, y \in C$  такие, что  $[x, y] \not\subset C$  и, значит, существует  $t \in \mathbb{R} \setminus C$ , для которой  $x < t < y$ . Но тогда множества  $U = C \cap (-\infty, t)$  и  $V = C \cap (t, \infty)$  — непустые открытые в индуцированной топологии подмножества  $C$ , разбивающие  $C$ , откуда вытекает, что  $C$  — несвязно. Таким образом, связное множество обязано быть выпуклым.  $\square$

**Теорема 6.24** (Теорема о промежуточном значении). *Пусть  $X$  — связное топологическое пространство,  $a, b \in X$ , и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  принимает все промежуточные значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ , т.е. для любого  $y \in \mathbb{R}$ , лежащего между  $f(a)$  и  $f(b)$ , существует  $x \in X$ , для которого  $f(x) = y$ .*

**Доказательство.** По предложению 6.11, множество  $f(X) \subset \mathbb{R}$  — связно. По следствию 6.23,  $f(X)$  выпукло, поэтому отрезок, соединяющий  $f(a)$  и  $f(b)$ , лежит в  $f(X)$ , что и завершает доказательство.  $\square$

Следующий результат, являющийся одной из стандартных теорем математического анализа, мгновенно вытекает из теоремы 6.24 и связности отрезка, см. предложение 6.4.

**Следствие 6.25.** *Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда  $f$  принимает все промежуточные значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ .*

**Пример 6.26.** Обратное утверждение к следствию 6.19 не имеет места. Иными словами, не всякое связное топологическое пространство линейно связно. Приведем классический пример.

На плоскости с декартовыми координатами  $x, y$  рассмотрим множество  $X$ , состоящее из графика функции  $y = \sin(1/x)$ , определенной при всех  $x \neq 0$ , и отрезка  $[-1, 1]$  оси  $y$ . Тогда  $X$  с индуцированной из плоскости топологией — связное, но не линейно связное множество, см. рис. 6.1.

Действительно, разобьем это множество на три:

$$X_- = X \cap \{(x, y) : x < 0\}, \quad X_0 = X \cap \{(x, y) : x = 0\}, \quad X_+ = X \cap \{(x, y) : x > 0\}.$$

Множества  $X_-$  и  $X_+$  являются образами непрерывного отображения из связных топологических пространств — открытых лучей, поэтому они связны в силу предложения 6.11. Отрезок  $X_0$  также связан по предложению 6.4.

Заметим, что  $X_0$  состоит из точек прикосновения как для множества  $X_-$ , так и для множества  $X_+$ . Действительно, для произвольной точки  $p \in X_0$  ее окрестность в индуцированной топологии является пересечением  $X$  и некоторого открытого подмножества  $U$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а  $U$  содержит некоторый открытый круг  $U_\varepsilon(p)$ . Однако

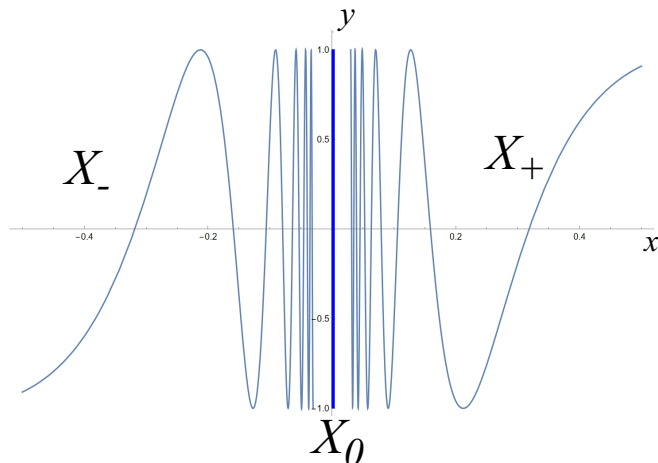


Рис. 6.1: Связное, но не линейно связное топологическое пространство.

каждый такой круг пересекает  $X_-$  и  $X_+$ , см. рис. 6.1. Также точки из  $X_-$  не являются точками прикосновения для  $X_+$  и наоборот. Таким образом, замыкание  $\overline{X_-}$  и  $\overline{X_+}$  множеств  $X_-$  и  $X_+$  соответственно получаются добавлением к этим множествам отрезка  $X_0$ . По предложению 6.8, множества  $\overline{X_-}$  и  $\overline{X_+}$  связны. Так как  $\overline{X_-} \cap \overline{X_+} = X_0 \neq \emptyset$ , то, по предложению 6.6, множество  $X$  связно.

Покажем теперь, что  $X$  не является линейно связным. Берем произвольные точки  $A \in X_-$  и  $B \in X_+$  и покажем, что их нельзя соединить непрерывной кривой. Предположим противное, т.е. существует кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ , соединяющая  $A = \gamma(a)$  и  $B = \gamma(b)$ . По предложению 3.30, отображение  $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , продолжающее  $\gamma = \Gamma|_{[a, b], X}$  — непрерывно. Из примера 4.25 вытекает, что координатные функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , задающие кривую  $\gamma$ , также непрерывны. По следствию 6.25, существует  $t$  такое, что  $x(t) = 0$ . В силу примера 3.21 и сказанного выше, множество  $T := \{t: x(t) = 0\} \subset [a, b]$  — непусто и замкнуто. Пусть  $t_0$  — точная верхняя грань множества  $T$ . Так как  $T$  замкнуто, то  $t_0 \in T$ , т.е.  $x(t_0) = 0$ . Так как  $B \in X_+$ , то  $x(b) \neq 0$ , откуда  $t_0 < b$ .

Приведем к противоречию, показав, что функция  $y(t)$  не является непрерывной в точке  $t_0$ . Положим  $C = \Gamma(t_0) = (0, y(t_0))$  и возьмем круговую окрестность  $U := U_1(C)$ . Тогда, по неравенству треугольника, расстояние между любыми двумя точками из  $U$  меньше 2. Однако, какое бы  $\delta > 0$  мы не выбрали, для каждого  $t_1 > t_0$  из  $\delta$ -окрестности точки  $t_0$  на отрезке  $[a, b]$  выполняется  $x(t_1) > x(t_0) = 0$ . Положим  $a_k = 1/(\pi/2 + 2\pi k)$  и  $b_k = 1/(3\pi/2 + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Так как  $a_k$  и  $b_k$  положительны и стремятся к 0 при  $k \rightarrow \infty$ , существует такое  $k$ , что  $a_k, b_k \in (0, x(t_1))$ . В силу следствия 6.25, существуют  $t_0 < t', t'' < t_1$  такие, что  $x(t') = a_k$  и  $x(t'') = b_k$ , но тогда

$$y(t') = \sin \frac{1}{x(t')} = \sin \frac{1}{a_k} = 1 \quad \text{и} \quad y(t'') = \sin \frac{1}{x(t'')} = \sin \frac{1}{b_k} = -1.$$

Отсюда вытекает, что расстояние между точками  $\Gamma(t')$  и  $\Gamma(t'')$  больше 2 и, значит, одна из этих точек не попадает в окрестность  $U$ , что противоречит непрерывности отображения  $\Gamma$ .

**Замечание 6.27.** В силу следствия 6.19, каждая компонента линейной связности связна, поэтому компоненты линейной связности подразбивают компоненты связности. Так, в примере 6.26 все пространство связно, но разбито на три компоненты линейной связности.

### 6.3 Локальная линейная связность

Топологическое пространство  $X$  называется *локально линейно связным*, если у каждой точки  $x \in X$  и любой ее окрестности  $U^x$  существует линейно связная окрестность  $V^x \subset U^x$ .

**Пример 6.28.** Не всякое локально линейно связное пространство является линейно связным, например, подмножество прямой  $\mathbb{R}$ , состоящее из двух непересекающихся интервалов, скажем,  $(0, 1)$  и  $(1, 2)$  (почему?).

**Пример 6.29.** Не всякое линейно связное пространство является локально линейно связным. В качестве примера рассмотрим подмножество  $X$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $x, y$ , равное объединению отрезков, соединяющих точку  $(0, 1)$  с точками  $(1/n, 0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а также с точкой  $O = (0, 0)$ . Тогда окрестность  $U_{1/2}(O) \cap X$  не содержит линейно связной подокрестности вида  $U^O$  (убедитесь в этом).

**Пример 6.30.** Каждое открытое подмножество локально линейно связного пространства само является локально линейно связным.

**Пример 6.31.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  является локально линейно связным. Действительно, для каждой окрестности  $U^x$  каждой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  существует открытый шар  $U_\varepsilon(x)$ , содержащийся в  $U^x$ . Так как шар  $U_\varepsilon(x)$  — выпуклый, он также является линейно связным. Отсюда и из примера 6.30 вытекает, что каждое открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$  локально линейно связно.

**Пример 6.32.** Рассуждения, аналогичные проведенным в примере 6.31, показывают, что любое нормированное векторное пространство, а также каждое его открытое подмножество, локально линейно связны.

**Теорема 6.33.** В локально линейно связном пространстве линейная связность эквивалентна связности.

**Доказательство.** Достаточно проверить, что в локально линейно связном пространстве  $X$  связность влечет линейную связность. Выберем произвольную точку  $x \in X$  и рассмотрим множество  $U(x)$  всех точек  $y \in X$ , которые можно соединить с  $x$  некоторой кривой. Заметим, что это множество открыто в  $X$ . Действительно, у каждой точки  $y \in U(x)$  имеется линейно связная окрестность  $U^y$ , но тогда каждая точка  $z \in U^y$  соединяется с  $y$  некоторой кривой  $\gamma_z$ . Пусть  $\gamma_y$  — кривая, соединяющая  $x$  с  $y$ . Проходя последовательно сначала кривую  $\gamma_y$ , а затем кривую  $\gamma_z$ , см. замечание 4.8, мы соединим  $x$  и  $z$  соответствующей кривой.

Отметим, что для каждой точки  $y \in U(x)$  выполняется  $U(x) = U(y)$ , а если  $y \notin U(x)$ , то  $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ . Таким образом, множества  $U(x)$  образуют разбиение пространства  $X$  на открытые подмножества, поэтому если таких множеств больше одного, то пространство несвязно. А то, что  $U(x) = X$  означает в точности линейную связность  $X$ .  $\square$

**Замечание 6.34.** В примере 6.30 мы заметили, что каждое открытое подмножество локально линейно связного пространства само локально линейно связно. Пример 6.26, вместе с теоремой 6.33, демонстрируют, что не каждое подмножество локально линейно связного пространства является таким.

## 6.4 Локально постоянные отображения

Для дальнейшего нам понадобится еще ряд утверждений.

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется **локально постоянным**, если у любой точки  $x \in X$  имеется окрестность  $U^x$  такая, что ограничение  $f$  на  $U^x$  постоянно.

**Предложение 6.35.** Локально постоянное отображение топологических пространств непрерывно.

**Доказательство.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — локально постоянное отображение. Выберем произвольное  $x \in X$  и покажем, что  $f$  непрерывно в  $x$ . Возьмем произвольную окрестность  $V^{f(x)}$ , а у точки  $x$  выберем окрестность  $U^x$ , на которой  $f$  постоянно и, значит, равно  $f(x)$ . Но тогда  $f(U^x) = \{f(x)\} \subset V^{f(x)}$ .  $\square$

Следующий результат понадобится нам для доказательства теоремы Жордана.

**Следствие 6.36.** Локально постоянное отображение постоянно на каждой компоненте связности.

**Доказательство.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — локально постоянное отображение. Достаточно показать, что если  $X$  связно, то  $f$  постоянно.

Для каждого  $y \in Y$  прообраз  $f^{-1}(y)$  открыт. Действительно, или  $f^{-1}(y)$  пуст, или для каждой точки  $x \in f^{-1}(y)$  существует окрестность  $U^x$  такая, что  $f(U^x) = \{y\}$ , т.е.  $U^x \subset f^{-1}(y)$ . Но тогда  $f^{-1}(y) = \cup_{x \in f^{-1}(y)} U^x$  — открытое множество. Таким образом, семейство  $\{f^{-1}(y)\}_{y \in f(X)}$  — разбиение  $X$  на открытые непустые множества, поэтому если у отображения  $f$  существует по крайней мере два различных значения, то  $X$  несвязно.  $\square$

## Упражнения к главе 6

**Упражнение 6.1.** Пусть  $X$  — пространство с топологией Зарисского. Является ли оно

- (1) связным?
- (2) линейно связным для не менее чем континуального  $X$ ?
- (3) линейно связным для не более чем счетного  $X$ ? (Воспользуйтесь теоремой Бэра.)

**Упражнение 6.2.** Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство линейно связных пространств. Покажите, что их декартово произведение  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  линейно связно.

**Упражнение 6.3.** Пусть  $f$  — непрерывная функция, заданная на топологическом пространстве  $X$ . Обозначим через  $\Gamma$  множество уровня функции  $f$ , т.е.  $\Gamma = \{x \in X : f(x) = c\}$ , где  $c \in \mathbb{R}$ . Положим  $\Omega = X \setminus \Gamma$ . Докажите, что точки  $P, Q \in \Omega$ , в одной из которых функция  $f$  больше  $c$ , а в другой — меньше  $c$ , лежат в разных связных компонентах множества  $\Omega$ .

**Упражнение 6.4.** Пусть  $X$  — подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , полученное из  $\mathbb{R}^n$  выбрасыванием гиперплоскости

$$\pi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d\},$$

где  $a = (a_1, \dots, a_n)$  — ненулевой вектор. Докажите, что  $X$  состоит из двух связных компонент — *открытых полупространств, ограниченных  $\pi$* .

**Упражнение 6.5.** Пусть  $X$  — подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , полученное из  $\mathbb{R}^n$  выбрасыванием  $k$  различных параллельных гиперплоскостей. Докажите, что  $X$  состоит из  $(k+1)$ -ой связной компоненты.

**Упражнение 6.6.** Для  $k = 1, \dots, n$  через  $I_k$  обозначим или невырожденный отрезок, или интервал, или полуинтервал (с открытым левым или правым концом). Декартово произведение  $K = \prod_{p=1}^n I_p \subset \mathbb{R}^n$  назовем *кирпичом с основанием  $B = \prod_{p=1}^{n-1} I_p$  и высотой  $h = I_n$* . Для строго монотонной последовательности  $t_1, \dots, t_k$ , состоящей из внутренних точек высоты  $h$ , рассмотрим *сечения  $B \times \{t_p\}$* , и пусть  $X$  получается из  $K$  выкидыванием всех этих сечений. Покажите, что  $X$  состоит из  $(k+1)$ -ой компоненты.

**Упражнение 6.7.** Пусть  $X$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которое получается

- (1) из  $\mathbb{R}^2$  выбрасыванием  $k \geq 1$  различных лучей, выходящих из одной точки;
- (2) из круга  $C$ , открытого или замкнутого, выбрасыванием  $k \geq 1$  различных его радиусов.

Докажите, что  $X$  состоит из  $k$  компонент.

**Упражнение 6.8.** Покажите, что если  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — непрерывные функции на топологическом пространстве  $X$ , то функции  $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  и  $g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  также непрерывны.

**Упражнение 6.9.** *Замкнутым полупространством в  $\mathbb{R}^n$*  называется объединение гиперплоскости и любого из двух ограниченных ей открытых полупространств. *Выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^n$*  называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств в случае, когда это пересечение ограничено и имеет непустую внутренность. Докажите, что граница выпуклого многогранника разбивает пространство на две компоненты, т.е. если эту границу выкинуть, то останется подмножество, состоящее из двух компонент.

**Упражнение 6.10.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество, а  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  — кривая. Докажите, что существует ломаная  $L$ , соединяющая точки  $\gamma(a)$  и  $\gamma(b)$ , все ребра которой лежат в  $U$ . Таким образом, открытое множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  линейно связно, если и только если каждая пара его точек может быть соединена ломаной, все ребра которой лежат в  $U$ .

**Упражнение 6.11.** Докажите, что

- (1) отрезок и окружность не гомеоморфны;
- (2) буквы Р и Я не гомеоморфны.

# Лекция 7

## Теорема Жордана

**План.** Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, незамкнутая вложенная кривая, замкнутая вложенная кривая, теорема Жордана о вложенной кривой на плоскости, замкнутая и незамкнутая ломаные, ломаная как простой граф, концевые (граничные) и внутренние вершины незамкнутой ломаной, внутренние вершины замкнутой ломаной, выкидывание ребра и выкидывание вершины из простого графа, выкидывание ребра и выкидывание вершины из ломаной, ломаная как кривая, ломаная как подмножество объемлющего пространства, концевая (граничная) и внутренняя точка ломаной, невырожденные ребра ломаной, вложенная ломаная (замкнутая и незамкнутая), теорема Жордана для вложенных ломаных на плоскости, доказательство теоремы Жордана для ломаных,  $\varepsilon$ -окрестность подмножества метрического пространства, существенные и несущественные пересечения, лемма о четырех точках, многоугольник, граница, внутренность и внешность многоугольника.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о вложенных кривых на евклидовой плоскости. Мы приведем доказательство для частного случая, когда кривая является ломаной. Про общий случай можно почитать [10]– [14].

### 7.1 Теорема Жордана

Кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  в топологическом пространстве  $X$  называется **замкнутой**, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , и **незамкнутой** в противном случае. Незамкнутая кривая  $\gamma$  называется **вложенной**, если отображение  $\gamma$  взаимно-однозначно с образом. Замкнутая кривая называется **вложенной**, если единственные две различные точки  $t_1, t_2$  отрезка  $[a, b]$ , для которых  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , — это точки  $a$  и  $b$ .

**Теорема 7.1** (Жордан). Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — вложенная кривая. Обозначим  $\Gamma$  образ отображения  $\gamma$ , и пусть  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Тогда

- (1) если кривая  $\gamma$  незамкнутая, то  $\Omega$  линейно связно;
- (2) если кривая  $\gamma$  замкнутая, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент линейной связности.

**Замечание 7.2.** В силу примера 6.31 и теоремы 6.33, компоненты линейной связности и компоненты связности открытых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  совпадают. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы будем называть компоненты линейной связности открытых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  просто компонентами.

Теорема Жордана 7.1 на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально, так как связано с топологией плоскости. Приведем несколько примеров.

#### Сфера

Замкнутая вложенная кривая разбивает двумерную сферу на две компоненты, а незамкнутая — нет, см. рис. 7.1.

#### Цилиндр

То же самое верно и для цилиндра, см. рис. 7.2.

#### Тор

Незамкнутая вложенная кривая по-прежнему не разбивает тор на компоненты. А вот среди замкнутых кривых есть как разбивающие, так и не разбивающие, см. рис. 7.3.

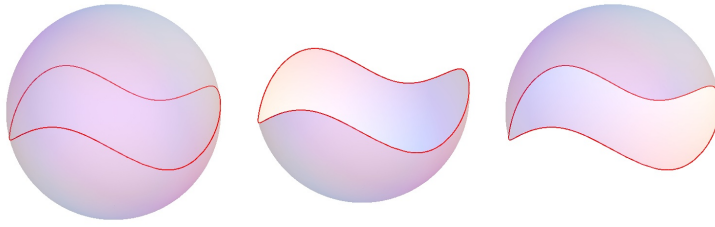


Рис. 7.1: Теорема Жордана верна для сферы.

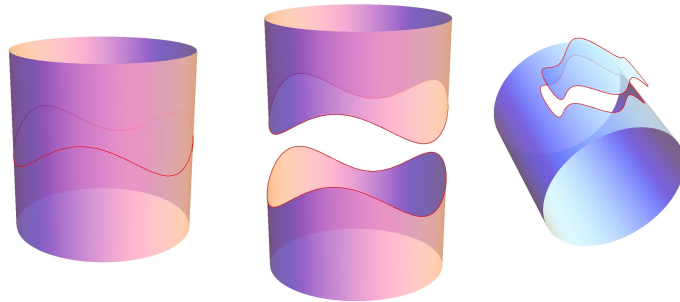


Рис. 7.2: Теорема Жордана верна для цилиндра.

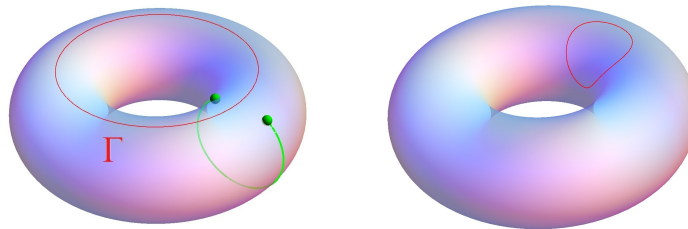


Рис. 7.3: На торе теорема Жордана не верна.

### Лист Мёбиуса

“Физическая реализация” листа Мёбиуса получается, если склеить противоположные два края прямоугольной полоски бумаги с перекручиванием на  $180^\circ$ , см. рис. 7.4, слева. Рассмотрим на листе Мёбиуса среднюю линию  $\Gamma$ , см. рис. 7.4, справа. Как показано на этом же рисунке,  $\Gamma$  не разбивает лист Мёбиуса.

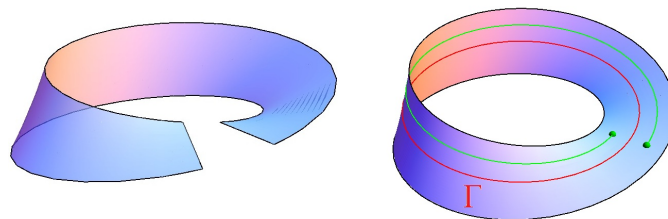


Рис. 7.4: На листе Мёбиуса теорема Жордана не верна.

Мы докажем теорему Жордана в частном случае ломаных, рассматриваемых как кривые. Дадим соответствующие определения.

## 7.2 Ломаные и теорема Жордана

Напомним, что ломаной в векторном пространстве мы называли конечную последовательность  $A_0, \dots, A_m$  точек этого пространства. Кроме того, мы говорили, как можно превратить ломаную в кривую, соединя последовательные вершины  $A_i$  отрезками и параметризуя единым образом все полученное семейство отрезков. Сейчас нам понадобится связать с ломаной еще одну структуру, а именно, структуру простого графа. Мы будем рассматривать два типа ломаных: *незамкнутые*, если  $A_0 \neq A_m$ , и *замкнутые*, если  $A_0 = A_m$ .

- Структура *незамкнутой ломаной* — это простой граф  $G = (V, E)$ , в котором множество вершин  $V$  представляет собой последовательность  $A_0, \dots, A_m$  (даже если некоторые точки  $A_i$  совпадают, мы считаем их разными вершинами графа  $G$ ), а множество ребер  $E$  — семейство всех пар  $A_{i-1}A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , состоящих из последовательных вершин. При этом вершины  $A_0$  и  $A_m$  мы называем *концевыми* или *граничными*, а все остальные вершины — *внутренними*.
- Структура *замкнутой ломаной* — это тоже простой граф  $G = (V, E)$ , в котором множество вершин  $V$  представляет собой последовательность  $A_0, \dots, A_{m-1}$ ; при этом, мы позволяем номерам вершин “циклически” меняться в пределах всего  $\mathbb{Z}$ : для  $k \in \mathbb{Z}$  представим  $k$  в виде  $k = pt + i$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ , и положим  $A_k = A_{pt+i} = A_i$ . При таком соглашении множество ребер  $E$  — это снова семейство всех пар  $A_{i-1}A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Заметим, что в этом случае  $A_{m-1}A_m = A_{m-1}A_0$ . У замкнутых ломаных все их вершины называются *внутренними*.

Таким образом, говоря про ломаную, мы будем всегда иметь в виду, что она является или замкнутой, или незамкнутой, т.е. наделена структурой соответствующего простого графа. Рассмотрение ломаной как графа (являющегося путем в случае незамкнутых ломаных и циклом в случае замкнутых) позволяет говорить, например, про смежные ребра, а также инцидентные вершины и ребра. Кроме того, нам понадобятся следующие две операции над графами.

Пусть  $G = (V, E)$  — простой граф,  $v \in V$  и  $e \in E$ . Тогда

- граф  $G \setminus e$ , полученный из  $G$  *выкидыванием ребра*  $e$ , — это граф  $(V, E \setminus \{e\})$ ;
- граф  $G \setminus v$ , полученный из  $G$  *выкидыванием вершины*  $v$ , — это граф  $(V \setminus \{v\}, E')$ , где  $E'$  получается из  $E$  выкидыванием всех ребер, инцидентных  $v$ .

Опишем результаты применения этих операций к ломаным при  $m \geq 2$ .

- Если из замкнутой ломаной выкинуть вершину или ребро, то получится одна незамкнутая ломаная.
- Если из незамкнутой ломаной выбросить концевую вершину, то получится одна незамкнутая ломаная.
- Если из незамкнутой ломаной выкинуть или ребро, или внутреннюю вершину, то получится две незамкнутых ломаных.

Как мы уже отменили в начале раздела, ломаную можно рассматривать как кривую, см. детали в замечании 4.9. Также бывает удобно отождествлять ломаную с объединением всех ее ребер, т.е. с образом соответствующей кривой. Условимся, что для ломаной  $L$  в  $\mathbb{R}^n$  запись  $L \subset \mathbb{R}^n$  означает рассмотрение ломаной именно в виде такого объединения ее ребер. При этом, *точкой ломаной*  $L \subset \mathbb{R}^n$  будем называть произвольную точку из этого объединения (не путайте с вершиной ломаной). Точку ломаной назовем *концевой* или *граничной*, если она совпадает с концевой вершиной ломаной. Все остальные точки, включая и внутренние точки ребер-отрезков, назовем *внутренними*.

Ребро  $A_{i-1}A_i$  ломаной называется *невыврожденным*, если  $A_{i-1} \neq A_i$ . Ломаная, замкнутая или незамкнутая, называется *вложенной*, если такой является соответствующая ей кривая.

**Теорема 7.3** (теорема Жордана для ломаных). Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — вложенная ломаная. Положим  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Тогда

- (1) если  $L$  незамкнута, то  $\Omega$  — линейно связно;
- (2) если  $L$  замкнута, то  $\Omega$  состоит ровно из двух компонент.

**Замечание 7.4.** Из упражнения 6.10 вытекает, что любые две точки из одной компоненты множества  $\Omega$  можно соединить не только лежащей в этой компоненте кривой, но и даже ломаной.



## 7.3 Доказательство теоремы Жордана для ломаных

Напомним, что в упражнении 5.1 мы определили расстояние  $|AB|$  между двумя непустыми подмножествами  $A$  и  $B$  произвольного метрического пространства  $X$  и показали, что расстояние между непересекающимися компактными положительно. Частным случаем этого расстояния является расстояние  $|aB|$  от точки  $a \in X$  до множества  $B$ , см. задачу 3.27, которое равно  $|\{a\}A|$ , а также и расстояние  $|ab|$  между точками  $a, b \in X$ , равное  $|\{a\}\{b\}|$ . Так как каждая ломаная  $L \subset \mathbb{R}^n$  является непустым компактным подмножеством, а объединение конечного числа компактов также компактно (убедитесь в этом), получаем следующий результат.

**Следствие 7.5.** Пусть  $X$  — метрическое пространство, а  $\mathcal{L}_1 \subset X$  и  $\mathcal{L}_2 \subset X$  — непустые конечные объединения компактных подмножеств  $X$ . Тогда  $|\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2| = 0$ , если и только если  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ . В частности, это имеет место для конечных объединений  $\mathcal{L}_1 \subset \mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{L}_2 \subset \mathbb{R}^n$  образов кривых или ломаных.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 7.3.

### 7.3.1 Стратегия доказательства теоремы 7.3

- (1) Мы подберем для каждой точки  $P$  ломаной  $L$  столь малую круговую окрестность  $U_P$ , чтобы для внутренней точки  $P$  ломаная  $L$  разбивала  $U_P$  на две компоненты, а для концевой точки  $P$  незамкнутой ломаной  $L$  множество  $U_P \setminus L$  было связным.
- (2) Мы докажем, что для каждой точки  $P$  ломаной  $L$  любую точку из  $U_P \setminus L$  можно соединить ломаной, не пересекающей  $L$ , с точкой из  $U_{A_0} \setminus L$ .
- (3) Мы докажем, что любую точку плоскости, не лежащую на  $L$ , можно соединить отрезком, не пересекающим  $L$ , с точкой из некоторой окрестности вида  $U_P$ .

Из пунктов (2) и (3) следует, что для незамкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из одной компоненты, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое линейно связно.

Также из пунктов (2) и (3) следует, что для замкнутой ломаной  $L$  дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит не более чем из двух компонент, так как любую точку этого дополнения можно соединить ломаной с некоторой точкой множества  $U_{A_0} \setminus L$ , которое состоит из двух компонент.

- (4) Наконец, мы докажем, что замкнутая ломаная  $L$  разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  локально постоянную функцию, принимающую два значения: точки, в которых эта функция принимает различные значения, лежат в разных компонентах.

Перейдем к реализации стратегии.

### 7.3.2 Реализация пункта (1)

Возьмем произвольную точку  $P \in L$ . Если  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$  ломаной  $L$ , то выберем  $\varepsilon_P > 0$  меньшим расстояния от  $P$  до  $L \setminus e$ . Если же  $P$  — вершина ломаной  $L$ , то выберем  $\varepsilon_P > 0$  меньшим расстояния от  $P$  до  $L \setminus P$ . Положим  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ , рис. 7.5.

Ясно, что в  $U_P$  могут попасть только точки ребер, содержащих  $P$ , следовательно,  $U_P \cap L$  представляет собой

- (1) радиус круга  $U_P$ , если  $P$  — концевая вершина (незамкнутой ломаной);
- (2) два различных радиуса круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя вершина;
- (3) диаметр круга  $U_P$ , если  $P$  — внутренняя точка ребра.

Из упражнения 6.7 вытекает, что в первом случае множество  $U_P \setminus L$  линейно связно, а в оставшихся двух случаях состоит из двух компонент.

**Замечание 7.6.** Обратите внимание, что  $\varepsilon_P$  можно брать настолько малым, насколько нам нужно, так как ограничение на это число установлено только сверху.

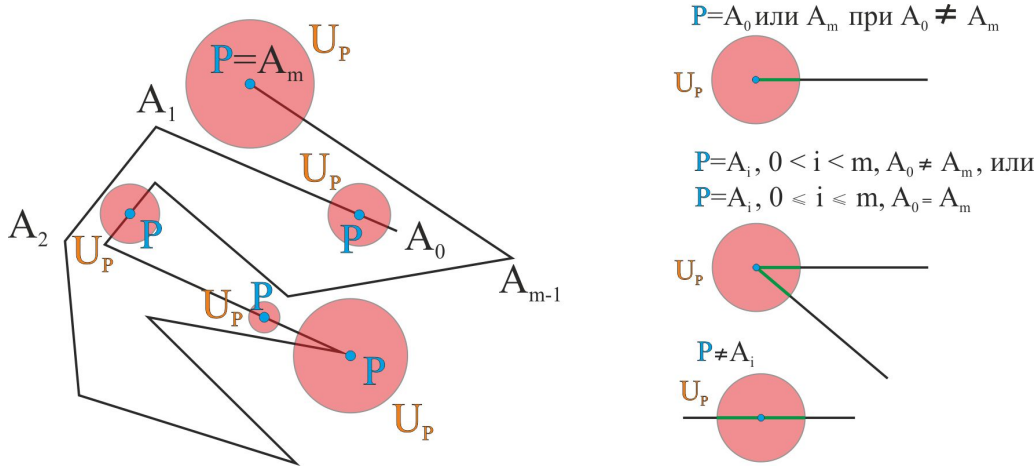


Рис. 7.5: Окрестность  $U_P$ .

### 7.3.3 Реализация пункта (2)

Пусть  $Y \subset X$  — произвольное подмножество метрического пространства  $X$ , и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -*окрестностью* множества  $Y$  называется множество  $U_\varepsilon(Y) = \cup_{y \in Y} U_\varepsilon(y)$ .

**Задача 7.7.** Докажите, что  $U_\varepsilon(Y) = \{x \in X : |xY| < \varepsilon\}$ .

**Лемма 7.8.** Пусть  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$  ломаной  $L$ , а  $S$  — одна из вершин ребра  $e$ . Тогда каждую точку  $Q \in U_P \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $T \in U_S \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Обратно, каждую точку  $T \in U_S \setminus L$  можно соединить с некоторой точкой  $Q \in U_P \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(e)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_S)$ .

**Доказательство.** Если  $P \in U_S$ , то все доказано. Пусть теперь  $P \notin U_S$ . Выберем на интервале  $(P, S)$  точку  $A$  такую, что  $|SA| \leq \varepsilon_S/2$ , тогда  $U_{\varepsilon_S/2}(A) \subset U_S$ . Положим  $L' = L \setminus e$ . Тогда  $[A, P] \cap L' = \emptyset$ , поэтому, по следствию 7.5, расстояние  $\delta$  между  $[A, P]$  и  $L'$  отлично от нуля. Заметим, что  $\delta \leq |SA| \leq \varepsilon_S/2$ . Сместим отрезок  $[A, P]$  в перпендикулярном  $e$  направлении на положительное расстояние, меньшее, чем  $\min\{\delta, \varepsilon_P\}$ , тогда полученный в результате отрезок  $[A', P']$  не пересекает ни  $e$ , ни  $L'$ , причем  $A' \in U_S$  и  $P' \in U_P$ . В частности, при таком смещении имеем  $[A', P'] \subset U_\varepsilon(e)$ .

Для доказательства первого утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки  $P'$  и  $Q$  оказались в одной компоненте множества  $U_P \setminus L$ , соединим точки  $Q$  и  $P'$  отрезком (он целиком лежит в  $U_P \setminus L$ , так как каждая из двух компонент — выпуклая), а в качестве  $T$  возьмем точку  $A'$ . Для доказательства второго утверждения леммы, выберем направление смещения так, чтобы точки  $A'$  и  $T$  оказались в одной компоненте множества  $U_S \setminus L$ , соединим точки  $T$  и  $A'$  ломаной, лежащей в  $U_S \setminus L$  (это можно сделать в силу упражнения 6.10), продолжим эту ломаную отрезком  $[A', P']$ , и в качестве  $Q$  возьмем точку  $P'$ , рис. 7.6.

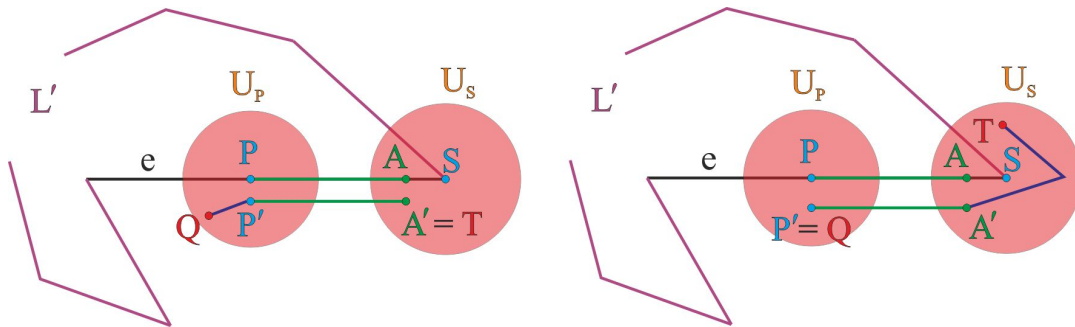


Рис. 7.6: Доказательство леммы 7.8.

Осталось заметить, что все фрагменты построенной ломаной лежат в  $U_\varepsilon(e)$ .  $\square$

**Следствие 7.9.** Пусть  $P$  — произвольная точка ломаной  $L$ , а  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \setminus L$ . Тогда существует такая точка  $T \in U_{A_0} \setminus L$ , что  $Q$  и  $T$  соединяются ломаной  $\gamma$ , не пересекающей  $L$ . Более того, эту соединяющую ломаную можно выбрать так, что она будет лежать в  $U_\varepsilon(L)$ , где  $\varepsilon = \max(\varepsilon_P, \varepsilon_{A_0})$ .

**Доказательство.** Если  $P = A_0$ , то  $\gamma$  — это 0-звенная ломаная  $Q$ .

Пусть теперь  $P \neq A_0$ . Тогда  $P \in (A_i, A_{i+1}]$  для некоторого  $i$ . Если  $P = A_{i+1}$ , выберем произвольную точку  $P_i \in (A_i, A_{i+1})$  и соединим  $Q$  с некоторой точкой  $Q_i \in U_{P_i} \setminus L$  ломаной, не пересекающей  $L$ , что можно сделать в силу леммы 7.8. Затем, по этой же лемме, соединим  $Q_i$  и некоторую  $T_i \in U_{A_i}$  ломаной, не пересекающей  $L$ . В результате, получим ломаную, не пересекающую  $L$  и соединяющую  $Q$  с некоторой точкой  $T_i \in U_{A_i}$ . Если же  $P \neq A_{i+1}$ , то сразу получим такую ломаную.

Затем будем последовательно соединять не пересекающимися с  $L$  ломаными точку  $T_i$  и некоторую  $Q_{i-1} \in U(P_{i-1})$ ,  $P_{i-1} \in (A_{i-1}, A_i)$ , точку  $Q_{i-1}$  и некоторую  $T_{i-1} \in U_{A_{i-1}}$ , и т.д., пока не дойдем до точки  $T_0 \in U_{A_0}$ . Остается заметить, что радиусы  $\varepsilon_X$  всех встречающихся кругов  $U_X$  (кроме  $U_P$  и  $U_{A_0}$ ) мы можем выбирать сколь угодно малыми, а именно, выберем их меньшими, чем  $\varepsilon$ . Тогда, по лемме 7.8, каждый построенной по этой лемме фрагмент ломаной будет лежать в  $\varepsilon$ -окрестности ребра, которому принадлежат центры кругов, так что вся ломаная лежит в  $U_\varepsilon(L)$ .  $\square$

### 7.3.4 Реализация пункта (3)

Рассмотрим теперь произвольную точку  $R \in \Omega$ . Отрезок  $[R, A_0]$  пересекает ломаную  $L$  по конечному числу отрезков и точек. Обозначим через  $P$  ближайшую к  $R$  точку из  $[R, A_0] \cap L$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $U_P \cap [R, P)$ , тогда  $Q \in \Omega$ , причем отрезок  $[R, Q]$  не пересекает  $L$ . По следствию 7.9, существует ломаная  $\gamma$ , соединяющая  $Q$  с некоторой точкой  $T \in U_{A_0} \setminus L$  и не пересекающая  $L$ . Последовательно проходя отрезок  $[R, Q]$  и ломаную  $\gamma$ , мы получим ломаную, соединяющую  $R$  и  $T$  и не пересекающую  $L$ . Таким образом, каждая точка  $R \in \Omega$  лежит в той же компоненте, что и некоторая точка из  $U_{A_0} \setminus L$ , рис. 7.7.

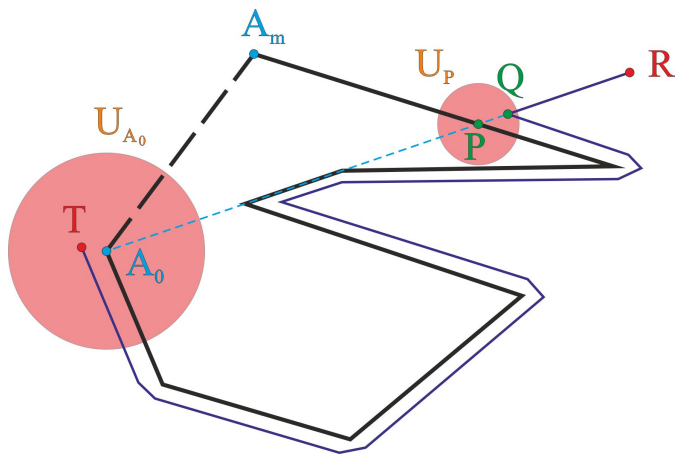


Рис. 7.7: Реализация пункта (3).

Итак, как было отмечено выше в описании стратегии доказательства, если ломаная  $L$  незамкнутая, то множество  $U_{A_0} \setminus L$  линейно связно, поэтому  $\Omega$  состоит из одной компоненты. Если же  $L$  замкнута, то  $U_{A_0} \setminus L$  состоит из двух компонент, поэтому  $\Omega$  состоит не более чем из двух компонент.

### 7.3.5 Реализация пункта (4)

Покажем теперь, что  $\Omega$  состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат  $Oxy$ , для которой все вершины ломаной  $L$  имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси  $Oy$ ). Для каждой точки  $P \in \Omega$  рассмотрим луч  $\ell_P$ , выходящий из  $P$  и сонаправленный с осью  $y$ . Пусть  $e$  — произвольное ребро ломаной  $L$ . Тогда  $\ell_P \cap e$  состоит не более чем из одной точки, в частности,  $\ell_P \cap L$  представляет собой конечное число точек.

Точку  $Q \in \ell_P \cap L$  назовем **существенной**, если выполняется одно из двух условий:

- (1) точка  $Q$  лежит внутри некоторого ребра ломаной  $L$ ;
- (2) точка  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , и выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через  $\ell_P$ , рис. 7.8.

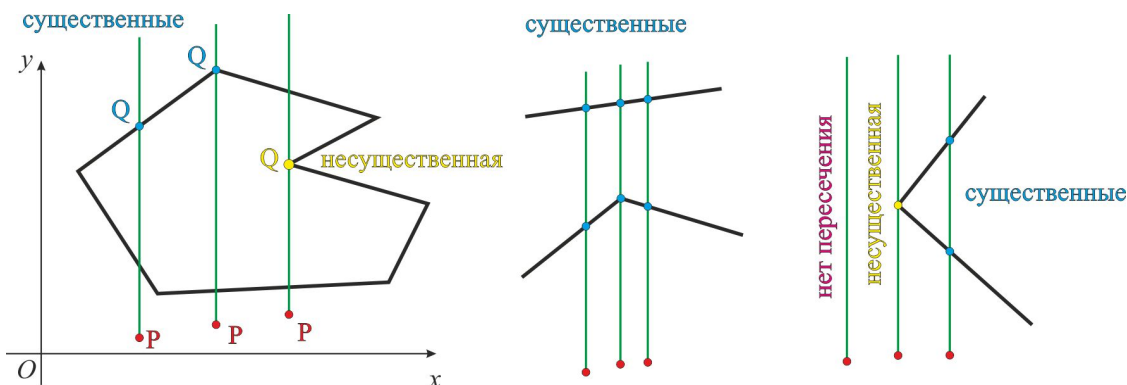


Рис. 7.8: Реализация пункта (4).

Положим  $\eta(P) = 0$ , если число существенных пересечений луча  $\ell_P$  с ломаной  $L$  четно, и  $\eta(P) = 1$  в противном случае.

Выясним, что происходит с числом  $\eta(P)$  при изменении положения точки  $P$  внутри множества  $\Omega$ . Предположим, что  $Q \in \ell_P \cap L$  — внутренняя точка некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Выберем  $\delta_Q > 0$  так, чтобы оно было меньше минимума абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой точки  $Q$  и  $x$ -координатами концов ребра  $e$ , а также меньше расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при смещениях точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta_Q$ , ребро  $e$  по-прежнему пересекается со смещенным лучом  $\ell_P$ , так что вклад ребра  $e$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Пусть теперь  $Q$  — вершина ломаной  $L$ , а  $e$  и  $f$  — выходящие из  $Q$  ребра ломаной  $L$ , так что  $Q = (e \cup f) \cap \ell_P$ .

Если  $Q$  — существенное пересечение, то выберем число  $\delta_Q > 0$  так, чтобы оно было меньше абсолютных величин разностей между  $x$ -координатой вершины  $Q$  и  $x$ -координатами остальных концов ребер  $e$  и  $f$ , а также меньше расстояния от  $P$  до ломаной  $L$ . Тогда при сдвиге точки  $P$  на расстояние, меньшее  $\delta$ , смещенный луч  $\ell_P$  продолжает пересекать  $e \cup f$  ровно по одной точке, причем это пересечение остается существенным, поэтому вклад пары ребер  $e$  и  $f$  в четность числа  $\eta(P)$  не меняется.

Осталось разобрать случай, когда  $Q$  — несущественное пересечение. Выберем  $\delta_Q > 0$  как в предыдущем абзаце. Обозначим через  $\ell$  прямую, проходящую через  $\ell_P$ . Пусть  $P$  смещается на расстояние, меньшее  $\delta_Q$ . Если  $P$  смещается вдоль  $\ell$ , то  $Q$  остается несущественным пересечением. Если  $P$  смещается в ту ограниченную  $\ell$  полуплоскость, которая содержит ребра  $e$  и  $f$ , то вместо несущественного пересечения  $Q$  возникают два существенных пересечения (с ребрами  $e$  и  $f$ ), так что их суммарный вклад в  $\eta(P)$  равен нулю. Если же  $P$  смещается в противоположную полуплоскость (не содержащую  $e$  и  $f$ ), то ребра  $e$  и  $f$  перестают пересекаться со смещенным  $\ell_P$  и, значит, вклад этих ребер в  $\eta(P)$  также равен нулю.

Пусть  $\delta > 0$  меньше любого из конечного числа чисел  $\delta_Q$ , где  $Q$  пробегает все точки из  $\ell_P \cap L$ . Из приведенных выше рассуждений следует, что если  $P' \in U_\delta(P)$ , то  $\eta(P) = \eta(P')$ ; иными словами, функция  $\eta$  на  $\Omega$  локально постоянна. В силу следствия 6.36, функция  $\eta$  постоянна на каждой компоненте множества  $\Omega$ .

Покажем теперь, что существуют точки, в которых  $\eta$  принимает различные значения. Пусть  $Q$  — середина некоторого ребра  $e$  ломаной  $L$ . Напомним, что круг  $U_Q$  имеет радиус  $\varepsilon_Q$  и не пересекает ребра ломаной  $L$  отличные от  $e$ . Обозначим через  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно результат смещения точки  $Q$  в направлении оси  $y$  и в противоположном направлении на расстояние  $\varepsilon_Q/2$ . Тогда точки  $Q_i$  лежат в  $\Omega$ ,  $[Q_1, Q_2] \cap L = Q$  и  $\ell_{Q_1} \subset \ell_{Q_2}$ . Таким образом,  $\ell_{Q_2} \cap L = (\ell_{Q_1} \cap L) \cup \{Q\}$  и  $Q$  является существенной точкой из  $\ell_{Q_2} \cap L$ , поэтому  $\eta(Q_1) \neq \eta(Q_2)$  и, значит, точки  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ . Тем самым, множество  $\Omega$  имеет не менее двух компонент. Последнее наблюдение завершает доказательство теоремы 7.3.

## 7.4 Лемма о четырех точках

Приведем ряд результатов, получающихся с помощью техники, развитой при доказательстве теоремы Жордана для ломаных.

**Лемма 7.10.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая вложенная ломаная,  $P$  — произвольная точка из  $L$ , и  $U_P$  — круг, определенный выше. Тогда  $U_P \setminus L$  состоит из двух компонент, причем эти компоненты лежат в разных компонентах множества  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ .

**Доказательство.** В силу выбора окрестности  $U_P$ , множество  $U_P \setminus L$  состоит из двух компонент. Техниккой, аналогичной описанной в пункте 7.3.4, соединим каждую точку из  $\Omega$  с некоторой точкой из  $U_P$  с помощью ломаной, не пересекающей  $L$ . Отсюда вытекает, что обе компоненты множества  $U_P \setminus L$  не могут лежать в одной компоненте множества  $\Omega$ , иначе бы мы соединили ломаной, не пересекающей  $L$ , точки из разных компонент  $\Omega$ .  $\square$

**Лемма 7.11** (О четырех точках на замкнутой ломаной). Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутая вложенная ломаная и  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Пусть  $P, Q, R, S$  — различные последовательные точки из  $L$ . Соединим точки  $P$  и  $R$  ломаной  $L_1$ , а точки  $Q$  и  $S$  ломаной  $L_2$ . Предположим, что

- (1) обе ломаные  $L_i$  вложенные;
- (2) обе  $L_i$  лежат, за исключением своих концевых точек, в одной и той же компоненте множества  $\Omega$ .

Тогда  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются.

**Пример 7.12.** Покажем, что эта лемма также нетривиальна, как и теорема Жордана. Для этого рассмотрим пример, приведенный на рис. 7.9. Ломаная  $L$  на торе и на листе Мёбиуса, изображенная условно в виде красной кривой, разбивает каждую из этих поверхностей на две компоненты. Ломаные  $L_1$  и  $L_2$ , изображенные условно черной и зеленой кривыми, удовлетворяют условию леммы 7.11, однако они не пересекаются.

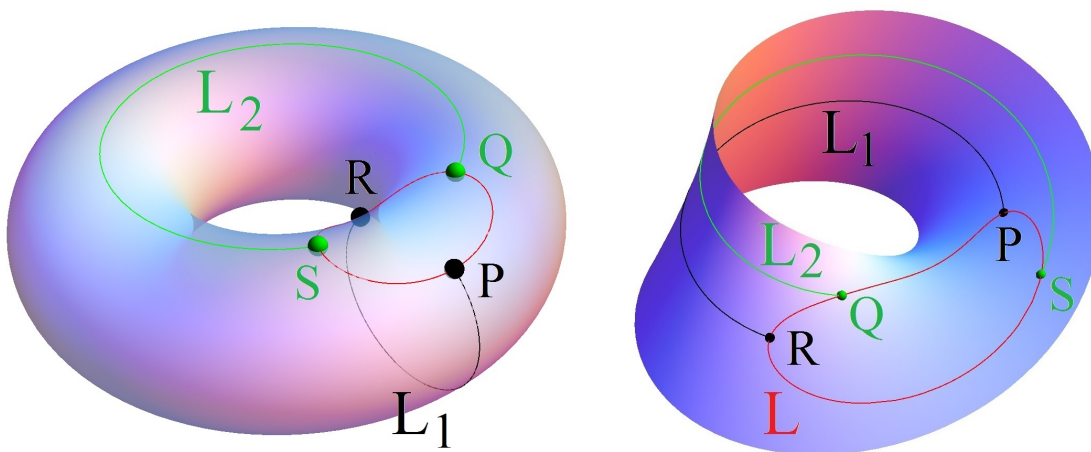


Рис. 7.9: На листе Мёбиуса лемма 7.11 неверна.

Проследите, какая часть приводимого ниже доказательства леммы 7.11 не проходит в описанном только что примере.

**Доказательство леммы 7.11.** Обозначим  $L'$  и  $L''$  ломаные, на которые  $L$  разбивается точками  $P$  и  $R$ . Без ограничения общности, будем считать, что  $Q \in L'$ , а  $S \in L''$ , см. рис. 7.10.

Пусть  $\delta_Q > 0$  — произвольное число, меньшее

- расстояния от  $Q$  до ребер ломаной  $L$ , не содержащих  $Q$ ;
- расстояния от  $Q$  до ребер ломаной  $L_2$ , не содержащих  $Q$ ;
- расстояния от  $Q$  до ломаной  $L_1$ ,

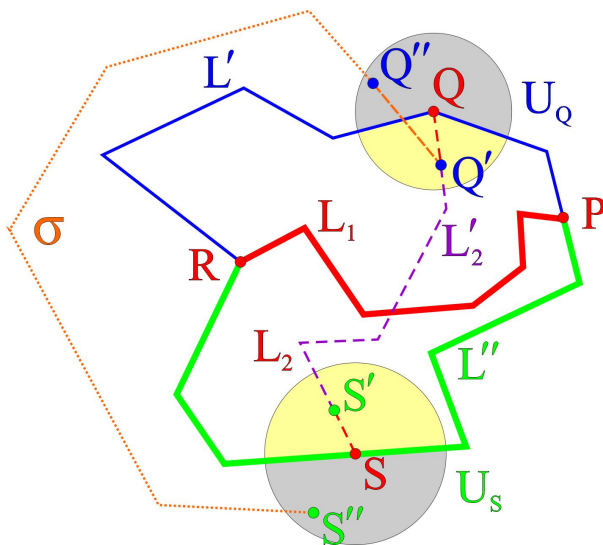


Рис. 7.10: Доказательство леммы о четырех точках.

- величины  $|QS|/2$ .

Определим  $\delta_S > 0$  дословно, заменив в предыдущем определении  $Q$  на  $S$ . Пусть  $U_Q$  и  $U_S$  — открытые круги с центрами в точках  $Q$  и  $S$  и радиусами  $\delta_Q$  и  $\delta_S$  соответственно. Тогда

- круги  $U_Q$  и  $U_S$  не пересекают друг друга;
- круг  $U_Q$  пересекает  $L' \cup L_2$  по трем своим радиусам и не пересекает  $L'' \cup L_1$ ;
- круг  $U_S$  пересекает  $L'' \cup L_2$  по трем своим радиусам и не пересекает  $L' \cup L_1$ .

Отметим, что и для ломаной  $L$ , и для ломаной  $L'' \cup L_1$  круги  $U_Q$  и  $U_S$  соответствуют так же обозначенным кругам из раздела 7.3.2. Поэтому, в силу леммы 7.10, множество  $U_Q \setminus L$  разбито на две компоненты, которые лежат в разных компонентах множества  $\Omega$ ; множество  $U_S \setminus L$  разбито на две компоненты, причем эти две компоненты лежат как в разных компонентах множества  $\Omega$ , так и в разных компонентах множества  $\Omega'' = \mathbb{R}^2 \setminus (L'' \cup L_1)$ , см. рис. 7.10.

Выберем произвольные точки  $Q' \in U_Q \cap L_2$ ,  $Q' \neq Q$ , и  $S' \in U_S \cap L_2$ ,  $S' \neq S$ . Тогда  $Q'$  и  $S'$  лежат в одной компоненте множества  $\Omega$ , так как соединяются частью  $L_2'$  ломаной  $L_2$ , не пересекающей  $L$ .

Выберем произвольные точки  $Q''$  и  $S''$  в тех компонентах множеств  $U_Q \setminus L$  и  $U_S \setminus L$ , которые не содержат  $Q'$  и  $S'$  соответственно. По теореме 7.3, множество  $\Omega$  состоит из двух компонент, поэтому точки  $Q''$  и  $S''$  лежат в одной компоненте — той, которая не содержит  $Q'$  и  $S'$ . Раз так, точки  $Q''$  и  $S''$  можно соединить ломаной  $\sigma$ , не пересекающей  $L$ .

Так как  $L_1$  и  $L_2$ , за исключением своих концевых вершин, лежат в той же компоненте, что и точки  $S'$  и  $Q'$ , ломаная  $\sigma$  не пересекает  $L_1$  и  $L_2$  и, значит, не пересекает ломаную  $L'' \cup L_1$ . Так как  $U_Q$  не пересекает  $L'' \cup L_1$ , отрезок  $[Q', Q'']$  также не пересекает ломаную  $L'' \cup L_1$ , поэтому ломаная  $[Q', Q''] \cup \sigma$  не пересекает  $L'' \cup L_1$ . Таким образом,  $Q'$  и  $S''$  лежат в одной компоненте множества  $\Omega''$ .

Но  $S''$  и  $S'$ , как было отмечено выше, лежат в разных компонентах множества  $\Omega''$ , значит точки  $Q'$  и  $S'$  также лежат в разных компонентах множества  $\Omega''$ . Следовательно,  $L_2'$  пересекает  $L'' \cup L_1$ . Но, по условию,  $L_2'$  не пересекает  $L$ , а, значит, и  $L''$ . Поэтому  $L_2'$ , а с ней и  $L_2$ , пересекает  $L_1$ , что и требовалось.  $\square$

## Упражнения к главе 7

**Упражнение 7.1.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — вложенная замкнутая ломаная, и  $\Omega_0, \Omega_1$  — компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

- (1) Докажите, что одна из компонент, скажем  $\Omega_1$ , ограничена, а другая, т.е.  $\Omega_0$ , — нет.
- (2) Множество  $F = L \cup \Omega_1$  называется *многоугольником*, ломаная  $L$  — *границей*  $\partial F$  *многоугольника*  $F$ , множество  $\Omega_1$  — *внутренностью*  $\text{Int } F$  *многоугольника*  $F$  и, наконец, множество  $\Omega_0$  — *внешностью*  $\text{Out } F$  *многоугольника*  $F$ . Докажите, что  $\text{Int } F$  и  $\text{Out } F$  — открытые множества, а  $L$  и  $F$  — замкнутые, причем в данном случае внутренность  $\text{Int } F$  и границу  $L = \partial F$  многоугольника  $F$  можно понимать в смысле приведенных в предыдущих лекциях одноименных понятий топологии.

**Упражнение 7.2.** Докажите теорему Жордана, в которой плоскость  $\mathbb{R}^2$  заменена на произвольное непустое открытое связное подмножество  $U \subset \mathbb{R}^2$ . А именно, пусть  $L \subset U$  — вложенная ломаная и  $\Omega = U \setminus L$ . Покажите, что если ломаная  $L$  незамкнута, то множество  $\Omega$  связно, а если  $L$  замкнута, то  $\Omega$  состоит в точности из двух компонент.

**Упражнение 7.3.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  — связное открытое подмножество.<sup>1</sup> Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков  $[A_i, B_i] \subset U$  (некоторые отрезки могут быть вырожденными) и положим  $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$ . Предположим, что для каждого  $k = 2, \dots, m$  выполняется или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$ , или  $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$ .

- (1) Докажите, что любые две точки из каждого множества  $\Omega_k = U \setminus X_k$  можно соединить ломаной, лежащей в  $\Omega_k$ . В частности, каждое множество  $\Omega_k$  линейно связно.
- (2) Выведите отсюда, что подмножество плоскости, полученное из  $U$  выбрасыванием конечного числа вложенных попарно непересекающихся незамкнутых ломаных, линейно связно.

**Упражнение 7.4.** Докажите, что подмножество связного открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^2$ , полученное из  $U$  выбрасыванием конечного числа  $k$  лежащих в  $U$  вложенных попарно непересекающихся замкнутых ломаных, состоит из  $(k+1)$ -ой компоненты.

**Упражнение 7.5.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  — связное открытое подмножество. Докажите, что подмножество плоскости, полученное выбрасыванием из  $U$  вложенной замкнутой ломаной и вложенной незамкнутой ломаной, состоит из двух компонент.

**Упражнение 7.6.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  — открытое подмножество,  $V \subset U$  — конечное множество, и  $E$  — конечное семейство вложенных кривых в  $U$ , соединяющих точки из  $V$ , причем пересекающихся и пересекающих  $V$  только по своим концевым точкам. Покажите, что каждую кривую из  $E$  можно заменить на вложенную ломаную, лежащую в  $U$ , соединяющую те же точки из  $V$ , причем полученные ломаные снова пересекаются и пересекают  $V$  только по своим концевым точкам.

**Упражнение 7.7.** Докажите, что

- (1) пять точек плоскости нельзя соединить вложенными ломаными так, чтобы была соединена каждая пара разных точек, и чтобы все эти ломаные пересекались лишь по своим концевым вершинам;
- (2) в предыдущем пункте ломаные можно заменить на кривые.

**Упражнение 7.8.** Докажите теорему Жордана на двумерном цилиндре. Разрешается воспользоваться теоремой Жордана для кривых.

<sup>1</sup>Кому кажется сложным упражнение 7.2, здесь и в следующих упражнениях считайте, что  $U = \mathbb{R}^2$ .

# Лекция 8

## Плоские графы

**План.** Геометрический граф в топологическом пространстве, его вершины и ребра, вложенный геометрический граф, образ вложенного геометрического графа, комбинаторный граф, комбинаторная структура геометрического графа, отображение графов, изоморфизм графов, изоморфные графы, реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве, плоские геометрические графы, планарные и непланарные комбинаторные графы, полный двудольный граф, грань плоского графа, лес, подграф, связная компонента графа, объединение, несвязное объединение и пересечение комбинаторных графов, разложение комбинаторного графа на связные компоненты, линейная связность дополнения плоского леса, формула Эйлера для плоских графов, топологический граф, его множество вершин и ребер, сеть, вершины и ребра сети, погруженная сеть, связь между погруженными сетями и геометрическими графами, вложенная сеть, связь между вложенными сетями и вложенными геометрическими графами, эквивалентность вложенности геометрического графа и вложенности сети в хаусдорфовом топологическом пространстве, подразбиение ребер комбинаторного графа, гомеоморфные комбинаторные графы, теорема Понтрягина–Куратовского (критерий планарности графа), раскраска графа, теорема Хивуда.

В этой лекции мы введем новое понятие: геометрические графы.

### 8.1 Геометрические графы

Напомним, что *графом*  $G$  называется тройка  $G = (V, E, \partial)$ , состоящая из множеств  $V$ ,  $E$  и отображения  $\partial: E \rightarrow V^{(1)} \cup V^{(2)}$ , где  $V^{(k)}$  — семейство  $k$ -элементных подмножеств  $V$ .

**Определение 8.1.** *Геометрическим графом*  $G = (V, E)$  в топологическом пространстве  $X$  называется некоторое множество  $V$  попарно различных точек в  $X$  и некоторое множество  $E$  вложенных кривых в  $X$ , начинающихся и заканчивающихся в точках множества  $V$ . Точки множества  $V$  называются *вершинами*, а кривые из множества  $E$  — *ребрами*  $G$ . Геометрический граф будем называть *вложенным*, если каждые два его ребра могут пересекаться и пересекать  $V$  только по своим конечным точкам. *Образом* вложенного геометрического графа  $G$  будем называть подмножество пространства  $X$ , являющееся объединением множества  $V$  и образов всех ребер из  $G$ .

**Замечание 8.2.** Часто вложенные геометрические графы  $G$  в топологическом пространстве  $X$  мы будем отождествлять с их образами. В этом случае будем писать  $G \subset X$ .

Чтобы отличать геометрические графы от обычных, мы будем иногда последние называть *комбинаторными графами*.

**Определение 8.3.** *Комбинаторной структурой геометрического графа*  $G = (V, E)$  будем называть комбинаторный граф  $(V, E, \partial)$ , у которого множество вершин совпадает с множеством точек  $V$ , множество ребер совпадает с множеством кривых  $E$ , а граничное отображение  $\partial$  ставит в соответствие кривой (элементу из  $E$ ) ее концы (элемент из  $V^{(1)} \cup V^{(2)}$ ).

Вся терминология, касающаяся комбинаторных графов, естественным образом переносится на геометрические графы: можно говорить об инцидентности, о циклах, о деревьях и т.п.

Геометрические графы естественно возникают во многих геометрических задачах, например, когда мы изучаем транспортную сеть, составленную из дорог, соединяющих различные города, или телефонную сеть, или сеть трубопроводов и т.д. Однако не каждый граф имеет естественное геометрическое содержание. Например, граф рукопожатий. Тем не менее, даже в случае таких не геометрических графов их изображение на листе бумаги в виде точек и соединяющих эти точки линий, т.е. в виде геометрического графа, дает наглядное представление о комбинаторной структуре графа.



**Определение 8.4.** Пусть  $G = (V, E, \partial)$  и  $G' = (V', E', \partial')$  — два комбинаторных графа. **Отображением  $f: G \rightarrow G'$  из графа  $G$  в граф  $G'$**  называется отображение  $f: V \sqcup E \rightarrow V' \sqcup E'$  такое, что  $f(V) \subset V'$ ,  $f(E) \subset E'$  и для каждого  $e \in E$  выполняется  $f(\partial e) = \partial' f(e)$ . Здесь той же буквой  $f$  обозначено отображение, определенное на подмножествах  $V$ : если  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ , то  $f(\{v_1, \dots, v_k\}) = \{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ . Биективное  $f$  называется **изоморфизмом графов  $G$  и  $G'$** . Графы называются **изоморфными**, если между ними существует изоморфизм.

**Замечание 8.5.** В теории графов изоморфные графы естественно считать одинаковыми, так как они обладают одинаковыми комбинаторными свойствами.

**Определение 8.6.** Геометрический граф  $G$  в топологическом пространстве  $X$  будем называть **реализацией комбинаторного графа  $G'$** , если задан изоморфизм графа  $G'$  и комбинаторной структуры геометрического графа  $G$ .

## 8.2 Плоские и планарные графы

Нас будет особенно интересовать случай, когда  $X = \mathbb{R}^2$ . Вложенный геометрический граф, лежащий на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , называется **плоским**. Комбинаторный граф, для которого существует реализация в виде плоского геометрического графа, называется **планарным**, и **непланарным**, если такой реализации не существует.

**Замечание 8.7.** На самом деле, у каждого планарного графа существует реализация в виде плоского графа, ребра которого — ломаные (такие реализации иногда называют **кусочно-линейными**). Это утверждение составляло содержание упражнения 7.6. В дальнейшем, разбирая примеры непланарных графов, мы будем показывать именно то, что эти графы не имеют кусочно-линейных реализаций.

**Пример 8.8.** Обозначим  $K_{p,q}$  простой граф  $(V, E)$ , в котором множество  $V$  представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств  $V'$  и  $V''$  таких, что  $V'$  состоит из  $p$  вершин,  $V''$  — из  $q$  вершин, а  $vw \in E$  тогда и только тогда, когда одна из вершин  $v, w$  лежит в  $V'$ , а другая — в  $V''$ . Каждый такой граф называется **полным двудольным графом**.

Один из них —  $K_{3,3}$  — хорошо известен по математическим кружкам и олимпиадам под названием “домики и колодцы”. Решение приводимого ниже следствия также переносится и на упражнение 7.7.

**Следствие 8.9.** Граф  $K_{3,3}$  — непланарный.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существует реализация графа  $K_{3,3}$  в виде плоского графа  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Доказательство проведем в случае, когда ребра графа  $G$  — ломаные. Пусть  $x_1, \dots, x_6$  — вершины графа  $K_{3,3}$ , занумерованные так, как показано на рис. 8.1, а также их образы в реализации  $G$ .

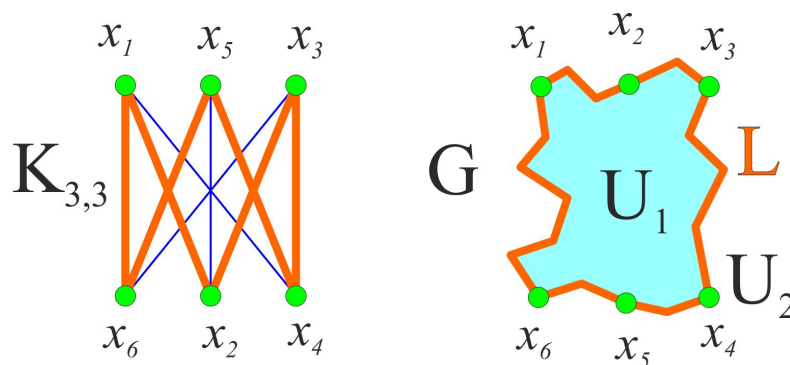


Рис. 8.1: Доказательство непланарности графа  $K_{3,3}$ .

Обозначим  $L \subset \mathbb{R}^2$  замкнутую ломаную, являющуюся реализацией цикла  $x_1 \cdots x_6 x_1$ . Тогда  $L$  не имеет самопересечений и, по теореме 7.3, множество  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$  состоит из двух компонент. Кроме этой ломаной, имеется еще три ребра-ломаные, два из которых, за исключением своих концевых точек, обязаны лежать в одной и той же компоненте множества  $\Omega$ . Однако, у любых двух из этих трех ребер вершины чередуются на  $L$ , поэтому такие ребра обязаны пересекаться в силу леммы 7.11.  $\square$

## 8.3 Формула Эйлера для плоских графов

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — плоский геометрический граф. Компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  называются *гранями графа*  $G$ .

Приведем ряд важных для дальнейшего понятий из теории графов.

- Граф без циклов называется *лесом*.
- Пусть  $G = (V, E, \partial)$  — произвольный комбинаторный граф. Каждый комбинаторный граф  $H = (V', E', \partial')$  такой, что  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$  и  $\partial'$  — ограничение  $\partial$  на  $E'$ , называется *подграфом в  $G$* . Условие того, что  $H$  — подграф в  $G$  будем записывать так:  $H \subset G$ .
- Связный подграф графа  $G$ , не содержащийся в другом, отличном от него связном подграфе графа  $G$ , называется *связной компонентой графа  $G$* .
- Пусть  $G = (V, E, \partial)$  и  $H = (V', E', \partial')$  — комбинаторные графы такие, что  $\partial_{E \cap E'} = \partial'_{E \cap E'}$ . Тогда тройка  $(V \cup V', E \cup E', d)$ , где  $d|_E = \partial$  и  $d|_{E'} = \partial'$ , является комбинаторным графом (он корректно определен в силу согласованности  $\partial$  и  $\partial'$  на  $E \cap E'$ ). Этот комбинаторный граф будем обозначать  $G \sqcup G'$  и называть *объединением графов  $G$  и  $G'$* .
- Если у предыдущих графов рассматривать  $V$  и  $V'$ , а также  $E$  и  $E'$  как непересекающиеся множества, то определен граф  $G \sqcup G' = (V \sqcup V', E \sqcup E', \partial \sqcup \partial')$ , где  $(\partial \sqcup \partial')|_E = \partial$  и  $(\partial \sqcup \partial')|_{E'} = \partial'$ , который называется *несвязным объединением графов  $G$  и  $G'$* . Если  $V \cap V' = \emptyset$  и  $E \cap E' = \emptyset$ , то  $G \sqcup G' = G \cup G'$ .
- Снова если у предыдущих  $G$  и  $H$  имеет место согласованность  $\partial_{E \cap E'} = \partial'_{E \cap E'}$ , то определен также граф  $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E', \partial \cap \partial')$ , где  $\partial \cap \partial' = \partial_{E \cap E'} = \partial'_{E \cap E'}$ . Этот граф называется *пересечением графов  $G$  и  $G'$* . Естественный частный случай этой конструкции возникает в случае, когда графы  $G$  и  $H$  являются подграфами в некотором общем графе. В этой ситуации их отображения инцидентности согласованы автоматически.

**Замечание 8.10.** По аналогии с рассмотрением линейно связных компонент топологического пространства, несложно понять, что каждый граф  $G$  однозначно представим в виде объединения попарно непересекающихся связных компонент  $G_i$ :  $G = \sqcup_{i=1}^k G_i$ . Более того, ниже мы опишем представление графов в виде топологических пространств, и тогда компоненты графа получат свое чисто топологическое значение. Как топологические пространства графы будут локально линейно связными, поэтому нам не нужно будет различать связные и линейно связные компоненты.

**Замечание 8.11.** По определению, каждая связная компонента леса является связным графом без циклов, т.е. деревом. Таким образом, каждый лес представляет собой дизъюнктивное объединение деревьев.

**Предложение 8.12.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — плоский лес. Тогда  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  линейно связно, т.е.  $G$  имеет ровно одну грань.

**Доказательство.** Доказательство проведем для  $G$ , ребра которого — ломаные. Построим новый граф  $X$ , который на плоскости будет задавать то же подмножество, что и исходный граф. А именно, множество вершин графа  $X$  состоит из вершин графа  $G$  и всех внутренних вершин ломаных, являющихся ребрами  $G$ . Множество ребер графа  $X$  состоит из всех ребер ломаных (т.е. обычных отрезков), которые являются ребрами графа  $G$ . Ясно, что полученный геометрический граф  $X$  не содержит циклов, т.е. является лесом. Кроме того, граф  $X$  вложенный.

Если  $X$  содержит хотя бы одно ребро, то, по упражнению 1.5, его неточечная связная компонента — дерево, содержащее ребро, — имеет висячую вершину. Обозначим эту висячую вершину  $B$ , а единственную смежную с ней вершину леса  $X$  через  $A$ . Пусть  $X'$  получается из  $X$  выкидыванием полуинтервала  $(A, B]$ . В терминах теории графов это означает выкидывание вершины  $B$  вместе с инцидентным ей ребром  $[A, B]$ .

Если  $X$  не содержит ребер, т.е. состоит из изолированных вершин, то представим каждую вершину  $v$  в виде вырожденного отрезка  $[A, B]$ , и пусть  $X'$  получается из  $X$  выкидыванием вершины  $v$ .

Применим описанную выше операцию до тех пор, пока мы не исчерпаем весь граф  $X$ , а после этого запустим обратный процесс. В результате мы представим граф  $X$  в виде последовательности отрезков, удовлетворяющей условиям упражнения 7.3, в силу которого  $\mathbb{R}^2 \setminus X = \mathbb{R}^2 \setminus G$  линейно связно.  $\square$

**Теорема 8.13** (Формула Эйлера). Пусть  $G = (V, E)$  — произвольный плоский граф, состоящий из  $k$  связных компонент, и пусть  $F$  — множество его граней. Тогда

$$|V| - |E| + |F| = 1 + k.$$

**Доказательство.** Мы докажем формулу Эйлера в предположении, что все ребра графа  $G$  — ломаные. Так же, как и в доказательстве предложения 8.12, заменим граф на такой, у которого все ребра — прямолинейные отрезки. Отметим, что при такой замене не меняется число граней и связных компонент, а количества ребер и вершин увеличиваются на одно и то же число, поэтому формула Эйлера верна или нет одновременно для исходного и результирующего графов. Кроме того, полученный граф является простым, так как его ребра — прямолинейные отрезки, а они не могут образовывать ни петель, ни кратных ребер. Новый граф по-прежнему будем обозначать  $G$ .

Пусть в графе  $G$  имеется цикл  $v_0v_1v_2\dots$ , где  $v_p$  — последовательно проходимые вершины. Рассмотрим первую вершину  $v_i$ , которая совпадает с некоторой “предыдущей” вершиной  $v_j$ ,  $j < i$ . Пусть  $C \subset \mathbb{R}^2$  — ломаная с последовательными вершинами  $v_j, v_{j+1}, \dots, v_i = v_j$ , тогда ломаная  $C$  — вложенная. Выбросим из графа  $G$  ребро  $e = v_jv_{j+1}$  и покажем, что формула Эйлера выполняется или нет одновременно для  $G$  и  $G \setminus e$ . Заметим, что в графе  $G \setminus e$  количество вершин такое же, как в  $G$ , а количество ребер меньше на единицу. Покажем, что количество компонент у графов  $G$  и  $G \setminus e$  одинаковое.

Действительно, те компоненты, которые ребро  $e$  не содержали, остались прежними. Пусть  $G_m$  — компонента графа  $G$ , содержащая  $e$ . Возьмем в  $G_m$  произвольные две вершины  $v$  и  $w$ , и пусть  $\gamma$  — путь в  $G$ , соединяющий  $v$  и  $w$ . Если  $\gamma$  не проходит через  $e$ , то  $\gamma$  также соединяет  $v$  и  $w$  в  $G \setminus e$ . Если же  $\gamma$  проходит через  $e$ , то заменим в  $\gamma$  ребро  $e$  на путь  $v_i = v_j, v_{i-1}, \dots, v_{j+1}$ , в результате чего получим маршрут в  $G \setminus e$ , соединяющий  $v$  и  $w$ . Таким образом,  $G_m \setminus e$  — связный подграф в  $G \setminus e$ . Он является максимальным связным подграфом, так как иначе  $G_m$  не был бы компонентой  $G$ .

Нам осталось показать, что число граней в графе  $G \setminus e$  меньше на единицу числа граней в  $G$ , и тогда будет доказано, что формула Эйлера одновременно выполнена или нет для  $G$  и  $G \setminus e$ . По теореме 7.3, ломаная  $C$  разбивает плоскость на две компоненты. Пусть  $P$  — внутренняя точка ребра  $e$ . Так как  $P$  не содержится в  $G \setminus e$ , то  $\varepsilon := |P(G \setminus e)| > 0$ . Выберем произвольное положительное  $\varepsilon_P < \varepsilon$  и положим  $U_P = U_{\varepsilon_P}(P)$ . Тогда открытый круг  $U_P$  не пересекает  $G \setminus e$ , поэтому  $U_P \cap G = U_P \cap e$  — диаметр круга  $U_P$ . Кроме того,  $U_P$  подходит под определение одноименного круга из леммы 7.10, в соответствии с которой точки из компонент множества  $U_P \setminus C = U_P \setminus e$  лежат в разных гранях графа  $G$ . Таким образом, выбрасывание из  $G$  ребра  $e$  приводит к уменьшению числа граней: точки тех двух граней  $F_1$  и  $F_2$ , в которых лежат компоненты  $U_P \setminus C$ , до выбрасывания ребра  $e$  нельзя было соединить ломаной, не пересекая  $G$ , а после выбрасывания — можно.

Покажем, что при выбрасывании ребра  $e$  из графа  $G$  остальные грани не изменятся. По аналогии с тем, как мы доказывали лемму 7.8, можно показать, что окрестность  $U_Q$  любой другой внутренней точки  $Q$  ребра  $e$  разбивается ломаной  $C$  на две компоненты, которые лежат в тех же гранях  $F_1$  и  $F_2$ , что и компоненты  $U_P \setminus C$ : достаточно сместить отрезок  $[P, Q]$  в двух направлениях, перпендикулярных ребру  $e$  так, чтобы смещенные отрезки  $[P', Q']$  не пересекали граф  $G$ , а точки  $P'$  и  $Q'$  лежали соответственно в  $U_P$  и  $U_Q$ . Таким образом, при выбрасывании из графа  $G$  внутренности ребра  $e$  границы граней, отличных от  $F_1$  и  $F_2$ , не меняются, поэтому оставшиеся грани расширяться не могут.

Итак, мы показали, что при выбрасывании ребра  $e$  справедливость формулы Эйлера не меняется, а количество граней графа  $G$  уменьшается на единицу. Продолжая эти рассуждения и последовательно разрушая все циклы графа  $G$ , мы в результате получим граф  $H$  без циклов, т.е. лес.

По предложению 8.12, граф  $H$  имеет ровно одну грань. Кроме того, по упражнению 1.6, каждая компонента леса  $H$  — дерево  $(V_i, E_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , — содержит на одно ребро меньше, чем число его вершин, т.е.  $|E_i| = |V_i| - 1$ , откуда

$$|V| - |E| + |F| = \sum_{i=1}^k |V_i| - \sum_{i=1}^k |E_i| + 1 = k + 1,$$

т.е. формула Эйлера имеет место для леса  $H$ , а, значит, и для исходного графа  $G$ .  $\square$

Напомним, что простой граф с  $n$  вершинами, у которого каждая пара вершин соединяется ребром, называется **полным** и обозначается через  $K_n$ .

**Следствие 8.14.** Граф  $K_5$  непланарный.

**Доказательство.** Предположим, что граф  $K_5$  планарный, и пусть  $G$  — некоторая его реализация в виде плоского графа. Обозначим  $v$ ,  $e$ ,  $f$  и  $k$  соответственно количества вершин, ребер, граней и компонент графа  $G$ .

Тогда  $v = 5$ ,  $e = 10$ ,  $k = 1$  и, по формуле Эйлера,  $5 - 10 + f = 1 + 1$ , т.е.  $f = 7$ . С другой стороны, каждый цикл в простом графе имеет не менее 3 ребер, поэтому, если  $e_i$  — число ребер  $i$ -ой грани, то  $\sum_{i=1}^f e_i \geq 3f = 21$ . Однако, так как каждое ребро входит не более чем в две грани, предыдущая сумма не превосходит  $2e = 20$ , противоречие.  $\square$

## 8.4 Топологические графы

Напомним, что в разделе 5.3 мы определили понятие фактор-топологии, в частности, понятие склейки пространств. Применим эту технику для задания топологических графов. Пусть  $X$  — дизъюнктное объединение конечного дискретного пространства  $V$  и конечного семейства  $E = \{[a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ , состоящего из невырожденных отрезков  $[a_i, b_i]$  вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Приклеим каждый конец отрезков из семейства  $E$  к некоторому элементу из  $V$ , и пусть  $\sim$  — соответствующая эквивалентность. Тогда  $G := X/\sim$  называется **топологическим графом** с **множеством вершин**  $V$  и **множеством ребер**  $E$ . Если  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  — каноническая проекция, то  $\pi$ -образы самих отрезков также называются **ребрами** топологического графа  $G$ . Определим **отображение инцидентности**  $\partial$ , которое показывает, к каким вершинам приклеено каждое ребро: если  $[a_i, b_i] \in E$  — ребро топологического графа  $G$ , конец  $a_i$  приклеивается к вершине  $v$ , а конец  $b_i$  — к вершине  $w$ , то  $\partial([a_i, b_i]) = \{v\} \cup \{w\}$ .

Таким образом, тройка  $(V, E, \partial)$  является комбинаторным графом и описывает структуру топологического графа  $G$ . Так как  $\partial$  однозначно определяет эквивалентность  $\sim$ , то мы будем отождествлять топологический граф  $G$  с комбинаторным графом и писать  $G = (V, E, \partial)$ . Иными словами, топологический граф можно представлять как частный случай комбинаторного графа, у которого множество ребер — невырожденные отрезки прямой.

Пусть  $G = (V, E, \partial)$  — топологический граф. Непрерывное отображение  $\Gamma: G \rightarrow Y$  в топологическое пространство  $Y$  называется **сетью**. Под **вершинами и ребрами сети**  $\Gamma$  будем понимать ограничение соответственно на вершины  $v \in V$  и ребра  $[a_i, b_i] \in E$  композиции  $\Gamma \circ \pi$ . Таким образом, каждое ребро сети  $\Gamma$  — это некоторая кривая  $\Gamma \circ \pi: [a_i, b_i] \rightarrow Y$  в пространстве  $Y$ .

Сеть  $\Gamma$ , для которой ограничение отображения  $\Gamma \circ \pi$  на множество вершин  $V$  инъективно, а каждое ребро является вложенной кривой, будем называть **погруженной**. Каждая погруженная сеть определяет геометрический граф, у которого множество вершин — это  $(\Gamma \circ \pi)(V)$ , а множество ребер — это семейство вложенных кривых  $\{\Gamma \circ \pi: [a_i, b_i] \rightarrow Y\}_{i=1}^m$ . Ясно, что комбинаторная структура такого геометрического графа изоморфна  $(V, E, \partial)$ .

Обратно, пусть  $(V, E)$  — геометрический граф в топологическом пространстве  $Y$ , и  $(V, E, \partial)$  — комбинаторная структура графа  $(V, E)$ . Пусть  $E$  состоит из вложенных кривых  $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow Y$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $X$  — дизъюнктное объединение множества  $V$  и  $\sqcup_{i=1}^m [a_i, b_i]$ . Отображение включения  $V \subset Y$  вместе с отображениями  $\gamma_i$  задают непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ . Пусть  $\sim$  — эквивалентность на  $X$ , приклеивающая каждый отрезок  $[a_i, b_i]$  к точкам  $\partial(\gamma_i)$ , точнее, склеивающая  $a_i$  и  $b_i$  с их  $\gamma_i$ -образами, и  $G = X/\sim$ . Так как  $f$  также отображает  $a_i$  на  $\gamma_i(a_i)$  и  $b_i$  на  $\gamma_i(b_i)$ , то определено отображение  $\Gamma: G \rightarrow Y$ , для которого  $f = \Gamma \circ \pi$ , где  $\pi: X \rightarrow G$  — каноническая проекция.

**Задача 8.15.** Покажите, что отображение  $\Gamma: G \rightarrow Y$  непрерывно, т.е.  $\Gamma$  — сеть. Более того, ограничение отображения  $\Gamma \circ \pi$  на  $V$  инъективно, а на каждое  $[a_i, b_i]$  — вложенная кривая, т.е. сеть  $\Gamma$  — погруженная.

Таким образом, мы показали, что каждая погруженная сеть однозначно задает геометрический граф и обратно, каждый геометрический граф однозначно определяет погруженную сеть.

Сеть  $\Gamma: G \rightarrow Y$ , являющаяся гомеоморфизмом с образом, называется **вложенной**. Легко видеть, что вложенность сети  $\Gamma$  влечет вложенность соответствующего геометрического графа. Верно ли обратное утверждение?

**Пример 8.16.** Рассмотрим топологическое пространство  $Y = [0, 2]$  со следующей топологией: каждое подмножество  $U \subset (0, 2)$  открыто в точности тогда, когда оно открыто в  $\mathbb{R}$ , а подмножество  $U \subset [0, 2]$ ,  $U \cap \{0, 2\} \neq \emptyset$  открыто, если и только если  $U \supset \{0, 2\}$  и  $U$  открыто в индуцированной из  $\mathbb{R}$  топологии на  $[0, 2]$ . Отметим, что в этой топологии точки 0 и 2 неотделимы, т.е.  $Y$  не хаусдорфово.

Пусть  $V = \{0, 1, 2\}$ , а  $E$  состоит из двух кривых в  $Y$ , параметризованных отрезками  $[0, 1]$  и  $[1, 2]$  с помощью отображений включения. Отметим, что на каждом из отрезков  $[0, 1] \subset Y$  и  $[1, 2] \subset Y$  индуцируется стандартная топология из прямой  $\mathbb{R}$ , поэтому обе кривые из  $E$  являются вложенными, так что  $(V, E)$  — вложенный геометрический граф, образ которого равен  $Y$ . Однако соответствующий топологический граф  $G$  гомеоморфен отрезку, поэтому он не гомеоморфен образу этого геометрического графа.

Тем не менее, если пространство  $Y$  хаусдорфово, то таких “неприятностей” не возникает.

**Следствие 8.17.** Пусть  $(V, E)$  — вложенный геометрический граф в хаусдорфовом топологическом пространстве  $Y$  и  $\Gamma: G \rightarrow Y$  — соответствующая сеть. Тогда сеть  $\Gamma$  — вложенная, так что образ геометрического графа  $(V, E)$  гомеоморфен  $G$ .

**Доказательство.** Пусть, как и выше,  $E$  состоит из вложенных кривых  $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow Y$ , пространство  $X$  — дизъюнктное объединение  $V \subset Y$  и  $\sqcup_i [a_i, b_i]$ , а  $f: X \rightarrow Y$  совпадает на  $V$  с включением  $V \subset Y$ , а на  $[a_i, b_i]$  — с  $\gamma_i$ , так что  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Тогда  $X$  — компакт,  $f(X)$  — хаусдорфово пространство, эквивалентность  $\sim$ , приклеивающая  $a_i$  и  $b_i$  к из  $\gamma_i$ -образам, задает то же самое разбиение  $X$ , что и отображение  $f$ , поэтому, в силу теоремы 5.50, пространство  $f(X) \subset Y$ , т.е. образ геометрического графа  $(V, E)$ , гомеоморфно  $X/f$  и, значит, гомеоморфно  $X/\sim = G$ , что и требовалось.  $\square$

В следующем разделе мы введем понятие гомеоморфных геометрических графов, которое становится естественным после описанного только что представления геометрических графов в виде сетей.

## 8.5 Планарные графы. Критерий Понтрягина–Куратовского

При исследовании планарности графов вершины степени 2 не играют никакой роли. Действительно, если  $G$  — плоский граф, то разбиение любого его ребра на части добавлением к множеству вершин некоторых точек этого ребра не меняет граф как подмножество плоскости. Обратное, если есть два ребра, которые имеют общую вершину степени 2, то эту вершину можно выкинуть из множества вершин, а ребра склеить в одно, большее ребро. Графы, которые отличаются лишь вершинами степени 2, называются гомеоморфными. Дадим формальное определение.

**Определение 8.18.** Пусть  $G = (V, E, \partial)$  — произвольный комбинаторный граф и  $e \in E$  — некоторое его ребро. Пусть  $w$  не содержится в  $V$ , а  $e_1$  и  $e_2$  не содержатся в  $E$ . Рассмотрим граф  $G' = (V', E', \partial')$ , положив  $V' = V \cup \{w\}$  и  $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$ . Отображение  $\partial'$  положим равным  $\partial$  на  $E \setminus \{e\}$ , а на  $e_1$  и  $e_2$  зададим его так:

- (1) если  $\partial(e) = \{v\}$ , то  $\partial'(e_1) = \partial'(e_2) = \{v, w\}$ ;
- (2) если же  $\partial(e) = \{u, v\}$ , то  $\partial'(e_1) = \{u, w\}$ ,  $\partial'(e_2) = \{v, w\}$ .

Будем говорить, что граф  $G'$  получен из графа  $G$  *подразбиением его ребра  $e$* . Комбинаторные графы  $G$  и  $H$  называются *гомеоморфными*, если из них многократными подразделениями ребер можно получить изоморфные графы.

На рис. 8.2 показаны два плоских графа. Синими кругами обозначены их вершины. Хотя, как подмножества плоскости, эти графы гомеоморфны, тем не менее, их комбинаторные структуры разные: они отличаются расположением вершин степени 2. Красными кругами обозначены добавленные вершины степени 2 (некоторые ребра подразбиты). В результате получаем изоморфные графы.

**Замечание 8.19.** Если рассматривать комбинаторный граф как соответствующий топологический, подразбиение ребер не изменит его топологической структуры, поэтому результирующее топологическое пространство остается гомеоморфным себе. Этим объясняется термин “гомеоморфные комбинаторные графы”.

**Теорема 8.20** (Понтрягин–Куратовский). *Комбинаторный граф  $G$  является планарным тогда и только тогда, когда никакой его подграф не гомеоморфен  $K_{3,3}$  или  $K_5$ .*

Доказательство в одну сторону — а именно, доказательство непланарности графа, содержащего подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , очевидно после того, как мы доказали непланарность  $K_{3,3}$  и  $K_5$ , см. следствия 8.9 и 8.14.

Доказательство в другую сторону намного сложнее.

Приведем некоторые следствия.

**Следствие 8.21.** *Полный граф  $K_n$  планарен тогда и только тогда, когда  $n = 1, 2, 3$  или  $4$ .*

**Доказательство.** Действительно, при  $n \leq 4$  легко построить соответствующую реализацию на плоскости. При  $n > 4$  граф  $K_n$  содержит подграф, изоморфный  $K_5$ .  $\square$

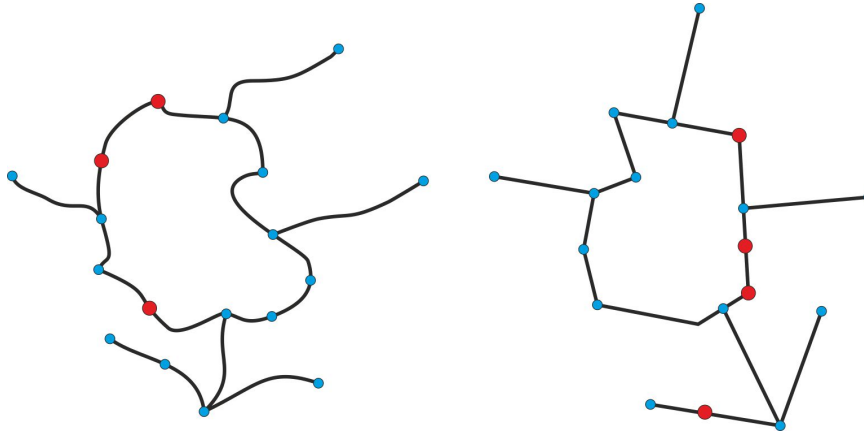


Рис. 8.2: Подразбиение ребер и гомеоморфность графов.

**Следствие 8.22.** *Граф  $K_{p,q}$  является планарным тогда и только тогда, когда  $\min(p, q) \leq 2$ .*

**Доказательство.** Действительно, при  $\min(p, q) \leq 2$  легко построить соответствующие реализации на плоскости. При  $\min(p, q) \geq 3$  граф  $K_{p,q}$  содержит подграф, изоморфный  $K_{3,3}$ .  $\square$

## Упражнения к главе 8

### Упражнение 8.1.

- (1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в виде вложенного геометрического графа, ребра которого — ломаные.
- (2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве  $\mathbb{R}^3$  в виде вложенного геометрического графа, ребра которого — прямолинейные отрезки.

**Упражнение 8.2.** Используя формулу Эйлера, покажите, что граф  $K_{3,3}$  непланарный.

**Упражнение 8.3.** Пусть  $G$  — плоский связный простой граф, имеющий  $v$  вершин,  $e$  ребер и  $f$  граней.

- (1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при  $v \geq 3$  выполняется  $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$ .
- (2) Покажите, что  $G$  содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

**Упражнение 8.4.** Пусть  $G$  — плоский связный простой граф. Покажите, что  $G$  не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

**Упражнение 8.5.** Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень  $d \geq 3$ , каждая грань ограничена одним и тем же числом  $k \geq 3$  ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

**Определение 8.23.** Пусть  $G$  — простой граф. *Окружением*  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$  вершины  $v$  графа  $G$  назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из  $G$ , каждая из которых соединена с  $v$  некоторым ребром; его ребра — все ребра графа  $G$ , соединяющие выбранные вершины.

**Определение 8.24.** Пусть  $\mathcal{C} = \{\text{Col}_i\}$  — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами*. Каждое отображение  $\nu: V \rightarrow \mathcal{C}$  будем называть *раскраской графа*  $G = (V, E, \partial)$  *цветами из множества*  $\mathcal{C}$ . При этом будем говорить, что *вершина*  $v$  *покрашена в цвет*  $\nu(v)$ . Раскраска  $\nu$  называется *правильной*, если смежные вершины покрашены разными цветами.

**Упражнение 8.6** (Теорема Хивуда о пяти красках). Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

**Упражнение 8.7.** Покажите, что

- (1) пространство  $[a, b]/\sim$ ,  $a \neq b$ , гомеоморфно окружности;
- (2) образ вложенной замкнутой кривой в пространстве  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен окружности;
- (3) вложенная кривая (замкнутая или незамкнутая), лежащая на сфере, не может проходить через все точки сферы (отметим, что не вложенная кривая — может).

**Упражнение 8.8.** Докажите теорему Жордана на двумерной сфере. Разрешается воспользоваться теоремой Жордана для кривых.

# Лекция 9

## Многогранники в $\mathbb{R}^3$

**План.** Пространственный многоугольник, плоскость многоугольника, многогранная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , многоугольники, смежные по ребру, цепочка многоугольников, грани, ребра и вершины многогранной поверхности, инцидентные элементы многогранной поверхности, граничные и внутренние ребра многогранной поверхности, теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности, выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^3$ , геометрическая реализация графа многогранной поверхности с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников, правильный многогранник, платоновы тела, ёж выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^3$ , теорема о свойствах ежа, формулировка теоремы Минковского о еже, многоугольник на поверхности выпуклого многогранника, внутренность, внешность, граница, угол многоугольника на поверхности выпуклого многогранника.

### 9.1 Пространственные многоугольники

В упражнении 7.1 мы определили многоугольник  $W$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченный замкнутой вложенной ломаной  $L$ , которую мы назвали границей многоугольника и обозначили  $\partial W$ . Также мы определили внутренность  $\text{Int } W = \Omega_1$  и внешность  $\text{Out } W = \Omega_0$  многоугольника  $W$ , где  $\Omega_1$  и  $\Omega_0$  соответственно ограниченная и неограниченная компоненты множества  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ . Нижний индекс  $i$  в обозначении  $\Omega_i$  имеет геометрический смысл: функция  $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная в разделе 7.3.5, равна  $i$  на  $\Omega_i$ . Отсюда вытекает, что  $\eta$  не зависит от выбора декартовой системы координат, в которых определяется функция  $\eta$ , так как свойство подмножества  $\Omega_i$  быть ограниченным или нет от координат не зависит. Рис. 9.1 наглядно демонстрирует, почему на неограниченной области функция  $\eta$  зануляется.

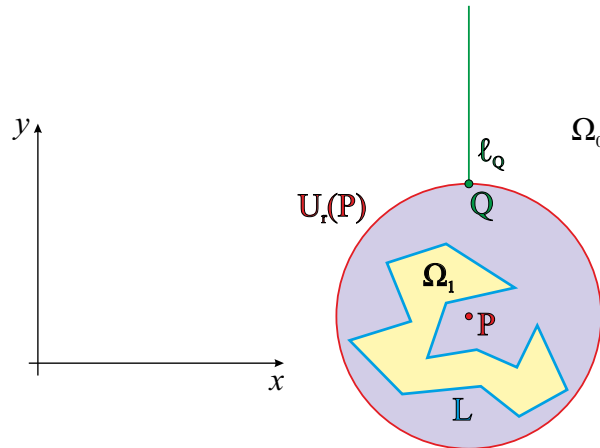


Рис. 9.1: Ломаная разбивает плоскость на ограниченную и неограниченную части.

Теперь мы склеим из многоугольников многогранные поверхности, выбирая многоугольники в аффинных плоскостях, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Приведем соответствующие определения.

Пусть  $\pi$  — (аффинная) плоскость в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. множество точек вида  $\xi + v$ , где  $v$  пробегает некоторое двумерное линейное подпространство  $V \subset \mathbb{R}^3$ , а  $\xi$  — фиксированная точка из  $\mathbb{R}^3$ . Выбрав в плоскости  $\pi$  произвольную точку



в качестве начала координат и произвольный ортонормированный базис в качестве направлений координатных осей, можно все построения и объекты из  $\mathbb{R}^2$  перенести в  $\pi$ .

**Определение 9.1.** *Пространственным многоугольником* будем называть многоугольник, построенный в некоторой аффинной плоскости  $\pi \subset \mathbb{R}^3$ , при этом  $\pi$  назовем *плоскостью многоугольника*.

**Замечание 9.2.** Аналогичным образом определяется любая плоская фигура, лежащая в пространстве, например, окружность, круг и т.д. Кроме того, говоря про внутренние и внешние точки пространственного многоугольника  $F \subset \pi$ , мы будем понимать соответствующие точки из  $\text{Int } F \subset \pi$  и  $\text{Out } F \subset \pi$ .

**Замечание 9.3.** Каждый пространственный многоугольник  $F$ , так же, как и его граница  $\partial F$ , являются замкнутыми подмножествами не только плоскости, в которой они лежат, но и всего пространства  $\mathbb{R}^3$ . Однако внутренность  $\text{Int } F$  и внешность  $\text{Out } F$  открытыми в  $\mathbb{R}^3$  не являются.

## 9.2 Многогранные поверхности и многогранники

**Определение 9.4.** *Многогранной поверхностью*  $\mathcal{F}$  в  $\mathbb{R}^3$  называется конечное семейство  $\{F_i\}$  пространственных многоугольников  $F_i \subset \mathbb{R}^3$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) для каждой пары различных многоугольников  $F_i$  и  $F_j$  их пересечение  $F_i \cap F_j$  или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если  $F_i$  и  $F_j$  имеют общее ребро  $e$ , то они называются *смежными по  $e$* ;
- (2) для каждого многоугольника  $F_i$  и каждого его ребра  $e$  существует не более одного многоугольника  $F_j$ , смежного с  $F_i$  по  $e$ ;
- (3) для каждой пары различных многоугольников  $F$  и  $F'$  существует последовательность многоугольников  $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$  такая, что  $F_{i_1} = F$ ,  $F_{i_m} = F'$ , и при каждом  $1 < k \leq m$  многоугольники  $F_{i_{k-1}}$  и  $F_{i_k}$  смежны; такую последовательность будем называть *цепочкой многоугольников, соединяющей  $F$  и  $F'$* ;
- (4) для каждой пары многоугольников  $F$  и  $F'$ , пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину;
- (5) никакие два смежных многоугольника  $F_i$  и  $F_j$  не лежат в одной плоскости.

Многоугольники  $F_i$  называются *гранями*  $\mathcal{F}$ , отрезки в  $\mathbb{R}^3$ , совпадающие с ребрами граней, — *ребрами*  $\mathcal{F}$ , а точки в  $\mathbb{R}^3$ , совпадающие с концами ребер, — *вершинами*  $\mathcal{F}$ .

На рис. 9.2 приведены примеры семейств пространственных многоугольников, которые не образуют многогранные поверхности: в каждом из этих примеров не выполняется одно из условий определения 9.4. Разберем эти примеры более подробно.

- (1) Пример (а) не является многогранной поверхностью: многоугольники  $F_i$  и  $F_j$  пересекаются по двум ребрам  $e_1$  и  $e_2$ , так что нарушается пункт (1).
- (2) Пример (б) не является многогранной поверхностью, так как там общее ребро  $e$  для многоугольников  $F_i$  и  $F_j$  является также общим и для ряда других многоугольников, поэтому нарушается пункт (2).
- (3) Пример (в) не является многогранной поверхностью, так как многоугольники из “верхней группы” невозможно соединить с многоугольниками из “нижней группы” цепочкой многоугольников, так что нарушается пункт (3).
- (4) Пример (г) не является многогранной поверхностью, так как многоугольник из “левой группы” имеет с многоугольником из “правой группы” общую вершину, но их невозможно соединить цепочкой, в которой все многоугольники содержали бы эту вершину; таким образом, здесь нарушается пункт (4).
- (5) Примеры (д)–(ж) не являются многогранными поверхностями, так как в каждом из них смежные грани  $F_i$  и  $F_j$  лежат в одной плоскости, т.е. нарушается пункт (5).

Обратите внимание, что два соседних ребра одной грани многогранной поверхности могут лежать на одной прямой, см. рис. 9.3.

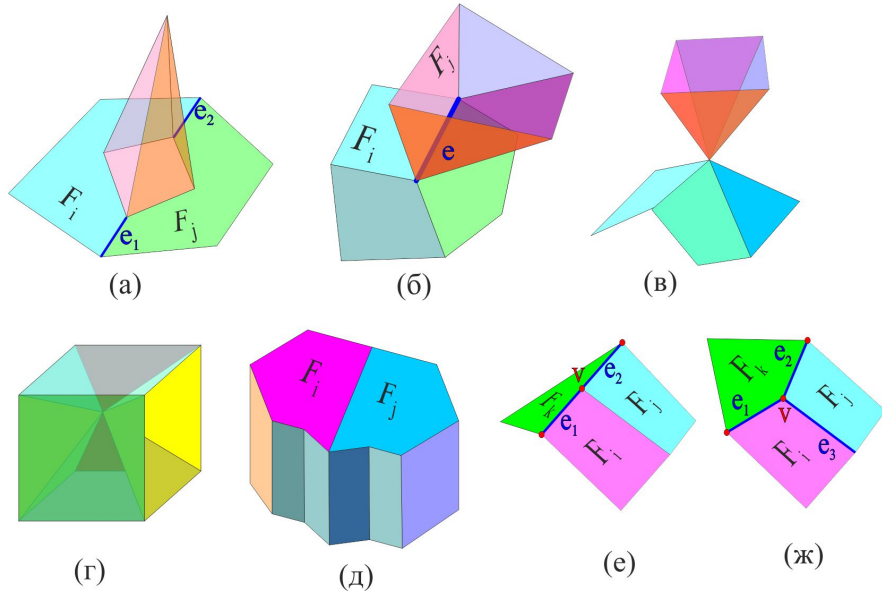


Рис. 9.2: К определению многогранной поверхности.

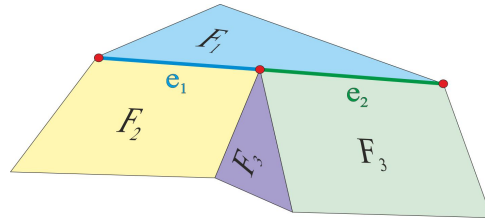


Рис. 9.3: Ребра  $e_1$  и  $e_2$  грани  $F_1$  многогранной поверхности лежат на одной прямой.

**Замечание 9.5.** Мы дали столь “жесткое” определение многогранной поверхности, чтобы избежать сложной комбинаторики. Тем не менее, в более общей теории многие из требований определения 9.4 опускают или заменяют на более слабые. Так, например, иногда рассматривают многогранные поверхности с самопересечениями, или, скажем, отказываются от условия того, что смежные грани не лежат в одной плоскости (в теории изгибаний это используется в доказательстве теоремы, объясняющей, почему игра на аккордеоне невозможна, если сделать жесткими все грани его меха). Однако такие ослабления требований приводят к усложнению теории, например, отказываясь от условия (5), мы приходим к неоднозначности представления в виде многогранной поверхности: теперь каждую грань можно разбить на еще более мелкие грани.

**Определение 9.6.** Пусть  $\mathcal{F}$  — многогранная поверхность. Если  $v$ ,  $e$  и  $F$  — соответственно вершина, ребро и грань  $\mathcal{F}$ , то в случае, когда  $v \in e$ ,  $v \in F$ , или  $e \subset F$ , говорят, что соответствующие два объекта **инцидентны**. Ребро  $\mathcal{F}$ , инцидентное только одной грани, называется **граничным**, а инцидентное двум граням — **внутренним** (заметим, что других ребер в многогранной поверхности нет в силу пункта (2) из определения 9.4). Многогранная поверхность без граничных ребер называется **замкнутой**.

**Замечание 9.7.** Мы будем иногда отождествлять многогранную поверхность  $\mathcal{F}$  с подмножеством  $\mathbb{R}^3$ , равным объединению всех граней из  $\mathcal{F}$ . Именно в этом смысле будем понимать фразу “пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — многогранная поверхность”.

Приведем без доказательства следующий важный результат.

**Теорема 9.8** (теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности). Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая многогранная поверхность. Тогда  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$  состоит из двух компонент. Одна из этих компонент является ограниченным подмножеством  $\mathbb{R}^3$ , а другая — нет.

**Определение 9.9.** Пусть  $\mathcal{F}$  — замкнутая многогранная поверхность, а  $\Omega$  — ограниченная компонента множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ . Тогда  $W = \mathcal{F} \cup \Omega$  называется *многогранником, ограниченным  $\mathcal{F}$* , или *многогранником с границей  $\mathcal{F}$*  (границу  $\mathcal{F}$  многогранника  $W$  будем также обозначать через  $\partial W$ ). Кроме того,  $\mathcal{F} = \partial W$  называют также *поверхностью многогранника  $W$* . Ограниченная компонента  $\Omega$  называется *внутренностью многогранника* и обозначается через  $\text{Int } W$ . Оставшаяся, неограниченная компонента множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$  называется *внешностью многогранника  $W$*  и обозначается через  $\text{Out } W$ .

**Замечание 9.10.** По замечанию 9.3, каждый пространственный многоугольник является замкнутым подмножеством  $\mathbb{R}^3$ . Следовательно, граница  $\partial W$  многогранника  $W$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^3$  и, значит, внутренность  $\text{Int } W$  и внешность  $\text{Out } W$  многогранника  $W$  — открытые подмножества  $\mathbb{R}^3$ , а сам многогранник  $W = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Out } W$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^3$ . Кроме того, для многогранника  $W$  имеет место аналог леммы 7.10: для каждой точки  $P \in \partial W$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что при каждом  $0 < r < \varepsilon$  множество  $U_r(P) \setminus \partial W$  состоит из двух компонент, одна из которых лежит во внутренности  $\text{Int } W$ , а другая — во внешности  $\text{Out } W$  многогранника  $W$ . Отсюда, как и в случае многоугольников, вытекает, что  $\partial W$  — топологическая граница множества  $W \subset \mathbb{R}^3$ , а  $\text{Int } W$  — топологическая внутренность  $W$ .

**Замечание 9.11.** Отметим также, что каждая многогранная поверхность, рассматриваемая как подмножество  $\mathbb{R}^3$ , имеет единственное представление в виде многогранной поверхности — точнее, если две многогранные поверхности задают одно и то же подмножество  $X \subset \mathbb{R}^3$ , то они совпадают в том смысле, что множества их граней совпадают. Последнее непосредственно вытекает из того, что каждая грань представляет собой максимальное связное подмножество  $X$ , лежащее в одной плоскости.

### 9.3 Графы, связанные с многогранными поверхностями

Пусть  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  — многогранная поверхность,  $V$  — множество вершин  $\mathcal{F}$ , а  $E$  — множество ребер  $\mathcal{F}$ . Так как каждое ребро  $\mathcal{F}$  соединяет некоторые вершины  $\mathcal{F}$ , пара  $(V, E)$  является геометрическим графом.

**Определение 9.12.** *Графом  $G$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$*  называется построенный выше геометрический граф  $(V, E)$ ; таким же образом мы называем соответствующий ему комбинаторный граф, см. рис. 9.4.

Обозначим  $E'$  множество внутренних ребер многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ . Будем рассматривать  $\mathcal{F}$  как множество граней. Напомним, что через  $\mathcal{F}^{(2)}$  мы обозначали множество 2-элементных подмножеств  $\mathcal{F}$ . Определим отображение  $\partial: E' \rightarrow \mathcal{F}^{(2)}$  следующим образом: если ребро  $e \in E'$  является пересечением граней  $F_i$  и  $F_j$ , то положим  $\partial(e) = \{F_i, F_j\} \in \mathcal{F}^{(2)}$ .

**Определение 9.13.** *Двойственным графом  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$*  называется построенный только что комбинаторный граф  $(\mathcal{F}, E', \partial)$ , см. рис. 9.4.

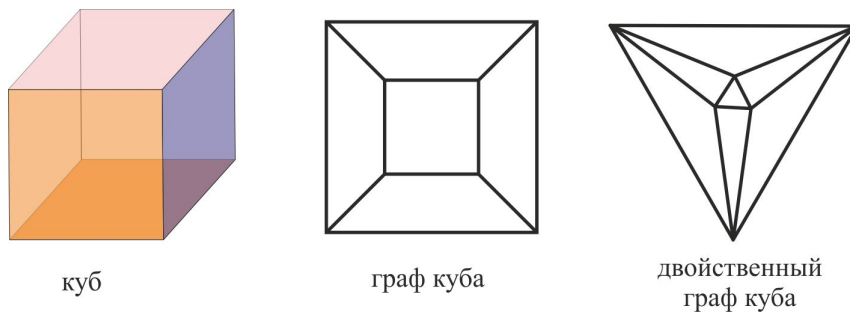


Рис. 9.4: Граф и двойственный граф многогранной поверхности.

**Замечание 9.14.** Опишем некоторые свойства графа  $G$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ .

- (1) *Граф  $G$  является простым и связным.* Отсутствие кратных ребер вытекает из того, что если два разных ребра  $e$  и  $e'$  соединяют две разных вершины  $v$  и  $v'$ , то эти ребра принадлежат разным граням (границы не имеют самопересечений), но тогда эти грани пересекаются ровно по одному ребру, которое соединяет

$v$  и  $v'$ , так что  $e = e'$ . Петель нет, так как мы все грани — не менее чем треугольники, так то среди граней нет одноугольников, соответствующих петлям. Связность следует из того, что каждая пара граней соединяется цепочкой граней, так что из вершины в первой грани цепочки можно добраться до вершины из последней грани по пути, лежащем в цепочке (убедитесь в этом).

- (2) *Степени вершин графа  $G$  не меньше 2.* Действительно, каждая вершина  $\mathcal{F}$  является вершиной некоторой грани — многоугольника, поэтому из нее выходит не менее двух ребер.
- (3) *Вершина  $v$  графа  $G$  имеет степень 2, если и только если оба выходящих из нее ребра  $e_1$  и  $e_2$  — граничные. В частности, степени вершин графа замкнутой многогранной поверхности не меньше 3.* Действительно, никакая пара граней многогранной поверхности не может пересекаться более чем по одному ребру. Поэтому если хотя бы одно из инцидентных  $v$  ребер, скажем  $e_1$ , — внутреннее, то к  $e_1$  примыкает еще одна грань, в которой имеется ребро  $e_3$ , инцидентное  $v$  и отличное от  $e_1$  и  $e_2$  в силу пункта 1 определения 9.4, так что  $\deg v \geq 3$ .

**Замечание 9.15.** Опишем некоторые свойства двойственного графа  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ .

- (1) *Граф  $G_d$  является простым и связным.* Действительно, различные вершины графа  $G_d$ , соединенные ребром, — это смежные грани. Так как смежные грани имеют ровно одно общее ребро, то граф  $G_d$  не содержит кратных ребер. Петель нет, так как мы соединяем ребрами только разные грани. Связность равносильна условию 3 из определения 9.4.
- (2) *Степени вершин графа  $G_d$ , соответствующего замкнутой многогранной поверхности, не меньше 3.* Действительно, каждая грань  $\mathcal{F}$  содержит не менее 3 ребер.

## 9.4 Выпуклые многогранники

Особый интерес представляют выпуклые многогранники. Докажем следующий фундаментальный результат.

**Теорема 9.16.** *Многогранник  $W \subset \mathbb{R}^3$  выпуклый, если и только если он равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

**Доказательство.** Пусть  $F_1, \dots, F_m$  — грани многогранника  $W$ . Обозначим  $\pi_k$  плоскость, проходящую через  $F_k$ . Предположим сначала, что многогранник совпадает с пересечением замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани, т.е. для каждого  $k$  существует такое полупространство  $P_k$ , ограниченное плоскостью  $\pi_k$ , что  $W = \bigcap_{k=1}^m P_k$ . Так как все полупространства выпуклы, а пересечение выпуклых множеств тоже выпукло, многогранник  $W$  — выпуклый.

Пусть теперь  $W$  — выпуклый многогранник. Докажем, что он совпадает с пересечением полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани. Рассмотрим произвольную плоскость  $\pi_k$  и точку  $A \in \text{Int } W$ . Так как  $\text{Int } W$  открыто, существует  $U_\varepsilon(A) \subset \text{Int } W$ . Так как  $U_\varepsilon(A) \not\subset \pi_k$ , существует точка  $B \in U_\varepsilon(A)$ , не принадлежащая  $\pi_k$ . Обозначим  $P_k$  то полупространство, ограниченное  $\pi_k$ , которое содержит точку  $B$ .

Покажем, что  $W \subset P_k$ . Предположим противное, т.е. что существует  $C \in W$ , для которой  $C \notin P_k$ . Приводимые ниже построения иллюстрируются на рис. 9.5 слева.

Пусть  $D$  — внутренняя точка многоугольника  $F_k$ , тогда в плоскости  $\pi_k$  существует круг  $K$  с центром в  $D$ , содержащийся в  $F_k$ . Рассмотрим конусы  $BK$  и  $CK$  с основаниями  $K$  и вершинами  $B$  и  $C$  соответственно. Эти конусы составлены из отрезков, соединяющих вершины с основаниями, поэтому они содержатся в  $W$ . Так как  $C$  и  $B$  лежат в разных полупространствах относительно  $\pi_k \supset K$ , существует шар  $U_\delta(D)$ , лежащий в  $BK \cup CK$ , поэтому  $U_\delta(D) \subset W$ . Однако, в силу замечания 9.10, каждый шар с центром в произвольной точке из  $\partial W$  содержит как точки из  $\text{Int } W$ , так и точки из  $\text{Out } W$ . Это противоречие и доказывает, что  $W \subset P_k$ .

Итак,  $W \subset \bigcap_{k=1}^m P_k$ . Докажем теперь, что  $W = \bigcap_{k=1}^m P_k$ , см. рис. 9.5 справа. Предположим противное, т.е. существует точка  $P \in \bigcap_{k=1}^m P_k$  такая, что  $P \notin W$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $\text{Int } W$ . Тогда точки  $P$  и  $Q$  лежат в разных компонентах множества  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial W$ , поэтому  $[P, Q]$  пересекает некоторую грань  $F_k$ . Пусть  $R$  — некоторая точка из этого пересечения. Так как  $Q \in \text{Int } W \subset P_k$ , то  $Q$  — внутренняя точка полупространства  $P_k$ , т.е.  $Q \notin \pi_k$ . С другой стороны,  $R \in \pi_k$ , т.е. лежит на границе  $P_k$ . Следовательно, точка  $P$  должна лежать в противоположном  $P_k$  полупространстве, ограниченном плоскостью  $\pi_k$ , так что  $P \notin P_k$ , противоречие.  $\square$

**Следствие 9.17.** *Каждая грань выпуклого многогранника  $W$  равна пересечению содержащей ее плоскости и  $W$ .*

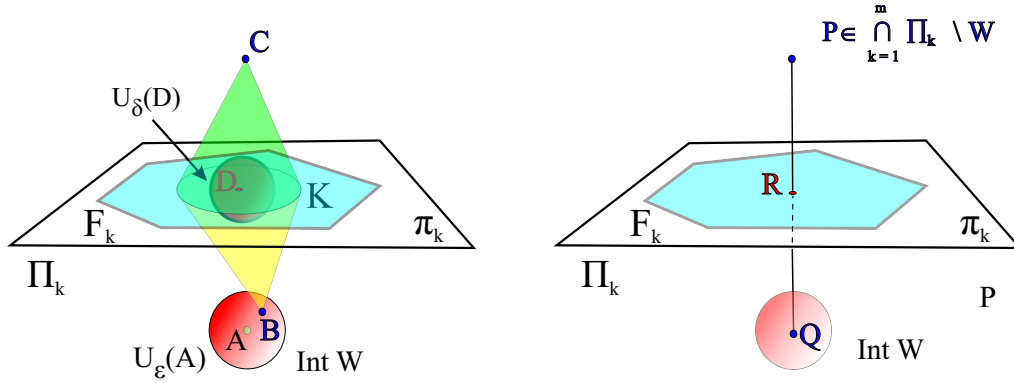


Рис. 9.5: Доказательство теоремы 9.16.

**Доказательство.** Пусть  $F$  — произвольная грань  $W$  и  $\pi$  — проходящая через нее плоскость. Так как  $F \subset W$  и  $F \subset \pi$ , то  $F \subset W \cap \pi$ . Для завершения доказательства покажем, что  $W \cap \pi$  не содержит точек из  $\text{Out } F$ . Предположим противное, т.е. пусть существует  $Q \in \text{Out } F$ , которая также лежит в  $W \cap \pi$ .

Обозначим через  $e_1, \dots, e_k$  ребра грани  $F$ , а через  $F_i$  — грань  $W$ , смежную с  $F$  по ребру  $e_i$ . Пусть  $\pi_i$  — плоскость, содержащая  $F_i$ , а  $\Pi_i$  — то полупространство, ограниченное  $\pi_i$ , которое, по теореме 9.16, содержит  $W$ . Так как смежные грани не лежат в одной плоскости,  $\pi_i$  не совпадает с  $\pi$ .

Выберем произвольную точку  $P \in \text{Int } F$ . Тогда  $[P, Q]$  пересекает  $\partial F$ . Пусть  $R$  — точка из этого пересечения, тогда  $R$  принадлежит некоторому ребру  $e_i \subset \pi_i$ . Так как  $P \in W$ , то  $P \in \Pi_i$ .

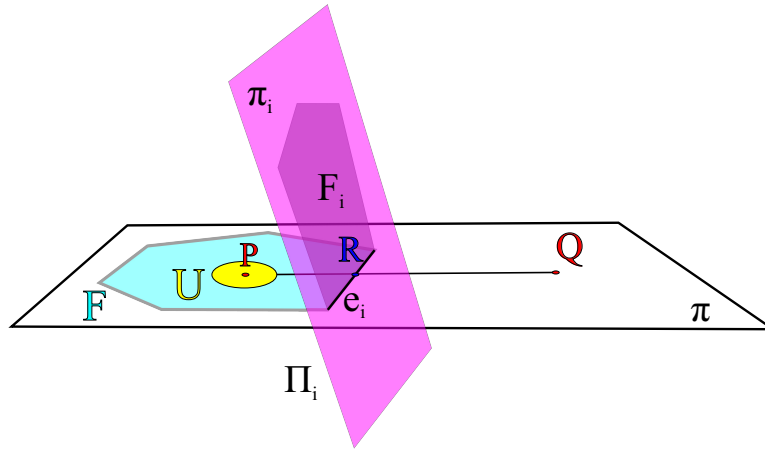


Рис. 9.6: Доказательство следствия 9.17.

Покажем, что  $P \notin \pi_i$ . Пусть  $U$  — открытый круг в плоскости  $\pi$  с центром в  $P$ , содержащийся в  $\text{Int } F$ , существующий в силу того, что  $\text{Int } F$  — открытое подмножество  $\pi$ . Если  $P \in \pi_i$ , то  $P$  принадлежит пересечению плоскостей  $\pi$  и  $\pi_i$ , представляющему собой прямую, поэтому круг  $U$  содержит точки, лежащие как в полупространстве  $\Pi_i$ , так и в его дополнении. Но последнее противоречит тому, что  $U \subset F \subset W \subset \Pi_i$ , где последнее включение имеет место по теореме 9.16.

Итак, мы доказали, что  $P$  лежит внутри полупространства  $\Pi_i$ , поэтому точки луча  $PQ$ , следующие за точкой  $R$ , не содержатся в  $\Pi_i$  и, значит, не лежат в  $W$ . В частности,  $Q \notin W$ , противоречие.  $\square$

Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, следствие 9.17 мгновенно приводит к следующему результату.

**Следствие 9.18.** *Каждая грань выпуклого многогранника — выпуклый пространственный многоугольник.*

**Замечание 9.19.** Если бы мы в определении многогранников не требовали, чтобы смежные грани не лежали в одной плоскости, то следствия 9.17 и 9.18 оказались бы не верными: каждую грань можно было бы разбивать

произвольным образом на более мелкие грани, но такие подразделения не нарушают выпуклость многогранника, хотя могут приводить к невыпуклым граням.

**Следствие 9.20.** Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  — произвольный выпуклый многогранник,  $F_1, \dots, F_m$  — его грани,  $\pi_i$  — плоскость, содержащая  $F_i$ . Обозначим  $\Pi_i$  замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi_i$  и содержащее  $W$ , и пусть  $\Pi'_i = \Pi_i \setminus \pi_i$  — множество всех внутренних точек  $\Pi_i$ . Пусть  $P$  — некоторая точка из  $W$ . Тогда

- (1)  $P$  — вершина  $W$ , общая для граней  $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ , если и только если  $P \in \pi_i$  при  $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ , и  $P \in \Pi'_i$  при всех остальных  $i$ ;
- (2)  $P$  — внутренняя точка ребра  $W$ , общего для граней  $F_{i_1}$  и  $F_{i_2}$ , если и только если  $P \in \pi_i$  при  $i \in \{i_1, i_2\}$ , и  $P \in \Pi'_i$  при всех остальных  $i$ ;
- (3)  $P$  — внутренняя точка грани  $F_{i_1}$ , т.е.  $P \in \text{Int } F_{i_1}$ , если и только если  $P \in \pi_{i_1}$  и  $P \in \Pi'_i$  при  $i \neq i_1$ ;
- (4)  $P$  — внутренняя точка многогранника  $W$ , если и только если  $P \in \Pi'_i$  при всех  $i$ .

**Доказательство.** По следствию 9.17, точка  $P \in W$  принадлежит грани  $F_i$  тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости  $\pi_i$ . Поэтому  $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\}$  — полный набор граней, содержащих точку  $P \in W$ , если и только если  $P$  содержится в плоскостях  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}$ , а для всех остальных  $i$  — не содержится в полуплоскостях  $\pi_i$ , и, значит, содержится в открытых полупространствах  $\Pi'_i$ . Это соображение доказывает все пункты следствия.  $\square$

Следующая конструкция заимствована нами из [16].

**Конструкция 9.21.** В обозначениях следствия 9.20, выберем в произвольной грани  $F_i$  ее внутреннюю точку  $P$ . По этому же следствию,  $P \in \Pi'_j$  для всех  $j \neq i$ , поэтому шаровая окрестность  $U_P$ , радиус которой меньше расстояния от  $P$  до всех  $\pi_j$ ,  $j \neq i$ , также лежит в каждом таком  $\Pi'_j$ . Пусть  $Q$  — произвольная точка из  $U_P$ , не лежащая в  $\Pi_i$ , в частности,  $Q \notin \pi_i$ . Обозначим  $\nu: \Pi_i \rightarrow \pi_i$  радиальную проекцию из точки  $Q$ : каждой точке  $S \in \Pi_i$  ставится точка  $R = \nu(S) \in \pi_i$  пересечения луча  $QS$  с  $\pi_i$ , см. рис. 9.7.

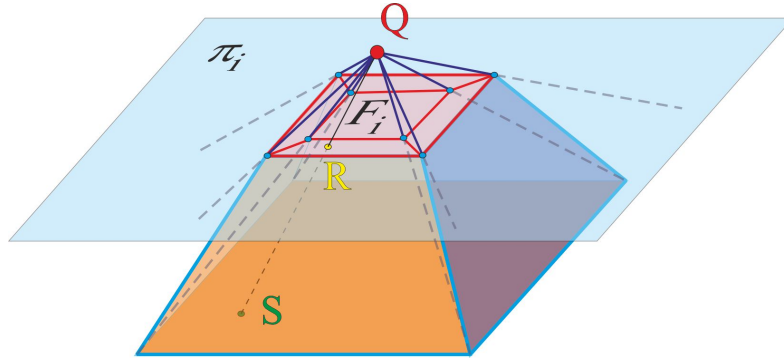


Рис. 9.7: Радиальная проекция границы выпуклого многогранника без грани на плоскость этой грани.

**Лемма 9.22.** Ограничение радиальной проекции  $\nu$  на  $\partial W \setminus \text{Int } F_i$  является гомеоморфизмом с образом.

**Доказательство.** Пусть  $R$  — произвольная точка плоскости  $\pi_i$ . Рассмотрим луч  $QR$  и выясним, как устроено пересечение  $QR \cap \partial W$ .

Пусть  $R \in \text{Out } F_i$ , тогда, по следствию 9.17,  $R \notin W$  и, значит, для некоторого  $j \neq i$  выполняется  $R \notin \Pi_j$ , поэтому интервал  $(Q, R)$  пересекает плоскость  $\pi_j$  по некоторой точке  $T$ . Но тогда открытый луч  $TR$  содержится в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$ , поэтому  $TR \cap W = \emptyset$ . Кроме того,  $[Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$ , поэтому  $[Q, R) \cap W = \emptyset$ , так что в этом случае луч  $QR$  не пересекает  $W$ .

Пусть  $R \in \partial F_i$ . По следствию 9.20, точка  $R$  лежит в некоторой плоскости  $\pi_j$ ,  $j \neq i$ , поэтому все точки луча  $QR$ , следующие за точкой  $R$ , лежат в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$ , следовательно, все они не принадлежат  $W$ . Кроме того,  $[Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$ , поэтому  $[Q, R) \cap W = \emptyset$ , так что  $QR \cap W$  состоит ровно из одной точки, а именно, точки  $R$ .

Наконец, пусть  $R \in \text{Int } F_i$ . Выберем шаровую окрестность  $U_R$  точки  $R$  так же, как мы выбирали  $U_P$ . Тогда точки из  $QR \cap U_R$ , следующие на луче  $QR$  за точкой  $R$ , лежат во всех  $\Pi'_j$ , поэтому все они принадлежат внутренности  $W$ . Обозначим через  $S$  последнюю точку луча  $QR$ , лежащую в  $W$ , рис. 9.7. В силу сказанного выше,

$S \neq R$ . Покажем, что интервал  $(R, S)$  состоит из внутренних точек для  $W$ . Действительно, если на нем имеется некоторая точка  $T \in \partial W$ , то  $T$  содержится в некоторой плоскости  $\pi_j$ , но тогда все точки открытого луча  $TS$  не содержатся в  $P_j$  и, в частности, в  $W$ , поэтому  $T \notin W$ . Итак, мы доказали, что  $QR \cap \partial W$  состоит в рассматриваемом случае из двух точек:  $R$  и  $S$ . Отсюда и из разобранных выше случаев вытекает, что ограничение  $\nu$  на  $\partial W \setminus \text{Int } F_i$  — взаимно однозначно с образом. Непрерывность этого ограничения и отображения, обратного к нему, следует из непрерывности радиальной проекции, предложения 3.28 и теоремы 5.22.  $\square$

**Следствие 9.23.** *Граф выпуклого многогранника планарен.*

**Доказательство.** По лемме 9.22, границу  $\partial W$  выпуклого многогранника, из которой выкинута внутренность некоторой грани  $F$ , можно гомеоморфно отобразить на некоторое подмножество плоскости  $\pi$ , проходящей через  $F$ . При таком отображении граф многогранника  $W$  отображается на некоторый плоский граф, так что граф многогранника планарен.  $\square$

**Конструкция 9.24.** Построим *геометрическую реализацию двойственного графа*  $G_d$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$ , все грани которой — выпуклые многоугольники, в частности, границы  $\mathcal{F}$  выпуклого многогранника. Для этого возьмем в каждой грани  $F_i$  многогранной поверхности  $\mathcal{F}$  по внутренней точке  $P_i$  и примем эти точки за вершины геометрического графа. Соединим каждую точку  $P_i$  с серединами тех сторон содержащей ее грани, которые соответствуют внутренним ребрам многогранной поверхности. Получим набор отрезков, пересекающихся только по  $P_i$ . Точки  $P_i$  из смежных граней соединены двузвенными ломаными. Эти ломаные возьмем в качестве ребер геометрического графа. Ясно, что комбинаторная структура полученного графа изоморфна  $G_d$ , так что он является геометрической реализацией  $G_d$ , см. рис. 9.8.

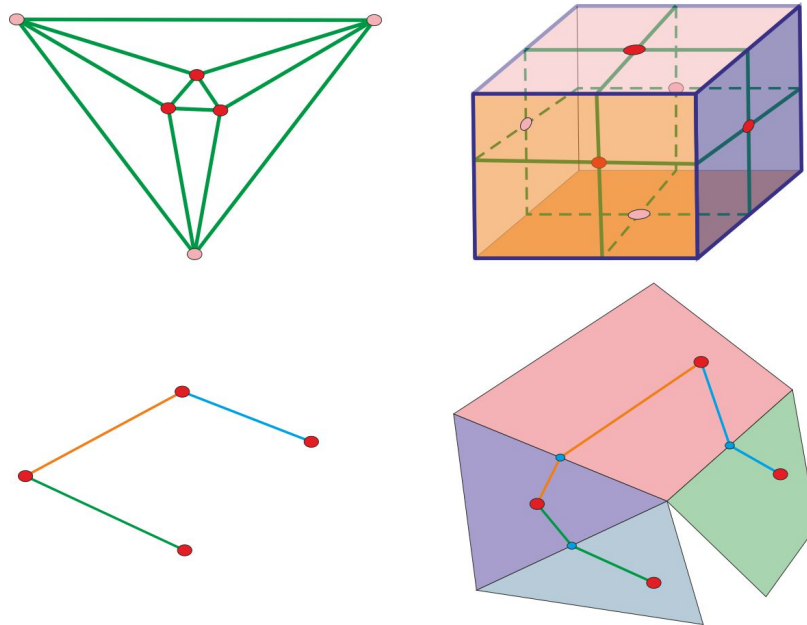


Рис. 9.8: Двойственный граф многогранной поверхности, его геометрическая реализация.

**Замечание 9.25.** Несколько более сложно определяется *геометрическая реализация двойственного графа произвольной многогранной поверхности* (дайте соответствующее определение).

**Предложение 9.26.** *Двойственный граф выпуклого многогранника  $W$  планарен.*

**Доказательство.** Приведем еще одну конструкцию из [16]. В обозначениях следствия 9.20, выберем произвольную точку  $P \in \text{Int } W$ . По замечанию 9.10, существует шар  $U_\varepsilon(P)$ , содержащийся в  $\text{Int } W$ . Уменьшая  $\varepsilon$ , если необходимо, добьемся того, чтобы сфера  $S_\varepsilon^2(P)$ , ограничивающая этот шар, также лежала в  $\text{Int } W$ .

Пусть  $\mu: \mathbb{R}^3 \setminus \{P\} \rightarrow S_\varepsilon^2(P)$  — радиальная проекция на  $S_\varepsilon^2(P)$  с центром в  $P$ :

$$\mu(Q) = P + \varepsilon \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}.$$

Покажем, что  $\mu$  отображает  $\partial W$  взаимно однозначно на  $S_\varepsilon^2(P)$ .

Действительно, если  $Q$  — произвольная точка из  $S_\varepsilon^2(P)$ , то луч  $PQ$  содержит некоторую точку  $R \in \text{Out } W$ , так как  $W$  — ограниченное множество. Но тогда  $[P, R]$  пересекает  $\partial W$ . Пусть  $S$  — некоторая точка из этого пересечения, тогда  $\mu(S) = Q$ . Таким образом, ограничение  $\mu$  на  $\partial W$  сюръективно.

Покажем теперь, что это ограничение инъективно. Предположим, что  $S_1$  и  $S_2$  — различные точки из  $\partial W$ , для которых  $Q = \mu(S_1) = \mu(S_2)$ . Без ограничения общности, будем считать, что  $S_1 \in (Q, S_2)$ . Так как  $S_1 \in \partial W$ , то  $S_1$  лежит в некоторой грани  $F_i$  многогранника  $W$ . Но тогда, в обозначениях следствия 9.20,  $S_1 \in \pi_i$  и  $P \in \Pi'_i$ , поэтому  $S_2$  лежит вне полупространства  $\Pi_i$ , так что  $S_2 \notin W$ .

Итак, мы доказали, что  $\mu$  отображает  $\partial W$  взаимно однозначно на  $S_\varepsilon^2(P)$ . Из непрерывности радиальной проекции и теоремы 5.22 вытекает, что это отображение — гомеоморфизм.

Рассмотрим геометрическую реализацию  $G'_d$  двойственного графа многогранника  $W$ , описанную в конструкции 9.24. Выберем произвольную точку  $T$  из  $\partial W$ , не принадлежащую  $G'_d$ . Из примера 4.28 вытекает, что существует гомеоморфизм  $\eta$  между  $S_\varepsilon^2(P) \setminus \{\mu(T)\}$  и плоскостью  $\mathbb{R}^2$ , поэтому  $\eta \circ \mu(G'_d)$  — геометрическая реализация двойственного графа многогранника  $W$ , являющаяся плоским графом.  $\square$

## 9.5 Формула Эйлера для выпуклых многогранников

В данном разделе будем рассматривать выпуклые многогранники  $W$ . По следствию 9.23, графы  $G$  таких многогранников планарны. Пусть  $\nu$  — отображение, построенное в конструкции 9.21, тогда  $\nu(G)$  — связный плоский граф, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник  $W$ , откуда, используя формулу Эйлера из теоремы 8.13, получаем следующий результат.

**Теорема 9.27** (Формула Эйлера для выпуклых многогранников). *Если  $v$ ,  $e$  и  $f$  обозначают количества вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, то  $v - e + f = 2$ .*

## 9.6 Правильные многогранники

**Определение 9.28.** Выпуклый многогранник назовем *правильным*, если все его грани — равные правильные пространственные многоугольники, стыкующиеся в вершинах в одном и том же количестве и образующие равные двугранные углы при всех ребрах.

Пусть  $W$  — правильный многогранник,  $G$  — его граф, и  $\nu$ , как и выше, — отображение, построенное в конструкции 9.21. Положим  $G_\nu = \nu(G)$ . Тогда, как уже было отмечено, граф  $G_\nu$  имеет столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник  $W$ . Из определения правильного многогранника вытекает, что

- (1)  $G_\nu$  — плоский простой связный граф;
- (2) степени вершин графа  $G_\nu$  одинаковы и не меньше 3;
- (3) каждая грань графа  $G_\nu$  ограничена один и тем же числом ребер, также не меньшим 3;
- (4) каждое ребро графа  $G_\nu$  лежит ровно в двух гранях.

Такие графы мы изучали в упражнении 8.5. Приведем ответ.

Пусть  $(v, e, f)$  — вектор, компоненты которого равны соответственно количеству вершин, ребер и граней графа  $G_\nu$ , а, значит, и правильного многогранника  $W$ . Тогда эти векторы могут быть только следующих пяти типов:  $(4, 6, 4)$ ,  $(6, 12, 8)$ ,  $(8, 12, 6)$ ,  $(12, 30, 20)$  и  $(20, 30, 12)$ . Оказывается, правильные многогранники каждого из этих пяти типов существуют, см. рис. 9.9. Они называются *платоновыми телами*.

На рис. 9.10 приведены графы платоновых тел.

Доказательство существования каждого из этих платоновых тел можно найти, например, в [16].



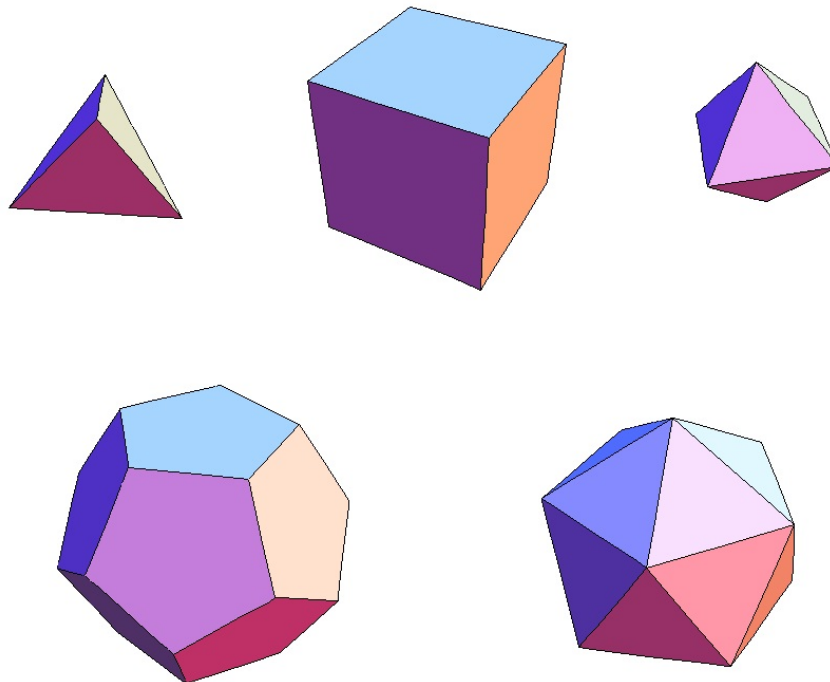


Рис. 9.9: Платоновы тела: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

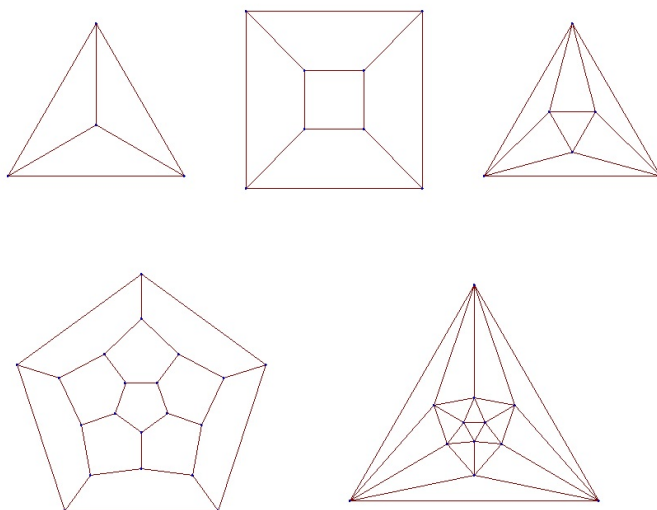


Рис. 9.10: Графы платоновых тел.

## 9.7 Теорема о “еже” выпуклого многогранника

Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  — произвольный выпуклый многогранник,  $F_1, \dots, F_m$  — его грани,  $N_i$  — единичный вектор, перпендикулярный грани  $F_i$  и направленный наружу многогранника  $W$ , а  $S_i$  — площадь грани  $F_i$ . Положим  $\xi_i = S_i N_i$ . Семейство векторов  $\{\xi_i\}$  назовем *ежом многогранника  $W$* . Мы хотим понять, какими свойствами обладают ежи многогранников и сколь однозначно они определяют многогранник. Подробности см. в [18].

**Теорема 9.29.** Пусть  $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  — ёж выпуклого многогранника  $W$ . Тогда векторы  $\xi_i$  некопланарны и выполняется  $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$ .

**Доказательство.** Если бы векторы  $\xi_i$  лежали в одной плоскости  $\pi$ , то, по теореме 9.16, многогранник  $W$  был бы равен пересечению полупространств  $\Pi_i$ , ограниченных плоскостями  $\pi_i$ , параллельными прямой, перпендикулярной  $\pi$ , так что  $W$  не был бы ограниченным. Докажем теперь вторую часть теоремы.

Отметим сначала, что величина  $\xi = \sum_i \xi_i$  не меняется при сдвигах многогранника  $W$ . Это дает нам возможность считать, не ограничивая общности, что начало координат  $O$  лежит во внутренней части многогранника  $W$ .

Пусть  $P$  — произвольная точка из  $\text{Int } W$ , а  $P_i$  — точка, лежащая в грани  $F_i$ . Тогда расстояние  $h_i$  от точки  $P$  до плоскости, проходящей через грань  $F_i$ , равно  $\langle N_i, P_i - P \rangle$ , где  $\langle a, b \rangle$  обозначает стандартное скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

Обозначим  $V_i$  пирамиду с основанием  $F_i$  и вершиной  $P$ , и пусть  $v_i$  — объем этой пирамиды, а  $v$  — объем многогранника  $W$ . Тогда  $v = \sum_i v_i$ . С другой стороны,

$$v_i = \frac{1}{3} h_i S_i = \frac{1}{3} \langle N_i, P_i - P \rangle S_i = \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i - P \rangle,$$

поэтому

$$v = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i - P \rangle = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P \rangle = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \sum_i \xi_i, P \right\rangle = \sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle - \frac{1}{3} \langle \xi, P \rangle.$$

Заметим, что вектор  $\xi$ , величина  $v$  и величина  $\sum_i \frac{1}{3} \langle \xi_i, P_i \rangle$  не зависят от выбора точки  $P$ , поэтому от выбора  $P$  не зависит также и величина  $\langle \xi, P \rangle$ . Так как начало координат  $O$  лежит в  $\text{Int } W$ , то некоторая шаровая окрестность  $U_\varepsilon(O)$  точки  $O$  также лежит в  $\text{Int } W$ . Значит, для любой точки  $P$  из  $U_\varepsilon(O)$  величина  $\langle \xi, P \rangle$  постоянна и равна  $\langle \xi, O \rangle = 0$ . Покажем, как отсюда вытекает, что  $\xi = 0$ . Предположим противное, т.е. что  $\xi \neq 0$ . Положим  $\lambda = \varepsilon / (2\|\xi\|)$ , тогда  $\lambda \xi \in U_\varepsilon(O)$ , поэтому  $\langle \xi, \lambda \xi \rangle = 0$ , откуда, так как  $\lambda \neq 0$ , имеем  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ , следовательно  $\xi = 0$ .  $\square$

Оказывается, имеет место и обратный результат, доказательство которого сложнее и опирается на теоремы, которые вы будете изучать на следующих курсах.

**Теорема 9.30** (Г. Минковский [19]). *Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_m$  — ненулевые некопланарные векторы в  $\mathbb{R}^3$ , никакие два из которых не сонаправлены, причем  $\sum_i \xi_i = 0$ . Тогда существует единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, ёж которого равен  $\{\xi_i\}$ .*

**Замечание 9.31.** В теореме 9.30 мы потребовали, чтобы никакие два вектора  $\xi_i$  не были сонаправленными. Это связано с тем, что на многогранную поверхность мы накладываем следующее условие: никакие две ее смежных грани не лежат в одной плоскости. Если же отказаться от этого условия, то требование несонаправленности векторов  $\xi_i$  можно будет опустить.

У теоремы 9.30 имеются обобщения как на многомерный случай, так и на невыпуклые многогранники (см. например [20]).

## Упражнения к главе 9

**Упражнение 9.1.** Пусть  $W$  — выпуклый многогранник, и пусть  $v$ ,  $e$  и  $f$  обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

- (1)  $e + 6 \leq 3v$ ;
- (2)  $e + 6 \leq 3f$ ;
- (3)  $f + 4 \leq 2v$ ;
- (4)  $v + 4 \leq 2f$ ;
- (5) многогранник  $W$  имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;
- (6) многогранник  $W$  имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);
- (7) многогранник  $W$  имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;
- (8) сумма всех плоских углов граней многогранника  $W$  равна  $2\pi(v - 2)$ .

**Определение 9.32.** Пусть  $P$  — вершина произвольного многогранника  $W$ , а  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — величины углов всех граней  $W$  при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине  $P$*  называется величина  $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ .

**Упражнение 9.2.** Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн  $K(P)$  по всем его вершинам  $P$  равна  $4\pi$ .

**Упражнение 9.3.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ . Докажите, что  $\partial W \setminus L$  состоит из двух компонент.

**Определение 9.33.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^3$  — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — компоненты множества  $\partial W \setminus L$ . Тогда множества  $M_i = L \cup \Omega_i$  называются *многоугольниками на  $\partial W$* . Для многоугольника  $M_i$  точки из  $\Omega_i$  называются *внутренними*, из  $\Omega_j$  — *внешними*, а из  $L$  — *граничными*, где  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Положим  $\text{Int } M_i = \Omega_i$ ,  $\text{Out } M_i = \Omega_j$  и  $\partial M_i = L$ .

**Определение 9.34.** Пусть  $X$  — многоугольник на поверхности  $\partial W$  выпуклого многогранника  $W$ , а  $P$  — некоторая вершина многоугольника  $X$ . Тогда *угол  $\alpha_P$  многоугольника  $X$  в вершине  $P$*  определяется так. Если  $P$  лежит внутри грани, то  $\alpha_P$  — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же  $P$  попала или на ребро, или в вершину из  $\partial W$ , то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением  $X$  и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

**Упражнение 9.4.** Рассмотрим  $n$ -угольник  $X$ , лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна  $\pi(n - 2)$  плюс сумма кривизн  $K(P)$  по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь  $X$ .

**Упражнение 9.5.** Существует ли тетраэдр с гранями  $F_1, \dots, F_4$  такой, что площадь каждой  $F_i$  равна 1, грани  $F_1$  и  $F_2$  перпендикулярны друг другу, грани  $F_3$  и  $F_4$  также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром  $e_{12} = F_1 \cap F_2$  и  $e_{34} = F_3 \cap F_4$  равен  $37^\circ$ ? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Упражнение 9.6.** Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

**Определение 9.35.** Пусть  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее  $X$ , называется *выпуклой оболочкой  $X$*  и обозначается через  $\text{conv } X$ . Иными словами,  $\text{conv } X$  — это такое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , что  $X \subset \text{conv } X$ , и если  $Y \supset X$  — выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , то  $\text{conv } X \subset Y$ .

**Замечание 9.36.** Определение 9.35 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что  $\text{conv } X$  совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , содержащих  $X$ .

**Упражнение 9.7.** Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

# Лекция 10

## Лемма Шпернера

**План.** Аффинная комбинация, выпуклая комбинация, аффинная оболочка, выпуклая оболочка, аффинная независимость,  $k$ -мерный симплекс, вершины симплекса, грани симплекса, гиперграни симплекса, относительная внутренность и относительная граница симплекса, триангуляция симплекса, грани триангуляции, вершина триангуляции, гипергрань триангуляции, внутренние и граничные грани триангуляции, диаметр подмножества метрического пространства, диаметр триангуляции, центр симплекса, барицентрическое подразбиение симплекса, кратное барицентрическое подразбиение, стандартный  $n$ -мерный симплекс, раскраска вершин триангуляции симплекса, шпернеровская раскраска, всецветные симплексы, лемма Шпернера, неподвижная точка отображения, теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема Монски, лемма Кнастера–Куратовского–Мазуркевича.

В настоящей лекции мы расскажем об одном комбинаторном результате, который имеет удивительные применения. Например, с его помощью можно доказать, что любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя имеет неподвижную точку, а также что квадрат нельзя разрезать на нечетное число равновеликих треугольников. Этот комбинаторный результат называется леммой Шпернера и касается раскраски вершин графов определенного вида.

### 10.1 Стандартные симплексы, их триангуляции, барицентрическое подразбиение

Начнем с краткого напоминания элементов аффинной и выпуклой геометрии. Более подробное изложение см. в дополнительной лекции 16.

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$  — конечное семейство точек пространства  $\mathbb{R}^n$ . **Аффинной комбинацией** этих точек называется каждая линейная комбинация  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i$ , где  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ . Аффинная комбинация называется **выпуклой комбинацией**, если дополнительно  $\lambda_i \geq 0$  при всех  $i$ . Напомним, что всевозможные аффинные комбинации точек множества  $A$  образуют наименьшее аффинное подпространство, содержащее  $A$ , называемое еще **аффинной оболочкой**  $\text{Aff } A$  **множества**  $A$ , а всевозможные выпуклые комбинации образуют наименьшее выпуклое множество, содержащее  $A$ , т.е. его **выпуклую оболочку**  $\text{conv } A$ .

Множество  $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$  называется **аффинно независимым**, если векторы  $a_1 - a_{k+1}, \dots, a_k - a_{k+1}$  линейно независимы. Последнее эквивалентно тому, что размерность аффинной оболочки  $\text{Aff } A$  равна  $k$ . Условие аффинной независимости удобно формулировать следующим эквивалентным образом: если  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = 0$  при  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0$ , то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k+1} = 0$ .

Для аффинно независимого множества  $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$  выпуклая оболочка  $\Delta := \text{conv } A$  называется  **$k$ -мерным симплексом** или **симплексом размерности  $k$** . При этом точки из  $A$  называются **вершинами симплекса**  $\Delta$ , а для каждого непустого  $I \subset \{1, \dots, k+1\}$  выпуклые оболочки  $\Delta_I$  подмножеств  $A_I = \{a_i\}_{i \in I}$  называются **гранями симплекса**  $\Delta$  размерности  $\#I - 1$ . В частности, одномерные грани называются **ребрами** или **сторонами**, а грани размерности  $(k-1)$  — **гипергранями**.

Если рассматривать симплекс  $\Delta = \text{conv } A$  как подмножество аффинной оболочки  $\text{Aff } A$ , то  $\Delta$  будет иметь непустую внутренность (она называется **относительной внутренностью**  $\text{relint } \Delta$ ) и состоит из всех выпуклых комбинаций  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i$ , в которых  $\lambda_i > 0$  для всех  $i$ . Так как каждая гипергрань равна множеству всех выпуклых комбинаций, в которых  $\lambda_i = 0$  для некоторого  $i$ , то объединение гиперграней — это в точности граница симплекса  $\Delta$ , снова рассматриваемого как подмножество в  $\text{Aff } A$  (она называется **относительной границей**  $\Delta$ ).

**Триангуляцией  $k$ -мерного симплекса**  $\Delta$  называется представление симплекса  $\Delta$  в виде конечного объединения некоторых  $k$ -мерных симплексов  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- относительные внутренности разных симплексов  $T_i$  не пересекаются,
- если симплексы  $T_i$  и  $T_j$  пересекаются, то  $T_i \cap T_j$  — их общая грань.

В частности, вершины одного симплекса  $T_i$  не могут попасть внутрь грани другого симплекса  $T_j$ . Подмножество симплекса  $\Delta$ , совпадающее с гранью одного из симплексов триангуляции  $\mathcal{T}$ , называется *гранью триангуляции  $\mathcal{T}$* . В частности, так определяются *вершины триангуляции* и *гиперграни триангуляции*. Грань триангуляции назовем *граничной*, если она лежит на относительной границе симплекса  $\Delta$ . Иначе грань триангуляции назовем *внутренней*.

Напомним, что *диаметром* подмножества  $Y$  метрического пространства  $X$  называется величина  $\text{diam } Y = \sup_{y, y' \in Y} |yy'|$ . *Диаметром триангуляции  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$*  симплекса  $\Delta$  называется максимум диаметров элементов этой триангуляции, т.е.  $\max_i \text{diam } T_i$ . Легко видеть, что диаметр каждого симплекса равен максимальной длине его сторон.

*Центром  $C$  симплекса  $\Delta = \text{conv } A$*  назовем его “центр масс”, т.е. точку  $C = (a_1 + \dots + a_{k+1}) / (k+1)$ . Легко видеть, что  $C \in \text{relint } \Delta$ , и если  $\Delta_I$  — гипергрань симплекса  $\Delta$ , то  $\text{conv}(A_I \cup \{C\})$  — симплекс размерности  $k$ .

Определим теперь *барицентрическое подразбиение симплекса  $\Delta$* . А именно, в каждой грани  $\Delta_I$  симплекса  $\Delta$  выберем центр  $C_I$ . Отметим, что если  $I = \{1, \dots, k+1\}$ , то  $C_I = C$ . Будем теперь последовательно разбивать<sup>1</sup> грани, начиная с ребер и двигаясь в сторону граней большей размерности. Каждое ребро его центром разбивается пополам. Таким образом, относительная граница каждой двумерной грани разбита на 6 “половинок” трех граничных ребер. На концы каждой “половинки” и центр двумерной грани, содержащей эту “половинку”, натянем выпуклую оболочку. Получим разбиение двумерной грани на 6 треугольников. Таким образом, относительная граница каждой трехмерной грани разбита на 24 треугольника. Снова на центр трехмерной грани и вершины каждого из этих треугольников натянем выпуклую оболочку. В результате разобьем все трехмерные грани на 24 трехмерных симплекса. Продолжим этот процесс, пока не закончатся грани. Построенное в результате разбиение является триангуляцией исходного  $k$ -мерного симплекса. Именно такая триангуляция и называется барицентрическим подразбиением.

Легко видеть, что если барицентрически подразбить каждый из симплексов произвольной триангуляции, то снова получится триангуляция. Тем самым, корректно определена триангуляция, полученная *кратным применением барицентрического подразбиения*.

**Задача 10.1.** Покажите, что если  $\mathcal{T}^p$  — триангуляция, полученная в результате  $p$ -кратного применения барицентрического подразбиения к симплексу  $\Delta$ , то  $\text{diam } \mathcal{T}^p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ .

*Стандартным  $n$ -мерным симплексом  $\Delta^n$*  называется выпуклая оболочка векторов  $e_i$  стандартного базиса в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где  $j$ -ая координата вектора  $e_i$  равна  $\delta_i^j$ . Ясно, что  $\Delta^n$  равен пересечению неотрицательного ортанта  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0\}$  и гиперплоскости  $x_1 + \dots + x_{n+1} = 1$ .

Лемма Шпернера имеет дело со свойствами специальных раскрасок вершин произвольной триангуляции симплекса. Приведем соответствующие определения.

## 10.2 Лемма Шпернера

Пусть  $\mathcal{T}$  — триангуляция произвольного  $k$ -мерного симплекса  $\Delta = \text{conv } A$ , где  $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ . *Раскраской вершин триангуляции  $\mathcal{T}$  в  $q$  цветов* называется приписывание каждой вершине одного элемента из множества “цветов”  $\{1, \dots, q\}$ . Иными словами, раскраска вершин — это произвольное отображение из множества вершин во множество “цветов”.

*Шпернеровской раскраской вершин триангуляции  $\mathcal{T}$*  называется ее раскраска в  $(k+1)$  цвет такая, что выполняются следующие условия:

- вершина  $a_i$  покрашена в цвет  $i$ ;
- если  $\Delta_I$  — грань симплекса  $\Delta$ , то вершины каждой грани триангуляции  $\mathcal{T}$ , попавшей в  $\Delta_I$ , раскрашены лишь в цвета из набора  $I$ .

<sup>1</sup>Понятие разбиения имеет несколько традиционных интерпретаций. В теории множеств это обычно представление в виде дизъюнктного объединения. Если же речь идет о разбиении геометрической фигуры на фигуры той же размерности, например,  $k$ -мерного симплекса на  $k$ -мерные симплексы, то в этом случае под разбиением понимают представление в виде объединения, в котором (относительные) внутренности элементов разбиения не пересекаются. Более аккуратно было бы говорить про разрезание, так как исходная фигура получается топологической склейкой фигур, на которые она “разбита”.

**Замечание 10.2.** Отметим, что пересечение триангуляции  $\mathcal{T}$  и произвольной грани  $\Delta_I$  симплекса  $\Delta$  представляет собой триангуляцию  $\mathcal{T}_I$  этой грани, причем если на всей триангуляции задана шпернеровская раскраска, то и триангуляция  $\mathcal{T}_I$  также раскрашена шпернеровски (убедитесь в этом).

На рис. 10.1 приведем пример шпернеровской раскраски в случае триангуляции одномерного и двумерного симплексов.

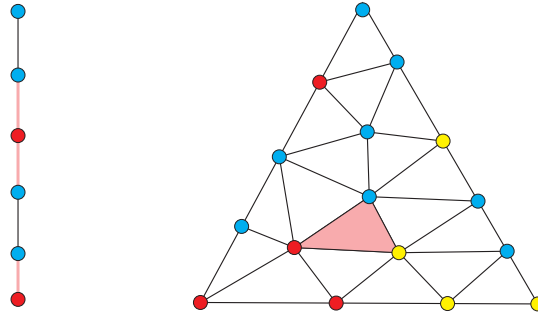


Рис. 10.1: Пример шпернеровской раскраски в случае триангуляции одномерного и двумерного симплексов.

Симплекс раскрашенной триангуляции назовем **всецветным**, если среди цветов его вершин встречаются все цвета раскраски.

**Теорема 10.3** (Шпернер). *Для произвольной шпернеровской раскраски любой триангуляции симплекса всегда имеется нечетное число всецветных симплексов, в частности, всегда имеется хотя бы один такой.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала простейший случай триангуляции одномерного симплекса — отрезка. Пусть на отрезке  $[a_1, a_2]$  имеется  $p$  вершин триангуляции:  $b_1 = a_1 < b_2 \dots < b_p = a_2$ . Пусть цвет вершины  $b_i$  равен  $c_i \in \{1, 2\}$ . Положим  $\delta_i = c_{i+1} - c_i$ , тогда симплекс  $[b_i, b_{i+1}]$  всецветный, если и только если  $\delta_i = \pm 1$ , и не всецветный ровно тогда, когда  $\delta_i = 0$ . Таким образом, число всецветных симплексов равно количеству появлений  $\pm 1$  в последовательности  $\delta_i$ . Заметим, что  $\delta := \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i = c_p - c_1$ . Так как  $c_p \neq c_1$ , то  $\delta = \pm 1$ , т.е. нечетно. Таким образом, в этой сумме число  $\pm 1$  также нечетно, что и завершает разбор одномерного случая.

Рассмотрим теперь двумерный случай. Построим граф  $G$  следующим образом. Его вершинами будут

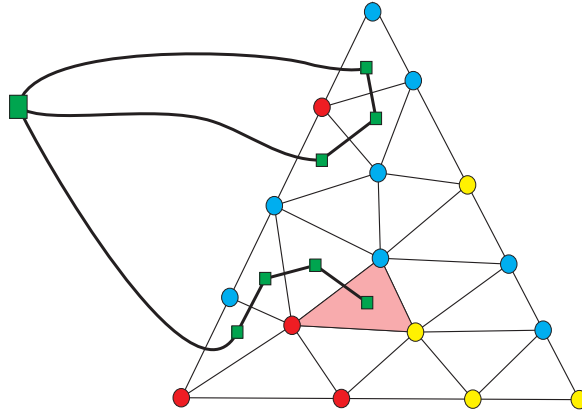
- все треугольники триангуляции, содержащие сторону, концы которой покрашены в цвета 1 и 2 (такие стороны триангуляции будем называть **помеченными**);
- внешняя область треугольника  $\Delta$  (соответствующую вершину назовем **внешней**, а все остальные — **внутренними**).

Опишем теперь ребра графа  $G$ : две вершины соединим ребром, если их пересечение содержит помеченную сторону. На рис. 10.2 мы изобразили такой граф  $G$  в случае, когда цвет синий — это 1, а красный — это 2.

Внешняя вершина смежна в точности с вершинами, соответствующими треугольникам, одна из помеченных сторон которых — граничная и, значит, лежит на стороне треугольника  $\Delta$ , концы которой также раскрашены в цвета 1 и 2. Как мы показали выше, таких сторон — нечетное число. Тем самым, в графе  $G$  степень внешней вершины нечетна. По лемме о рукопожатиях, количество внутренних вершин графа  $G$ , имеющих нечетную степень, — нечетно.

Заметим теперь, что у произвольным образом раскрашенного треугольника может быть не больше двух помеченных сторон, так что в графе  $G$  степень каждой внутренней вершины не превосходит 2. Значит, нечетность степени такой вершины означает в точности, что эта степень равна 1. Остается заметить, что внутренняя вершина имеет степень 1 в точности тогда, когда соответствующий треугольник всецветный (так как в нем имеется ровно одна помеченная сторона).

Рассмотрим теперь общий случай (сюда входит также и двумерный случай, который мы разобрали выше лишь для наглядности). Доказывать будем по индукции по размерности  $k$  симплекса. Тем самым, так как, в силу

Рис. 10.2: Граф  $G$  шпернеровской раскраски двумерного симплекса.

замечания 10.2, ограничение триангуляции  $\mathcal{T}$  на каждую грань симплекса  $\Delta$  также покрашено шпернеровски, для всех граней размерности  $k - 1$  и ниже мы считаем выполненным условие теоремы.

Доказательство в точности такое же, как и в плоском случае. А именно, снова построим граф  $G$ . Его вершинами будут

- все симплексы, содержащие гипергрань, вершины которой покрашены в все цвета  $\{1, \dots, k - 1\}$  (такие гипергранни назовем *помеченными*, а симплексы — *выбранными*);
- внешняя грань симплекса  $\Delta$  (соответствующую вершину назовем *внешней*, а все остальные — *внутренними*).

Ребра графа  $G$  определяем по тому же принципу, что и выше: две вершины соединены ребром, если их пересечение содержит помеченную гипергрань.

Внешняя вершина смежна в точности с вершинами, соответствующими симплексам, одна из помеченных гиперграней которых — граничная и, значит, лежит на гипергранни симплекса  $\Delta$ , вершины которой также раскрашены в цвета  $\{1, \dots, k - 1\}$ . По индукции, таких помеченных гиперграней — нечетное число. Тем самым, в графе  $G$  степень внешней вершины нечетна. По лемме о рукопожатиях, количество внутренних вершин графа  $G$ , имеющих нечетную степень, — нечетно.

Пусть  $t$  — симплекс триангуляции, соответствующий внутренней вершине  $v$  графа  $G$ . Тогда  $(k - 1)$ -на вершина симплекса  $t$  покрашена в цвета  $\{1, \dots, k - 1\}$ , а оставшаяся,  $k$ -ая вершина покрашена или в цвет  $k$ , и тогда  $\deg v = 1$  и симплекс  $t$  — всецветный, или же  $k$ -ая вершина покрашена в один из цветов из  $\{1, \dots, k - 1\}$ , и тогда  $\deg v = 2$  и симплекс  $t$  всецветным не является. Итак, в графе  $G$  нечетными степенями обладают в точности те внутренние вершины, которые соответствуют всецветным симплексам, поэтому всецветных симплексов — нечетное число.  $\square$

Покажем теперь, как из леммы Шпернера вытекает теорема Брауэра о неподвижной точке.

### 10.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть  $f: X \rightarrow X$  — отображение множества в себя. Точка  $x \in X$  называется *неподвижной для отображения*  $f$ , если  $f(x) = x$ . Не у всякого, даже непрерывного отображения, есть неподвижная точка. Например, поворот окружности на угол, не кратный  $2\pi$ , не имеет неподвижных точек. Тем не менее, если заменить окружность на замкнутый круг или шар, ситуация окажется совсем иной.

**Теорема 10.4** (Брауэр). Пусть  $f: B \rightarrow B$  — непрерывное отображение замкнутого шара  $B \subset \mathbb{R}^n$  в себя. Тогда  $f$  имеет неподвижную точку.

**Замечание 10.5.** Условие замкнутости шара отбросить нельзя. Например, отображение  $x \mapsto x^2$  интервала  $(0, 1)$  в себя не имеет неподвижных точек.

Теорему Брауэра можно доказывать далеко продвинутыми методами алгебраической топологии. Тем не менее, существует элементарное доказательство этой теоремы, основанное на лемме Шпернера.

*Доказательство теоремы 10.4.* Прежде всего, заметим, что шар  $B$  гомеоморфен стандартному  $n$ -мерному симплексу  $\Delta^n$  (докажите это). Поэтому теорему достаточно проверить для такого симплекса.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такое непрерывное отображение  $f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ , у которого нет неподвижных точек. С помощью отображения  $f$  раскрасим все точки симплекса  $\Delta^n$  следующим образом. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta^n$  и  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) = f(x)$ . Так как  $x \neq f(x) = y$ , существует  $i$  такое, что  $x_i \neq y_i$ . Так как  $\sum_j x_j = \sum_j y_j = 1$ , то  $\sum_j (x_j - y_j) = 0$ , поэтому существует  $k$  такое, что разности  $x_i - y_i$  и  $x_k - y_k$  имеют противоположные знаки. Итак, мы показали, что для каждой точки  $x \in \Delta^n$  имеется такое  $m$ , что  $x_m > y_m$ .

Выберем любое такое  $m$  и раскрасим точку  $x$  в цвет  $m$ . Так как все отличные от  $i$ -ой координаты вершины  $e_i$  симплекса  $\Delta^n$  равны нулю, их номера не могут быть выбраны в качестве цвета вершины  $e_i$ . Таким образом,  $e_i$  покрашена в цвет  $i$ . Аналогичные рассуждения показывают, что для любого непустого  $I \subset \{1, \dots, n+1\}$  каждая грань  $\Delta_I^n$  покрашена в цвета из набора  $I$ . Тем самым, какая бы триангуляция симплекса  $\Delta^n$  не была задана, описанная выше раскраска индуцирует на этой триангуляции шпернеровскую раскраску.

Рассмотрим последовательность триангуляций  $\mathcal{T}^p$  симплекса  $\Delta^n$ , где  $\mathcal{T}^p$  — это  $p$ -кратное барицентрическое подразбиение. Тогда, по лемме Шпернера, в  $\mathcal{T}^p$  имеется всецветный симплекс  $T^p$ . Выберем в каждом симплексе  $T^p$  произвольную точку  $w_p$ . Так как  $\Delta^n$  — метрический компакт, из последовательности точек  $w_p$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в некоторой точке  $w$ . Покажем, что  $f(w) = w$ , т.е.  $w$  — неподвижная точка, и полученное противоречие завершит доказательство теоремы.

Предположим, что это не так. Положим  $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$ , и пусть  $u = f(w) = (u_1, \dots, u_{n+1})$ . Тогда, как мы уже отмечали, для некоторого номера  $i$  имеем  $w_i < u_i$ . Пусть  $\delta = |w_i - u_i|$ . Так как  $f$  непрерывно, то существует открытый шар  $U_r(w) \subset \Delta^n$  радиуса  $r < \delta/2$  такой, что для всех  $x \in U_r(w)$  выполняется  $\|f(x) - u\| < \delta/2$ . В частности, если  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  и  $y = f(x) = (y_1, \dots, y_{n+1})$ , то  $|x_i - w_i| < \delta/2$ ,  $|y_i - u_i| < \delta/2$  и, значит,  $x_i < y_i$ , т.е. ни одна точка  $x \in U_r(w)$  не может быть покрашена в цвет  $i$ . Однако, в силу задачи 10.1, диаметр триангуляции  $\mathcal{T}^p$  стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ , поэтому для некоторого  $p$  симплекс  $T^p$  содержится в  $U_r(w)$ . Но этот симплекс всецветный, противоречие.  $\square$

**Замечание 10.6.** Работая с более хитрыми раскрасками, Поль Монски доказал, что квадрат нельзя разрезать на нечетное число равновеликих треугольников. Этот результат можно также извлечь из более общей теоремы Монски: *если единичный квадрат разбит на  $n$  треугольников с площадями  $a_1, \dots, a_n$ , то существует многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  с целыми коэффициентами такой, что  $f(a_1, \dots, a_n) = 1/2$* . Ясно, что если мы разбили единичный квадрат на  $n$  равновеликих треугольников, то площадь каждого равна  $1/n$ , так что  $f(1/n, \dots, 1/n) = 1/2$ , чего не может быть для целочисленного многочлена. Многочисленные современные результаты на эту тему можно найти например в [22].



## Упражнения к главе 10

**Упражнение 10.1.** Пусть выпуклый многоугольник  $P$  триангулирован, т.е. разбит на невырожденные треугольники так, что выполняются условия, описанные в определении триангуляции симплекса. Предположим, что вершины триангуляции покрашены в три цвета 1, 2, 3. Покажите, что число всецветных треугольников четно (нечетно), если и только если четно (нечетно) число граничных сторон триангуляции, вершины которых покрашены всеми цветами 1, 2. В частности, какие бы два цвета  $i$  и  $j$  мы не выбрали, число граничных сторон, вершины которых покрашены в  $i$  и  $j$ , будет иметь одну и ту же четность.

**Упражнение 10.2.** Вершины триангуляции квадрата покрашены в четыре цвета  $\{1, 2, 3, 4\}$  следующим образом: для раскраски вершин квадрата использованы все цвета, а вершины триангуляции, попавшие на сторону квадрата, концы которой покрашены цветами  $i$  и  $j$ , также покрашены в эти цвета. Покажите, что имеется не менее двух *разноцветных* треугольников, т.е. таких треугольников триангуляции, вершины которых покрашены тремя цветами.

**Упражнение 10.3** (Лемма Кнастера–Куратовского–Мазуркевича). Пусть  $k$ -мерный симплекс  $\Delta$  покрыт  $(k+1)$ -им замкнутым множеством  $C_1, \dots, C_{k+1}$  так, что для любого непустого  $I \subset \{1, \dots, k+1\}$  грань  $\Delta_I$  покрыта  $\{C_i\}_{i \in I}$ . Покажите, что тогда  $\bigcap_{i=1}^{k+1} C_i \neq \emptyset$ .

В дальнейшем под *слабой леммой Шпернера* будем понимать утверждение о существовании хотя бы одного всецветного симплекса.

**Упражнение 10.4.** Выведите из теоремы Брауэра слабую лемму Шпернера.

**Упражнение 10.5.** Покажите, что из леммы Кнастера–Куратовского–Мазуркевича вытекает слабая лемма Шпернера.

**Упражнение 10.6.** Пусть известно, что 2-адическую норму, определенную для всех рациональных чисел в задаче 4.2, можно продолжить на все вещественные числа  $x$  до функции  $|x|_2$ , удовлетворяющей следующим свойствам:

- (1)  $|x|_2 \geq 0$ ,
- (2)  $|x|_2 = 0$ , если и только если  $x = 0$ ,
- (3)  $|x \cdot y|_2 = |x|_2 \cdot |y|_2$ ,
- (4)  $|x + y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\} \leq |x|_2 + |y|_2$ .

**Докажите теорему Монски:** если триангуляция единичного квадрата состоит из  $m$  треугольников одинаковой площади, то  $m$  нечетно.

**Указание:**

- раскрасьте плоскость в три цвета так: если  $S_i \subset \mathbb{R}^2$  покрашено цветом  $i$ , то

$$S_1 = \{(x, y) : |x|_2 < 1, |y|_2 < 1\}, \quad S_2 = \{(x, y) : |x|_2 \geq 1, |x|_2 \geq |y|_2\}, \quad S_3 = \{(x, y) : |y|_2 \geq 1, |y|_2 > |x|_2\};$$

- докажите, что если  $|x|_2 < |y|_2$ , то  $|x + y|_2 = |y|_2$  и выведите отсюда инвариантность  $S_2$  и  $S_3$  при сдвигах на векторы из  $S_1$ ;
- рассмотрите квадрат с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ;
- покажите, что в цвета 1 и 2 может быть раскрашена лишь одна сторона квадрата, а именно, соединяющая  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ ;
- выведите отсюда, что в триангуляции имеется всецветный треугольник  $T$ ;
- используя продолженную 2-адическую норму, докажите, что если  $s$  — площадь  $T$ , то  $|s|_2 > 1$ , для чего предварительно сдвиньте  $T$ , совместив его вершину из  $S_1$  с началом координат;
- выведите отсюда, что  $|m|_2 < 1$  и, значит,  $m$  нечетно.

## Лекция 11

# Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

**План.** Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, двумерный случай: теорема Бойяи–Валласа–Гервина, разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, теорема Дена, тетраэдр Хилла, равнодополняемые многогранники, координатный тетраэдр, решение Третьей проблемы Гильберта, теорема Дена–Сидлера.

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, имеют непосредственное отношение к вычислению площадей плоских фигур и объемов фигур в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Известное из курса математического анализа определение этих понятий, основанное на предельном переходе, часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться следующими соображениями (мы сформулируем их для плоского случая; пространственный случай получается заменой слова “площадь” на слово “объем”): (1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); (2) если фигура  $F$  представлена в виде объединения конечного числа фигур  $F_1, \dots, F_n$ , не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры  $F$  равна сумме площадей фигур  $F_i$  (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур  $F$  и  $G$  заданы такие представления с помощью фигур  $F_1, \dots, F_n$  и  $G_1, \dots, G_n$  соответственно, и при каждом  $i$  фигуры  $F_i$  и  $G_i$  равны, то  $F$  и  $G$  имеют одинаковые площади.

Хорошо известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника, а также площади треугольника через площадь параллелограмма. Еще одно приложение техники, основанной на описанном выше представлении многоугольников, — доказательство теоремы Пифагора, рис. 11.1.

Отметим, что для многоугольников  $F$  в качестве фигур  $F_i$  принято также рассматривать многоугольники. Приведем теперь необходимые формальные определения.

**Определение 11.1.** Пусть  $F$  и  $F_1, \dots, F_n$  — многоугольники, для которых выполняются следующие условия:

- (1) при каждом  $i$  и  $j \neq i$  многоугольники  $F_i$  и  $F_j$  не имеют общих внутренних точек;
- (2)  $F = \cup_{i=1}^n F_i$ .

Тогда говорят, что  $F$  *разрезан на многоугольники*  $F_i$ .

**Определение 11.2.** Пусть  $F$  и  $G$  — два многоугольника. Если  $F$  и  $G$  можно так разрезать на многоугольники  $F_1, \dots, F_n$  и  $G_1, \dots, G_n$  соответственно, что при каждом  $i = 1, \dots, n$  многоугольники  $F_i$  и  $G_i$  равны, то  $F$  и  $G$  называются *равносоставленными*.

**Определение 11.3.** Многоугольники  $F$  и  $G$  называются *равновеликими*, если их площади равны.

Как уже отмечалось, равносоставленные многоугольники равновелики. Верно ли обратное? Замечательно, что ответ положительный. Соответствующий результат называется *теоремой Бойяи–Валласа–Гервина*.

**Теорема 11.4** (Бойяи, Валлас, Гервин [25]). *Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равносоставлены.*

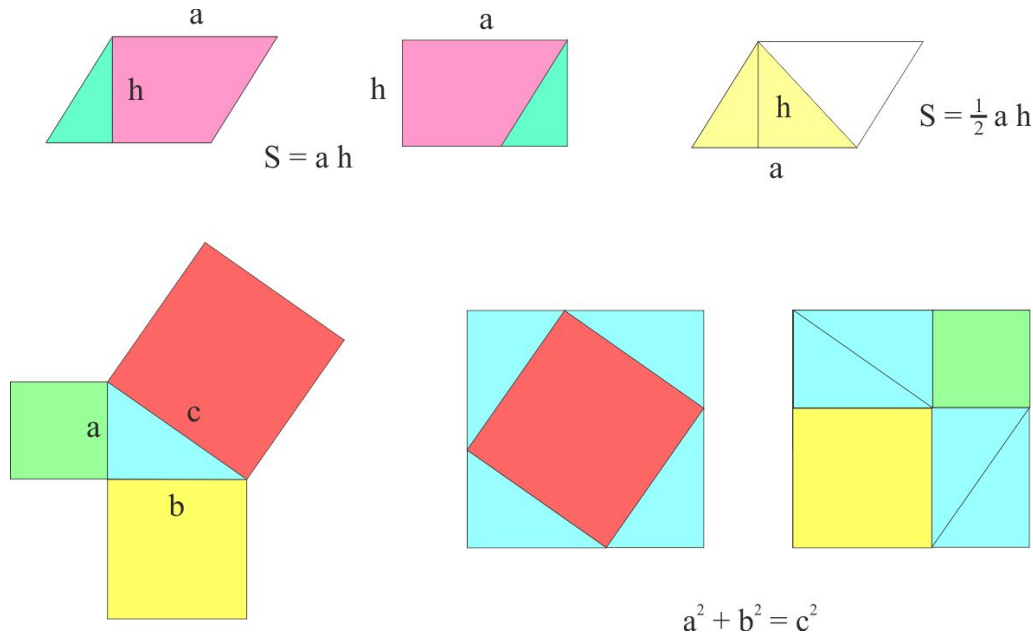


Рис. 11.1: Простейшие применения идеи равноставленности.

**Замечание 11.5.** Бойяи (Farkas Bolyai) в 1790 году сформулировал проблему, Валлас (William Wallace) решил ее в 1807 году, Гервин (Paul Gerwien) решил ее вновь в 1833 году, и, наконец, Бойяи, не зная о существовании этих решений, дал свое в 1835 году, см. [23].

Следующий шаг — попробовать обобщить полученные результаты на многогранники. Начнем с соответствующих определений (дословно повторяющих определения 11.1, 11.2 и 11.3 с заменой слов “многоугольник” на “многогранник” и “площадь” на “объем”).

**Определение 11.6.** Пусть  $W$  и  $W_1, \dots, W_n$  — многогранники, для которых выполняются следующие условия:

- (1) при каждом  $i$  и  $j \neq i$  многогранники  $W_i$  и  $W_j$  не имеют общих внутренних точек;
- (2)  $W = \cup_{i=1}^n W_i$ .

Тогда говорят, что  $W$  **разрезан на многогранники**  $W_i$ .

**Определение 11.7.** Пусть  $A$  и  $B$  — два многогранника. Если  $A$  и  $B$  можно так разрезать на многогранники  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_n$  соответственно, что при каждом  $i = 1, \dots, n$  многогранники  $A_i$  и  $B_i$  равны, то  $A$  и  $B$  называются **равноставленными**.

**Определение 11.8.** Многогранники  $A$  и  $B$  называются **равновеликими**, если их объемы равны.

Верно ли, что равновеликие многогранники в  $\mathbb{R}^3$  равноставлены? Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, что было показано Деном [24], построившим специальные функции от длин ребер и величин двугранных углов многогранника, которые не меняются при замене многогранника на любой другой, равноставленный с ним. Такие функции называются теперь **инвариантами Дена**. Оказалось, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра можно построить такой инвариант Дена, который на кубе и на правильном тетраэдре принимает разные значения, поэтому такие куб и тетраэдр не равноставлены. Более того, можно показать, что они также и не **равнодополняемы**, т.е. не могут быть дополнены равными многогранниками до равных и даже до равноставленных многогранников. Кроме того, инварианты Дена позволили доказать существование тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равноставленными). Таким образом, была решена **третья проблема Гильберта**, в которой поднимался вопрос о существовании таких тетраэдров.

Отметим, что инварианты Дена и сама его работа [24] были трудны для понимания. Ряд математиков упростили доказательство Дена (см. историю вопроса в [25]). Возможно, наиболее простой подход к равноставленности изложен в [26]. Именно его мы и будем обсуждать. Материалы этой главы частично опираются на [25] и на [27].

## 11.1 Критерий равноставленности многогранников

В этом параграфе мы определим инварианты Дена и покажем, как можно их использовать для ответа на вопрос о том, являются ли данные многогранники равноставленными.

**Определение 11.9.** Пусть  $M$  — какое-нибудь множество вещественных чисел. Каждое соотношение  $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$ , где  $x_i \in M$ , а  $n_i$  — целые числа, будем называть *зависимостью на  $M$* . Функцию  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть *аддитивной*, если она “уважает” зависимости, т.е. для каждой зависимости  $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$  на  $M$  выполняется  $n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0$ .

**Конструкция 11.10.** Пусть  $W \subset \mathbb{R}^3$  — некоторый многогранник, и  $E$  — множество его ребер. Для каждого  $e \in E$  через  $|e|$  обозначим длину ребра  $e$ , а через  $\alpha_e$  — величину двугранного угла многогранника  $W$  при этом ребре. Положим  $\alpha(W) = \{\alpha_e : e \in E\}$  и пусть  $M$  — произвольное множество вещественных чисел, содержащее  $\alpha(W)$  и число  $\pi$ .

**Определение 11.11.** Во введенных выше обозначениях, каждую аддитивную функцию  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $f(\pi) = 0$ , будем называть *функцией Дена многогранника  $W$* , а число  $f(W) = \sum_{e \in E} |e|f(\alpha_e)$  — *инвариантом Дена*, отвечающим  $f$ .

**Замечание 11.12.** Если множество  $M$  содержит  $\pi$  и все множества  $\alpha(W_i)$ , где  $W_1, \dots, W_k$  — некоторое семейство многогранников, то аддитивная функция  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , зануляющаяся на  $\pi$ , является функцией Дена одновременно для всех  $W_i$ .

**Теорема 11.13.** Пусть  $A$  и  $B$  — равноставленные многогранники, а  $f$  — произвольная функция Дена для  $A$  и  $B$ . Тогда  $f(A) = f(B)$ .

Прежде, чем доказывать эту теорему, приведем некоторые ее следствия. В частности, покажем, как с ее помощью решается третья проблема Гильберта.

## 11.2 Примеры вычисления инвариантов Дена

**Предложение 11.14.** Каждый инвариант Дена для куба равен нулю.

**Доказательство.** Обозначим рассматриваемый куб через  $K$ , и пусть  $a$  — длина его стороны. Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для куба  $K$ . Так как все двугранные углы куба равны  $\pi/2$ , и  $2 \cdot \pi/2 - \pi = 0$  — зависимость, имеем  $0 = 2f(\pi/2) - f(\pi) = 2f(\pi/2)$ . Следовательно,  $f(K) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot f(\pi/2) = 0$ .  $\square$

**Предложение 11.15.** Каждый инвариант Дена для призмы равен нулю.

**Доказательство.** Обозначим рассматриваемую призму через  $P$ . Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для этой призмы. Обозначим через  $e_1, \dots, e_n$  ребра нижнего основания призмы  $P$ , через  $e'_1, \dots, e'_n$  соответствующие ребра верхнего основания призмы, и через  $h_1, \dots, h_n$  — боковые ребра призмы  $P$ . Тогда при каждом  $i$  выполняется  $|e_i| = |e'_i|$  и  $\alpha_{e_i} + \alpha_{e'_i} = \pi$ . Кроме того,  $|h_1| = \dots = |h_n|$  и  $\sum_i \alpha_{h_i} = \pi(n-2)$  (плоское сечение соответствующего призме цилиндра, перпендикулярное образующим, является плоским  $n$ -угольником). Отсюда вытекает, что

$$0 = f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}) - f(\pi) = f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}), \quad 0 = \sum_i f(\alpha_{h_i}) - (n-2)f(\pi) = \sum_i f(\alpha_{h_i}).$$

Используем приведенные только что формулы для вычисления  $f(P)$ :

$$f(P) = \sum_{i=1}^n |e_i|f(\alpha_{e_i}) + \sum_{i=1}^n |e'_i|f(\alpha_{e'_i}) + \sum_{i=1}^n |h_i|f(\alpha_{h_i}) = \sum_{i=1}^n |e_i|(f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i})) + |h_1| \sum_{i=1}^n f(\alpha_{h_i}) = 0.$$

$\square$

## 11.3 Некоторые следствия из теоремы Дена

**Следствие 11.16.** *Правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.*

**Доказательство.** Легко видеть, что все двугранные углы  $\alpha$  правильного тетраэдра равны  $\arccos(1/3)$ . У куба двугранные углы равны  $\pi/2$ . Зададим на множестве  $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$  функцию  $f$ , положив  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$  и  $f(\pi) = 0$ . Покажем, что  $f$  — функция Дена. Так как  $f(\pi) = 0$ , достаточно доказать аддитивность  $f$ .

Рассмотрим произвольную зависимость  $n_1\alpha + n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$ . Докажем, что  $n_1 = 0$ . Действительно, если это не так, то  $\alpha/\pi$  — рациональное число. Следующая лемма говорит о том, что такого быть не может.

**Лемма 11.17.** *Число  $\frac{1}{\pi} \arccos(1/3)$  — иррационально.*

**Доказательство.** Положим  $\alpha = \arccos(1/3)$  и покажем, что  $\cos(k\alpha)$  при всех натуральных  $k$  имеет вид  $a_k/3^k$ , где  $a_k$  — целое, не делящееся на 3. Доказательство проведем индукцией по  $k$ . Для  $k = 1$  это так. Для  $k = 2$  это тоже так в силу того, что  $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = -7/9$ . Предположим, что утверждение доказано для всех  $k < n$ , где  $n \geq 3$ . Тогда

$$\cos(n\alpha) + \cos((n-2)\alpha) = 2\cos((n-1)\alpha)\cos\alpha = 2a_{n-1}/3^n,$$

откуда  $\cos(n\alpha) = 2a_{n-1}/3^n - a_{n-2}/3^{n-2} = (2a_{n-1} - 9a_{n-2})/3^n$ . Осталось заметить, что числитель не делится на 3, так как  $a_{n-1}$  не делится на 3 по предположению.

Покажем теперь, что  $\alpha/\pi$  иррационально. Предположим противное, т.е.  $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ , где  $p \neq 0$  и  $q > 0$  — целые числа, тогда  $\cos(q\alpha) = \pm 1$ , чего не может быть в силу того, что мы доказали выше.  $\square$

Итак, в каждой зависимости  $n_1 = 0$ , поэтому осталось проверить, что если  $n_2\pi/2 + n_3\pi = 0$ , то  $n_2f(\pi/2) + n_3f(\pi) = 0$ . Однако это так по определению функции  $f$ .

Вычислим теперь инварианты Дена, соответствующие функции  $f$ . По предложению 11.14, каждый инвариант Дена для куба равен нулю. Пусть  $T$  — рассматриваемый правильный тетраэдр, и  $a$  — длина его стороны. Тогда  $f(T) = \sum_{i=1}^6 a f(\alpha) = 6a \neq 0$ , поэтому, в силу теоремы 11.13, тетраэдр  $T$  и куб не равносоставлены.  $\square$

**Конструкция 11.18.** Рассмотрим тетраэдр  $T_1$ , основание которого — равнобедренный прямоугольный треугольник, а высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания, см. рис. 11.2, слева.

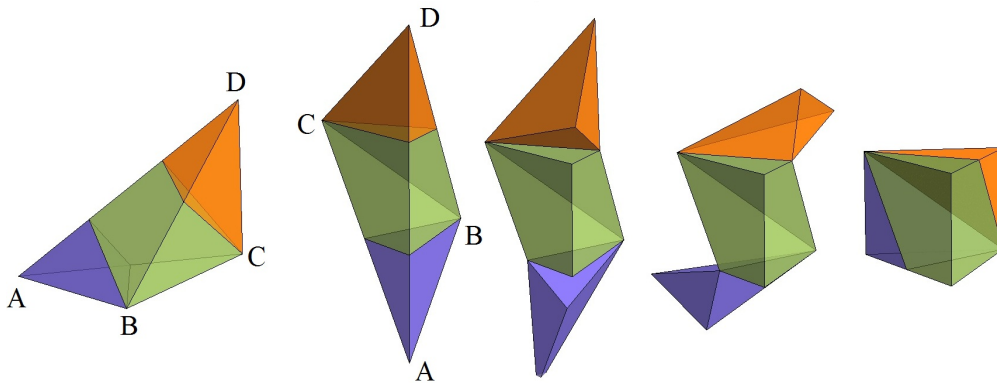


Рис. 11.2: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой.

**Определение 11.19.** Многогранник  $T_1$  называется *тетраэдром Хилла*.

**Предложение 11.20.** *Тетраэдр Хилла равносоставлен с некоторой призмой.*

**Доказательство.** Разрезание тетраэдра Хилла на три части, из которых составляется прямоугольная призма, также представлено на рис. 11.2 (отметим, что у Хилла было другое разрезание). Преобразование тетраэдра Хилла в прямоугольную призму можно хорошо изучить с помощью презентации, подготовленной в пакете Mathematica [30].  $\square$

**Следствие 11.21.** *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

**Доказательство.** Из предложения 11.20 и теоремы 11.13 вытекает, что у тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена — такой же, как и у призмы. Следовательно, по предложению 11.15, каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.  $\square$

## 11.4 Доказательство теоремы Дена

На понадобится следующий технический результат.

**Предложение 11.22.** *Пусть  $M$  — множество вещественных чисел и  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда каждая аддитивная функция  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  продолжается до некоторой аддитивной функции на  $M \cup \{x\}$ .*

**Доказательство.** Если  $x \in M$ , то функцию  $f$  менять не будем. Пусть теперь  $x \notin M$ .

Если в каждую зависимость элементов множества  $M \cup \{x\}$  число  $x$  входит с нулевым коэффициентом, то при любом значении  $f(x)$  продолженная функция  $f$  уважает все зависимости (так как они являются зависимостями на  $M$ ).

Пусть теперь для некоторых целых  $n_i$  и  $n \neq 0$ , а также вещественных  $x_i \in M$ , имеем  $nx + \sum n_i x_i = 0$ . Положим  $f(x) = -\frac{\sum n_i f(x_i)}{n}$  и покажем, что так продолженная  $f$  является аддитивной. Последнее означает, что для любой зависимости  $mx + \sum m_j y_j = 0$  должно иметь место  $m f(x) + \sum m_j f(y_j) = 0$ . Докажем, что это так и есть. Для этого заметим, что  $m \sum n_i x_i - n \sum m_j y_j = 0$  — зависимость на  $M$ , поэтому  $m \sum n_i f(x_i) - n \sum m_j f(y_j) = 0$ , откуда

$$m f(x) + \sum m_j f(y_j) = \frac{-m \sum n_i f(x_i) + n \sum m_j f(y_j)}{n} = 0.$$

$\square$

**Следствие 11.23.** *Пусть  $W$  — некоторый многогранник и  $f$  — его функция Дена. Рассмотрим произвольные многогранники  $W_1, \dots, W_n$ . Тогда  $f$  продолжается до функции Дена для всех многогранников  $W_i$ .*

**Доказательство.** Будем расширять область определения функции  $f$ , последовательно добавляя величины двугранных углов многогранников  $W_i$  и продолжая  $f$  до аддитивной функции, что можно сделать в силу предложения 11.22.  $\square$

**Пример 11.24.** Покажем, как работает следствие 11.23.

**Следствие 11.25.** *Тетраэдр Хилла и правильный тетраэдр не равносоставлены.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — функция Дена, построенная в доказательстве следствия 11.16. Тогда ее значение на правильном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим  $f$  до функции Дена для тетраэдра Хилла, что можно сделать в силу следствия 11.23. По следствию 11.21, значение  $f$  на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу теоремы 11.13, рассматриваемые тетраэдры не равносоставлены.  $\square$

В формулировке приводимого ниже предложения также используется следствие 11.23.

**Предложение 11.26** (аддитивность инварианта Дена). *Пусть  $W$  — произвольный многогранник, разрезанный на многогранники  $W_1, \dots, W_n$ , и  $f$  — некоторая функция Дена для  $W$ . Обозначим той же буквой произвольное продолжение  $f$  до функции Дена для всех многогранников  $W_1, \dots, W_n$ . Тогда  $f(W) = \sum_{i=1}^n f(W_i)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $e$  — ребро многогранника  $W$  или одного из многогранников  $W_i$ . Рассмотрим все вершины этих многогранников, попавшие на  $e$ , а также все точки пересечения ребра  $e$  с другими ребрами этих многогранников. Тогда ребро  $e$  разобьется этими точками на отрезки, которые будем называть *звеньями*.

Обозначим через  $\mathcal{E}$  множество всех звеньев, каждое из которых лежит в некотором ребре многогранника  $W$ , и для каждого  $\varepsilon \subset e$ , где  $e$  — ребро  $W$ , положим  $\alpha_\varepsilon = \alpha_e$ . Покажем, что

$$(11.1) \quad f(W) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon).$$

Действительно, ребро  $e$  многогранника  $W$  дает вклад  $|e| f(\alpha_e)$  в левую часть формулы (11.1), т.е. в  $f(W)$ , а все звенья  $\varepsilon \in \mathcal{E}$ , лежащие в  $e$ , дают вклад в правую часть формулы (11.1), равный  $\sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon) = |e| f(\alpha_e)$ .

Покажем теперь, что величина  $\sum_{i=1}^n f(W_i)$  равна правой части формулы 11.1. Для этого рассмотрим сначала все звенья, не попавшие в  $\mathcal{E}$ , и покажем, что они дают нулевой вклад в величину  $\sum_{i=1}^n f(W_i)$ . Действительно, они могут быть двух типов: (1) звенья, лежащие в гранях многогранника  $W$ , и (2) звенья, внутренности которых лежат внутри многогранника  $W$ .

Пусть  $\varepsilon$  — звено первого типа, и пусть  $W_{i_1}, \dots, W_{i_k}$  — все многогранники  $W_i$ , в ребрах которых лежит  $\varepsilon$ . Обозначим через  $\alpha_{i_j}$  двугранный угол в многограннике  $W_{i_j}$  при звене  $\varepsilon$ , тогда  $\sum_j \alpha_{i_j} = \pi$ , поэтому  $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\pi) = \sum_j f(\alpha_{i_j})$ . Отсюда вытекает, что вклад звена  $\varepsilon$  в величину  $\sum_i f(W_i)$  равен

$$\sum_j |\varepsilon| f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = 0.$$

Если ввести такие же обозначения для ребра  $\varepsilon$  второго типа, то получим  $\sum_j \alpha_{i_j} = 2\pi$  и, из тех же самых соображений, его вклад в  $\sum_i f(W_i)$  равен нулю.

Осталось выяснить, какой вклад в величину  $\sum_i f(W_i)$  дают звенья из  $\mathcal{E}$ . Пусть  $\varepsilon$  — такое звено. Опять, в тех же самых обозначениях, имеем  $\sum_j \alpha_{i_j} = \alpha_\varepsilon$ , поэтому  $0 = \sum_j f(\alpha_{i_j}) - f(\alpha_\varepsilon)$ . Отсюда вытекает, что вклад звена  $\varepsilon$  в величину  $\sum_i f(W_i)$  равен

$$\sum_j |\varepsilon| f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_{i_j}) = |\varepsilon| f(\alpha_\varepsilon),$$

т.е. он равен вкладу этого же звена в величину  $f(W)$ . Следовательно,  $f(W) = \sum_i f(W_i)$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 11.13.* Так как  $A$  и  $B$  — равноставленные многогранники, их можно разрезать на многогранники  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_n$  соответственно так, что  $A_i$  равен  $B_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Продолжим  $f$  до функции Дена для всех многогранников  $A_i$  (а, значит, и всех  $B_i$ ). Так как у равных многогранников инварианты Дена равны, имеем  $f(A_i) = f(B_i)$ . Кроме того, по предложению 11.26 имеем

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(A_i) = \sum_{i=1}^n f(B_i) = f(B).$$

$\square$

## 11.5 Решение Третьей проблемы Гильберта

Третья проблема Гильберта имеет дело с обобщением понятия равноставленности.

**Определение 11.27.** Многогранники  $A$  и  $B$  называются *равнодополняемыми*, если существуют равноставленные многогранники  $W^A$  и  $W^B$ , которые можно так разрезать на многогранники

$$W_0^A, W_1^A, \dots, W_n^A \text{ и } W_0^B, W_1^B, \dots, W_n^B,$$

что многогранник  $W_0^A$  равен  $A$ , многогранник  $W_0^B$  равен  $B$ , а при всех  $i = 1, \dots, n$  многогранники  $W_i^A$  и  $W_i^B$  равны.

**Замечание 11.28.** Если многогранники  $A$  и  $B$  равноставлены, то они и равнодополняемы. Действительно, в качестве  $W^A$  и  $W^B$  можно взять их самих. Таким образом, равнодополняемость действительно является обобщением равноставленности.

**Следствие 11.29.** У равнодополняемых многогранников все инварианты Дена совпадают.

*Доказательство.* В обозначениях определения 11.27, пусть  $f$  — произвольная функция Дена для  $A$  и  $B$ , продолженная до функции Дена для всех  $W_i^A$  и  $W_i^B$ . Тогда  $f(A) = f(W_0^A)$ ,  $f(B) = f(W_0^B)$ , и  $f(W_i^A) = f(W_i^B)$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . По предложению 11.26,  $f(W^A) = \sum_{i=0}^n f(W_i^A)$  и  $f(W^B) = \sum_{i=0}^n f(W_i^B)$ . Так как  $W^A$  и  $W^B$  равноставлены, то, по теореме 11.13, имеем  $f(W^A) = f(W^B)$ , откуда

$$f(A) = f(W_0^A) = f(W^A) - \sum_{i=1}^n f(W_i^A) = f(W^B) - \sum_{i=1}^n f(W_i^B) = f(W_0^B) = f(B).$$

$\square$

Из приведенных выше результатов мгновенно получаем следующее утверждение.

**Следствие 11.30.** *Правильный тетраэдр не является равнодополняемым ни с кубом, ни с тетраэдром Хилла.*

Третья проблема Гильберта спрашивала, существуют ли тетраэдры с равными основаниями и высотами, не являющиеся равнодополняемыми? Оказывается, ответ положительный.

**Определение 11.31.** *Координатным тетраэдром* назовем тетраэдр с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ , а также каждый тетраэдр, ему подобный.

**Предложение 11.32.** *У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.*

**Доказательство.** Обозначим через  $\alpha$  величину двугранных углов координатного тетраэдра при ребрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда, как легко видеть,  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ . Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 11.17, можно показать, что при любом натуральном  $k$  имеем  $\cos(k\alpha) = a_k/(\sqrt{3})^k$ , где  $a_k$  — целое число, не делящееся на 3, откуда тем же способом заключаем, что число  $\frac{1}{\pi} \arccos(1/\sqrt{3})$  — иррационально. Отсюда вытекает, что множество  $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$  не имеет зависимостей, в которые  $\alpha$  входит с ненулевым коэффициентом. Поэтому, положив  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$  и  $f(\pi) = 0$ , мы получим функцию Дена для координатного тетраэдра. Легко видеть, что соответствующий ей инвариант Дена отличен от нуля.  $\square$

**Замечание 11.33.** Если в качестве основания координатного тетраэдра взять прямоугольный треугольник, то он будет отличаться от тетраэдра Хилла с таким же основанием лишь тем, что высота последнего падает не в вершину прямого угла основания, а в вершину острого. При этом высоты у таких тетраэдров будут равны.

**Следствие 11.34** (решение Третьей проблемы Гильберта). *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не являются равнодополняемыми.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — функция Дена, построенная в доказательстве предложения 11.32. Тогда ее значение на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим  $f$  до функции Дена для тетраэдра Хилла. По следствию 11.21, значение  $f$  на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу следствия 11.29, рассматриваемые тетраэдры не являются равнодополняемыми.  $\square$

## 11.6 Дальнейшее развитие

В 1965 Сидлер [29] доказал, что равенство инвариантов Дена достаточно для равносоставленности многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Тем самым, имеет место следующая теорема.

**Теорема 11.35** (Ден–Сидлер). *Для равносоставленности многогранников в  $\mathbb{R}^3$  необходимо и достаточно, чтобы совпадали их объемы и все инварианты Дена.*

**Замечание 11.36.** Теорему Дена–Сидлера на четырехмерный случай обобщили Б. Джессен (B. Jessen) и А. Торуп (A. Thorup), см. [31].



## Упражнения к главе 11

**Упражнение 11.1.** Пусть  $W$  — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники  $F_1, \dots, F_n$ , а также на многоугольники  $G_1, \dots, G_m$ . Докажите следующее утверждение: многоугольник  $W$  можно разрезать на многоугольники  $W_i$  так, что каждый  $W_i$  лежит в некотором  $F_j$  и  $G_k$ . В частности, каждый  $F_j$  и  $G_k$  разрезается на некоторые из многоугольников  $W_i$ .

**Упражнение 11.2.** Выведите из упражнения 11.1, что из равноставленности многоугольников  $A$  и  $B$ , а также многоугольников  $B$  и  $C$ , вытекает равноставленность многоугольников  $A$  и  $C$ . Покажите, что отношение равноставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

**Упражнение 11.3.** Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

**Упражнение 11.4.** Докажите, что любой треугольник равноставлен с некоторым параллелограммом.

**Упражнение 11.5.** Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равноставлены.

**Упражнение 11.6.** Из упражнения 11.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равноставлены.

**Упражнение 11.7.** Докажите, что конечный набор прямоугольников равноставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

**Упражнение 11.8.** Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

**Упражнение 11.9.** Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равноставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равноставлен с кубом.

**Определение 11.37.** Пусть  $W$  — многогранник с множеством ребер  $E$ , и  $M$  — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из  $E$ . Пусть  $f$  — произвольная функция Дена для  $W$ , и  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника  $W$* , соответствующим паре  $(f, g)$ , назовем число  $\sum_{e \in E} g(|e|)f(\alpha_e)$ , где  $|e|$  и  $\alpha_e$  — длина ребра  $e$  и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

**Упражнение 11.10.** Докажите, что у равноставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

**Упражнение 11.11.** Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравноставленные с равновеликим кубом.

## Комментарии к упражнению 11.11

Приведем ряд соображений, которые могут помочь в решении упражнения 11.11. Мы построим функцию Дена  $f$  и аддитивную функцию  $g$  на всем  $\mathbb{R}$ . Аддитивность этих функций, на самом деле, является не чем иным, как  $\mathbb{Q}$ -линейностью, т.е. сохранением конечных рациональных линейных комбинаций. Покажем это на примере функции  $f$ . Пусть  $x = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{q_i} x_i$ , где  $p_i$  и  $q_i$  — целые числа, причем  $q_i \neq 0$ . Приведем все числа  $p_i/q_i$  к общему знаменателю и умножив правую и левую часть на этот знаменатель, получим  $Qx = \sum_{i=1}^n P_i x_i$ , где  $P_i$  и  $Q$  — целые числа,  $Q \neq 0$ ,  $P_i/Q = p_i/q_i$ . Если  $f$  сохраняет соотношения, то  $Qf(x) - \sum_{i=1}^n P_i f(x_i) = 0$ , откуда

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q} f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{q_i} f(x_i).$$

Таким образом, аддитивность  $f$  влечет  $\mathbb{Q}$ -линейность. Обратное,  $\mathbb{Q}$ -линейность, в частности, означает и линейность над целыми числами, т.е. аддитивность.

Чтобы эффективно строить  $\mathbb{Q}$ -линейные отображения с нужными свойствами, мы введем понятие базиса Гамеля. Начнем с ряда понятий, относящихся к произвольным векторным пространствам.

Пусть  $V$  — произвольное линейное пространство над некоторым полем. Линейная комбинация векторов из  $V$  называется *финитной*, если все коэффициенты этой комбинации, кроме конечного их числа, равны нулю. Система векторов из  $V$  называется *независимой*, если равенство нулю любой финитной линейной комбинации векторов этой системы равносильно тому, что все коэффициенты такой линейной комбинации равны нулю. Система векторов из  $V$  называется *полной*, если любой вектор из  $V$  выражается в виде некоторой финитной линейной комбинации векторов этой системы. *Базисом Гамеля пространства  $V$*  называется полная линейно независимая система векторов из  $V$ .

Оказывается, базис Гамеля всегда существует. Для доказательства этого факта, а также для изучения различных, нужных в дальнейшем, свойств таких базисов, нам понадобится одно фундаментальное утверждение из теории множеств, называемое леммой Цорна. Чтобы его сформулировать, напомним некоторые определения.

Пусть  $X$  — произвольное множество. Отношение “ $\preceq$ ” на  $X$  называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно (при каждом  $x \in X$  выполняется  $x \preceq x$ ), транзитивно (если  $x \preceq y$  и  $y \preceq z$ , то  $x \preceq z$ ) и антисимметрично (если  $x \preceq y$  и  $y \preceq x$ , то  $x = y$ ). При этом, если  $x \preceq y$ , то будем говорить, что  $x$  *подчиняется*  $y$ . Примером частичного порядка, определенного на множестве  $X$  всех подмножеств некоторого множества, может служить принадлежность одного подмножества другому.

Пары элементов из  $X$ , для которых определено отношение, называются *сравнимыми*, а все остальные — *несравнимыми*. Частичный порядок, для которого все пары сравнимы, называется *линейным порядком*. Примером линейного порядка может служить стандартное отношение  $\leq$  на вещественных числах. Если множество  $X$  состоит более чем из одного элемента, то приведенный выше пример отношения на множестве всех его подмножеств линейным не является (убедитесь).

Подмножество  $Z$  частично упорядоченного множества  $X$  называется *цепью* в  $X$ , если индуцированный на нем частичный порядок линейен. Элемент  $m$  частично упорядоченного множества  $X$  называется *верхней гранью* множества  $Z \subset X$ , если для всех  $z \in Z$  выполняется  $z \preceq m$ . Элемент  $m$  частично упорядоченного множества  $X$  называется *максимальным*, если в  $X$  не существует большего чем  $m$  элемента, т.е. такого  $m' \neq m$ , что  $m \preceq m'$ . Вообще говоря, максимальных элементов может быть несколько. Кроме того, максимальных элементов может вообще не быть (приведите примеры, иллюстрирующие все описанные только что определения и утверждения).

**Лемма 11.38** (Цорн). *Если в частично упорядоченном множестве  $X$  каждая цепь имеет верхнюю грань, то каждый элемент из  $X$  подчинен некоторому максимальному.*

Покажем, как отсюда вытекает существование базиса Гамеля. Пусть  $V$  — произвольное векторное пространство. В качестве  $X$  рассмотрим всевозможные не зависящие семейства  $S$  векторов из  $V$ , а в качестве частичного порядка — отношение принадлежности. Пусть  $C$  — произвольная цепь в  $X$ . Рассмотрим объединение  $\cup C$  всех элементов этой цепи. Покажем, что  $\cup C$  является независимой системой векторов из  $V$ .

Действительно, рассмотрим произвольную финитную линейную комбинацию векторов из  $\cup C$ , и пусть  $e_1, \dots, e_n$  — все векторы, при которых коэффициенты этой комбинации отличны от нуля. Каждый  $e_i$  принадлежит некоторому  $S_i \in C$ . Так как  $C$  — цепь, то все  $S_i$  сравнимы между собой, поэтому их можно упорядочить  $S_{i_1} \preceq \dots \preceq S_{i_n}$ , так что все  $e_i$  принадлежат  $S_{i_n}$  и, значит, входят в независимую систему, поэтому и сами образуют независимую систему. Таким образом, рассматриваемая финитная линейная комбинация равна нулю, если и только если все ее коэффициенты равны нулю, так что  $\cup C$  — независимая система. Ясно также, что любой элемент цепи  $C$  подчиняется  $\cup C$ , так что  $\cup C$  — верхняя грань для  $C$ .

Из проведенных рассуждений вытекает, что применима лемма Цорна, поэтому каждый элемент из  $X$  подчинен максимальному. Что представляют собой максимальные элементы в  $X$ ? Это такие независимые системы векторов из  $W$ , которые нельзя расширить до больших, т.е. добавление любого вектора приводит к зависимой системе. Отсюда мгновенно вытекает, что каждый добавленный вектор к максимальному  $S \in X$  выражается в виде финитной линейной комбинации векторов из  $S$ , поэтому  $S$  является полной системой и, значит, базисом Гамеля. Итак, лемма Цорна приводит нас к следующему результату.

**Следствие 11.39.** *В любом векторном пространстве любая независимая система векторов содержится в некотором базисе Гамеля.*

# Лекция 12

## Двумерные поверхности

**План.** Фактортопология, склейки, симплексы, склейка симплексов по ребрам, триангулированное пространство, топологический симплекс (или, короче, симплекс), вершины, ребра и параметризация топологического симплекса, триангуляция пространства, вершины, ребра, граф триангуляции, подразбиение триангуляции, правильная склейка, правильная триангуляция, триангулированная поверхность (или, короче, поверхность), смежные симплексы поверхности, граничные и внутренние ребра поверхности, граница или край поверхности, компоненты границы гомеоморфны окружности, замкнутые поверхности, ориентация ребра, ориентация двумерного симплекса, согласованность ориентаций ребер, ориентация трехмерного симплекса, согласованность ориентаций двумерных граничных симплексов, ориентация поверхности, ориентируемые и неориентируемые поверхности, склейка ребер, склейки из квадрата, склейка поверхностей, частный случай такой склейки по соответствующим ориентированным граничным окружностям, вырезание дырки, вырезание дырки из симплекса, заклейка дырки, разрезание поверхности по внутренним ребрам, разрезание вдоль кривой, полоска вдоль кривой, вырезание полоски, вклейка в поверхность ручки и пленки Мёбиуса, альтернативное представление вклейки пленки Мёбиуса, классификация ориентированных поверхностей, классификация неориентированных поверхностей, эйлерова характеристика поверхностей.

В предыдущих лекциях мы изучали двумерные многогранные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , а также многомерные выпуклые тела и многогранники. Напомним, что многогранные поверхности мы склеивали из пространственных многоугольников — граней поверхностей, накладывая при этом многочисленные ограничения на условия склейки. В многомерном случае границы выпуклых многогранников представляли собой склейки гиперграней. В настоящей лекции мы также будем рассматривать склейки “граней”, но на сей раз мы не станем проделывать эти операции в объемлющем евклидовом пространстве. Вместо этого мы будем клеить топологически, используя понятие факторизации, введенное в разделе 8.4 и, фактически, обобщая понятие топологического графа. При этом, мы ограничимся двумерным случаем и определим поверхности по аналогии с двумерными многогранными поверхностями, т.е. наложим ряд ограничений, аналогичных приведенным в определении 9.4. Однако теперь мы

- в качестве граней будем рассматривать лишь треугольники, так как каждый многоугольник можно подразбить на треугольники;
- не будем требовать существования цепи, соединяющей каждую пару граней (пункт 3 из определения 9.4), а вместо этого будем говорить про топологически связные и несвязные поверхности;
- не будем требовать, чтобы смежные грани не лежали в одной плоскости (пункт 5 из определения 9.4), так как при топологической склейке подобное условие имеет смысл.

Полученные таким образом объекты мы будем называть двумерными триангулированными поверхностями. Мы обсудим классификацию этих поверхностей с точностью до гомеоморфизма. Отметим, что в курсе дифференциальной геометрии и топологии будет введено понятие многообразия, частным случаем которого являются изучаемые нами поверхности.

### 12.1 Триангулированные поверхности

В разделе 8.4 мы определили операцию факторизации на топологическом пространстве  $X$ , которая для заданной на  $X$  эквивалентности  $\sim$  вводит естественную топологию на множестве  $X/\sim$  классов эквивалентности  $\sim$ : как мы отмечали, это — самая тонкая топология, для которой отображение проекции  $\pi: X \rightarrow X/\sim$ , сопоставляющее каждой точке содержащий ее класс эквивалентности, непрерывно. Напомним, что при описании эквивалентности часто говорят лишь про неодноточечные классы, при этом отождествление, заданное эквивалентностью, называют склейкой.

В том же разделе мы определили топологические графы как результат факторизации дизъюнктивного объединения конечного числа отрезков по эквивалентности, склеивающей некоторые концы отрезков. На сей раз, вместо отрезков мы рассмотрим конечное множество  $\mathcal{D} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  двумерных симплексов, а склеивать будем некоторые пары ребер этих симплексов посредством гомеоморфизмов между ребрами. Точнее, рассмотрим некоторый набор пар различных ребер  $\{(e_1, e'_1), \dots, (e_m, e'_m)\}$  симплексов  $\Delta_i$ , для каждой пары — некоторый гомеоморфизм  $\varphi_i: e_i \rightarrow e'_i$ , и определим на  $D := \sqcup_{i=1}^n \Delta_i$  отношение эквивалентности, отнеся в один класс каждую пару точек  $x \in e_i$  и  $\varphi_i(x) \in e'_i$  при всех  $i$ . Положим  $M = D/\sim$ , и пусть  $\pi: D \rightarrow M$  — каноническая проекция. Эквивалентность  $\sim$  назовем **склейкой симплексов по их ребрам**, а  $M$  — **триангулированным пространством**.

Так как  $\pi$  непрерывно,  $\Delta_i$  — компакт, то  $T_i = \pi(\Delta_i)$  — компактное подмножество  $M$ , которое мы будем называть **топологическим симплексом** или, короче, **симплексом в  $M$** . Образы сторон и вершин симплекса  $\Delta_i$  при отображении  $\pi$  назовем соответственно **вершинами** и **ребрами** симплекса  $T_i$ , а ограничение проекции  $\pi$  на  $\Delta_i$  и  $T_i$  — **параметризацией симплекса  $T_i$** .

Итак, триангулированное пространство  $M$  покрывается семейством  $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^n$  топологических симплексов. Это семейство назовем **триангуляцией  $M$** . Точки из  $M$ , являющиеся вершинами симплексов  $T \in \mathcal{T}$ , называются **вершинами триангуляции  $\mathcal{T}$** , а подмножества в  $M$ , представляющие собой ребра симплексов  $T \in \mathcal{T}$ , — **ребрами триангуляции  $\mathcal{T}$** . Объединение всех ребер  $\mathcal{T}$  назовем **графом триангуляции  $\mathcal{T}$** .

Заметим, что одно и то же триангулированное пространство  $M$  можно задать с помощью разных триангуляций. Скажем, симплекс  $\Delta_i$ , параметризующий топологический симплекс  $T_i$ , можно разбить на 6 треугольников, соединив центр симплекса  $\Delta_i$  с его вершинами и серединами сторон. Непосредственно проверяется, что фактор-топология на естественно склеенных 6-ти симплексах совпадает с топологией на  $\Delta_i$ . Таким образом, заменив  $\Delta_i$  на эти 6 симплексов, в результате получим пространство, гомеоморфное исходному. **Подразбиением триангуляции  $\mathcal{T}$**  назовем триангуляцию, каждый симплекс которой лежит в некотором симплексе из  $\mathcal{T}$ .

**Замечание 12.1.** Так как конечное объединение компактных подмножеств компактно, каждое триангулированное пространство является компактом.

**Задача 12.2.** Покажите, что триангулированное пространство  $M$  хаусдорфово.

**Замечание 12.3.** Каждый симплекс в триангулированном пространстве  $M$  является замкнутым подмножеством как компакт, лежащий в хаусдорфовом пространстве.

Склею  $\sim$  назовем **правильной**, если ограничение проекции  $\pi$  на каждый симплекс  $\Delta_i$  инъективно. Соответствующее триангулированное пространство  $M$  будем также называть **правильно триангулированным**.

Пусть  $\sim$  — правильная склейка. Так как  $\pi$  непрерывно,  $\Delta_i$  — компакт, а пространство  $M$  хаусдорфово в силу задачи 12.2,  $\pi|_{\Delta_i}$  — топологическое вложение. Таким образом, каждый симплекс правильно триангулированного пространства гомеоморфен стандартному двумерному симплексу.

**Определение 12.4.** Правильно триангулированное пространство  $M$ , для которого  $\mathcal{T}$  — его триангуляция, назовем **триангулированной поверхностью** или, для краткости, просто **поверхностью**, если выполняются следующие условия:

- (1) для каждой пары различных симплексов  $T, T' \in \mathcal{T}$  их пересечение  $T \cap T'$  или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если  $e := T \cap T'$  — ребро, то  $T$  и  $T'$  называются **смежными по ребру  $e$** ;
- (2) для каждого  $T \in \mathcal{T}$  и любого его ребра  $e$  существует не более одного  $T' \in \mathcal{T}$ , смежного с  $T$  по ребру  $e$ ;
- (3) если симплексы  $T, T' \in \mathcal{T}$  в пересечении  $T \cap T'$  содержат некоторую вершину  $v$  триангуляции  $\mathcal{T}$ , то существует цепочка  $T_{i_1} = T, T_{i_2}, \dots, T_{i_k} = T'$  такая, что симплексы  $T_{i_{p-1}}$  и  $T_{i_p}$  смежны при всех  $p$ , и все  $T_{i_p}$  содержат вершину  $v$ .

По определению поверхности, каждое ребро произвольной ее триангуляции  $\mathcal{T}$  или содержится в одном топологическом симплексе  $T \in \mathcal{T}$ , или ровно в двух. В первом случае ребро называется **граничным** или **краевым**, а во втором случае — **внутренним**. Вершина триангуляции называется **граничной**, если она является концом граничного ребра. Иначе вершина триангуляции называется **внутренней**. Симплекс триангуляции  $\mathcal{T}$  назовем **внутренним**, если все его вершины — внутренние. Отметим, что у внутреннего симплекса все ребра — внутренние. Обратное неверно: симплекс, у которого все ребра внутренние, может не быть внутренним (приведите пример). Объединение всех граничных ребер триангуляции  $\mathcal{T}$  не зависит от выбора триангуляции и потому

называется *границей* или *краем поверхности*  $M$  и обозначается  $\partial M$ . Поверхность, у которой край пуст, называется *замкнутой*.<sup>1</sup>

**Задача 12.5.** Докажите, что каждая связная компонента края поверхности гомеоморфна окружности (тем самым, край гомеоморфен объединению нескольких окружностей).

## 12.2 Ориентация поверхностей

Отметим, что границу двумерного симплекса можно рассматривать как объединение трех ребер, пересекающихся только по своим вершинам. При этом каждая пара ребер пересекается ровно по одной вершине. Это делает границу симплекса похожей на триангулированную поверхность. Используя эту аналогию, введем понятие ориентации поверхности.

Пусть  $e$  — ребро симплекса, соединяющее вершины  $v$  и  $w$ . Каждая нумерация этих вершин, т.е. биекция между  $\{v, w\}$  и  $\{1, 2\}$ , называется *ориентацией ребра*. Таким образом, каждое ребро может быть ориентировано двумя способами. Для наглядности, выбранная нумерация вершин ребра часто изображается стрелкой, направленной от первой вершины ко второй.

Определим теперь *ориентацию двумерного симплекса* как ориентации всех граничных ребер, приписывающие противоположные номера их общим вершинам: начальная (конечная) вершина одного ребра должна совмещаться с конечной (начальной) вершиной другого. Такое сочетание ориентаций смежных ребер назовем *согласованным*. Заметим, что ориентация любого граничного ребра двумерного симплекса однозначно продолжается до ориентации всего симплекса, поэтому у симплекса существует ровно две ориентации.

**Замечание 12.6.** Для наглядности изображения одной из двух ориентаций двумерного симплекса, внутри симплекса рисуют закрученную стрелку и воспринимают ее как указание на “направление обхода” границы симплекса.

Описанную выше конструкцию можно распространить на симплексы всех размерностей. Например, у трехмерного симплекса нужно так ориентировать все его двумерные грани, чтобы ребра, по которым грани пересекаются, имели противоположные ориентации.

**Задача 12.7.** Докажите, что у трехмерного симплекса существует ориентация, и таких ориентаций ровно две.

Теперь воспользуемся идеей ориентации трехмерного симплекса (точнее, его границы) и определим *ориентацию произвольной поверхности*. А именно, ориентируем все топологические симплексы  $T_i$ , из которых составлена такая поверхность, так, чтобы ориентации ребер у смежных симплексов всегда были бы противоположными. Как и в случае смежных ребер, описанное только что сочетание ориентаций смежных симплексов триангуляции назовем *согласованным*.

Заметим, что задать ориентацию поверхности удается не всегда. Например, на рисунке 12.1 показана попытка ориентировать триангуляцию листа Мёбиуса, состоящую из четырех треугольников.

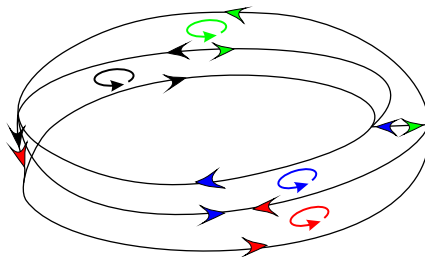


Рис. 12.1: Попытка ориентировать лист Мёбиуса.

Внутри каждого симплекса мы изобразили закрученную стрелку, а на граничных ребрах — их направления, соответствующие “обходу” границы симплекса в соответствии со стрелкой. В результате мы получили “противоречие” на крайнем левом ребре триангуляции: на нем “направления обхода” (красная и черная стрелки) совпали.

<sup>1</sup>В более общем случае многообразий *замкнутость* означает не только отсутствие границы, но и компактность. И хотя при определении замкнутости триангулированной поверхности мы требовали лишь отсутствие края, компактность в нашем случае выполняется автоматически в силу замечания 12.1, т.е. данное нами определение вполне согласуется с общим.

**Определение 12.8.** Поверхность называется *ориентированной*, если задана ее ориентация, т.е. такие ориентации всех ее симплексов, что у смежных симплексов ориентации согласованы. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней можно задать ориентацию. Иначе поверхность называется *неориентируемой*.

Заметим, что ориентация любого топологического симплекса однозначно продолжается на смежные симплексы до согласованных ориентаций. Поэтому если связную поверхность можно ориентировать, то ориентация получается “автоматически”: ориентируется произвольным образом любой топологический симплекс, а затем ориентация однозначно распространяется на смежные, еще не ориентированные симплексы. Из только что сказанного вытекает, что если  $p$  — количество связных компонент поверхности, причем все ее компоненты ориентируемы, то имеется ровно  $2^p$  различных ориентаций.

**Задача 12.9.** Докажите, что

- (1) двумерный симплекс, триангулированный произвольным образом, ориентируем;
- (2) ориентируемость поверхности не зависит от выбора триангуляции: две триангуляции одной и той же поверхности или одновременно ориентируемы, или нет.

## 12.3 Склейка ребер

Пусть  $M = D/\sim$  — поверхность и  $\mathcal{T} = \{T_i\}$  — ее триангуляция. Выберем во множестве граничных ребер триангуляции  $\mathcal{T}$  некоторое четное число ребер и разобьем выбранные ребра на непересекающиеся пары  $(e_1, e'_1), \dots, (e_k, e'_k)$  так, чтобы ребра, входящие в пару, не принадлежали одному и тому же топологическому симплексу триангуляции  $\mathcal{T}$ . Для каждой выбранной пары рассмотрим какой-нибудь гомеоморфизм  $\varphi_i: e_i \rightarrow e'_i$ . Пусть  $\sim'$  — эквивалентность, расширяющая  $\sim$  склейкой каждой пары точек  $x \in e_i$  и  $\varphi_i(x) \in e'_i$ , тогда  $M' = D/\sim'$  — триангулированное пространство. Если  $M'$  удовлетворяют условиям из определения 12.4, то  $M'$  — поверхность, про которую будем говорить, что она получена *склежкой* выбранных пар ребер.

**Замечание 12.10.** Заметим, что при изменении гомеоморфизмов  $\varphi_i$  с сохранением того, какой конец ребра  $e_i$  в какой конец ребра  $e'_i$  переходит, получаются поверхности, гомеоморфные исходной. Если же отказаться от этого условия, то в результате гомеоморфность может исчезнуть. Таким образом, чтобы добиться определенности, выбранные ребра  $e_i$  и  $e'_i$  предварительно ориентируют, что на иллюстрациях изображается соответствующими стрелочками, а от гомеоморфизмов требуют сохранения выбранных ориентаций.

Мы не будем развивать общую теорию склеек ребер поверхности, а приведем лишь нужные нам простейшие примеры склеек из квадрата, см. рис. 12.2.

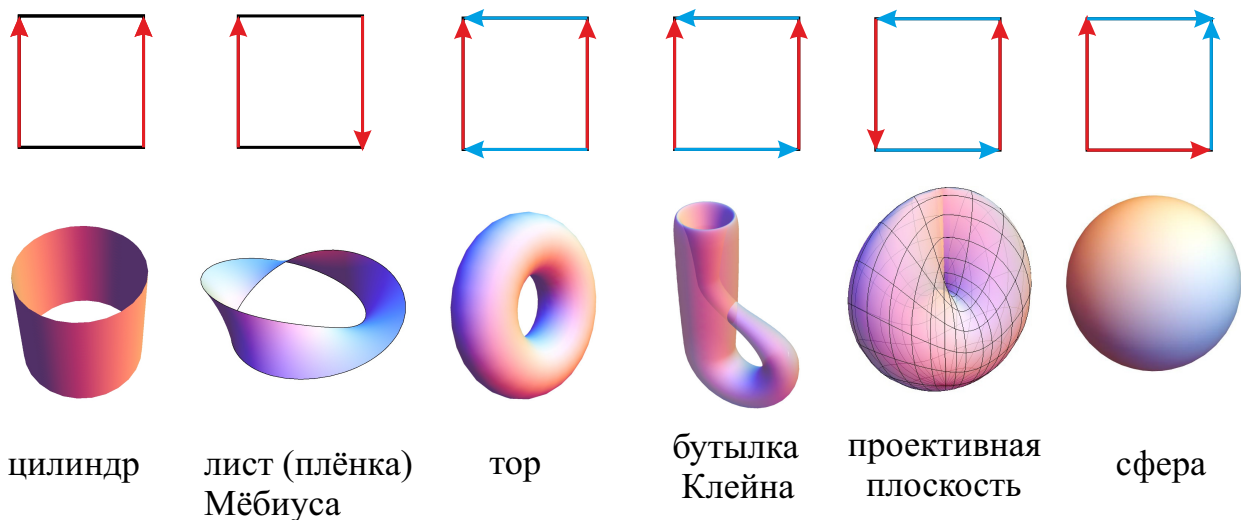


Рис. 12.2: Склейки из квадрата

Слушателям предлагается самостоятельно построить соответствующие триангуляции квадрата.

**Задача 12.11.** Докажите, что цилиндр, тор и сфера ориентируемы, а лист Мёбиуса, проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.

**Замечание 12.12.** Ясно, что край пленки Мёбиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

## 12.4 Склейка поверхностей

Пусть  $M$  и  $M'$  — поверхности. В самом общем случае склейка  $M$  и  $M'$  получается применением конструкции из раздела 12.3 к поверхности  $M \sqcup M'$ , при условии, что в каждой паре  $(e_i, e'_i)$  склеиваемых ребер одно из них, скажем  $e_i$ , лежит в  $M$ , а другое, т.е.  $e'_i$ , — в  $M'$ .

В более традиционном случае, в границах  $\partial M$  и  $\partial M'$  выбирается одинаковое число связных компонент, скажем,  $S_1, \dots, S_k$  в  $\partial M$  и  $S'_1, \dots, S'_k$  в  $\partial M'$ . Затем между выбранными компонентами устанавливается произвольное биективное соответствие, скажем, пусть  $S_i$  соответствует  $S'_i$ . Напомним, что, в соответствии с задачей 12.5, каждая компонента края гомеоморфна окружности. Ориентируем каждую из выбранных окружностей и подразобьем, если необходимо, триангуляции поверхностей  $M_i$  так, чтобы при каждом  $i$  окружности  $S_i$  и  $S'_i$  состояли из одинакового числа ребер триангуляций. Индуцируем выбранные ориентации окружностей  $S_i$  и  $S'_i$  на ребрах подразбитых триангуляций (опишите, как это можно сделать). Зададим гомеоморфизмы  $\varphi_i: S_i \rightarrow S'_i$ , устанавливающие биективное соответствие между множествами вершин триангуляции, попавших на  $S_i$  и  $S'_i$  соответственно. Тогда ограничение  $\varphi_i$  на каждое ребро  $e$  подразбитой триангуляции, лежащее в  $S_i$ , будет гомеоморфизмом с соответствующим ребром  $e'$  триангуляции, попавшим в  $S'_i$ . Будем говорить, что  $\varphi_i$  *сохраняет ориентации*, если некоторое, а, значит, и каждое ограничение  $\varphi_i|_{e_i}$  переводит начало (конец) ребра  $e$  в начало (конец) ребра  $e'$ . Склеим у поверхности  $M \sqcup M'$  все такие пары ребер  $(e, e')$  с помощью гомеоморфизмов  $\varphi_i|_e$  так, как это делалось в разделе 12.3. Полученную поверхность назовем *склежкой поверхностей  $M$  и  $M'$  по соответствующим ориентированным граничным окружностям*.

## 12.5 Вырезание дырки и ее заклейка

Пусть  $M = D/\sim$  — поверхность,  $\pi: D \rightarrow M$  — каноническая проекция,  $\mathcal{T}$  — триангуляция поверхности  $M$ , и  $T = \pi(\Delta) \in \mathcal{T}$  — внутренний симплекс. Пусть  $\sim'$  — ограничение эквивалентности  $\sim$  на  $D' = D \setminus \Delta$ . Тогда  $M' = D'/\sim'$  — поверхность, которая получается из  $M$  вырезанием дырки. Как топологическое пространство,  $M'$  получается из  $M$  выбрасыванием внутренности симплекса  $T$ , т.е.  $M' = M \setminus \text{Int } T$ . При этом триангуляция  $\mathcal{T}'$  поверхности  $M'$  равна  $\mathcal{T} \setminus \{T\}$ . Границу симплекса  $T$ , оставшуюся в  $M'$ , будем называть *границей дырки*.

Нам также понадобится еще одно понятие вырезания дырки, топологически эквивалентное приведенному выше (приводящее к гомеоморфной поверхности). Пусть  $\mathcal{T}'$  — вписанная в  $\mathcal{T}$  триангуляция, которая получается подразбиением симплекса  $T$  так, чтобы в его внутренности оказался некоторый симплекс  $T' \in \mathcal{T}'$ . Тогда будем говорить, что поверхность  $M' = M \setminus \text{Int } T'$  получена из  $M$  *вырезанием дырки из симплекса  $T$* .

“Обратная операция” (впрочем, несколько более общая) называется заклежкой дырки. А именно, если  $M$  — незамкнутая поверхность,  $S$  — связная компонента границы поверхности  $M$ , и  $D^2$  — триангулированный диск (круг), то склейка  $M$  и  $D^2$  посредством приклеивания  $S$  к границе диска  $D^2$  называется *заклежкой дырки*.

**Задача 12.13.** Покажите, что вырезание дырки и заклейка дырки оставляет ориентируемые поверхности ориентируемыми, а неориентируемые — неориентируемыми.

## 12.6 Разрезание поверхности вдоль кривой и вырезание полосы

Пусть  $M = D/\sim$  — поверхность и  $\mathcal{T}$  — ее триангуляция. Сформулируем общий подход к разрезанию. Пусть  $I$  — некоторый набор внутренних ребер триангуляции  $\mathcal{T}$ . Тогда для каждого ребра  $e \in I$  эквивалентность  $\sim$  склеивает пару симплексов из  $D$  по их ребрам, превращая эти ребра в ребро  $e$ . Выкинем из эквивалентности  $\sim$  отождествления всех соответствующих пар точек таких ребер и полученную эквивалентность обозначим  $\sim'$ . Тогда  $M' := D'/\sim'$  — триангулированное пространство. Если  $M'$  является поверхностью, то будем говорить, что  $M'$  получена из  $M$  *разрезанием по ребрам из  $I$* .

**Конструкция 12.14.** Нас будут особенно интересовать следующие частные случаи:



- разрезание по замкнутой вложенной кривой на  $M$ , составленной из внутренних ребер триангуляции  $\mathcal{T}$  и проходящей через внутренние вершины;
- разрезание по незамкнутой вложенной кривой на  $M$ , составленной из внутренних ребер и проходящей через внутренние вершины от одной граничной вершины до другой.

**Задача 12.15.** Покажите, что при разрезании поверхности  $M$  по ребрам кривых из конструкции 12.14 также получается поверхность.

Для кривой  $\gamma$  одного из двух типов, описанных в конструкции 12.14, пусть  $\mathcal{S} := \mathcal{S}_\gamma$  — множество всех симплексов поверхности  $M$ , пересекающих  $\gamma$ . Предположим, что

- каждый симплекс из  $\mathcal{S}$  имеет с  $\gamma$  или ровно одно общее ребро, или ровно одну общую вершину;
- если симплексы из  $\mathcal{S}$  смежны, то их общее ребро пересекает  $\gamma$ ;
- симплексы из  $\mathcal{S}$ , пересекающие  $\gamma$  по ребру, смежны, если и только если они смежны по ребру из  $\gamma$ ;
- симплексы из  $\mathcal{S}$  удовлетворяют свойству (3) из определения 12.4;
- для незамкнутой  $\gamma$  множество граничных ребер триангуляции  $\mathcal{T}$ , входящих в симплексы из  $\mathcal{S}$ , состоит из четырех элементов: два инцидентны одной концевой вершине кривой  $\gamma$ , а два оставшихся — другой;
- для замкнутой  $\gamma$  все ее вершины внутренние, а для незамкнутой граничными являются только концы граничных ребер.

В этом случае объединение  $\cup \mathcal{S}$  всех симплексов из  $\mathcal{S}$  назовем *полоской вдоль кривой*. В случае замкнутой (незамкнутой) кривой полоску также назовем *замкнутой (незамкнутой)*.

**Задача 12.16.** Покажите, что для каждой кривой  $\gamma$  из конструкции 12.14 существует такое подразбиение триангуляции  $\mathcal{T}$ , что для полученной триангуляции множество  $\cup \mathcal{S}_\gamma$  является полоской.

**Задача 12.17.** Покажите, что замкнутая полоска гомеоморфна или цилиндру, или ленте Мёбиуса, а незамкнутая — диску.

**Задача 12.18.** Покажите, что после разрезания поверхности вдоль всех граничных ребер замкнутой полоски поверхность распадается на замкнутую полоску и некоторую поверхность.

**Задача 12.19.** Покажите, что после разрезания поверхности  $M$  вдоль всех граничных ребер незамкнутой полоски, являющихся внутренними для  $M$ , поверхность распадается на незамкнутую полоску и некоторую поверхность.

Описанные в упражнениях 12.18 и 12.19 операции назовем *вырезанием полосок*.

## 12.7 Вклейка ручки и пленки Мёбиуса

Триангулированный тор, в котором вырезана дырка, называется *ручкой*, см. рис. 12.3.



Рис. 12.3: Ручка.

Отметим, что граница ручки состоит из одной компоненты связности, и эта компонента гомеоморфна окружности. Пусть  $M$  — поверхность. Вырежем в  $M$  дырку и приклеим к  $M$  ручку, склеив границы дырки и ручки. Эта операция называется **вклейкой ручки**.

Аналогично, вместо ручки рассмотрим триангулированную пленку Мёбиуса. Напомним, что у пленки Мёбиуса граница состоит из одной компоненты. Снова возьмем поверхность, вырежем в ней дырку, и приклеим к  $M$  пленку Мёбиуса, склеив границы дырки и пленки. Эта операция называется **вклейкой пленки Мёбиуса**.

Приведем другое, иногда более удобное описание этой операции. Прежде, чем вклеивать пленку Мёбиуса в поверхность, разрежем пленку по средней линии; получим поверхность, гомеоморфную цилиндру. Обратную склейку средней линии можно представлять себе как отождествление диаметрально противоположных точек одного из оснований цилиндра (рис. 12.4; на рисунке одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить). Тем самым, вклейку пленки Мёбиуса в поверхность можно представлять себе следующим образом: сперва в поверхности вырезается дырка и в нее вклеивается цилиндр (одно из его оснований приклеивается к краю дырки), а затем на оставшемся основании цилиндра отождествляются диаметрально противоположные точки. Ясно, что вклейка цилиндра заменяет поверхность на гомеоморфную (меняется только размер дырки); таким образом, *чтобы вклеить пленку Мёбиуса, надо вырезать в поверхности дырку и отождествить на возникшей компоненте края диаметрально противоположные точки*. Более аккуратно, нужно

- подразбить триангуляцию поверхности так, чтобы граница дырки, обозначим ее  $\gamma$ , состояла из четного числа ребер, скажем  $2k$ ;
- ориентировать  $\gamma$ , точнее, ориентировать все ее ребра согласованным образом;
- занумеровать последовательные ребра последовательными номерами  $1, \dots, 2k$ ;
- склеить с сохранением ориентации ребро с номером  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , с ребром с номером  $k + i$ , при каждом  $i$ .

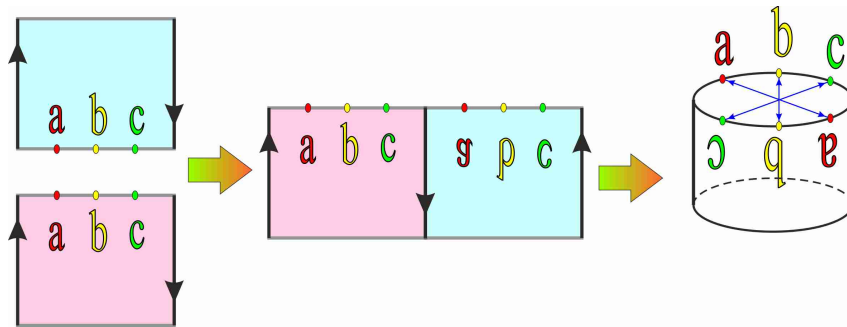


Рис. 12.4: Пленка Мёбиуса.

**Задача 12.20.** Покажите, что в результате

- (1) вклейки ручки в ориентируемую поверхность получается ориентируемая поверхность;
- (2) вклейки ручки в неориентируемую поверхность получается неориентируемая поверхность;
- (3) вклейки пленки Мёбиуса в ориентируемую или неориентируемую поверхность получается неориентируемая поверхность.

## 12.8 Классификация ориентируемых поверхностей

Наша цель — классифицировать двумерные поверхности с точностью до гомеоморфизма. Для упрощения изложения мы не будем каждый раз описывать, почему та или иная операция поверхности происходит в классе (триангулированных) поверхностей.

Отметим, что достаточно ограничиться связными поверхностями. Начнем с классификации ориентируемых поверхностей без края. Обозначим через  $M_g$  поверхность, полученную из сферы приклейкой  $g$  ручек.

**Теорема 12.21.** *Каждая связная ориентируемая поверхность без края гомеоморфна  $M_g$  для некоторого  $g$ .*

**Доказательство.** Приведем идею доказательства. Пусть дана поверхность  $Q$ , и  $\mathcal{T}$  — ее триангуляция. Мы будем выполнять с этой поверхностью ряд операций (заменяющих ее на *не гомеоморфную*), в результате чего получится поверхность, гомеоморфная диску, т.е. сфере с вырезанной дыркой. Затем мы проследим, как восстанавливается по этой поверхности наша исходная поверхность  $Q$  и убедимся, что в процессе восстановления получается сфера, в которой вырезано несколько дырок и некоторые из них заклеены ручками. Так как исходная поверхность края не имела, то свободных дырок в нашей поверхности  $Q$  нет, т.е. она получается из сферы приклейкой некоторого числа ручек.

Перейдем к реализации этой программы. Из каждого симплекса  $T \in \mathcal{T}$  вырежем дырку так, как мы делали в разделе 12.5. Полученная в результате поверхность  $Q_\varepsilon \subset Q$  является замыканием соответствующей окрестности графа  $\Gamma$  триангуляции  $\mathcal{T}$ . Это замыкание наглядно можно представлять в виде объединения “ленточек” (окрестностей ребер), соединяющих “кружочки” — окрестности вершин, см. рис. 12.5.

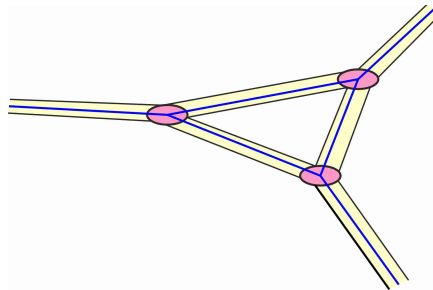


Рис. 12.5: Поверхность  $Q_\varepsilon$ .

Рассмотрим в графе  $\Gamma$  максимальное поддерево, а оставшиеся ребра графа  $\Gamma$  назовем *перемычками*. Каждую ленточку, соответствующую перемычке, разрежем поперек; в результате получится новая поверхность  $\hat{Q}$  (рис. 12.6).

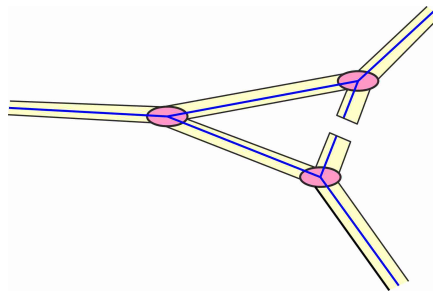


Рис. 12.6: Поверхность  $\hat{Q}$ .

Убедимся в том, что поверхность  $\hat{Q}$  гомеоморфна диску. Действительно, максимальное дерево рассматриваемого графа можно строить, начиная с одного ребра, соединяющего две вершины, и добавляя каждый раз по одному ребру и одной вершине так, чтобы все время получалось дерево. Объединение ленточки и кружков, которые она соединяет, гомеоморфно диску (убедитесь в этом); добавление ленточки с кружком эквивалентно приклеиванию к диску прямоугольника по одной его стороне; в результате снова получается поверхность, гомеоморфная диску. Таким образом, получая на каждом шаге поверхность, гомеоморфную диску, мы построим максимальное дерево, окруженное ленточками и кружками. Для того, чтобы получить поверхность  $\hat{Q}$ , осталось приклеить куски, образовавшиеся при разрезании перемычек. Каждый такой кусок гомеоморфен прямоугольнику, который приклеивается по одной стороне; при этом снова получается поверхность, гомеоморфная диску.

Посмотрим теперь, к чему приводит разрезание ленточек и, главное, что представляет собой обратная процедура их склейки. Рассмотрим произвольную ленточку; пусть, разрезая ее, мы соединяем точки  $a$  и  $b$  на разных сторонах ленточки. Ясно, что эти точки лежат на крае поверхности  $Q_\varepsilon$ ; при этом  $a$  и  $b$  могут лежать как на разных окружностях, образующих край, так и на одной.

Если они лежат на разных окружностях, разрезание по соединяющей две окружности дуге приводит к уменьшению на единицу числа дырок в поверхности (рис. 12.7); значит, обратный процесс склейки должен приводить к вырезанию одной дырки.

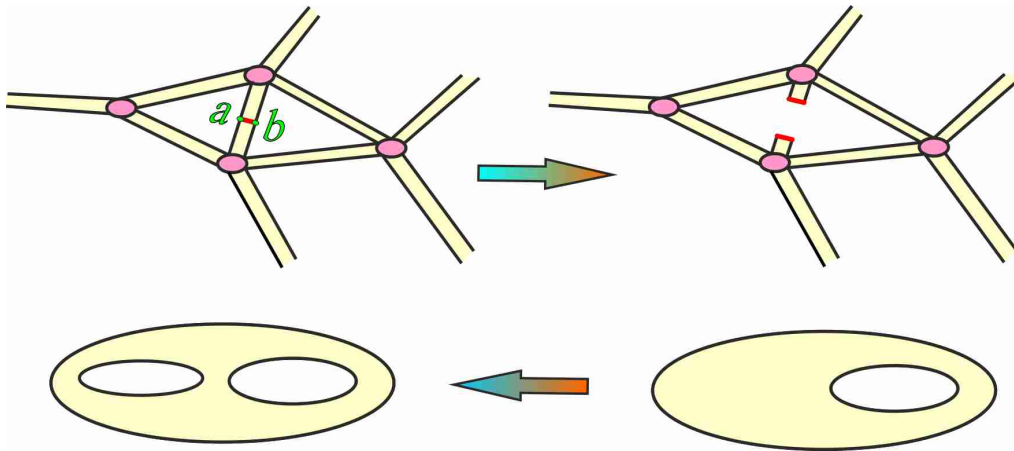


Рис. 12.7: Точки  $a$  и  $b$  лежат на разных компонентах границы  $\partial Q_\varepsilon$ .

Если точки  $a$  и  $b$  лежат на одной окружности, процесс разрезания можно представить себе следующим образом. Прежде всего, сдвинем точки  $a$  и  $b$  в одну точку на крае; тогда разрезать придется по замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся на крае. Такую процедуру можно разбить на два этапа: сперва мы разрежем поверхность по замкнутой кривой  $q$ , не пересекающейся с краем, а затем соединим этот разрез с краем по дуге (рис. 12.8).

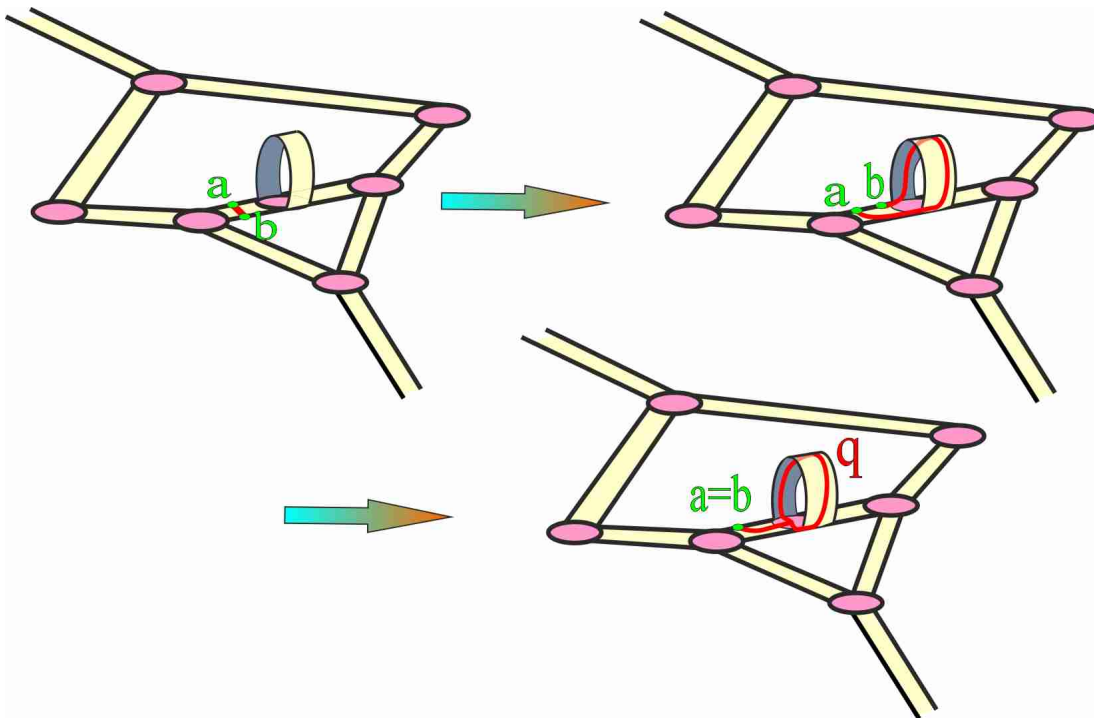


Рис. 12.8: Точки  $a$  и  $b$  лежат на одной компоненте границы  $\partial Q_\varepsilon$ .

На втором этапе мы соединяем разрезом две точки, лежащие на разных окружностях, образующих край (одна из этих окружностей возникла при разрезании по замкнутой кривой); как мы видели выше, эта процедура сводится к заклеиванию дырки диском, а обратная — к вырезанию диска.

Наконец, осталось рассмотреть процедуру разрезания поверхности вдоль замкнутой кривой  $q$ , не пересекающей с краем. Если мы заключим эту кривую в полосу (посредством измельчения триангуляции) и вырежем эту полосу из нашей поверхности, вырезанный кусок будет гомеоморфен цилиндру. Действительно, в силу задачи 12.17, вырезанная полоска гомеоморфна или цилиндру, или пленке Мёбиуса. Однако, если бы вырезанная полоска была гомеоморфна этой пленке, то, в силу задачи 12.20, исходная поверхность тоже была бы неориентируемой. Итак, полоска, содержащая рассматриваемую замкнутую кривую  $q$ , гомеоморфна цилиндру, а ее разрезание по кривой  $q$  — это разрезание цилиндра по средней окружности, в результате чего он распадается на два (рис. 12.9).

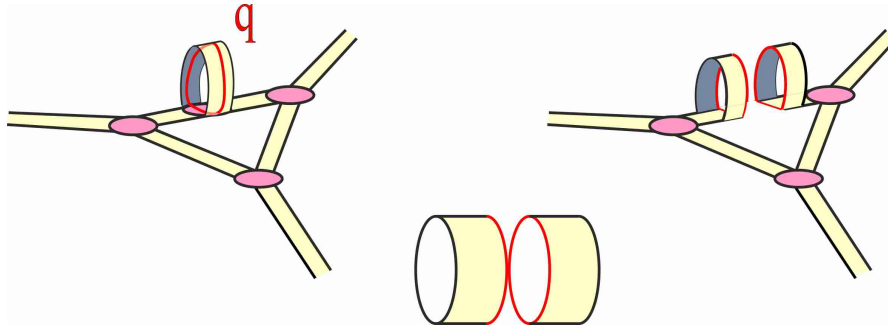


Рис. 12.9: Разрезание вдоль кривой  $q$ .

После такого разрезания на поверхности появляются две новых окружности, входящих в край; склеивание вдоль замкнутой кривой  $q$  эквивалентно склейке двух таких окружностей с сохранением ориентации, индуцированной любой из двух ориентаций кривой  $q$ . Рассмотрим полоску, соединяющую эти окружности, выделенную на рис. 12.10 серым цветом. Если ориентации окружностей такие, как на этом рисунке, то полоска склеится в ленту Мёбиуса, что запрещено условием ориентируемости поверхности.

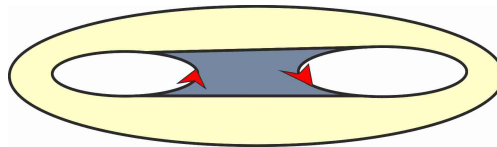


Рис. 12.10: Ориентированные окружности, полученные после разрезания по кривой  $q$ , и соединяющая их полоска.

Таким образом, на окружностях возникает одна из двух пар оставшихся ориентаций, что, после склейки, приводит к поверхности, полученной приклейкой ручки, см. рис. 12.11.

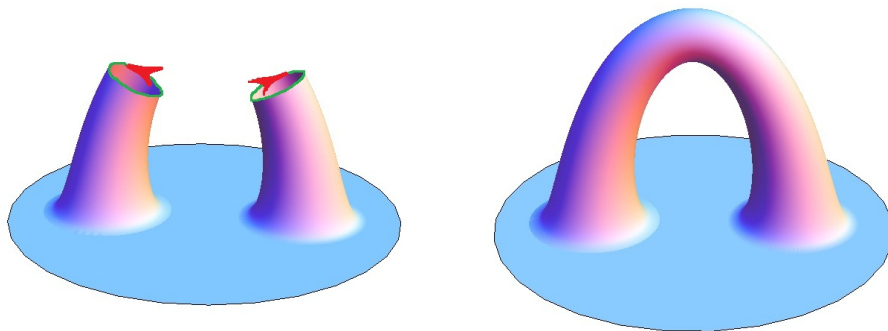


Рис. 12.11: Склеивка окружностей с “правильными” ориентациями эквивалентна приклейке ручки.

Подведем итог. Исходная поверхность  $Q$  получается из поверхности  $\widehat{Q}$ , гомеоморфной диску, при помощи серии операций (склеивкой ленточек, соответствующих перемычкам в графе, и заклеивкой границ дырок, вырезанных из симплексов), каждая из которых эквивалентна одной из следующих:

- а) вырезание дырки;
- б) заклеивание дырки диском;
- в) вклейка ручки.

Значит, поверхность  $Q$  гомеоморфна сфере с некоторым количеством дырок и некоторым количеством ручек. Отсутствие края гарантирует отсутствие дырок, поэтому  $Q$  гомеоморфна одной из поверхностей  $M_g$ .  $\square$

**Задача 12.22.** Обозначим  $M_g^m$  поверхность, полученную из  $M_g$  вырезанием  $m$  дырок (сфера с  $g$  ручками и  $m$  дырками). Докажите, что любая связная ориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей  $M_g^m$ .

## 12.9 Классификация неориентируемых поверхностей

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что, если отказаться от требования ориентируемости, в поверхности могут появиться куски, гомеоморфные пленке Мёбиуса. Оказывается, это единственный эффект неориентируемости, так что любая неориентируемая поверхность получается из сферы при помощи применения конечного числа основных операций: вырезания дырки, заклеивки дырки диском, вклейки ручки, вклейки пленки Мёбиуса. Более того, мы докажем, что в неориентируемом случае можно обойтись без ручек, так что главной операцией будет вклейка пленки Мёбиуса.

Обозначим через  $N_k$  поверхность, полученную из сферы вклейкой  $k$  пленок Мёбиуса.

**Теорема 12.23.** Каждая связная неориентируемая поверхность без края гомеоморфна  $N_k$  для некоторого  $k$ .

**Доказательство.** Будем действовать по тому же плану, что и при доказательстве предыдущей теоремы; легко понять, что ориентируемость поверхности в этом доказательстве используется в двух местах, причем оба относятся к операции вырезания из поверхности полоски — окрестности замкнутой кривой (и к обратной операции вклейки).

Во-первых, сама вырезаемая полоска может быть гомеоморфна либо цилиндру, либо пленке Мёбиуса; в ориентируемом случае возможен только первый вариант, тогда как сейчас мы должны допустить и второй. Тем самым, к перечисленным выше операциям (вырезание дырки, заклеивка дырки диском, вклейка ручки), при помощи которых из сферы получается исходная поверхность  $Q$ , добавляется еще одна — вклейка пленки Мёбиуса.

Во-вторых, если полоска все же гомеоморфна цилиндру, вклейка этого цилиндра в поверхность эквивалентна склейке краев двух дырок; эта склейка может осуществляться двумя различными способами, причем теперь возможны как ориентации краев дырки, приводящие к вклейке ручки, так и отбракованные ранее ориентации, изображенные на рис. 12.10. Нам осталось выяснить, что именно происходит в последнем случае.

Представим эту процедуру следующим образом. Сперва вырежем из поверхности полоску и вклеим ее назад в поверхность, склеив края дырок в соответствии с заданными ориентациями (для этого полоску придется “вывернуть наизнанку”), см. рис. 12.12.

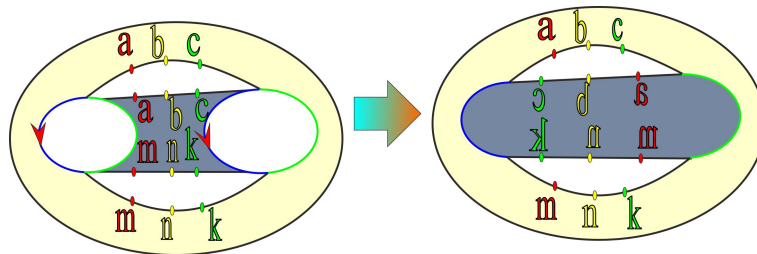


Рис. 12.12: Склеивка двух дырок, эквивалентная вклейке двух пленок Мёбиуса.

В результате снова получим поверхность с двумя дырками, но теперь требуется склеить диаметрально противоположные точки на краях дырок: на рис. 12.12 одинаковыми буквами обозначены точки, которые требуется отождествить. Выше мы видели, что каждая такая операция эквивалентна вклейке пленки Мёбиуса. Таким образом, вклейка в поверхность цилиндра в рассматриваемом случае эквивалентна приклеиванию к ней двух пленок Мёбиуса.

Итак мы доказали, что любая поверхность получается из сферы при помощи четырех операций: вырезание дырки, заклейки дырки диском, вклейки ручки и вклейки пленки Мёбиуса. В результате получится сфера с некоторым количеством дырок, ручек и пленок Мёбиуса. Поскольку мы рассматриваем поверхности без края, дырок быть не может. Кроме того, поскольку поверхность неориентируема, хотя бы одна пленка Мёбиуса присутствует. Таким образом, наша поверхность гомеоморфна сфере с  $g \geq 0$  ручками и  $s \geq 1$  пленками Мёбиуса. Оказывается, такая поверхность гомеоморфна сфере, к которой приклеено  $s + 2g$  пленок Мёбиуса (ручки приклеивать не надо). Другими словами, в присутствии хотя бы одной пленки Мёбиуса любая ручка на поверхности эквивалентна двум пленкам Мёбиуса.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим на поверхности ручку и пленку Мёбиуса. Напомним, что приклейка ручки эквивалентна вырезанию двух дырок и последующей склейке их краев с учетом ориентации, а приклейка пленки Мёбиуса — вырезанию дырки и последующему отождествлению диаметрально противоположных точек ее края. Вырежем сперва все три дырки и затем разрежем поверхность по кривой, соединяющей точки на краю дырки, отвечающей пленке Мёбиуса; при этом кривая должна “охватывать” одну из двух дырок, отвечающих ручке, см. рис. 12.13. В результате из поверхности выпадет связный кусок (на рисунке 12.13 он изображен серым цветом). Вклеим его назад так, чтобы совпали диаметрально противоположные точки на крае дырки, соответствующей пленке Мёбиуса (для этого вырезанный кусок надо “вывернуть наизнанку”). В результате на поверхности образуются три дырки — две были изначально и соответствовали ручке, а третья образовалась из вновь проведенного разреза. Края этих дырок надо склеить следующим образом: две бывшие ранее дырки склеить по краю с учетом ориентации такой, как на рис. 12.10 (направление изменилось в результате переверачивания вырезанного куска); на крае третьей нужно отождествить диаметрально противоположные точки. Как мы видели выше, склейка первых двух дырок эквивалентна приклейке двух пленок Мёбиуса, а операция над третьей дыркой даст еще одну пленку Мёбиуса, всего — три пленки.

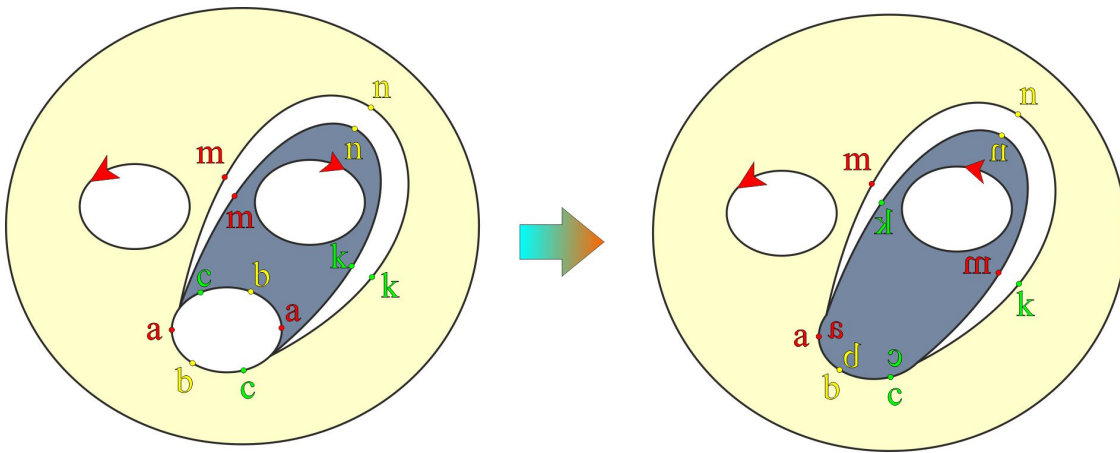


Рис. 12.13: Замена ручки на две пленки Мёбиуса.

□

**Задача 12.24.** Сформулируйте и докажите теорему классификации неориентируемых поверхностей с краем.

## Упражнения к главе 12

**Упражнение 12.1.** Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. *Эйлеровой характеристикой* такой карты называется число  $v - e + f$ , где  $v$  — число вершин,  $e$  — число ребер и  $f$  — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

**Упражнение 12.2.** *Эйлеровой характеристикой поверхности* называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где  $v$ ,  $e$  и  $f$  — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 12.1, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мёбиуса.

**Упражнение 12.3.** Поверхность  $M$  получается из поверхности  $N$  вырезанием  $k$  дисков. Выразите  $\chi(M)$  через  $\chi(N)$ .

**Упражнение 12.4.** Каждая из двух поверхностей  $M$  и  $N$  имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность  $Q$  получается из поверхностей  $M$  и  $N$  склеиванием краев. Выразите  $\chi(Q)$  через  $\chi(M)$  и  $\chi(N)$ .

**Упражнение 12.5.** Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности  $M_g^m$ , полученной из сферы с  $g$  ручками вырезанием  $m$  дырок;
- (2) поверхности  $N_h^m$ , полученной из сферы с  $h$  пленками Мёбиуса вырезанием  $m$  дырок.

**Упражнение 12.6.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:

$$a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно  $2g$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $g$  ручками.

**Упражнение 12.7.** Сторонам многоугольника приписаны буквы  $a, b, c, \dots$  в следующем порядке:

$$a, a, b, b, c, c, d, d, \dots$$

Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно  $h$ , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с  $h$  пленками Мёбиуса.

**Упражнение 12.8.** На замкнутой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый  $n$ -угольник, и в каждой вершине сходится по  $k$  ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где  $\chi$  — эйлерова характеристика поверхности, а  $e$  — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при  $n = 2$ ,  $k = 4$ .

**Упражнение 12.9.** Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.



# Лекция 13

## Кривые

**План.** Дифференцируемая и гладкая кривая в  $\mathbb{R}^n$ , ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина кривой в метрическом пространстве, независимость длины от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, спрямляемость липшицевой кривой, обобщенное неравенство треугольника, натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, вырожденные и невырожденные кривые, безостановочные кривые, существование равномерного и натурального параметров на безостановочной кривой, кривые в арифметическом пространстве, их координатная запись, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, возможность гладкой параметризации угла, особые и регулярные точки гладкой кривой, регулярные кривые, интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный, описание всех замен параметра, сохраняющих натуральность, ориентация конечномерного пространства, стандартная ориентация  $\mathbb{R}^n$ ,  $k$ -параллелепипед, вырожденный и невырожденный параллелепипед, объем параллелепипеда, ориентированный объем параллелепипеда, основание и высота параллелепипеда, ортогонализация Грама–Шмидта.

### 13.1 Общие определения

В разделе 4.2 мы определили кривые в топологических пространствах как непрерывные отображения из *отрезка* в эти пространства. Тем не менее, в разных приложениях требуются кривые с областями определения более общего вида. Общее у всех этих областей — то, что они должны быть связными подмножествами вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Все эти связные подмножества мы описали в следствии 6.23. Вот их полный список: интервал, полуинтервал, отрезок, причем первые два могут быть как конечными, так и бесконечными, а именно, бесконечный интервал — это или открытый луч, или вся прямая, а бесконечный полуинтервал — замкнутый луч. Связные подмножества прямой  $\mathbb{R}$  часто называют *промежутками*, а под *кривой* в топологическом пространстве  $X$  понимают произвольное непрерывное отображение  $\gamma: I \rightarrow X$  из некоторого промежутка  $I$ . Так как термин кривая также традиционно имеет разные интерпретации, иногда определенные так отображения  $\gamma$  называют *параметрическими кривыми*.

Отметим, что рассмотрение таких более общих кривых приводит к техническому усложнению описания, не иллюстрирующему те феномены, которые мы собираемся разбирать в лекциях. Поэтому, примем следующее соглашение: **в дальнейшем под кривыми мы будем понимать то, что и раньше, а именно, непрерывные отображения из отрезка  $[a, b]$ . Более того, мы будем всегда считать, что рассматриваемые отрезки невырождены, т.е.  $a < b$ .** Напомним, что начала теории таких кривых мы описали в лекции 4.

Для кривых в  $\mathbb{R}^n$  можно говорить не только о непрерывности, но и о *дифференцируемости*. А именно, будем считать, что каждая дифференцируемая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  является ограничением дифференцируемого отображения  $\Gamma: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $[a, b] \subset (c, d)$ . Отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  назовем *гладким*, если оно (точнее, соответствующее  $\Gamma$ ) непрерывно-дифференцируемо столько раз, сколько требуется для решения данной задачи (иными словами, нашей целью не будет являться вычисление того, сколько раз требуется дифференцируемость в том или ином случае). Иногда под *гладкостью* мы будем понимать бесконечную дифференцируемость (будет обговариваться отдельно).

Если пространство  $X$  — метрическое, то естественным образом определяется длина кривой и спрямляемые кривые. Приведем соответствующие построения.

### 13.2 Длина кривой

В данном разделе  $X$  будет метрическим пространством. По аналогии с тем, как это делается в  $\mathbb{R}^n$ , конечную последовательность  $L = (A_0, \dots, A_n)$  точек пространства  $X$  назовем *ломаной в  $X$* ; при этом пары  $(A_{i-1}, A_i)$  будем называть *ребрами ломаной  $L$* , а числа  $|A_{i-1}A_i|$  — *длинами* этих ребер. Сумма длин всех ребер ломаной

$L$  называется **длиной ломаной**  $L$  и обозначается  $|L|$ . Длину  $|L|$  одноточечной ломаной  $L = (A_0)$  положим равной нулю.

Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  — произвольная кривая. Для каждой монотонной последовательности  $\xi = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$  рассмотрим соответствующую ей ломаную  $L_\gamma(\xi) = (\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m))$  (такие ломаные будем называть **вписанными в  $\gamma$** ). Пусть  $\Theta$  — множество всех таких монотонных последовательностей  $\xi$ . Тогда величина

$$|\gamma| = \sup_{\xi \in \Theta} |L_\gamma(\xi)|$$

называется **длиной кривой**  $\gamma$ .

**Замечание 13.1.** Так как множество всех ломаных, вписанных в кривую, не зависит от параметризации, то длина кривой не меняется при замене параметра.

Кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  называется **спрямляемой**, если она имеет конечную длину:  $|\gamma| < \infty$ .

**Замечание 13.2.** Из замечания 13.1 вытекает, что свойство кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от параметризации.

Приведем примеры спрямляемых кривых. Напомним, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  из метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  называется **липшицевым**, если существует такое  $C > 0$ , что для любых  $x, x' \in X$  выполняется  $|f(x)f(x')| \leq C|xx'|$ . Каждое такое  $C$  называется **константой Липшица**, а точная нижняя грань  $\text{dil } f$  констант Липшица — **растяжением отображения  $f$**  (обозначение происходит от английского слова dilatation). Иногда, для краткости, липшицево отображение с константой Липшица  $C$  называют  **$C$ -липшицевым**.

**Пример 13.3.** Каждая  $C$ -липшицева кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  спрямляема. Действительно, для любой монотонной последовательности  $\xi = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b) \in \Theta$  имеем

$$|L_\gamma(\xi)| = \sum_{i=1}^m |\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)| \leq \sum_{i=1}^m C(t_i - t_{i-1}) = C(b - a).$$

Таким образом,  $|\gamma| \leq C(b - a) < \infty$ , что и требовалось.

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

**Предложение 13.4** (Обобщенное неравенство треугольника). Пусть точки  $x, y \in X$  лежат на кривой  $\gamma$ , тогда  $|\gamma| \geq |xy|$ .

### 13.3 Натуральная и равномерная параметризации кривых

Пусть, как и выше,  $X$  — метрическое пространство.

**Определение 13.5.** Кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  называется **натурально параметризованной**, а параметр  $s$  отрезка  $[a, b]$  — **натуральным**, если для любого невырожденного отрезка  $[c, d] \subset [a, b]$  выполняется  $|\gamma|_{[c, d]} = (d - c)$ . Параметр  $t$  кривой  $\gamma(t)$  называется **равномерным**, а  $\gamma(t)$  — **равномерно параметризованной**, если для некоторого  $\lambda \geq 0$  и каждого невырожденного отрезка  $[c, d] \subset [a, b]$  выполняется  $|\gamma|_{[c, d]} = \lambda(d - c)$ . При этом число  $\lambda$  называется **скоростью равномерно параметризованной кривой  $\gamma$** .

**Замечание 13.6.** Если кривая  $\gamma(s)$ ,  $s \in [a, b]$ , параметризована равномерно и  $\lambda$  — ее скорость, то отображение  $\gamma$  является  $\lambda$ -липшицевым и, в силу примера 13.3,  $\gamma$  — спрямляемая кривая. Действительно, для любых  $s_1, s_2 \in [a, b]$ ,  $s_1 < s_2$ ,

$$|\gamma(s_1)\gamma(s_2)| \leq |\gamma|_{[s, s_2]} = \lambda(s_2 - s_1),$$

что и требовалось.

**Замечание 13.7.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  — равномерно параметризованная кривая. Тогда скорость  $\lambda$  кривой  $\gamma$  однозначно определяется из условия  $|\gamma| = \lambda(b - a)$ . Таким образом, равномерно параметризованная кривая имеет нулевую скорость, если и только если она — отображение в точку. Такие параметрические кривые будем называть **вырожденными**, а все остальные — **невырожденными**.

Кривую  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  назовем **безостановочной**, если для каждого невырожденного  $[c, d] \subset [a, b]$  отображение  $\gamma|_{[c, d]}$  не постоянно. Иными словами, безостановочная кривая — та, у которой каждый фрагмент — невырожденная кривая. В примере 13.6 мы показали, что каждая равномерно параметризованная кривая спрямляема. Приведем обратное утверждение.

**Теорема 13.8.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  — безостановочная спрямляемая кривая. Тогда  $\gamma$  может быть натурально параметризована.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\psi(t) = |\gamma|_{[a, t]}$ .

**Лемма 13.9.** Функция  $\psi(t)$  непрерывна.

**Доказательство.** Выберем произвольное  $t \in [a, b]$  и покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , для которого при всех  $s \in [a, b] \cap (t - \delta, t + \delta)$  выполняется  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ . Положим  $\ell = |\gamma|$ . По определению, существует монотонная последовательность  $\xi \in \Theta$  такая, что  $\ell - \varepsilon/2 < |L_\gamma(\xi)| \leq \ell$ . Если  $t \notin \xi$ , добавим его к  $\xi$  (полученную последовательность обозначим той же буквой). Ясно, что для полученной последовательности по-прежнему выполняется  $\ell - \varepsilon/2 < |L_\gamma(\xi)| \leq \ell$ .

В качестве  $\delta_1$  возьмем расстояние от  $t$  до ближайшего отличного от  $t$  элемента последовательности  $\xi$ . Так как расширениями последовательности  $\xi$  мы можем менять длину ломаной  $L_\gamma(\xi)$  лишь в пределах  $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$ , то для каждого  $s \in [a, b] \cap (t - \delta_1, t + \delta_1)$  длина  $|f(t) - f(s)|$  фрагмента кривой  $\gamma$  между точками  $\gamma(t)$  и  $\gamma(s)$  отличается от  $|\gamma(t)\gamma(s)|$  не больше (на самом деле, меньше) чем на  $\varepsilon/2$ : длина этого фрагмента равна супремуму длин вписанных ломаных, а каждая такая ломаная, добавленная к  $L_\gamma(\xi)$ , может увеличить длину  $L_\gamma(\xi)$  меньше чем на  $\varepsilon/2$ . С другой стороны, в силу непрерывности отображения  $\gamma$ , существует такое  $\delta_2 > 0$ , что при всех  $s \in [a, b] \cap (t - \delta_2, t + \delta_2)$  имеем  $|\gamma(t)\gamma(s)| < \varepsilon/2$ . Осталось положить  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .  $\square$

Итак, по лемме 13.9, функция  $\psi$  непрерывна и монотонно возрастает. Более того, это монотонное возрастание строгое, так как  $\gamma$  — безостановочна. Следовательно,  $\psi$  — гомеоморфизм с образом  $[0, \ell]$ . Положим  $\varphi = \psi^{-1}$ , тогда  $\varphi$  — замена параметра. Пусть  $s$  — параметр на отрезке  $[0, \ell]$ . Выбираем любые  $s_1, s_2 \in [0, \ell]$ ,  $s_1 < s_2$ , полагаем  $t_k = \varphi(s_k)$ , тогда

$$|(\gamma \circ \varphi)|_{[s_1, s_2]} = |\gamma|_{[t_1, t_2]} = \psi(t_2) - \psi(t_1) = s_2 - s_1,$$

поэтому  $s$  — натуральный параметр на  $\gamma \circ \varphi$ , что и требовалось.  $\square$

## 13.4 Интегральная формула длины регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим теперь кривые в арифметическом пространстве  $X = \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — такая кривая,  $t$  — стандартная координата на отрезке  $[a, b]$ , а  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\gamma$  записывается в этих координатах в виде упорядоченного набора  $(x^1(t), \dots, x^n(t))$  функций, причем непрерывность (гладкость) этих функций равносильна непрерывности (гладкости) отображения  $\gamma$ . В дальнейшем представление кривой  $\gamma$  в виде  $n$  таких функций  $x^i(t)$  будем называть **координатной записью кривой**  $\gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — гладкое отображение,  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — координатная запись, тогда в каждой точке  $\gamma(t)$  определен **вектор скорости**  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$ . Точка гладкой кривой называется **особой**, если в ней вектор скорости равен нулю. Точка, не являющаяся особой, называется **регулярной**. Гладкая кривая, состоящая из одних регулярных точек, также называется **регулярной**. Отметим, что у гладких кривых, несмотря на название, могут быть изломы. У регулярных кривых изломов быть не может.

**Задача 13.10.** Покажите, что

- (1) гладкость отображения  $\gamma$  еще не гарантирует отсутствие “изломов”: так, каждый угол на плоскости можно представить как образ гладкой кривой (приведите пример параметризации прямого угла, воспользовавшись, например, функциями вида  $e^{-1/t^2}$ , продолженными нулем в точку  $t = 0$ );
- (2) гладкую кривую можно сделать негладкой некоторой заменой координат (например, ввести на гладкой кривой, образ которой — угол, натуральную параметризацию, при этом, переход от натурального параметра к исходному можно задать гладкой функцией).

Чтобы не портить гладкость кривой, нам придется ограничить возможные замены параметра. Под **регулярной заменой параметра** будем понимать замену, гладкую вместе со своей обратной. В силу теоремы об обратной функции, последнее равносильно тому, что производная функции замены параметра отлична от нуля. В дальнейшем, для гладкой кривой под **заменой параметра** всегда будем понимать регулярную замену.

**Замечание 13.11.** Отметим, что при регулярной замене тип точки кривой (регулярная или особая) остается неизменным (это вытекает из теоремы о производной сложной функции). Таким образом, **регулярные замены оставляют регулярные кривые регулярными**.

Выше мы ввели понятие натурального параметра и доказали, что на безостановочной спрямляемой кривой всегда можно ввести натуральный параметр (теорема 13.8).

**Задача 13.12.** Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Для регулярных кривых натуральный параметр может быть введен более явно, с использованием интегральной формулы длины гладкой кривой (эта формула доказывается в математическом анализе).

**Теорема 13.13.** Пусть  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, тогда

$$|\gamma| = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt.$$

**Задача 13.14.** Пусть кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая. Покажите, что отображение  $\gamma$  — липшицево и, значит,  $\gamma$  — спрямляемая кривая.

Из теоремы 13.13 теперь легко доказывается существование натурального параметра на регулярной кривой. А именно, если  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — кривая,  $s$  координата на промежутке  $[a, b]$ , то условие того, что параметр  $s$  натуральный, выглядит так: для любых  $s_1, s_2 \in [a, b]$ ,  $s_1 < s_2$ , выполняется

$$\int_{s_1}^{s_2} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = s_2 - s_1.$$

Дифференцируя предыдущее равенство по  $s_2$ , получаем  $\|\dot{\gamma}(s_2)\| = 1$ . Таким образом, из натуральности параметра вытекает, что длина вектора скорости кривой равна 1. Легко видеть, что и обратное утверждение тоже имеет место. Таким образом, мы доказали следующий результат.

**Предложение 13.15.** Параметр  $s$  на регулярной кривой  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^n$  натуральный, если и только если  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$  при всех  $s$ .

Предложение 13.15 мгновенно приводит к уравнению, позволяющему найти натуральный параметр.

Пусть  $t$  — произвольный параметр на регулярной кривой, а  $s$  — натуральный. Тогда, по теореме о дифференцировании сложной функции,  $1 = \|\dot{\gamma}_s\| = \|\dot{\gamma}_t\| |t_s|$ . По теореме о производной обратной функции, имеем  $t_s = 1/s_t$ , откуда  $s_t = \pm \|\dot{\gamma}_t\|$ , так что  $s = \pm \int \|\dot{\gamma}_t(\tau)\| d\tau$ .

**Предложение 13.16.** Пусть  $\gamma(t)$  — регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , тогда все натуральные параметры  $s$  находятся из формулы  $s = \pm \int \|\dot{\gamma}_t(\tau)\| d\tau$ , в частности, они отличаются друг от друга на замену вида  $s \mapsto \pm s + c$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .

Следующий материал из линейной алгебры нам понадобится в ближайшей лекции.

## 13.5 Параллелепипеды и их объемы

В этом разделе мы опишем, что мы понимаем под параллелепипедом и его объемом, как неориентированным, так и ориентированным. Мы используем эти понятия в ортогонализации Грама–Шмидта, алгоритм которой мы также напомним. Начнем с напоминания понятия ориентации векторного пространства.

### 13.5.1 Ориентация конечномерного векторного пространства

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство. Рассмотрим всевозможные базисы этого пространства и введем на них следующее отношение: базис  $e_1, \dots, e_n$  *находится в отношении* с базисом  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ , если и только если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен. Отметим, что единичная матрица имеет положительный определитель, поэтому отношение рефлексивно. Далее, если  $C$  — матрица перехода от первого базиса ко второму, то  $C$  невырождена,  $C^{-1}$  — матрица перехода от второго базиса к первому и  $\det C^{-1} = 1/\det C$ , так что отношение симметрично. Наконец, если  $C_1$  — матрица перехода от первого базиса ко второму, а  $C_2$  — от второго к третьему, то  $C_1 C_2$  — матрица перехода от первого базиса к третьему и  $\det(C_1 C_2) = \det C_1 \det C_2$ , поэтому отношение транзитивно. Таким образом, введенное отношение является эквивалентностью и, поэтому, разбивает все базисы на классы. Этих классов ровно два: если базисы  $e_i'$  и  $e_{i''}$  не эквивалентны базису  $e_i$ , то матрица перехода между  $e_i'$  и  $e_{i''}$  имеет положительный определитель (проверьте), т.е. эти базисы лежат в одном классе. Итак, имеется два класса эквивалентности базисов. Каждый из этих классов называется *ориентацией* пространства  $V$ . *Ориентировать конечномерное векторное пространство* означает выбрать один из этих двух классов и назвать его *положительным*, а оставшийся — *отрицательным*. Каждый базис из положительного класса называется *положительно ориентированным*, а из отрицательного — *отрицательно ориентированным*. Так как для задания класса эквивалентности достаточно выбрать любого его представителя, задание ориентации однозначно определяется выбором произвольного базиса и отнесением его к положительно ориентированным. *Стандартная ориентация арифметического пространства*  $\mathbb{R}^n$  задается стандартным базисом.

### 13.5.2 Параллелепипеды и их объемы

Пусть  $V$  — линейное пространство и  $k \in \mathbb{N}$  не превосходит размерности пространства  $V$ . Под  *$k$ -параллелепипедом*  $P$  будем понимать упорядоченный набор  $(v_1, \dots, v_k)$  из  $k$  векторов  $v_i \in V$ . Параллелепипед  $P = (v_1, \dots, v_k)$  назовем *вырожденным*, если векторы  $v_i$  линейно зависимы, иначе параллелепипед  $P$  — *невырожденный*.

Пусть теперь на  $V$  задано скалярное произведение. Определим *объем*  $\text{vol}(P)$  *параллелепипеда*  $P = (v_1, \dots, v_k)$  следующим образом.

- Если  $P$  вырожден, то положим  $\text{vol}(P) = 0$ .
- Если векторы  $v_i$  образуют ортонормальную систему, то  $\text{vol}(P) = 1$ .
- Если  $P$  невырожден, то через  $V_P$  обозначим линейное подпространство, натянутое на векторы  $v_i$ ; выберем в  $V_P$  произвольный ортонормальный базис  $e = (e_1, \dots, e_k)$  (такой базис всегда можно выбрать, см. ниже раздел 13.6); через  $A_{e,P}$  обозначим матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $P$ ; наконец, положим  $\text{vol}^e(P) = |\det A_{e,P}|$ . Отметим, что если  $f = (f_1, \dots, f_k)$  — другой ортонормальный базис пространства  $V_P$ , и  $C$  — матрица перехода от  $f$  к  $e$ , то  $A_{f,P} = C A_{e,P}$ , поэтому

$$\text{vol}^f(P) = |\det A_{f,P}| = |\det(C A_{e,P})| = |\det C \det A_{e,P}| = |\det A_{e,P}| = \text{vol}^e(P),$$

так что величина  $\text{vol}^e(P)$  не зависит от выбора ортонормального базиса  $e$  в пространстве  $V_P$ . В силу этого, величину  $\text{vol}^e(P)$  обозначим  $\text{vol}(P)$  и возьмем ее в качестве *объема параллелепипеда*  $P$ .

Если  $P$  — параллелепипед, и пространство  $V_P$  ориентированно, то определим также *ориентированный объем*  $\text{vol}_0(P)$  так. Для вырожденного параллелепипеда  $P$  положим  $\text{vol}_0(P) = 0$ . Для невырожденного  $P$  выберем произвольный *положительно ориентированный* ортонормальный базис  $e$  пространства  $V_P$  и положим  $\text{vol}_0(P) = \det(A_{e,P})$ . Ясно, что при замене базиса  $e$  на другой положительно ориентированный базис  $f$ , имеем  $\det(A_{e,P}) = \det(A_{f,P})$ , что обосновывает корректность нашего определения. Таким образом, ориентированный объем  $\text{vol}_0(P)$  невырожденного параллелепипеда  $P$  совпадает с  $\text{vol}(P)$  для положительно ориентированного базиса  $P$  пространства  $V_P$ , и равен  $-\text{vol}(P)$  для отрицательно ориентированного. Ориентированный объем мы в основном будем использовать в конечномерном пространстве  $V$  размерности  $n$  для невырожденных  $n$ -параллелепипедов.

Отметим, что объем 1-параллелепипеда ( $v$ ) равен длине вектора  $v$ . Объем 2-параллелепипеда  $(v_1, v_2)$  равен площади параллелограмма, натянутого на векторы  $v_1$  и  $v_2$ . По известной формуле, эта площадь равна “произведению основания на высоту”. Обобщим эту формулу на произвольные невырожденные  $k$ -параллелепипеды при  $k \geq 2$ .

Выделим в параллелепипеде  $P = (v_1, \dots, v_k)$  *основание*  $B$ , выбрав произвольные  $(k-1)$  векторов. Пусть, для определенности,  $B = (v_1, \dots, v_{k-1})$ . Разложим вектор  $v_k$  на вектор  $h_k$ , перпендикулярный пространству

$V_B$ , натянутому на  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , и вектор  $v'_k$ , лежащий в этом пространстве (это разложение однозначно). Тогда  $\text{vol}_0(v_1, \dots, v_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, h_k)$  по свойствам определителя. Выберем теперь ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_{k-1}$  в  $V_B$  и дополним его до ортонормированного базиса  $e_1, \dots, e_k$  всего пространства  $V_P$  так, чтобы  $e_k$  был сонаправлен с  $h_k$ . Тогда  $h_k = \|h_k\|e_k$ , и, по свойству определителя,  $\text{vol}_0(v_1, \dots, h_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, v_{k-1})\|h_k\|$ , откуда  $\text{vol}(P) = \text{vol}(B)\|h_k\|$ . Таким образом,  $\|h_k\|$  играет роль **высоты** параллелепипеда, опущенной на основание  $B$ . Теми самым, мы приходим к следующему результату.

**Предложение 13.17.** *Объем  $k$ -параллелепипеда равен произведению объема любого его основания на высоту, опущенную на это основание.*

## 13.6 Ортогонализация Грама–Шмидта

Пусть на векторном пространстве  $V$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Теорема 13.18.** *Пусть  $v_1, \dots, v_m \in V$  — линейно независимые векторы, тогда существуют ненулевые ортонормальные векторы  $w_1, \dots, w_m \in V$  такие, что при каждом  $1 \leq k \leq m$  линейные оболочки векторов  $v_1, \dots, v_k$  и  $w_1, \dots, w_k$  совпадают.*

Векторы  $w_1, \dots, w_m$  могут быть построены с помощью процесса **ортогонализации Грама–Шмидта**: на первом шаге  $w_1 = v_1/\|v_1\|$ , и если ортонормальные векторы  $w_1, \dots, w_{k-1}$  уже определены, то полагаем

$$w'_k = v_k - \langle w_1, v_k \rangle w_1 - \dots - \langle w_{k-1}, v_k \rangle w_{k-1}, \quad w_k = w'_k / \|w'_k\|.$$

В частности, для конечномерного пространства  $V$  этот процесс позволяет построить по произвольному базису пространства  $V$  соответствующий ортонормальный.

Если требуется построить лишь ортогональный базис  $w_i$ , то можно начать с  $w_1 = v_1$ , а затем последовательно применять формулу

$$w_k = v_k - \frac{\langle w_1, v_k \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle w_{k-1}, v_k \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1}.$$

**Замечание 13.19.** Из построения вытекает, что для линейного пространства с заданным скалярным произведением матрица  $C$  перехода к линейно независимой системе векторов  $v_1, \dots, v_m$  от ортонормальной системы  $w_1, \dots, w_m$ , полученной ортогонализацией Грама–Шмидта, — верхнетреугольная. Найдем, чему равны диагональные элементы матрицы  $C$ .

На первом шаге  $w_1 = v_1/\|v_1\|$ , поэтому первый диагональный элемент равен  $\|v_1\|$ , т.е.  $\text{vol}(V_1)$  — объему 1-параллелепипеда  $V_1 = (v_1)$ . Пусть теперь  $1 < k \leq n$ . Заметим, что на  $k$ -ом шаге мы получаем вектор  $w'_k$  как ортогональную проекцию вектора  $v_k$  на ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Таким образом, в выражении  $v_k$  через векторы  $w_1, \dots, w_k$  коэффициент перед  $w_k$  равен  $\|w'_k\|$ , т.е. высоте  $k$ -параллелепипеда  $V_k = (v_1, \dots, v_k)$ , опущенной на его основание  $V_{k-1} = (v_1, \dots, v_{k-1})$ . По предложению 13.17, этот коэффициент равен  $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$ . Чтобы для первого диагонального элемента получить такую же формулу, как и для  $k$ -ого при  $k > 1$ , мы положим  $V_0 = (\emptyset)$  и  $\text{vol} V_0 = 1$ . Итак, теперь при каждом  $1 \leq k \leq n$  формула для  $k$ -ого диагонального элемента матрицы  $C$  имеет вид  $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$ . Отметим, что, как следствие, мы получили: все диагональные элементы матрицы  $C$  положительны.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений показывает, что обратная матрица  $C^{-1}$  — тоже верхнетреугольная, а ее диагональные элементы — обратные к диагональным элементам исходной матрицы и, значит, также положительные, равные  $\text{vol}(V_{k-1})/\text{vol}(V_k)$ .

## Упражнения к главе 13

**Упражнение 13.1.** Постройте на плоскости гладкую кривую, образ которой — прямой угол.

**Упражнение 13.2.** Постройте пример неодноточечного линейно связного метрического пространства, в котором нет ни одной невырожденной спрямляемой кривой.

**Упражнение 13.3.** Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

**Упражнение 13.4.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $\gamma$  — кривая в  $X$ , и точки  $x, y \in X$  лежат на  $\gamma$ . Покажите, что  $|\gamma| \geq |xy|$ .

**Упражнение 13.5.** Пусть параметрическая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая. Покажите, что отображение  $\gamma$  — липшицево и, значит,  $\gamma$  — спрямляемая кривая.

**Упражнение 13.6.** Введите натуральный параметр на следующих кривых, заданных на плоскости  $\mathbb{R}^2$  или в пространстве  $\mathbb{R}^3$ :

- (1) на отрезке прямой  $\gamma(t) = vt + a$ , где  $a, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \neq 0$ ;
- (2) на дуге окружности  $\gamma(\varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $r > 0$ ;
- (3) на графике функции  $\gamma(x) = (x, a \operatorname{ch}(x/a))$ ,  $a > 0$ , задающей кривую, по которой прогибается тяжелая цепь (кривая называется *цепной линией*);
- (4) на винтовой линии  $\gamma(\varphi) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$ .

**Упражнение 13.7.** Круг  $K$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  “катится без проскальзывания”

- (1) по прямой;
- (2) по окружности снаружи круга, ограниченного этой окружностью;
- (3) по окружности внутри круга, ограниченного этой окружностью.

Точка  $M$  жестко связана с кругом  $K$  (она может лежать вне круга). Задайте траекторию движения точки  $M$  параметрически. Изобразите соответствующие кривые. Напишите компьютерную программу (например, в пакете Математика), которая рисует эти кривые в зависимости от параметров задачи.

# Лекция 14

## Кривизны кривых

**План.**  $p$ -регулярные кривые, бирегулярные кривые, базис Френе для  $(n-1)$ -регулярной кривой в  $\mathbb{R}^n$ , формулы Френе,  $p$ -ая кривизна кривой в  $\mathbb{R}^n$ , кривизны кривой в  $\mathbb{R}^n$  в произвольной параметризации, сохранение кривизн при аффинных преобразованиях, выражение кривизн через коэффициенты ортогонализации, кривые на плоскости: кривизна и ориентированная кривизна, главная нормаль, ориентированные и неориентированные формулы Френе; кривые в трехмерном пространстве: главная нормаль и бинормаль, кривизна и кручение, формулы Френе; вывод стандартных формул кривизны и ориентированной кривизны плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве из общих формул Френе.

Чтобы охарактеризовать изменение формы кривой, мы введем в рассмотрение конечный набор функций и приведем условия, гарантирующие, что эти функции определяют форму кривой однозначно.

### 14.1 Формулы Френе и кривизны

Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ . Положим  $I = [a, b]$ , и пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая. Мы начнем с доказательства технических результатов.

**Предложение 14.1.** Пусть  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкие отображения, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает стандартное скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle \xi(t), \eta(t) \rangle' = \langle \dot{\xi}(t), \eta(t) \rangle + \langle \xi(t), \dot{\eta}(t) \rangle.$$

**Доказательство.** Распишите это скалярное произведение в координатах и продифференцируйте по правилу Лейбница.  $\square$

**Предложение 14.2.** Пусть  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение, причем величина  $\|\xi(t)\|$  постоянна. Тогда при каждом  $t$  векторы  $\xi(t)$  и  $\dot{\xi}(t)$  ортогональны.

**Доказательство.** Используя предложение 14.1, продифференцируем уравнение  $\langle \xi(t), \xi(t) \rangle = \text{const}$  и получим

$$2\langle \dot{\xi}(t), \xi(t) \rangle = 0,$$

что и требовалось.  $\square$

Далее, для гладкой кривой  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $1 \leq p \leq n$ , будем говорить, что  $\gamma$  является  $p$ -регулярной в точке  $t$ , если векторы

$$\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(p)}(t)$$

линейно независимы.

**Задача 14.3.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая.

- (1) Покажите, что свойство кривой  $\gamma$  быть  $p$ -регулярной не зависит от параметризации (напомним, что для гладких кривых мы рассматриваем только регулярные замены параметра).
- (2) Докажите, что если кривая  $\gamma$  является  $p$ -регулярной в точке  $t$ , то она также  $p$ -регулярна в достаточно малой окрестности точки  $t$ .



Отметим, что при  $p = 1$  кривая просто регулярна, а при  $p = 2$  кривая также называется **бирегулярной**.

Если кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, то применим ортогонализацию Грама–Шмидта к линейно независимым векторам  $\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  и построим ортонормальную систему векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ . Дополним эту систему вектором  $\nu_n$  до положительно ориентированного ортонормального базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ . Полученный базис называется **базисом Френе**.

**Задача 14.4.** Проверьте, что базис Френе не меняется при замене параметризации, сохраняющей направление движения.

Выясним, как раскладываются скорости  $\dot{\nu}_p$  изменения векторов  $\nu_p$  базиса Френе по этому базису. Положим  $\Gamma_{i_1 \dots i_p} = (\gamma^{(i_1)}, \dots, \gamma^{(i_p)})$ , так что если кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, все  $i_q$  различны и не превосходят  $n - 1$ , то  $\Gamma_{i_1 \dots i_p}$  — невырожденный  $p$ -параллелепипед, и для него определен объем  $\text{vol}(\Gamma_{i_1 \dots i_p})$ , см. раздел 13.5.2. Напомним, что в разделе 13.6 мы определили  $\text{vol}$  также для “пустого параллелепипеда”, положив  $\text{vol}(\emptyset) = 1$ . Кроме того, мы выберем стандартную ориентацию  $\mathbb{R}^n$  в качестве положительной, тогда также определен ориентированный объем  $\text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})$ . Отметим, что  $n$ -параллелепипед  $\Gamma_{1 \dots n}$  может быть вырожденным, так как мы не предполагаем, что кривая  $\gamma$  является  $n$ -регулярной, ограничиваясь  $(n - 1)$ -регулярностью. Таким образом,  $\text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})$  может принимать как нулевое, так и отрицательные значения.

**Теорема 14.5** (Формулы Френе). Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольная  $(n - 1)$ -регулярная кривая, тогда

$$(14.1) \quad \begin{cases} \dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2, \\ \dot{\nu}_2 = -k_1 \nu_1 + k_2 \nu_3, \\ \dots \dots \dots \\ \dot{\nu}_{n-1} = -k_{n-2} \nu_{n-2} + k_{n-1} \nu_n, \\ \dot{\nu}_n = -k_{n-1} \nu_{n-1}, \end{cases}$$

где

$$(14.2) \quad k_p = \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Gamma_{1 \dots p-1}) \text{vol}(\Gamma_{1 \dots p+1})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1 \dots p})} & \text{при } 1 \leq p \leq n - 2, \\ \frac{\text{vol}(\Gamma_{1 \dots n-2}) \text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1 \dots n-1})} & \text{при } p = n - 1, \end{cases}$$

в частности, все  $k_1, \dots, k_{n-2}$  — положительные функции, а  $k_{n-1}$  может принимать как отрицательные значения, так и быть равной нулю.

**Доказательство.** По определению ортогонализации,  $\nu_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$  и, значит,  $\dot{\nu}_1$  является линейной комбинацией  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ , а, поэтому, также является линейной комбинацией  $\nu_1$  и  $\nu_2$  (вспомните определение ортогонализации Грама–Шмидта). Так как  $\|\nu_1\| = 1$ , то, по предложению 14.2, имеем  $\dot{\nu}_1 \perp \nu_1$ , так что  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , где  $k_1$  — некоторый коэффициент (функция параметра кривой  $\gamma$ ).

Пусть теперь  $1 < p < n - 1$ . По определению процесса ортогонализации, вектор  $\nu_p$  является линейной комбинацией векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$  с коэффициентами — функциями параметра кривой  $\gamma$ , поэтому  $\dot{\nu}_p$  — это аналогичная линейная комбинация векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p+1)}$ . Так как линейная оболочка векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p+1)}$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{p+1}$ , то, тем самым,  $\dot{\nu}_p$  — линейная комбинация векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{p+1}$ .

Далее, так как  $\langle \nu_p, \nu_i \rangle = 0$  при  $i < p$ , то

$$0 = \langle \nu_p, \nu_i \rangle' = \langle \dot{\nu}_p, \nu_i \rangle + \langle \nu_p, \dot{\nu}_i \rangle.$$

Так как  $\dot{\nu}_i$  является линейной комбинацией векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{i+1}$ , а векторы  $\nu_j$  ортогональны, то при  $i \leq p - 2$  выполняется  $\langle \nu_p, \dot{\nu}_i \rangle = 0$ , откуда, при таких  $i$ , имеем  $\langle \dot{\nu}_p, \nu_i \rangle = 0$ , т.е.  $\dot{\nu}_p$  ортогонален всем  $\nu_i$  при  $i \leq p - 2$ . Добавим сюда, что, в силу  $\|\nu_p\| = 1$  и предложения 14.2, векторы  $\dot{\nu}_p$  и  $\nu_p$  ортогональны. Итак, при  $1 < p < n$  вектор  $\dot{\nu}_p$  является линейной комбинацией  $\nu_{p-1}$  и  $\nu_{p+1}$ . Положим  $\dot{\nu}_p = a_p \nu_{p-1} + k_p \nu_{p+1}$ . Отметим, что это выражение превращается в полученное выше равенство  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , если положить  $a_1 = 0$  и  $\nu_0 = 0$ , что мы и сделаем.

Продифференцируем теперь равенство  $\langle \nu_{p-1}, \nu_p \rangle = 0$  и воспользуемся предыдущими результатами. Имеем

$$0 = \langle \dot{\nu}_{p-1}, \nu_p \rangle + \langle \nu_{p-1}, \dot{\nu}_p \rangle = \langle a_{p-1} \nu_{p-2} + k_{p-1} \nu_p, \nu_p \rangle + \langle \nu_{p-1}, a_p \nu_{p-1} + k_p \nu_{p+1} \rangle = k_{p-1} + a_p = 0,$$

откуда  $a_p = -k_p$ .

Пусть  $p = n - 1$ . Разложим  $\dot{\nu}_{n-1}$  по базису  $\nu_1, \dots, \nu_n$ . Как и выше, доказываем, что  $\dot{\nu}_{n-1} = -k_{n-2}\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n$ . Вычислим теперь  $\dot{\nu}_n$ . Снова  $\dot{\nu}_n = a_n\nu_{n-1}$ , откуда

$$0 = \langle \nu_n, \nu_{n-1} \rangle' = \langle \dot{\nu}_n, \nu_{n-1} \rangle + \langle \nu_n, \dot{\nu}_{n-1} \rangle = a_n + \langle \nu_n, -k_{n-2}\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n \rangle = a_n + k_{n-1},$$

поэтому  $a_n = -k_{n-1}$ , и мы опять получаем формулы (14.1).

Найдем теперь все  $k_p$ . Предположим сначала, что все векторы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n)}$  линейно независимы. Заметим, что вектор  $\nu_n$  совпадает с последним вектором ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n)}$ , если эта система положительно ориентирована. В противном случае, направление вектора  $\nu_n$  противоположно последнему вектору ортогонализации. Отсюда и из замечания 13.19 вытекает, что при всех  $1 \leq p \leq n$  выполняется

$$(14.3) \quad \gamma^{(p)} = \alpha_p \nu_p + \dots, \quad \text{где } \alpha_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1})}, \quad \text{при } p < n, \quad \text{и } \alpha_n = \frac{\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-1})},$$

$$(14.4) \quad \nu_p = \beta_p \gamma^{(p)} + \dots, \quad \text{где } \beta_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p})} \quad \text{при } p < n, \quad \text{и } \beta_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-1})}{\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})};$$

в первой формуле “...” обозначает линейную комбинацию  $\nu_q$  с  $q < p$ , а, во второй — линейную комбинацию  $\gamma^{(q)}$  с  $q < p$ .

Дифференцируя равенство (14.4) и подставляя в правую часть выражения для всех  $\gamma^{(q)}$  из равенства (14.3), получаем

$$\dot{\nu}_p = \beta_p \gamma^{(p+1)} + \dots = \beta_p \alpha_{p+1} \nu_{p+1} + \dots,$$

где последнее ... обозначает линейную комбинацию  $\nu_q$  с  $q < p + 1$ . Следовательно,

$$k_p = \langle \dot{\nu}_p, \nu_{p+1} \rangle = \beta_p \alpha_{p+1},$$

откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь вектор  $\gamma^{(n)}$  линейно зависим с  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$ . Тогда  $\dot{\nu}_{n-1}$  лежит в линейной оболочке векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ , поэтому  $k_{n-1} = 0$ , и этот  $k_{n-1}$  удовлетворяет формуле (14.2), так как в этом случае  $n$ -параллелепипед  $\Gamma_{1\dots n}$  вырожден и, по определению,  $\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n}) = 0$ . Все остальные  $k_p$  вычисляются точно так же.  $\square$

В полученных формулах (14.1) и (14.2) коэффициенты  $k_p$  зависят от параметризации. Чтобы получить характеристики кривой, из всех параметризаций выбирают некоторый подкласс, для которого все  $k_p$  одни и те же. Традиционно в качестве такого подкласса берут семейство натуральных параметризаций, сохраняющих направление движения. По предложению 13.16, все такие параметризации отличаются сдвигом на константу, а такие замены не меняют производные, поэтому все  $k_p$  сохраняются. Более того, все  $k_p$  при  $p < n - 1$  также сохраняют свои значения при замене на натуральную параметризацию, обращающую направление движения.

**Задача 14.6.** Выясните, что происходит с  $k_{n-1}$  при изменении направления движения на противоположное.

**Определение 14.7.** Величина  $k_p$ , вычисленная для натурально параметризованной  $(n - 1)$ -регулярной кривой  $\gamma$ , называется  $p$ -ой **кривизной кривой**  $\gamma$ .

Отметим, что в теореме 14.5 мы провели вычисления для произвольной параметризации и для коэффициентов  $k_p$  получили формулы одного и того же вида. По задаче 14.4, базис Френе не зависит от выбора параметризации, сохраняющей направление движения. А что происходит с производными векторов базиса Френе? Пусть  $s$  — натуральный параметр,  $t$  — произвольный, причем  $s_t > 0$ , тогда  $\frac{d\nu_p}{dt} = \frac{d\nu_p}{ds} s_t$ , откуда выражение для  $\frac{d\nu_p}{dt}$  получается из формулы Френе для  $\frac{d\nu_p}{ds}$  делением всех коэффициентов на  $s_t = \|\dot{\gamma}_t\|$ . Итак, мы приходим к следующему результату.

**Следствие 14.8** (Формула кривизн кривой в произвольной параметризации). Пусть  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , — произвольная  $(n - 1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$  и  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — ее кривизны (коэффициенты в формулах Френе кривой  $\gamma$ , параметризованной натурально с сохранением направления). Пусть  $\Gamma_{1\dots p}$  обозначает  $p$ -параллелепипед  $(\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)})$ , где производные берутся относительно исходного параметра  $t$ . Тогда

$$(14.5) \quad k_p = \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1}) \text{vol}(\Gamma_{1\dots p+1})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1\dots p}) \|\dot{\gamma}\|} & \text{при } 1 \leq p \leq n - 2, \\ \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-2}) \text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1\dots n-1}) \|\dot{\gamma}\|} & \text{при } p = n - 1, \end{cases}$$

**Следствие 14.9.** Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — аффинное преобразование, равное композиции сохраняющего ориентацию ортогонального преобразования  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и некоторого сдвига  $x \mapsto x + \tau$ , где  $x, \tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $A$  не меняет кривизны каждой  $(n-1)$ -регулярной кривой в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Действительно, пусть  $\gamma(s)$  — натурально параметризованная  $(n-1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ . Так как  $F$  — аффинное отображение, то  $(F\gamma)^{(k)} = A\gamma^{(k)}$ . С другой стороны, ортогональное преобразование не меняет как длины векторов, так и объемы  $p$ -параллелепипедов, что легко доказать индукцией по  $p$  (сделайте это). Кроме того, если преобразование  $A$  сохраняет ориентацию, то оно также не меняет и ориентированные объемы  $n$ -параллелепипедов. Осталось заметить, что формулы (14.5) выражают кривизны исключительно через объемы  $p$ -параллелепипедов и ориентированные объемы  $n$ -параллелепипедов от производных  $\gamma^{(k)}$ .  $\square$

Отметим, что на практике вычисление кривизн кривой  $\gamma$  проще проводить во время ортогонализации системы векторов из производных  $\gamma^{(i)}$ . Следующий результат вытекает из вычислений, проделанных в доказательстве теоремы 14.5.

**Следствие 14.10.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольная  $(n-1)$ -регулярная кривая,  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — ее базис Френе, а  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — кривизны. Пусть, как и в доказательстве теоремы,  $\gamma^{(p)} = \alpha_p \nu_p + \dots$ , или, другими словами,  $\alpha_p = \langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle$ , тогда

$$k_p = \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p \alpha_1} = \frac{\langle \gamma^{(p+1)}, \nu_{p+1} \rangle}{\langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle \|\dot{\gamma}\|}.$$

Обсудим, как выглядят некоторые кривизны и векторы базиса Френе, а заодно приведем формулы для кривых на плоскости и в трехмерном пространстве. Так как для натурального параметра имеем  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ , то  $\nu_1 = \dot{\gamma}$ . Выбор вектора  $\nu_2$  отличается для случаев  $n = 2$  и  $n > 2$ . Если  $n > 2$ , то, в силу  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ , имеем  $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ , поэтому  $\nu_2 = \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$  и, таким образом,  $k_1 = \|\ddot{\gamma}\|$ .

Если же  $n = 2$ , то, в соответствии с нашей договоренностью о выборе вектора  $\nu_n$ , вектор  $\nu_2$  выбирается так, чтобы пара  $\nu_1, \nu_2$  была положительно ориентированным ортонормальным базисом. Таким образом, для определения вектора  $\nu_2$  не требуется выполнение условия  $k_1 \neq 0$ , равносильного 2-регулярности кривой. Если  $k_1 \neq 0$ , то, в зависимости от ориентации ортогонального базиса  $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ , имеем  $\nu_2 = \pm \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$ . В этом случае, вектор  $\nu := \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$  традиционно называется **главной нормалью**, а величина  $k = \|\ddot{\gamma}\|$  — кривизной кривой, в отличие от величины  $k_1$ , которая называется **ориентированной кривизной**. Формулы Френе из теоремы 14.5 выглядят так:  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ ,  $\dot{\nu}_2 = -k_1 \nu_1$  и называются **ориентированными формулами Френе**. В отличие от них, (неориентированные) формулы Френе связывают кривизну  $k$ , главную нормаль  $\nu$  и скорость  $\tau = \dot{\gamma}$ . Они выглядят абсолютно аналогично ориентированным формулам Френе:  $\dot{\tau} = k\nu$ ,  $\dot{\nu} = -k\tau$ , однако они имеют место только для бигулярных кривых (ориентированные формулы Френе обслуживают более широкий класс регулярных кривых).

Выпишем теперь, как выглядит ориентированная кривизна  $k_1$  и обычная кривизна  $k$  для плоской кривой. Имеем

$$(14.6) \quad k_1 = \frac{\text{vol}_0(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \text{vol}(\emptyset)}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad k = \frac{\text{vol}(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \text{vol}(\emptyset)}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]|}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где через  $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$  мы обозначили площадь ориентированного параллелограмма, натянутого на векторы  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ , т.е. определитель матрицы, столбцы которой — координаты этих векторов. В явном виде, если  $x, y$  — координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , то

$$(14.7) \quad k_1 = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Для трехмерного случая имеем две  $k_i$ : первая из них,  $k_1 = k = \|\ddot{\gamma}\|$ , называется **кривизной** (теперь тут нет двух типов кривизны), а вторая,  $k_2$ , обозначается  $\varkappa$  и называется **кручением**. Как и в двумерном случае,  $\tau := \nu_1 = \dot{\gamma}$  — **скорость**;  $\nu := \nu_2 = \ddot{\gamma}/k$  — **главная нормаль**; третий вектор  $\nu_3$ , который обозначается  $\beta$  и называется **бинормалью**, дополняет  $\tau$  и  $\nu$  до положительно ориентированного ортонормированного базиса, поэтому  $\beta = [\tau, \nu]$ , где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Формулы Френе в трехмерном случае даются теоремой 14.5 и имеют вид:

$$(14.8) \quad \begin{cases} \dot{\tau} = k\nu, \\ \dot{\nu} = -k\tau + \varkappa\beta, \\ \dot{\beta} = -\varkappa\nu. \end{cases}$$

Таким образом, кручение можно вычислить по формуле  $\varkappa = -\langle \dot{\beta}, \nu \rangle$ .

Снова воспользуемся следствием 14.8 и запишем, как выглядят кривизна и кручение произвольно параметризованной бигулярной кривой в трехмерном пространстве. Кривизна записывается почти такой же формулой

$$(14.9) \quad k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где  $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$  теперь — векторное произведение векторов  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ . Выпишем кручение:

$$(14.10) \quad \varkappa = \frac{\text{vol}_0(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}') \text{vol}(\dot{\gamma})}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}' \rangle}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|^2},$$

где через  $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}' \rangle$  обозначено смешанное произведение векторов, т.е. определитель матрицы, столбцами которой являются координаты этих векторов.

## Упражнения к главе 14

**Упражнение 14.1.** Вычислите кривизну, ориентированную кривизну и базис Френе для плоских регулярных кривых, заданных графиком функции  $\gamma(x) = (x, f(x))$ .

**Упражнение 14.2.** Для следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами  $x, y$ , вычислите кривизну, ориентированную кривизну и найдите базис Френе:

- (1) для отрезка прямой  $\gamma(t) = vt + a$ , где  $a, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$ ;
- (2) для дуги окружности  $\gamma(\varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $r > 0$ ;
- (3) для цепной линии  $\gamma(x) = (x, a \operatorname{ch}(x/a))$ ,  $a > 0$ ;
- (4) для эллипса  $\gamma(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ ,  $a > 0, b > 0$ .

**Упражнение 14.3.** Для следующих кривых, заданных в трехмерном пространстве с декартовыми координатами  $x, y, z$ , вычислите кривизну, кручение, и найдите базис Френе:

- (1) для отрезка прямой;
- (2) для винтовой линии  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0$ ;
- (3) для кривой  $\gamma(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$ .

**Упражнение 14.4.** Рассмотрим следующую кривую в четырехмерном пространстве:

$$\gamma(t) = \left( \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right).$$

Вычислите базис Френе и кривизны кривой  $\gamma$ .

**Упражнение 14.5.** Для кривых в трехмерном пространстве, докажите, что

- (1) регулярная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю;
- (2) бирегулярная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Выясните, верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой  $\gamma$  выполняется  $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$ , то  $\gamma$  лежит в некоторой плоскости?

**Упражнение 14.6.** Покажите, что  $(n-1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , у которой  $k_{n-1} = 0$ , лежит в  $(n-1)$ -мерном аффинном пространстве.

**Упражнение 14.7.** Покажите, что натурально параметризованная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , у которой тождественно равна нулю некоторая производная порядка  $k > 1$ , является отрезком прямой.

**Упражнение 14.8.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^3$  имеет постоянную кривизну  $k > 0$ , если и только если существует натурально параметризованная кривая  $\tau(\sigma)$  на единичной сфере и точка  $A \in \mathbb{R}^3$ , для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{k} \int_{ka}^{ks} \tau d\sigma.$$

**Упражнение 14.9.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^3$  имеет постоянное кручение  $\varkappa \neq 0$ , если и только если на единичной сфере существует натурально параметризованная кривая  $\beta(\sigma)$  ненулевой геодезической кривизны (проекция вектора ускорения  $\beta_{\sigma\sigma}$  на касательную плоскость к сфере всюду отлична от нуля), а в пространстве — точка  $A \in \mathbb{R}^3$ , для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{\varkappa} \int_{\varkappa a}^{\varkappa s} [\beta, \beta_{\sigma}] d\sigma.$$

**Упражнение 14.10.** Докажите, что кривизна бирегулярной кривой в  $\mathbb{R}^3$  пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор  $u$  такой, что  $\langle u, \tau \rangle = \operatorname{const} \neq 0$ .

**Упражнение 14.11.** Докажите, что натурально параметризованная бигулярная кривая в  $\mathbb{R}^3$  с кривизной  $k$ , для которой  $\dot{k} \neq 0$ , и с ненулевым кручением  $\varkappa$  лежит на сфере радиуса  $R$  тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right).$$

Приведите пример бигулярной натурально параметризованной кривой, не лежащей на сфере, для которой выполнены все условия задачи, кроме  $\dot{k} \neq 0$ .

## Лекция 15

# Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых

**План.** Зависящее от времени векторное поле, интегральная траектория, начальное условие, обыкновенное дифференциальное уравнение, теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, линейное дифференциальное уравнение, теорема о продолжении решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения, восстановление кривой по кривизнам, натуральные уравнения, восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне, классификация плоских кривых постоянной кривизны, геометрия плоских кривых: радиус кривизны, ориентированный радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, особенности эволюты, эвольвента, восстановление исходной кривой из ее эволюты; порядок касания кривых, окружность кривизны или соприкасающаяся окружность, порядок касания кривой и окружности кривизны.

В этой лекции мы покажем, как кривую можно восстановить по ее кривизнам. Для этого нам потребуется одна важная теорема, доказательство которой будет рассказано в курсе теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 15.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

**Векторным полем на  $\mathbb{R}^n$ , зависящим от времени,** называется гладкое отображение  $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . **Интегральной кривой поля  $\xi$  с начальным условием  $v_0 \in \mathbb{R}^n$**  называется каждое гладкое отображение  $v: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  из некоторого отрезка  $[0, a] \subset \mathbb{R}$  такое, что  $v(0) = v_0$  и  $\dot{v}(t) = \xi(t, v(t))$  при всех  $t \in [0, a]$ .

Задачу поиска интегральной траектории для поля  $\xi$  принято записывать в виде **обыкновенного дифференциального уравнения**  $\dot{v} = \xi(t, v)$ , которое кодирует приведенное выше определение интегральной кривой. При этом, интегральную траекторию  $v(t)$  называют **решением** этого дифференциального уравнения с начальным условием  $v(0) = v_0$ . Если поле  $\xi$  не зависит от времени, т.е.  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то соответствующее дифференциальное уравнение называется **автономным**, если зависит, то **неавтономным**.

**Теорема 15.1** (Существование и единственность). Пусть  $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — зависящее от времени векторное поле. Тогда через каждую точку  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  проходит интегральная траектория, единственная в следующем смысле: интегральные траектории, проходящие через  $v_0$ , совпадают на общей части их областей определения. На эквивалентном языке, дифференциальное уравнение  $\dot{\varphi} = \xi(t, v)$  имеет единственное решение с каждым начальным условием.

**Замечание 15.2.** Имеется много разных вариаций теоремы существования и единственности. Во-первых, не обязательно рассматривать векторное поле  $\xi$  на всем  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Во-вторых, вместо гладкой правой части можно рассматривать непрерывную с некоторыми дополнительными условиями. В-третьих, вместо  $\dot{v}$  в левой части дифференциального уравнения можно поставить производную более высокого порядка. Все такие варианты будут изучаться в дальнейших курсах.

Как мы видели в теореме 15.1, решения обыкновенного дифференциального с данным начальным условием отличаются лишь размерами промежутка, на котором они рассматриваются (на общей части решения совпадают). Возникает естественный вопрос: сколь далеко может простираться решение с данным начальным условием? Имеется много разных “теорем продолжения”. Мы приведем ту из них, которая нам понадобится. Рассмотрим **линейное** дифференциальное уравнение, т.е. такое, которое задается зависящим от времени векторным полем  $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  таким, что при каждом  $t \in \mathbb{R}$  отображение  $A^t: V \rightarrow V$ ,  $A^t(v) = \xi(t, v)$ , является линейным.

**Теорема 15.3** (О продолжении решений). Пусть  $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное векторное поле. Тогда решение дифференциального уравнения  $\dot{\varphi} = \xi(t, v)$  с произвольным начальным условием продолжается на любой отрезок.

**Замечание 15.4.** Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^n$ , а  $t$  — координата на  $\mathbb{R}$ , тогда поле  $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  задается набором из  $n$  гладких функций  $\xi^i(t, x^1, \dots, x^n)$ . Соответствующее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \xi^1(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dot{x}^2 = \xi^2(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = \xi^n(t, x^1, \dots, x^n), \end{cases}$$

а его решением является каждая интегральная траектория  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  такая, что  $\dot{\gamma}(t) = \xi(t, \gamma(t))$  при всех  $t \in [0, a]$ . Это уравнение является линейным, если все  $\xi^i$  линейны при каждом  $t$ :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1(t)x^1 + \dots + a_n^1(t)x^n, \\ \dot{x}^2 = a_1^2(t)x^1 + \dots + a_n^2(t)x^n, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = a_1^n(t)x^1 + \dots + a_n^n(t)x^n, \end{cases}$$

где  $a_j^i(t)$  — гладкие функции. Именно к такому типу относятся выведенные выше уравнения Френе, к которым мы и применим цитированные теоремы существования и единственности, а также продолжения.

## 15.2 Восстановление кривой по кривизнам

Оказывается, кривизны кривой позволяют однозначно, с точностью до движения, сохраняющего ориентацию, восстановить кривую. Более того, нет никаких дополнительных ограничений на возможные кривизны кривых. Эти утверждения сформулированы в следующей теореме.

**Теорема 15.5.** Пусть  $f_1(s), \dots, f_{n-1}(s)$  — гладкие функции, определенные на отрезке  $I = [a, b]$ , и все из них, кроме, возможно,  $f_{n-1}(s)$  — положительны. Тогда существует и единственна, с точностью до движения пространства, сохраняющая ориентацию,  $(n-1)$ -регулярная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^n$ , для которой  $s$  — натуральный параметр, а функция  $f_p(s)$  равна  $p$ -ой кривизне при всех  $p$ .

**Доказательство.** Подставим в уравнения Френе (14.1) функции  $f_p$  вместо кривизн  $k_p$ . Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на координаты векторов  $\nu_p$  (всего  $n^2$  уравнений). По теореме 15.1 существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, эта система имеет единственное решение  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  (в смысле цитированной теоремы) для каждого начального условия, в качестве которого мы возьмем произвольный положительно ориентированный ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$ , т.е.  $\nu_p(s_0) = e_p$  для некоторого  $s_0 \in I$  и каждого  $p = 1, \dots, n$ . Кроме того, рассматриваемая система уравнений линейна с коэффициентами, зависящими от “времени”  $s$ , поэтому применима теорема 15.3 о продолжении решений обыкновенного дифференциального уравнения, гарантирующая, что каждое решение продолжается на весь отрезок  $I$ .

Для упрощения дальнейших вычислений, нам будет полезно привести уравнения системы (14.1) к одному и тому же виду, положив  $f_0(s) = f_n(s) = 0$  и  $\nu_0 = \nu_{n+1} = 0$ , тогда все уравнения из этой системы будут выглядеть так:  $\dot{\nu}_p = -f_{p-1}\nu_{p-1} + f_p\nu_{p+1}$ .

**Лемма 15.6.** При каждом  $s \in I$  векторы  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  образуют положительно ориентированный ортонормальный базис.

**Доказательство.** Определим функции  $a_{ij}(s) = \langle \nu_i(s), \nu_j(s) \rangle$ , тогда  $\dot{a}_{ij}$  выражается через функции  $f_k$  и другие  $a_{pq}$  так:

$$\begin{aligned} (15.1) \quad \dot{a}_{ij} &= \langle \dot{\nu}_i, \nu_j \rangle + \langle \nu_i, \dot{\nu}_j \rangle = \langle -f_{i-1}\nu_{i-1} + f_i\nu_{i+1}, \nu_j \rangle + \langle \nu_i, -f_{j-1}\nu_{j-1} + f_j\nu_{j+1} \rangle = \\ &= -f_{i-1}a_{(i-1)j} + f_i a_{(i+1)j} - f_{j-1}a_{i(j-1)} + f_j a_{i(j+1)}. \end{aligned}$$



Тем самым, мы приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на  $a_{ij}$  при  $1 \leq i, j \leq n$  (если одно из  $i, j$  или равно нулю, или равно  $n + 1$ , то соответствующие  $a_{ij}$  равны нулю, и мы не рассматриваем их как переменные). По теореме 15.1 существования и единственности, а также по теореме 15.3 о продолжении решений, эти уравнения имеют на всем  $I$  единственное решение с данными начальными условиями. В качестве таких условий возьмем  $a_{ij}(s_0) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Заметим, что функции  $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$  удовлетворяют системе (15.1). Действительно, левая часть уравнений (15.1) всегда равна нулю. Что касается правой части, если  $i$  отлично от  $j - 1$  или  $j + 1$ , то все элементы правой части также равны нулю. Если  $i - 1 = j$  или  $i + 1 = j$ , то правая часть равна соответственно  $-f_{i-1} + f_j = 0$  или  $f_i - f_{j-1} = 0$ . Таким образом,  $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$  является единственным решением с данными начальными условиями, поэтому векторы  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  ортонормальны при каждом  $s$ . Положительная ориентированность этих векторов вытекает из их непрерывной зависимости от параметра  $s$  и того, что  $\nu_1(s_0), \dots, \nu_n(s_0)$  — это положительно ориентированный базис  $e_1, \dots, e_n$ .  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Построим кривую  $\gamma(s)$ , выбрав произвольную точку  $P \in \mathbb{R}^n$  и положив  $\gamma(s) = P + \int_{s_0}^s \nu_1(t) dt$  (т.е. решим систему дифференциальных уравнений  $\dot{\gamma} = \nu_1$  с начальным условием  $\gamma(s_0) = P$ ). Так как  $\dot{\gamma} = \nu_1$  — единичный вектор при каждом  $s$ , то параметр  $s$  — натуральный в силу предложения 13.15. Покажем, что  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной,  $f_p$  — кривизны кривой  $\gamma$ , а  $\nu_p$  — векторы базиса Френе кривой  $\gamma$ .

В силу натуральности параметра  $s$ , вектор  $\nu_1$  — первый вектор ортогонализации любой системы векторов, начинающейся с  $\dot{\gamma}$ .

Предположим, что для всех  $q$ ,  $q < p < n$ , мы показали, что векторы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(q)}$  линейно независимы, а  $\nu_1, \dots, \nu_q$  — это векторы ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(q)}$ , в частности,  $\gamma^{(p-1)} = \alpha_{p-1}\nu_{p-1} + \dots$ , где  $\alpha_{p-1} > 0$ . Дифференцируя последнее равенство, получаем  $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1}\dot{\nu}_{p-1} + \dots = \alpha_{p-1}f_{p-1}\nu_p + \dots$ .

Так как  $p < n$ , то  $f_{p-1} > 0$ , поэтому  $\gamma^{(p)}$  линейно независим с  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p-1)}$  и, значит, вся система  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$  линейна независима, причем начальные  $p - 1$  векторов ортогонализации этой системы — это  $\nu_1, \dots, \nu_{p-1}$ . Так как  $\nu_p$  ортогонален всем предыдущим  $\nu_q$ , и  $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1}f_{p-1}\nu_p + \dots$ , где “...” означает линейную комбинацию предыдущих  $\nu_q$ , а коэффициент  $\alpha_{p-1}f_{p-1}$  при  $\nu_p$  — положительный, вектор  $\nu_p$  является  $p$ -ым вектором ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$ .

Пока  $p < n$ , продолжаем эти же рассуждения. В результате мы покажем, что кривая  $(n - 1)$ -регулярна, и векторы  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$  являются результатом ортогонализации системы векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$ . Но тогда  $\nu_n$  автоматически будет последним вектором базиса Френе для кривой  $\gamma$ .

Итак, мы показали, что кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, и что  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — векторы базиса Френе кривой  $\gamma$ . Так как для базиса Френе имеются те же самые разложения производных  $\dot{\nu}_p$  по остальным линейно независимым векторам  $\nu_q$ , то коэффициенты  $f_q$  этого разложения — это кривизны кривой  $\gamma$ .

Докажем единственность решения. Рассмотрим два разных начальных условия, состоящих из начальной точки  $P_i$  и положительно ориентированного ортонормального базиса  $e_{i1}, \dots, e_{in}$ ,  $i = 1, 2$ . В силу сказанного выше, эти начальные условия однозначно задают соответствующие натурально параметризованные кривые  $\gamma_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  с одними и теми же кривизнами, причем  $P_i = \gamma_i(s_0)$  для некоторого  $s_0 \in I$ , а  $e_{i1}, \dots, e_{in}$  — базис Френе кривой  $\gamma_i$  в точке  $s_0$ . Пусть  $F$  — аффинное преобразование с линейной частью  $A$  такое, что  $P_2 = F(P_1)$  и  $Ae_{1j} = e_{2j}$  для всех  $j = 1, \dots, n$ , тогда  $A$  — ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию. По следствию 14.9, отображение  $F$  переводит кривую  $\gamma_1$  в кривую  $F \circ \gamma_1$  с теми же кривизнами, что и у  $\gamma_1$ , причем  $(F \circ \gamma_1)(s_0) = P_2$ , а  $e_{21}, \dots, e_{2n}$  — базис Френе кривой  $F \circ \gamma_1$  в точке  $s_0$ . Таким образом, кривые  $\gamma_2$  и  $F \circ \gamma_1$  имеют одни и те же начальные условия и одни и те же кривизны, поэтому, в силу теоремы 15.1 существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, эти кривые совпадают.  $\square$

**Натуральными уравнениями кривой в пространстве  $\mathbb{R}^n$**  называется система уравнений

$$(15.2) \quad k_1(s) = f_1(s), \dots, k_{n-1}(s) = f_{n-1}(s),$$

где  $f_1, \dots, f_{n-1}$  — гладкие функции, определенные на некотором промежутке  $I$ , причем первые  $(n - 2)$  из них — положительные. **Решением** этой натуральной системы уравнений является  $(n - 1)$ -регулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$ , для которой  $k_i(s)$  — функция  $i$ -ой кривизны. Отметим, что, в силу теоремы 15.5, такая кривая всегда существует и единственна с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства  $\mathbb{R}^n$ .

### 15.2.1 Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне

Рассмотрим альтернативный способ восстановления плоской регулярной кривой  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , по ориентированной кривизне  $k_1(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр, а  $I = [a, b]$ .

Пусть  $\nu_1, \nu_2$  — базис Френе кривой  $\gamma$ , тогда  $\nu_1 = \dot{\gamma}$  — единичный вектор, поэтому  $\nu_1(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ , а  $\nu_2(s) = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$ , так как  $\nu_1, \nu_2$  — положительно ориентированный ортонормированный базис. Отметим, что угол  $\varphi(s)$  определен с точностью до  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 15.7.** Покажите, что функцию  $\varphi(s)$  можно выбрать непрерывно и, значит, гладко зависящей от параметра  $s$ .

По формулам Френе,  $\ddot{\gamma} = \dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , откуда

$$(-\sin \varphi, \cos \varphi) \dot{\varphi} = k_1(-\sin \varphi, \cos \varphi) \Rightarrow \dot{\varphi}(s) = k_1(s) \Rightarrow \varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{s_0}^s k_1(t) dt, \quad s_0 \in I.$$

Пусть  $(x, y)$  — декартовы координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ , тогда

$$\dot{\gamma} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\cos \varphi, \sin \varphi) \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \\ y(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt. \end{cases}$$

В дальнейшем, для краткости, начальные данные  $\varphi(s_0), x(s_0), y(s_0)$  будем обозначать  $\varphi_0, x_0, y_0$  соответственно.

**Задача 15.8.** Покажите, что все решения при фиксированной функции  $k_1(s)$  отличаются на сдвиг, заданный начальными условиями  $(x_0, y_0)$ , и поворот, заданный начальным условием  $\varphi_0$ .

**Пример 15.9.** Опишем все плоские кривые постоянной ориентированной кривизны  $k_1$ . Если  $k_1 = 0$ , то, во введенных выше обозначениях,

$$\varphi(s) = \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + (s - s_0) \cos \varphi_0, \\ y(s) = y_0 + (s - s_0) \sin \varphi_0, \end{cases}$$

так что получаем естественно параметризованную прямую. Напомним, что кривизна, по определению, не зависит от выбора параметризации, так что за одно мы получили и все прямые, получающиеся из приведенных выше заменами параметра. Обратное, у каждой прямой векторы скорости и ускорения коллинеарны, поэтому кривизна равна нулю. Итак, кривые нулевой кривизны — это, в точности, все прямые.

Пусть теперь  $k_1(s) = c \neq 0$ , тогда

$$\varphi(s) = \varphi_0 + c(s - s_0) \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + \frac{1}{c} \sin(\varphi_0 + c(s - s_0)), \\ y(s) = y_0 - \frac{1}{c} \cos(\varphi_0 + c(s - s_0)). \end{cases}$$

Тем самым, мы получили естественно параметризованную окружность с центром в  $(x_0, y_0)$  и радиусом  $r = 1/|c|$ . При  $c > 0$  движение происходит в положительном направлении, а при  $c < 0$  — в отрицательном. Обратное, каждая окружность имеет постоянную ненулевую ориентированную кривизну (проверьте). Таким образом, кривые постоянной ненулевой ориентированной кривизны — это, в точности, все окружности.

**Обобщенной окружностью** назовем или окружность (возможно, нулевого радиуса), или прямую (окружность бесконечного радиуса). Обобщенную окружность ненулевого радиуса назовем **невыврожденной**. В этих терминах, **кривые постоянной (ориентированной) кривизны** — это в точности все **невыврожденные обобщенные окружности**.

**Замечание 15.10.** Описание кривых постоянной (ориентированной) кривизны можно извлечь из теоремы 15.5. Действительно, легко видеть, что кривизна прямой равна нулю, а кривизна окружности радиуса  $r$  равна  $1/r$ , и, в зависимости от направления движения по окружности радиуса  $r$ , ориентированная кривизна будет равна  $1/r$  или  $-1/r$ . Таким образом, все возможные значения постоянной ориентированной кривизны реализуются невырожденными обобщенными окружностями. Осталось воспользоваться теоремой единственности.

## 15.3 Геометрия плоских кривых

Приведем ряд примеров изучения геометрии кривых на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

### 15.3.1 Эволюты и эвольвенты

Напомним, что под **кривизной**  $k$  **кривой**  $\gamma$  мы понимаем  $|k_1|$ . Точка  $\gamma(t)$  кривой  $\gamma$  называется **точкой спрямления**, если  $k_1(t) = 0$  (равносильно,  $k(t) = 0$ ). Если же  $k_1(t) \neq 0$  (соответственно,  $k(t) \neq 0$ ), то  $\gamma(t)$  назовем **точкой бигулярности**.

В точке бигулярности  $\gamma(t)$  определим **радиус кривизны**  $R(t)$ , положив  $R(t) = 1/k(t)$ , и **ориентированный радиус кривизны**  $R_1(t)$  по формуле  $R_1(t) = 1/k_1(t)$ . Если  $\nu_1, \nu_2$  — базис Френе регулярной кривой  $\gamma$ , а  $\nu$  — главная нормаль в точке бигулярности  $\gamma(t)$ , то имеет место равенство  $k_1\nu_2 = k\nu$  и, как следствие,  $R_1\nu_2 = R\nu$ . **Центром кривизны** регулярной кривой  $\gamma$  в точке бигулярности  $\gamma(t)$  называется точка  $C(t) = \gamma(t) + R(t)\nu(t) = \gamma(t) + R_1(t)\nu_2(t)$ . Множество всех центров кривизны во всех точках бигулярности называется **каустикой** или **эволютой** кривой  $\gamma$ .

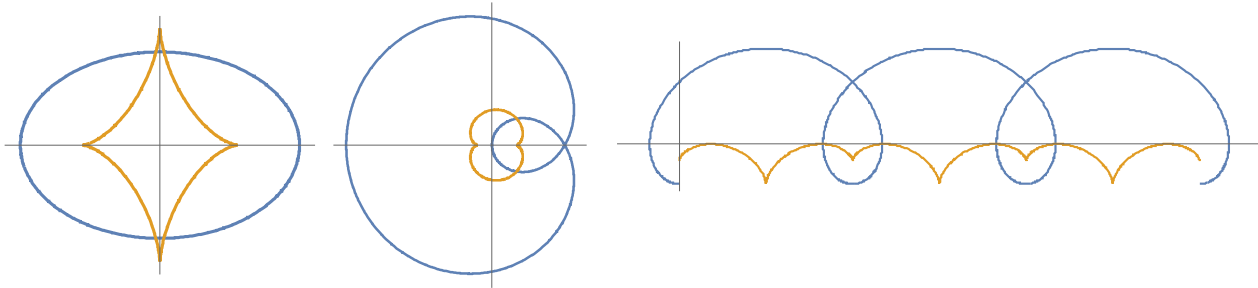


Рис. 15.1: Эволюты (желтые) эллипса, улитки Паскаля и циклоиды (синие).

**Задача 15.11.** Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую эволюты кривых, и постройте эволюты для основных классических кривых.

Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая, и  $\nu_1, \nu_2$  — ее базис Френе. **Эквидистантой** или **волновым фронтом** называется кривая  $\gamma(t) + h\nu_2(t)$ , где  $h \in \mathbb{R}$ .

**Задача 15.12.** Покажите, что множество всех особых точек всех волновых фронтов — это, в точности, эволюта кривой.

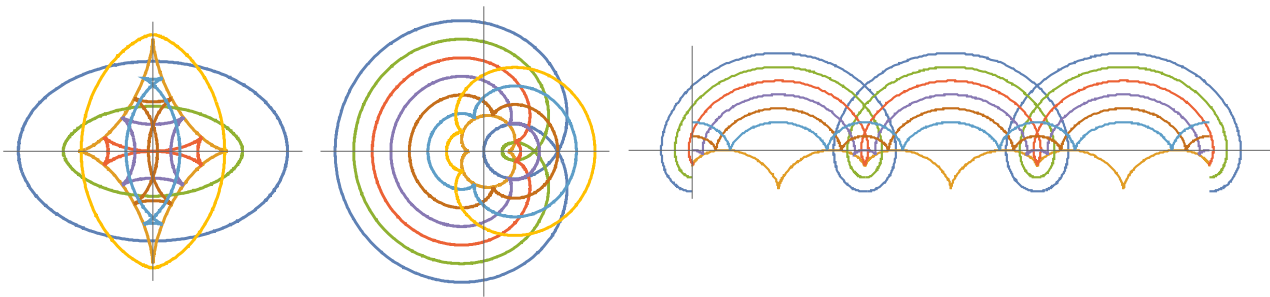


Рис. 15.2: Волновые фронты и эволюты.

**Задача 15.13.** Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую волновые фронты. Создайте анимацию волновых фронтов на той же картинке, где изображены кривая и эволюта. Наблюдайте, как особенности волнового фронта скользят по эволюте.

Как восстановить исходную кривую по ее эволюте? Для этого определим однопараметрическое семейство кривых, которые строятся по данной кривой  $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  и называются ее **эвольвентами**. В дальнейшем в

качестве  $\Gamma$  мы возьмем эволюту, которая, вообще говоря, регулярна не везде. Для таких кривых эвольвенты строятся отдельно по каждому фрагменту, который является регулярным во всех своих внутренних точках, и у которого в граничных точках существуют пределы нормированной скорости. Поэтому сразу будем предполагать, что  $\Gamma$  удовлетворяет перечисленным выше условиям на такие фрагменты.

Для наглядности, представим, что на  $\Gamma$  намотана нить, которую мы сматываем с  $\Gamma$ , постоянно держа нить натянутой. Последнее означает, что в каждый момент времени конец нити лежит на касательной в той точке кривой  $\Gamma$ , до которой мы добрались, сматывая нить. Кроме того, то, что мы нить сматываем, означает, что разница расстояний между концами смотанной части нити в два разных промежутка времени равна длине кривой  $\Gamma$  между точками, соответствующими этим временам. Параметром семейства является длина части нити, не намотанной на кривую. Двигаясь по эвольвенте в обратную сторону, мы, наоборот, будем наматывать нить.

Итак, запишем эвольвенты параметрически. Пусть  $h$  — длина ненамотанной нити,  $\tau$  — нормированный вектор скорости кривой  $\Gamma$ , и  $\ell$  — длина кривой  $\Gamma$  от начального положения до текущего, тогда при сматывании нити эвольвента имеет вид  $\delta^h = \Gamma - (h + \ell)\tau$ .

**Задача 15.14.** Покажите, что при наматывании нити эвольвента выглядит так:  $\delta^h = \Gamma + (h - \ell)\tau$ , где  $h$  — начальный запас ненамотанной нити.

Проверим, что часть исходной кривой  $\gamma$  между последовательными критическими точками ориентированной кривизны является эвольвентой соответствующего фрагмента эволюты  $C = \gamma + R_1\nu_2$ . Для начала отметим, что

$$\dot{C} = \dot{\gamma} + \dot{R}_1\nu_2 + R_1\dot{\nu}_2 = \nu_1 + \dot{R}_1\nu_2 - \nu_1 = \dot{R}_1\nu_2.$$

Из приведенной формулы вытекает следующий результат.

**Предложение 15.15.** Точка  $C(s)$  эволюты кривой  $\gamma$  является особой, если и только если в точке  $\gamma(s)$  ориентированная кривизна  $k_1(s)$ , а вместе с ней и ориентированный радиус  $R_1(s)$ , экстремальны, т.е.  $k_1(s) = 0$  и  $\dot{R}_1(s) = 0$ .

Из предложения 15.15 вытекает, что внутри рассматриваемого фрагмента эволюты производная  $\dot{R}_1$  имеет один и тот же знак  $\text{sign } \dot{R}_1$ . Кроме того, из той же формулы видно, что нормированный вектор скорости рассматриваемого фрагмента кривой  $C$  имеет вид  $\tau = (\text{sign } \dot{R}_1)\nu_2$ .

Далее, длина  $\ell$  кривой  $C$  между точками  $C(a)$  и  $C(s)$  равна

$$\int_a^s \|\dot{C}(t)\| dt = \int_a^s |\dot{R}_1(t)| dt = (R_1(s) - R_1(a)) \text{sign } \dot{R}_1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta^h(s) &= C(s) - (h + \ell(s))\tau(s) = \\ &= \gamma(s) + R_1(s)\nu_2(s) - \left( h + (R_1(s) - R_1(a)) \text{sign } \dot{R}_1 \right) (\text{sign } \dot{R}_1)\nu_2 = \\ &= \gamma(s) - (h - R_1(a) \text{sign } \dot{R}_1) (\text{sign } \dot{R}_1). \end{aligned}$$

Осталось положить  $h = R_1(a) \text{sign } \dot{R}_1$ , что и требовалось.

**Задача 15.16.** Подберите  $h$  для наматывания нити на регулярный фрагмент эволюты так, чтобы эвольвента совпала с фрагментом исходной кривой.

Отметим, что, например, восстановление эллипса происходит с чередованием сматывания и наматывания, см. рис. 15.3.

### 15.3.2 Порядок касания кривых

Пусть  $\gamma$  и  $\delta$  — две регулярные кривые в  $\mathbb{R}^n$ , проходящие через одну точку  $P$ . Если при произвольной параметризации векторы скоростей этих кривых не коллинеарны, то говорим, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  лишь с **нулевым порядком**. Если же скорости коллинеарны, то параметризуем кривые некоторым параметром  $t$  так, чтобы  $P = \gamma(0) = \delta(0)$  и  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\delta}(0)$ . В этом случае будем говорить, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  с **первым порядком**. Более обще, если для некоторого  $k$  кривые можно параметризовать так, что все

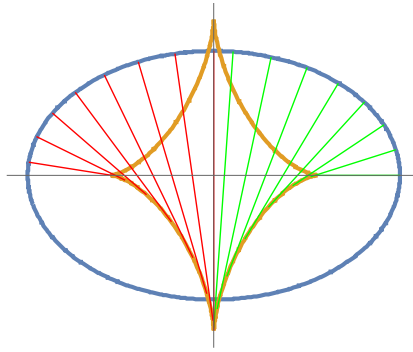


Рис. 15.3: Зеленые отрезки — сматывание, а красные — наматывание.

производные  $\gamma^{(i)}(0)$  и  $\delta^{(i)}(0)$  совпадают при каждом  $i < k$ , то говорим, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  с **порядком**  $k$ . Отметим, что если кривые касаются с  $k$ -ым порядком, то они также касаются и с  $i$ -ым порядком при всех  $i \leq k$ .

Пусть  $\gamma$  — плоская регулярная кривая, проходящая через точку  $P$ , в которой кривизна  $k$  отлична от нуля. Пусть  $R = 1/k$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$  в точке  $P$ , и  $\nu$  — главная нормаль в этой точке, тогда  $C = P + R\nu$  — центр кривизны. Окружность с центром в  $C$  и радиусом  $R$  назовем **окружностью кривизны** или **соприкасающейся окружностью**. Если кривизна регулярной кривой  $\gamma$  в точке  $P$  равна нулю, то **окружностью кривизны** назовем касательную прямую, рассматриваемую как окружность бесконечного радиуса.

**Предложение 15.17.** В каждой точке регулярной кривой окружность кривизны касается кривой со вторым порядком.

**Доказательство.** Пусть сначала кривизна равна нулю. Параметризуем кривую и касательную прямую натуральным параметром так, чтобы совпали векторы скоростей. При этом у натурально параметризованной прямой все производные порядка выше 1 равны нулю. Так как кривизна кривой равна нулю, то ее ускорение (в натуральной параметризации) тоже равно нулю, так что имеем касание второго порядка.

Пусть теперь кривизна в рассматриваемой точке отлична от нуля. Аналогичные рассуждения показывают, что при натуральной параметризации кривой и окружности кривизны и соответствующем выборе направления движения можно добиться касания первого порядка. Чтобы показать наличие касания второго порядка, проделаем следующие вычисления. Обозначим  $\gamma$  рассматриваемую натурально параметризованную кривую,  $\nu$  — главную нормаль,  $R$  — радиус кривизны, и  $C = \gamma + R\nu$  — центр кривизны. Тогда, при выбранных параметризациях, вектор ускорения при движении по окружности будет совпадать с  $(1/R)\nu$  (проделайте соответствующие вычисления), но  $(1/R)\nu = k\nu = \ddot{\gamma}$ , что и требовалось.  $\square$

**Задача 15.18.** Покажите, что любая окружность, проходящая через точку  $P$  регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой  $\gamma$  с меньшим чем 2 порядком.

**Задача 15.19.** Будем приближать плоскую регулярную кривую квадратикой. Докажите, что теперь можно достичь четвертого порядка касания, причем квадратика, касающаяся с четвертым порядком, определена однозначно (будем называть ее **приближающей квадратикой**). Таким образом, точки кривой можно разделить на четыре класса: вырожденные (кривизна равна нулю), а также эллиптические, гиперболические и параболические, в зависимости от того, чем является приближающая квадратика.

## Упражнения к главе 15

**Упражнение 15.1.** Решите на плоскости натуральное уравнение  $k_1(s) = 1/s$ ,  $I = [a, b]$ ,  $0 < a < b$ .

**Упражнение 15.2.** Докажите, что бирегулярные кривые в  $\mathbb{R}^3$  с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

**Упражнение 15.3.** Покажите, что любая окружность, проходящая через точку  $P$  регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой  $\gamma$  с меньшим чем 2 порядком.

**Упражнение 15.4.** Постройте две плоских кривых, совпадающих лишь в одной точке  $P$  и имеющих бесконечный порядок касания.

**Упражнение 15.5.** Для эллипса  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ , заданного на плоскости с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ , напишите уравнение эволюты.

**Упражнение 15.6.** Покажите, что эволюта плоской кривой  $\gamma$  совпадает с множеством особых точек всех волновых фронтов, выпущенных с  $\gamma$ .

**Упражнение 15.7.** *Овалом* на плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется замкнутая кривая положительной кривизны, ограничивающая строго выпуклую область (для любых двух точек этой области внутренность соединяющего их отрезка лежит внутри области). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

## Лекция 16

# Дополнение 1: Элементы аффинной и выпуклой геометрии

**План.** Аффинное пространство, размерность аффинного пространства, критерий того, что подмножество  $\mathbb{R}^n$  — аффинное пространство, аффинные комбинации, критерий того, что подмножество  $\mathbb{R}^n$  — аффинное пространство в терминах аффинных комбинаций пар, аффинная оболочка, представление аффинной оболочки в виде всех аффинных комбинаций, аффинная независимость, связь между аффинной независимостью и принадлежностью аффинной оболочке, размерность аффинной оболочки в терминах аффинно независимых подсистем, аффинная размерность подмножества, вычисление аффинной размерности подмножества в терминах аффинно независимых подсистем, выпуклые комбинации, критерий выпуклости в терминах выпуклых комбинаций, выпуклая оболочка как множество всех выпуклых комбинаций, совпадение аффинной оболочки множества и аффинной оболочки его выпуклой оболочки, теорема Каратеодори, стандартный  $n$ -мерный симплекс, выпуклая оболочка как образ непрерывного отображения, выпуклая оболочка компактного множества компактна, выпуклая оболочка конечного множества компактна, гиперплоскости, замкнутые и открытые полупространства, строгое разделение подмножеств евклидова пространства, непересекающиеся выпуклые компакты строго делимы, разрезание множества гиперплоскостью, опорные гиперплоскости, выпуклые тела, относительная внутренность, стандартный симплекс как выпуклое тело в своей аффинной оболочке,  $k$ -мерный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ , выпуклый компакт является выпуклым телом в своей аффинной оболочке, представление выпуклого тела как пересечения замкнутых полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями, возможность провести опорную гиперплоскость через каждую граничную точку выпуклого тела.

В лекции 9 мы определили многогранные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , склеив их особым образом из пространственных многоугольников, а также для замкнутых многогранных поверхностей ввели понятие многогранника. Мы отмечали, что введенные нами ограничения на склейку пространственных многоугольников гарантирует однозначность разбиения многогранной поверхности и многогранника на грани, а, значит, также на ребра и вершины. Затем мы перешли к изучению важного частного случая выпуклых многогранников. Мы показали, что такие многогранники получаются как пересечения конечного числа замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через грани. Для выпуклых многогранников мы доказали формулу Эйлера и вывели из нее, как могут выглядеть правильные (выпуклые) многогранники, т.е. составленные из равных правильных пространственных многоугольников, стыкующихся одинаковым образом в во всех вершинах и ребрах. Наконец, в разделе упражнений мы ввели понятие выпуклой оболочки  $\text{conv } X$  произвольного подмножества  $X$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , заметили, что эта выпуклая оболочка — наименьшее выпуклое множество, содержащее  $X$ , и выяснили, что каждый выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин.

Отметим, что задать выпуклый многогранник можно сразу или через выпуклую оболочку, или через пересечение замкнутых полупространств, а уже затем разбивать его на вершины, ребра и грани. В настоящей и следующей лекциях мы расскажем про многомерное обобщение теории выпуклых многогранников. При этом мы не будем отвлекаться на общий случай многомерных многогранных поверхностей, а сосредоточимся на понятиях и результатах выпуклой геометрии. Заинтересованные слушатели могут обратиться к монографиям [34]–[42].

### 16.1 Элементы аффинной геометрии

Выше мы определяли аффинное пространство  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  как множество  $\xi + L$ , где  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , а  $L$  — линейное подпространство. **Размерностью**  $\dim \pi$  аффинного пространства  $\pi$  называется размерность соответствующего линейного пространства  $L$ . При этом оказывается удобным рассматривать также пустые пространства  $\pi$  и  $L$ , полагая  $\dim \pi = \dim L = -1$ .

Приведем удобные критерии того, что данное подмножество  $\mathbb{R}^n$  является аффинным подпространством.

**Предложение 16.1.** Если подмножество  $A \subset \mathbb{R}^n$  является аффинным подпространством, то для любого  $a \in A$  множество  $A - a = \{b - a : b \in A\}$  — линейное подпространство  $\mathbb{R}^n$ . Обратно, если для некоторого  $a \in A$  множество  $A - a$  является линейным подпространством  $\mathbb{R}^n$ , то  $A$  — аффинное подпространство.

**Доказательство.** Если  $A = \xi + L$  и  $a = \xi + v$ , то  $A - a = L - v$  — линейное подпространство, так как  $v \in L$ .

Обратно, если  $L := A - a$  — линейное подпространство, то  $A = a + L$  — аффинное подпространство.  $\square$

Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — конечное семейство точек пространства  $\mathbb{R}^n$ . **Аффинной комбинацией** этих точек называется каждая линейная комбинация  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ , где  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

**Предложение 16.2.** Подмножество  $A \subset \mathbb{R}^n$  является аффинным подпространством, если и только если для любых точек  $a_1, a_2 \in A$  выполняется  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \in A$  при все  $\lambda_i$ , для которых  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Иными словами, то, что подмножество  $A$  — аффинное подпространство равносильно замкнутости  $A$  относительно всевозможных аффинных комбинаций пар точек из  $A$ .

**Доказательство.** Если  $A = \xi + L$ , где  $\xi \in \mathbb{R}^n$  и  $L$  — линейное подпространство  $\mathbb{R}^n$ , а  $a_i = \xi + v_i$ , то

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1(\xi + v_1) + \lambda_2(\xi + v_2) = \xi + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in A.$$

Обратно, пусть теперь  $A$  замкнуто относительно аффинных комбинаций его пар точек. По предложению 16.1, достаточно проверить, что  $A - a$  — линейное подпространство для некоторого  $a \in A$ .

Проверим сначала, что  $A - a$  замкнуто относительно умножения на числа. Пусть  $b \in A$  и  $\mu \in \mathbb{R}$ . Мы должны показать, что  $\mu(b - a) \in A - a$ , т.е.  $\mu(b - a) = t - a$  для некоторого  $t \in A$ . Но такое  $t$  равно  $\mu(b - a) + a = \mu b + (1 - \mu)a$ , т.е. аффинной комбинации  $a$  и  $b$ , так что, в силу условия,  $t \in A$ .

Докажем теперь, что  $A - a$  замкнуто относительно сложения. Пусть  $b, c \in A$ . Мы должны показать, что  $(b - a) + (c - a) \in A - a$ . По доказанному выше, достаточно проверить, что  $(b - a)/2 + (c - a)/2 \in A - a$ , но  $(b - a)/2 + (c - a)/2 = b/2 + c/2 - a$ , а  $b/2 + c/2 \in A$  по условию, что и завершает доказательство.  $\square$

Из предложения 16.2 вытекает, что пересечение любого числа аффинных подпространств снова является аффинным подпространством. **Аффинной оболочкой**  $\text{Aff } A$  множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется наименьшее по включению аффинное подпространство, содержащее  $A$ . Иными словами,  $\text{Aff } A$  равно пересечению всех аффинных подпространств, содержащих  $A$ .

**Теорема 16.3.** Аффинная оболочка  $\text{Aff } A$  множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  совпадает с множеством всевозможных аффинных комбинаций точек из  $A$ .

**Доказательство.** Заметим сначала, что если  $\pi := \xi + L \subset \mathbb{R}^n$  — аффинное пространство, то каждая аффинная комбинация его точек лежит в  $\pi$ . Действительно, пусть  $a_i = \xi + v_i \in \pi$  и  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , таковы, что  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , тогда

$$b := \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\xi + v_i) = \xi + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \xi + v,$$

где  $v \in L$ , поэтому  $b \in \pi$ . Таким образом, если  $W$  — множество всевозможных аффинных комбинаций точек из  $A$ , то  $W$  лежит в каждом аффинном подпространстве, содержащем  $A$  и, поэтому,  $W \subset \text{Aff } A$ . Остается показать, что  $W$  — аффинное пространство.

По предложению 16.2, достаточно проверить, что аффинная комбинация точек  $b = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \in W$  и  $b' = \sum_{j=1}^q \lambda'_j a'_j \in W$  также является аффинной комбинацией точек из  $A$ . Но для каждого  $\mu \in \mathbb{R}$  имеем

$$\mu b + (1 - \mu)b' = \mu \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i + (1 - \mu) \sum_{j=1}^q \lambda'_j a'_j,$$

причем  $\mu \sum_{i=1}^p \lambda_i + (1 - \mu) \sum_{j=1}^q \lambda'_j = \mu + (1 - \mu) = 1$ , так что  $\mu b + (1 - \mu)b'$  — аффинная комбинация точек из  $A$  и, значит, принадлежит  $W$ .  $\square$

В аффинной геометрии аналогом линейной независимости является аффинная независимость: конечное множество точек  $a_1, \dots, a_k$  в  $\mathbb{R}^n$  называется **аффинно независимым**, если из того, что линейная комбинация



$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  равна нулю при дополнительном условии  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$  вытекает равенство нулю всех  $\lambda_i$ . Заметим, что равенство  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$  переписывается в эквивалентном виде

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i - \left( \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \right) a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (a_i - a_k).$$

Отсюда вытекает, что аффинная независимость точек  $a_1, \dots, a_k$  равносильна линейной независимости векторов  $a_1 - a_k, \dots, a_{k-1} - a_k$  (вместо  $a_k$  можно взять любую другую точку  $a_i$ ).

**Лемма 16.4.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  — аффинно независимое множество точек в  $\mathbb{R}^n$ , и  $a_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ . Тогда множество  $A \cup \{a_{k+1}\}$  аффинно независимо, если и только если  $a_{k+1} \notin \text{Aff } A$ .

**Доказательство.** Если  $a_{k+1} \in \text{Aff } A$ , то  $a_{k+1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  для некоторых  $\lambda_i$ , удовлетворяющих  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Но тогда, положив  $\lambda_{k+1} = -1$ , получим  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0$  и не все  $\lambda_i$  равны нулю, так что  $a_1, \dots, a_{k+1}$  аффинно зависимы. Итак, мы показали, что из аффинной независимости точек  $a_1, \dots, a_{k+1}$  вытекает условие  $a_{k+1} \notin \text{Aff } A$ .

Пусть теперь выполняется условие  $a_{k+1} \notin \text{Aff } A$ . Докажем, что  $a_1, \dots, a_{k+1}$  аффинно независимы. Предположим противное, т.е. существуют не все равные нулю  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ , для которых выполняются равенства  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = 0$  и  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0$ . Заметим, что  $\lambda_{k+1} \neq 0$ , иначе исходные точки  $a_1, \dots, a_k$  аффинно зависимы. Но раз так, то

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^k \frac{-\lambda_i}{\lambda_{k+1}} a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^k \frac{-\lambda_i}{\lambda_{k+1}} = 1,$$

т.е.  $a_{k+1} \in \text{Aff } A$ , противоречие. □

**Замечание 16.5.** В силу описанной выше связи между аффинной и линейной независимостями, количество точек в аффинно независимом подмножестве  $\mathbb{R}^n$  не может превышать  $n + 1$ .

**Следствие 16.6.** Для каждого  $A \subset \mathbb{R}^n$  и каждого максимального по числу точек аффинно независимого  $M \subset A$  выполняется  $\text{Aff } M = \text{Aff } A$ .

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что  $\text{Aff } M \subsetneq \text{Aff } A$ . Тогда  $A$  не может целиком содержаться в  $\text{Aff } M$ , так как иначе  $\text{Aff } A$  — не минимальное аффинное пространство, содержащее  $A$ . Следовательно, существует точка  $b \in A$  такая, что  $b \notin \text{Aff } M$ . По лемме 16.4, множество  $M \cup \{b\}$  — аффинно независимое подмножество  $A$ , что противоречит максимальнойности  $M$ . □

Для подмножества  $A \subset \mathbb{R}^n$  определим его **аффинную размерность**  $\dim A$  как размерность аффинной оболочки  $\text{Aff } A$ . Отметим, что размерность линейного и аффинного подпространства совпадают с их аффинной размерностью. Кроме того, в силу описанной выше связи между аффинной и линейной независимостью, имеет место следующий результат.

**Следствие 16.7.** Аффинная размерность  $\dim A$  множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  равна уменьшенному на единицу максимально возможному количеству точек в независимых подмножествах  $M \subset A$ . В частности, если множество пусто, то в нем содержится 0 точек, поэтому в этом случае аффинная размерность равна  $-1$ .

## 16.2 Элементы выпуклой геометрии

Аффинная комбинация называется **выпуклой комбинацией**, если дополнительно  $\lambda_i \geq 0$  при всех  $i$ .

**Теорема 16.8.** Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  выпуклое, если и только если каждая выпуклая комбинация точек из  $A$  содержится в  $A$ .

**Доказательство.** Если любая выпуклая комбинация точек из  $A$  содержится в  $A$ , это же верно и для выпуклой комбинации каждой пары точек. Однако точка  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = (1 - \lambda_2) a_1 + \lambda_2 a_2$  лежит на отрезке  $[a_1, a_2]$ , и так получаются все точки отрезка, поэтому если  $a_1, a_2 \in X$ , то и  $[a_1, a_2] \subset A$ , что доказывает выпуклость  $A$ .

Обратно, пусть  $A$  — выпуклое множество. Принадлежность  $A$  выпуклой комбинации каждого набора из  $k$  его точек мы покажем по индукции по  $k$ . Для  $k = 1$  это очевидно. Для  $k = 2$  это вытекает из определения выпуклости. Пусть теперь  $k \geq 3$ . Предположим, что для количеств точек меньших  $k$  утверждение доказано,

и пусть  $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  — выпуклая комбинация точек  $a_i \in A$ . Если для некоторого  $i$  выполняется  $\lambda_i = 0$ , то эта выпуклая комбинация является также выпуклой комбинацией  $(k-1)$ -ой точки, поэтому индуктивное предположение приводит к  $a \in A$ .

Пусть теперь  $\lambda_i > 0$  при всех  $i$ . Заметим, что тогда также  $\lambda_i < 1$  и  $1 - \lambda_i > 0$ , откуда

$$a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} a_i.$$

Заметим, что  $b := \sum_{i=2}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} a_i$  — выпуклая комбинация, поэтому, в силу индукции,  $b \in A$ , но тогда и  $a = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1)b$  также содержится в  $A$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 16.9.** *Для любого  $A \subset \mathbb{R}^n$  выпуклая оболочка  $\text{conv } A$  совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций точек из  $A$ .*

**Доказательство.** Пусть  $C$  — множество всех выпуклых комбинаций точек из  $A$ . Так как  $A \subset \text{conv } A$ , то  $C \subset \text{conv } A$  в силу теоремы 16.8. Докажем противоположное включение. Для этого покажем, что  $A \subset C$  и  $C$  выпукло.

Так как  $a = 1a$ , т.е. каждая точка  $a \in A$  является выпуклой комбинацией, то  $A \subset C$ . Пусть  $a, a' \in C$ , тогда  $a = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$  и  $a' = \sum_{j=1}^q \lambda'_j a'_j$ , поэтому каждая точка  $b := (1 - \lambda)a + \lambda a'$  отрезка  $[a, a']$  имеет вид

$$\sum_{i=1}^p (1 - \lambda) \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^q \lambda \lambda'_j a'_j.$$

Заметим, что  $(1 - \lambda) \lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda \lambda'_j \geq 0$ , и

$$\sum_{i=1}^p (1 - \lambda) \lambda_i + \sum_{j=1}^q \lambda \lambda'_j = (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

поэтому  $b$  — выпуклая комбинация точек из  $A$ , следовательно,  $b \in C$ . Последнее доказывает, что множество  $C$  выпукло а, потому,  $\text{conv } A \subset C$ .  $\square$

**Следствие 16.10.** *Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $A = \text{conv } M$ , тогда  $\text{Aff } A = \text{Aff } M$ . В частности,  $\dim M = \dim(\text{conv } M)$ .*

**Доказательство.** Так как  $M \subset A$ , то  $\text{Aff } M \subset \text{Aff } A$ . Покажем, что имеет место обратное включение.

Выберем произвольную точку  $b \in \text{Aff } A$ . По теореме 16.3,  $b$  равно аффинной комбинации  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  некоторых точек  $a_i$  из  $A$ . По теореме 16.9, каждая точка  $a_i$  равна некоторой выпуклой комбинации  $\sum_{p_i=1}^{k_i} \mu_{p_i} a_{p_i}^i$  некоторых точек  $a_{p_i}^i$  из  $M$ , поэтому в результате

$$b = \sum_{i,p_i} \lambda_i \mu_{p_i} a_{p_i}^i, \quad \text{причем} \quad \sum_{i,p_i} \lambda_i \mu_{p_i} = \sum_i \lambda_i \sum_{p_i} \mu_{p_i} = \sum_i \lambda_i = 1,$$

так что  $b$  равно аффинной комбинации точек из  $M$  и поэтому  $b \in \text{Aff } M$ .  $\square$

**Теорема 16.11** (Каратеодори). *Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$ , тогда каждый  $a \in \text{conv } A$  может быть представлен в виде выпуклой комбинации не более чем  $(n+1)$ -го элемента из  $A$ .*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существует  $a \in \text{conv } A$ , который не представим в виде такой комбинации. По теореме 16.9, существуют положительные  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  и  $a_1, \dots, a_k \in A$ , для которых  $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ . Выберем  $k$  наименьшим возможным, тогда, в силу предположения,  $k > n + 1$ .

Так как векторы  $a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1$  линейно зависимы, существуют не все равные нулю  $\mu_2, \dots, \mu_k$ , для которых  $\sum_{i=2}^k \mu_i (a_i - a_1) = 0$ . Меняя, если необходимо, знаки всех  $\mu_i$ , добьемся того, чтобы среди  $\mu_i$  были положительные.

Положим  $\mu_1 = -\sum_{i=2}^k \mu_i$ , тогда  $\sum_{i=1}^k \mu_i a_i = 0$  и, значит, при каждом  $\gamma \in \mathbb{R}$  выполняется

$$a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i - \gamma \sum_{i=1}^k \mu_i a_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \gamma \mu_i) a_i.$$

Выберем  $\gamma \geq 0$  наименьшим среди всех таких, что  $\nu_i := \lambda_i - \gamma\mu_i \geq 0$  при всех  $i$ . Так как среди  $\mu_i$  есть положительные, то  $\gamma > 0$ , и для некоторого  $j$  выполняется  $\nu_j = 0$ . Пусть  $J = \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$ . Заметим, что  $\sum_{i \in J} \nu_i = 1$ , поэтому мы представили  $a$  в виде выпуклой комбинации меньшего чем  $k$  элементов из  $A$ , противоречие.  $\square$

**Стандартным  $n$ -мерным симплексом** назовем множество

$$\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1\}.$$

Из теоремы 16.11 мгновенно вытекает следующий результат.

**Следствие 16.12.** Для  $A \subset \mathbb{R}^n$  рассмотрим отображение  $f: \Delta^n \times A^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное так:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i.$$

Тогда  $\text{conv } A$  совпадает с образом  $\text{im } f$  отображения  $f$ .

Выведем из следствия 16.12 ряд топологических заключений.

**Следствие 16.13.** Отображение  $f$ , построенное в следствии 16.12, непрерывно, поэтому, в частности, если  $A$  компактно, то  $\text{conv } A = \text{im } f$  также компактно.

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $F: \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное так:

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i.$$

Координатные функции этого отображения — многочлены второй степени, поэтому  $F$  непрерывно. Отображение  $f$  является соответствующим ограничением  $F$ , поэтому также непрерывно в силу предложения 3.28. Компактность  $\text{conv } A$  для компактного  $A$  вытекает из компактности симплекса  $\Delta^n$  (он замкнут и ограничен), компактности декартова произведения компактов, а также компактности непрерывного образа компакта.  $\square$

**Следствие 16.14.** Выпуклая оболочка конечного множества компактна.

### 16.2.1 Разделяющие гиперплоскости

Напомним, что **гиперплоскостью** в  $\mathbb{R}^n$  называется аффинное подпространство размерности  $n - 1$ . Таким образом, каждая гиперплоскость задается в декартовых координатах  $x_1, \dots, x_n$  уравнением

$$\langle \alpha, x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — радиус-вектор переменной точки, а  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — ненулевой вектор.

Каждая такая гиперплоскость ограничивает два **замкнутых полупространства**, заданных неравенствами  $\langle \alpha, x \rangle \geq c$  и  $\langle \alpha, x \rangle \leq c$ , и два соответствующих **открытых полупространства**, заданных строгими неравенствами  $\langle \alpha, x \rangle > c$  и  $\langle \alpha, x \rangle < c$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — непустые подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Говорят, что гиперплоскость  $\pi$  **строго разделяет**  $A$  и  $B$ , если  $A$  и  $B$  лежат в разных открытых полупространствах относительно  $\pi$ .

**Теорема 16.15.** Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся непустые выпуклые компакты в  $\mathbb{R}^n$ , тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая  $A$  и  $B$ .

**Доказательство.** Функция  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(a, b) = |ab|$ , непрерывна, и так как  $A \times B$  — компакт, то  $f$  принимает свое наименьшее значение  $d$  на некоторой паре  $(a_0, b_0)$ . Так как  $A \cap B = \emptyset$ , то  $a_0 \neq b_0$  и  $d > 0$ . Пусть  $c$  — середина отрезка  $[a_0, b_0]$ , а  $\pi$  — гиперплоскость, перпендикулярная  $[a_0, b_0]$  и проходящая через  $c$ . Покажем, что  $\pi$  не пересекает  $A$  и  $B$ , откуда и заключим, что  $\pi$  разделяет  $A$  и  $B$ , так как точки  $a_0$  и  $b_0$  лежат в разных открытых полупространствах относительно  $\pi$ , а выпуклые множества связны.

Выберем произвольную точку  $w \in \pi$ , тогда  $a_0wb_0$  — равнобедренный треугольник (возможно, вырожденный) с основанием  $a_0b_0$ . Но тогда для точек  $t \in (a_0, w]$ , достаточно близких к  $a_0$ , имеем  $|tb_0| < |a_0b_0| = d$  (очевидное свойство равнобедренных треугольников). Так как  $d$  — наименьшее расстояние от  $b_0$  до точек из  $A$ , точка  $t$  не может содержаться в  $A$ . Отсюда и из выпуклости  $A$  вытекает, что и  $w \notin A$ , иначе  $t \in [w, a_0] \subset A$ , противоречие. Аналогично показывается, что  $w \notin B$ , что и требовалось.  $\square$

## 16.2.2 Опорные гиперплоскости

Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное множество. **Всюду ниже будем предполагать, что  $n \geq 1$ .** Говорят, что гиперплоскость в  $\mathbb{R}^n$  *разрезает*  $A$ , если оба ограниченных ей открытых полупространства пересекают  $A$ . Гиперплоскость  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  называется *опорной для*  $A$ , если  $\pi$  не разрезает  $A$  и  $|A\pi| = 0$ .<sup>1</sup>

Таким образом, если гиперплоскость задается уравнением  $\langle \alpha, x \rangle = c$ , то она является опорной для  $A$ , если и только если выполняется или  $\sup_{x \in A} \langle \alpha, x \rangle = c$ , или  $\inf_{x \in A} \langle \alpha, x \rangle = c$ . Иными словами, для заданного ненулевого вектора  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  гиперплоскость, перпендикулярная этому вектору, будет опорной для  $A$ , если и только если линейная функция  $\ell_\alpha(x) = \langle \alpha, x \rangle$  ограничена на  $A$  сверху и/или снизу, и тогда в качестве  $c$  нужно выбрать соответствующую верхнюю и/или нижнюю грани (если  $\ell_\alpha(x)$  ограничена на  $A$  с обеих сторон, и соответствующие верхние и нижние грани различны, то мы получаем две опорные плоскости).

Ясно, что всем векторам, коллинеарным данному  $\alpha$ , отвечают одни и те же опорные гиперплоскости. Из сказанного вытекает, что для ограниченного  $A$  для каждого направления  $\alpha$  существуют опорные гиперплоскости. Кроме того, если  $A$  компактно, то точная верхняя и нижняя грани функции  $\ell_\alpha$  на  $A$  достигаются в некоторых точках из  $A$ , поэтому каждая опорная гиперплоскость пересекает  $A$ . В случае компактов это позволяет определить опорные гиперплоскости  $\pi$  проще, ограничившись двумя условиями:  $\pi$  пересекает  $A$ , но не разрезает.

Выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^n$ , имеющий непустую внутренность, называется *выпуклым телом*. Также нас будут интересовать выпуклые компакты, являющиеся выпуклыми телами в своих аффинных оболочках (ниже мы покажем, что каждый выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^n$  в действительности является выпуклым телом в своей аффинной оболочке). Для удобства работы с такими объектами введем понятия относительной внутренней и относительной границы.

Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное подмножество. Тогда через  $\text{relint } A$  обозначим внутренность множества  $A$ , рассматриваемого как подмножество своей аффинной оболочки  $\text{Aff } A$ . Множество  $\text{relint } A$  называется *относительной внутренней для*  $A$ . Отметим, что в лекции 9 мы уже имели дело с этим понятием, когда занимались пространственными многоугольниками. Впрочем, тогда мы не вводили новых обозначений, а условились относительную внутренность пространственного многоугольника  $F$  обозначать по-старому  $\text{Int } F$ .

**Лемма 16.16.** Пусть  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — стандартный  $n$ -мерный симплекс и  $\pi = \text{Aff } \Delta^n$  — аффинная гиперплоскость, заданная уравнением  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда  $\Delta^n$  — выпуклое тело в  $\pi$ , и относительная внутренность  $\text{relint } \Delta^n$  равна множеству всех выпуклых комбинаций базисных векторов из  $\mathbb{R}^n$  с положительными коэффициентами.

**Доказательство.** Обозначим  $W$  положительный ортант в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , и пусть  $W' = \text{Int } W$ , т.е.

$$W = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1\} \text{ и } W' = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n+1\}.$$

По определению,  $\Delta^n = W \cap \pi$ , поэтому множество  $\Delta^n$  замкнуто. Так как для каждого  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \Delta^n$  выполняется  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  при всех  $i$ , множество  $\Delta^n$  ограничено и, потому, компактно. Осталось выяснить, как устроена относительная внутренность  $\text{relint } \Delta^n$  и показать, что она непуста.

Возьмем произвольный  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \Delta^n$ , для которого  $\lambda_i > 0$  при всех  $i$ , например, пусть все  $\lambda_i$  равны  $1/(n+1)$ . Тогда  $x \in W'$ , поэтому существует открытый шар  $U_\varepsilon(x)$ , содержащийся в  $W'$ . Положим  $U = U_\varepsilon(x) \cap \pi \subset \Delta^n$ , тогда  $U$  — открытый шар в  $\pi$  и, значит,  $x \in \text{relint } \Delta^n$ . Это, в частности, доказывает, что  $\text{relint } \Delta^n \neq \emptyset$ . Осталось убедиться, что если некоторое  $\lambda_i$  равно нулю, то каждый шар  $U_\varepsilon(x)$  содержит точки из  $\pi$ , не лежащие в  $\Delta^n$  (проверьте).  $\square$

**Лемма 16.17.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$  — аффинно независимое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\text{conv } A$  — выпуклое тело.

<sup>1</sup>В некоторых монографиях дополнительно требуется, чтобы  $\pi$  не содержала  $A$ . В интересующем нас случае это будет выполняться автоматически, так что мы будем следовать тем монографиям, где такого требования нет.

**Доказательство.** Пусть  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — стандартный  $n$ -мерный симплекс и  $\pi = \text{Aff } \Delta^n$  — аффинная гиперплоскость. Рассмотрим отображение  $f: \pi \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное так:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = a_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{n+1}).$$

Так как векторы  $a_1 - a_{n+1}, \dots, a_n - a_{n+1}$  линейно независимы, то отображение  $f$  биективно, так что  $f$  представляет собой композицию линейного изоморфизма и сдвига. В силу леммы 16.16, стандартный симплекс  $\Delta^n$  является выпуклым телом в  $\pi$ , следовательно, его  $f$ -образ, равный  $\text{conv } A$ , — также выпуклое тело.  $\square$

Выпуклая оболочка  $(k+1)$ -ой аффинно независимой точки в  $\mathbb{R}^n$  называется  $k$ -мерным симплексом. Таким образом, стандартный  $n$ -мерный симплекс в  $\mathbb{R}^{n+1}$  является частным случаем.

**Лемма 16.18.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый компакт, тогда  $A$  является выпуклым телом в  $\text{Aff } A$ .

**Доказательство.** Положим  $k = \dim \text{Aff } A$ . В силу следствия 16.7, каждое максимальное по числу точек аффинно независимое множество  $M \subset A$  содержит  $(k+1)$ -ую точку. Тогда, в силу леммы 16.17,  $\text{conv } M$  — выпуклое тело в  $\text{Aff } A$ . Так как  $\text{conv } M \subset A$ , то  $\text{relint } A \neq \emptyset$ , поэтому  $A$  выпуклое тело в  $\text{Aff } A$ .  $\square$

**Теорема 16.19.** Каждое выпуклое тело равно пересечению содержащих его замкнутых полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями.

**Доказательство.** Пусть  $X$  — выпуклое тело, и  $Y$  — пересечение всех содержащих  $X$  полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями. Тогда  $X \subset Y$ . Докажем обратное включение. Предположим противное, т.е. существует  $y \in Y \setminus X$ . По теореме 16.15,  $X$  и  $\{y\}$  строго разделяются некоторой гиперплоскостью. Пусть  $\langle \alpha, x \rangle = c$  — ее уравнение. Без ограничения общности, будем считать, что  $\langle \alpha, y \rangle > c$ , тогда для всех  $x \in X$  выполняется  $\langle \alpha, x \rangle < c$ . Пусть  $x_0$  — точка максимума функции  $\langle \alpha, x \rangle$  на  $X$ , существующая в силу компактности  $X$ , тогда  $c_0 := \langle \alpha, x_0 \rangle < c$ , тогда гиперплоскость, заданная уравнением  $\langle \alpha, x \rangle = c_0$ , является опорной к  $X$ , так как содержит  $x_0 \in X$ , а все  $x \in X$  содержатся в замкнутом полупространстве  $\langle \alpha, x \rangle \leq c_0$ . А так как  $\langle \alpha, y \rangle > c > c_0$ , то это полупространство не содержит  $y$  и, значит,  $y \notin Y$ , противоречие.  $\square$

**Лемма 16.20.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело,  $x \in \text{Int } X$  и  $p \in \partial X$ . Тогда точки луча  $xp$ , следующие за точкой  $p$ , не содержатся в  $X$ .

**Доказательство.** Действительно, так как  $p \in \partial X$ , то каждая окрестность  $p$  содержит точки, не лежащие в  $X$ . С другой стороны, если  $q$  — точка на луче  $xp$ , лежащая за  $p$  и принадлежащая  $X$ , а  $B_\varepsilon(x)$  — невырожденный замкнутый шар, лежащий в  $X$  (он существует, так как  $x \in \text{Int } X$ ), то конус  $C := qB_\varepsilon(x)$ , составленный из всех отрезков, соединяющих  $q$  с точками шара  $B_\varepsilon(x)$ , лежит в  $X$  и содержит  $p$  в качестве своей внутренней точки. Но тогда некоторая окрестность точки  $p$  состоит целиком из точек тела  $X$ , противоречие.  $\square$

**Теорема 16.21.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело, тогда через каждую точку  $p$  его топологической границы  $\partial X$  проходит некоторая опорная гиперплоскость.

**Доказательство.** Пусть  $x$  — внутренняя точка тела  $X$  и  $0 < t < 1$ . Рассмотрим гомотеию  $H_{x,t}$  с центром в  $x$  и коэффициентом  $t$ , т.е. преобразование  $\mathbb{R}^n$ , заданное так:  $H_{x,t}(y) = x + t(y - x)$ . Положим  $X_t = H_{x,t}(X)$ . Так как, по лемме 16.20, на луче  $xp$  за точкой  $p$  не лежит точек из  $X$ , и при гомотетии  $H_{x,t}$  этот луч переходит в себя, стягиваясь в силу  $t < 1$ , то  $X_t$  не содержит точку  $p$ . По теореме 16.15, существует гиперплоскость  $\pi_t$ , разделяющая  $X_t$  и  $p$ .

Рассмотрим последовательность  $0 < t_i < 1$ , стремящуюся к 1, и пусть  $\langle \alpha_i, x \rangle = c_i$  — уравнение гиперплоскости  $\pi_{t_i}$ , причем  $\alpha_i$  — единичный вектор. Так как каждая гиперплоскость  $\pi_{t_i}$  разделяет точки  $x$  и  $p$ , она пересекает отрезок  $[x, p]$ , поэтому множество  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$  ограничено (убедитесь в этом), т.е. лежит в некотором отрезке  $[a, b]$ . С другой стороны, множество  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$  является подмножеством стандартной единичной сферы  $S^{n-1}$ . Отсюда вытекает, что в последовательности  $(c_i, \alpha_i)$ , лежащей в компакте  $[a, b] \times S^{n-1}$ , содержится сходящаяся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что исходная последовательность  $(c_i, \alpha_i)$  сходится к некоторому  $(c, \alpha)$ . Покажем, что гиперплоскость  $\pi$ , заданная уравнением  $\langle \alpha, x \rangle = c$ , — опорная и проходит через  $p$ .

При  $t_i \rightarrow 1$  расстояние  $|pX_{t_i}|$  стремится к нулю, и так как  $p$  и  $X_{t_i}$  находятся в разных открытых полупространствах относительно  $\pi_{t_i}$ , имеем  $|p\pi_{t_i}| \leq |pX_{t_i}| \rightarrow 0$ , так что  $|p\pi| = 0$ , откуда  $p \in \pi$ .

Покажем теперь, что  $\pi$  не разрезает  $X$ . Предположим, что это не так. Тогда существуют точки  $y, z \in X$ , лежащие в разных открытых полупространствах относительно  $\pi$ . Это, без ограничения общности, означает, что  $\langle \alpha, y \rangle < c$  и  $\langle \alpha, z \rangle > c$ . Так как  $\alpha_i \rightarrow \alpha$ ,  $c_i \rightarrow c$  и существуют  $y_i, z_i \in X_{t_i}$  такие, что  $y_i \rightarrow y$  и  $z_i \rightarrow z$ , то для достаточно больших  $i$  выполняется  $\langle \alpha_i, y_i \rangle < c_i$  и  $\langle \alpha_i, z_i \rangle > c_i$ , т.е. такие  $\pi_{t_i}$  разрезают  $X_{t_i}$ , противоречие. Следовательно,  $\pi$  — искомая опорная гиперплоскость.  $\square$

## Упражнения к главе 16

**Упражнение 16.1.** Пусть  $a_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и для каждого  $i$  положим  $a'_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Докажите, что точки  $a_1, \dots, a_k$  аффинно независимы, если и только если векторы  $a'_1, \dots, a'_k$  линейно независимы.

**Упражнение 16.2.** Пусть  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  — гиперплоскость. Покажите, что если  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  — аффинное подпространство размерности  $k$ , причем  $\sigma \cap \pi \neq \emptyset$  и  $\sigma \not\subset \pi$ , то  $\dim(\sigma \cap \pi) = k - 1$ .

**Упражнение 16.3.** Покажите, что замыкание и внутренность выпуклого подмножества  $\mathbb{R}^n$  выпуклы.

**Упражнение 16.4.** Покажите, что

- (1) выпуклая оболочка открытого множества также является открытым множеством;
- (2) приведите пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого незамкнута.

**Упражнение 16.5.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество,  $a \in A$  и  $b \in \text{Int } A$ . Покажите, что все точки интервала  $(a, b)$  лежат в  $\text{Int } A$ .

**Упражнение 16.6.** Пусть  $M = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$  — аффинно зависимое множество. Покажите, что существует такое разбиение  $\{M_1, M_2\}$  множества  $M$ , что  $\text{conv } M_1 \cap \text{conv } M_2 \neq \emptyset$ . Выведите отсюда *теорему Радона*, утверждающую, что разбиение с таким свойством существует для каждого множества  $M$ , состоящего из  $k \geq n + 2$  точек.

**Упражнение 16.7.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — произвольные непустые множества и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Определим *сумму Минковского*  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  и  $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ . Тем самым, определены линейные комбинации подмножеств  $\mathbb{R}^n$ . Также напомним, что *аффинным отображением*  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется композиция линейного отображения  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и сдвига  $\tau: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\tau(y) = y + a$ , где  $a \in \mathbb{R}^m$ .

- (1) Покажите, что  $\text{conv}$  — линейная операция на подмножествах  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Покажите, что линейная комбинация выпуклых множеств снова выпуклое множество.
- (3) Покажите, что операция выпуклой оболочки и аффинное отображение перестановочны, т.е. для каждого непустого  $M \subset \mathbb{R}^n$  выполняется  $f(\text{conv } M) = \text{conv } f(M)$ .

**Определение 16.22.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклые подмножества. Говорят, что  $A$  и  $B$  *отделимы*, если существует аффинная гиперплоскость  $\pi$  такая, что  $A$  лежит в одной из замкнутых полупространств, ограниченных  $\pi$ , а  $B$  — в другом. Про такую гиперплоскость  $\pi$  говорят, что она *разделяет*  $A$  и  $B$ .

**Упражнение 16.8.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело, и  $B \subset \mathbb{R}^n$  — непустой выпуклый компакт. Докажите, что  $A$  и  $B$  отделимы, если и только если  $\text{Int } A \cap \text{relint } B = \emptyset$ .

## Лекция 17

# Дополнение 2: Грани и двойственность выпуклых тел

**План.** Для выпуклых тел: собственная грань, несобственная грань, грань, размерность грани, вершины; для выпуклых компактов — те же понятия, индуцирование граней на подкомпакте, пример: вершины грани не обязаны быть вершинами выпуклого тела, экстремальные точки выпуклого тела, пример: не всякая экстремальная точка является вершиной, наследование экстремальности гранями, теорема Минковского про выпуклую оболочку множества экстремальных точек, теорема Страшевича о выпуклой оболочке множества всех вершин, поляр или двойственное множество, общие свойства поляр, задание граней поляр, естественное биективное отображение между множествами граней выпуклого тела и его поляр, правильные грани и их свойства.

Продолжим изучать выпуклые тела в  $\mathbb{R}^n$ .

### 17.1 Грани и экстремальные точки

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело. Тогда под *собственной гранью тела*  $X$  будем понимать каждое множество  $X \cap \pi$ , где  $\pi$  — опорная гиперплоскость. *Несобственной гранью тела*  $X$  назовем само  $X$  или пустое множество  $\emptyset$ . *Гранью выпуклого тела*  $X$  назовем или собственную, или несобственную грань. Множество всех граней выпуклого тела  $X$  обозначим  $\mathcal{F}(X)$ .<sup>1</sup> Отметим, что при  $n = 0$  имеем  $\mathcal{F}(X) = \{\emptyset, X\}$ , так что в этом случае все грани несобственные.

Из теоремы 16.21 мгновенно получаем следующий результат.

**Следствие 17.1.** *Топологическая граница каждого выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^n$  равна объединению всех его собственных граней.*

*Размерностью грани*  $F$  называется размерность аффинной оболочки  $\text{Aff } F$ . Пустая грань имеет размерность  $-1$ , грани размерности  $0$  называются *вершинами*  $X$ . Множество всех вершин выпуклого тела  $X$  обозначим  $\text{vert } X$ . Таким образом,  $\text{vert } X \subset \mathcal{F}(X)$ . Заметим, что при  $n = 0$  выполняется  $\text{vert } X = \{X\}$ , т.е.  $X$  имеет единственную вершину, являющуюся несобственной гранью; при  $n \geq 1$  все вершины — собственные нульмерные грани.

Данные только что определения непосредственно переносятся и на произвольные выпуклые компакты в связи с тем, что, по лемме 16.18, каждый выпуклый компакт  $Y$  является выпуклым телом в своей аффинной оболочке  $\text{Aff } Y$ . Таким образом, если рассматривать  $Y$  как подмножество в  $\text{Aff } Y$ , то для него определено понятие *грани*, в частности, понятие *вершины*. Множество так определенных граней для  $Y$  обозначим  $\mathcal{F}(Y)$ , а множество вершин  $Y$  — через  $\text{vert } Y$ .

**Лемма 17.2.** *Пусть  $Z \subset Y \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклые компакты. Тогда для каждой грани  $F \in \mathcal{F}(Y)$  выполняется  $F \cap Z \in \mathcal{F}(Z)$ . В частности, все грани компакта  $Y$ , содержащиеся в  $Z$ , являются гранями компакта  $Z$ .*

<sup>1</sup>В отношении понятия грани выпуклого тела имеется традиционное расхождение в терминологии. В англоязычной литературе есть два основных термина: *face* и *exposed face*, а также введенный в [36] термин *rooem* (*face* на иврите). Данное нами определение грани (*face*) следует [38] и [36]. В [35] и [39] грани в нашем понимании называются *exposed faces*, а под *faces* понимают то, что мы приводим в упражнениях (определение 17.19). Также этой традиции следует и [43], где *exposed faces* переводится как *правильные грани*. Как вытекает из приводимой нами теории, объекты, определенные в 17.19, ведут себя более естественно, скажем, по отношению к наследованию, поэтому, в противоположность к [43], мы сохранили термин *правильные грани* за последними.



**Доказательство.** Переходя, если необходимо, к аффинной оболочке множества  $Y$ , без ограничения общности будем сразу считать, что  $Y$  — выпуклое тело. Если  $F$  — несобственная грань, то  $F \cap Z$  — также несобственная грань, поэтому  $F \cap Z \in \mathcal{F}(Z)$ . Пусть теперь  $F$  — собственная грань, и  $\pi$  — опорная гиперплоскость для  $Y$  такая, что  $F = Y \cap \pi$ .

Если  $F \cap Z$  или пусто, или совпадает с  $Z$ , то все доказано. Пусть теперь  $F \cap Z \neq \emptyset$  и  $F \cap Z \neq Z$ . Но тогда  $\text{Aff } Z \not\subset \pi$ , так как иначе  $F \cap Z = Y \cap \pi \cap Z = \pi \cap Z = Z$ , противоречие. Но тогда  $\pi' := \pi \cap \text{Aff } Z$ , в силу упражнения 16.2, является гиперплоскостью в  $\text{Aff } Z$ .

Пусть  $\Pi$  — замкнутое полупространство в  $\mathbb{R}^n$ , ограниченное  $\pi$  и содержащее  $Y$ . Плоскость  $\pi'$  ограничивает в  $\text{Aff } Z$  два полупространства, одно из которых, обозначим его  $\Pi'$ , содержится в  $\Pi$ , а его дополнение  $\text{Aff } Z \setminus \Pi'$  не пересекает  $\Pi$ . Но тогда  $Z \subset \Pi'$ , так что  $\pi'$  не разрезает  $Z$ . Кроме того, так как

$$\pi' \cap Z = \pi \cap (\text{Aff } Z) \cap Z = \pi \cap Z = \pi \cap Y \cap Z = F \cap Z \neq \emptyset,$$

то  $\pi'$  пересекает  $Z$  и, значит,  $\pi'$  — опорная плоскость к  $Z$  в  $\text{Aff } Z$ . При этом, как мы только что показали,  $F \cap Z = \pi' \cap Z$ , откуда  $F \cap Z \in \mathcal{F}(Z)$ .  $\square$

**Замечание 17.3.** В лемме 17.2 мы в частности показали, что для любой грани  $F$  выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^n$  и любого  $F' \in \mathcal{F}(F)$  все грани из  $F$ , лежащие в  $F'$ , являются также гранями  $F'$ . Возникает естественный вопрос: верно ли обратное, т.е. что каждая грань из  $F'$  является гранью  $F$ ? Иными словами, верно ли, что  $\mathcal{F}(F') \subset \mathcal{F}(F)$ ?

Оказывается, в общем случае ответ отрицательный. Приведем пример, показывающий, что вершины грани не обязаны быть вершинами выпуклого тела, которому грань принадлежит. Рассмотрим на евклидовой плоскости замкнутую  $\varepsilon$ -окрестность  $X$  отрезка  $I$ . Граница этой окрестности состоит из

- двух отрезков  $I_1$  и  $I_2$ , полученных из  $I$  смещением последнего в перпендикулярном ему направлении на расстояние  $\varepsilon$ , а также
- двух открытых полуокружностей  $S_1$  и  $S_2$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами в концах  $I$ , см. рис. 17.1.

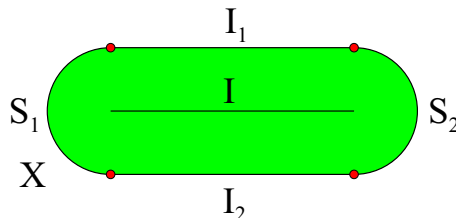


Рис. 17.1: Вершины грани выпуклого тела не обязаны быть вершинами самого тела.

Вершинами выпуклого тела  $X$  являются все точки из  $S_1$  и  $S_2$ . Отрезки  $I_1$  и  $I_2$  — одномерные грани. Вершины граней  $I_k$  — концы этих отрезков. Тем не менее, эти концы вершинами  $X$  не являются, так как через них проходят лишь те опорные прямые к  $X$ , которые пересекают  $X$  по одномерным граням  $I_k$ .

Отметим, что каждая вершина  $v \in \text{vert } X$  удовлетворяет следующему свойству: точка  $v$  не является внутренней точкой ни одного отрезка, лежащего в  $X$ . Действительно, если  $\pi$  — опорная гиперплоскость, для которой  $\{v\} = \pi \cap X$  — вершина, то для отрезка  $[a, b] \subset X$  такого, что  $v \in (a, b)$ , точки  $a$  и  $b$  лежат в разных открытых полупространствах, ограниченных  $\pi$ , что невозможно, так как опорная плоскость  $\pi$  не разрезает  $X$ . Точки с таким свойством называются экстремальными. Более точно, точка  $y$  из произвольного выпуклого множества  $Y \subset \mathbb{R}^n$  называется *экстремальной*, если она не является внутренней ни для одного отрезка, лежащего в  $Y$ . Множество всех экстремальных точек для  $Y$  обозначим  $\text{ext } Y$ . Отметим, что для нульмерного тела  $X$  выполняется  $\text{ext } X = \{X\}$ .

**Замечание 17.4.** Не всякая экстремальная точка является вершиной. Рассмотрим тот же пример из замечания 17.3. Тогда четыре конца двух полуокружностей экстремальны, но не являются вершинами, так как единственная опорная прямая, проходящая через такую точку, — это прямая, проходящая через соответствующий  $I_k$ .

**Лемма 17.5.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело и  $F$  — некоторая его грань. Тогда точка  $x \in F$  экстремальна для  $F$ , если и только если она экстремальна для  $X$ . Иными словами,  $\text{ext } F = F \cap \text{ext } X$ .

**Доказательство.** Если точка  $x$  экстремальна для  $X$ , то она не является внутренней ни для одного отрезка, лежащего в  $X$  и, в частности, ни для одного отрезка, лежащего в  $F$ . Обратно, предположим, что  $x$  — экстремальная точка для  $F$ , не являющаяся экстремальной для  $X$ , т.е. существует отрезок  $[a, b] \subset X$  такой, что  $x \in (a, b)$ . Пусть  $\pi$  — опорная гиперплоскость, для которой  $F = X \cap \pi$ . Так как  $[a, b]$  не содержится в  $F$ , то он также не содержится и в  $\pi$ . Последнее означает, что точки  $a$  и  $b$  лежат в разных открытых полупространствах относительно  $\pi$ . Но последнее противоречит определению опорной гиперплоскости.  $\square$

Имеет место следующий результат.

**Теорема 17.6** (теорема Минковского). Каждое выпуклое тело  $X \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклой оболочкой множества своих экстремальных точек:  $X = \text{conv}(\text{ext } X)$ .

**Доказательство.** Доказательство проведем индукцией по  $n$ . При  $n = 0$  тело  $X$  совпадает со своей единственной экстремальной точкой, поэтому утверждение имеет место. Предположим теперь, что  $n > 0$  и для всех выпуклых тел меньшей  $n$  размерности утверждение доказано. Положим  $M = \text{ext } X$ . Мы должны показать, что  $X = \text{conv } M$ . Так как  $M \subset X$  и  $X$  выпукло, то  $\text{conv } M \subset X$ . Поэтому достаточно проверить, что каждая точка  $x \in X$  содержится в  $\text{conv } M$ .

Если  $x \in M$ , то все показано. Пусть теперь  $x \notin M$ , тогда существует отрезок  $[a, b] \subset X$  такой, что  $x \in (a, b)$ . Рассмотрим луч  $\lambda_a$ , начинающийся в  $x$  и проходящий через  $a$ . Так как  $X$  ограничено, то  $X \cap \lambda_a$  — ограниченное замкнутое выпуклое множество, т.е. отрезок. Обозначим  $A$  отличный от  $x$  конец этого отрезка. Аналогично определим  $B$ . Тогда  $A$  и  $B$  — граничные точки  $X$ . По теореме 16.21, существуют опорные гиперплоскости  $\pi_A$  и  $\pi_B$ , проходящие соответственно через  $A$  и  $B$ . Пусть  $F_A = X \cap \pi_A$  и  $F_B = X \cap \pi_B$  — соответствующие грани  $X$ . Тогда  $\dim F_A < n$  и  $\dim F_B < n$ , так что к выпуклым телам  $F_A$  и  $F_B$ , рассматриваемым как подмножества своих аффинных оболочек, применимо предположение индукции. Это означает, что  $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$  и  $B = \sum_{j=1}^q \mu_j b_j$  — выпуклые комбинации точек  $a_i$  и  $b_j$ , являющихся экстремальными соответственно для  $F_A$  и  $F_B$ . В силу леммы 17.5, точки  $a_i$  и  $b_j$  являются также экстремальными и для  $X$ . Так как  $x \in (A, B)$ , существует  $0 < \lambda < 1$ , для которого  $x = (1 - \lambda)A + \lambda B$ , откуда  $x$  — выпуклая комбинация точек  $a_i$  и  $b_j$ , так что  $x \in \text{conv } M$ .  $\square$

**Замечание 17.7.** В теореме 17.6 множество экстремальных точек нельзя заменить на множество вершин. Действительно, достаточно рассмотреть пример из замечания 17.4 и убедиться, что выпуклая оболочка множества вершин в этом примере не содержит отрезков  $I_1$  и  $I_2$ . Тем не менее, в этом же примере все множество является замыканием выпуклой оболочки множества вершин. В действительности, этот факт верен в общем случае и называется теоремой Страшевича.

**Лемма 17.8.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело,  $a \in \mathbb{R}^n$  и  $x \in X$  — наиболее удаленная от  $a$  точка из  $X$ . Тогда  $x$  — вершина  $X$ . В частности, у каждого выпуклого тела существует вершина.

**Доказательство.** В случае  $n = 0$  утверждение имеет место, так как все  $X$  является своей вершиной. Пусть теперь  $n \geq 1$ , тогда  $X$  состоит более чем из одной точки, так что  $a \neq x$ . Обозначим  $\pi$  гиперплоскость, проходящую через  $x$  перпендикулярно отрезку  $[a, x]$ , тогда для каждой точки  $y \in \pi$ , отличной от  $x$ , выполняется  $|ay| > |ax|$ , поэтому  $y \notin X$ , так что  $\pi \cap X = \{x\}$ , поэтому  $\pi$  — опорная гиперплоскость, а  $x$  — вершина.  $\square$

**Лемма 17.9.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , — выпуклое тело, и  $P'$  — открытое полупространство. Предположим, что  $X \cap P' \neq \emptyset$ , тогда  $P'$  содержит некоторую вершину тела  $X$ .

**Доказательство.** Если  $X \subset P'$ , то наличие вершины вытекает из леммы 17.8. Пусть теперь  $X \setminus P' \neq \emptyset$ .

Обозначим  $\pi$  гиперплоскость, ограничивающую  $P'$ , и выберем произвольное  $a \in X \cap P'$ . Пусть  $b$  — ближайшая к  $a$  точка из  $\pi$ , тогда  $a \neq b$  и отрезок  $[a, b]$  перпендикулярен  $\pi$ . Положим  $s = |ab|$ . На луче  $\ell_a$  с началом в  $a$  и проходящем через  $b$  выберем точку  $c$  за точкой  $b$ . Положим  $t = |cb|$  и  $d = \text{diam } X$ , см. рис. 17.2.

Точку  $c$  будем брать настолько далекой от  $\pi$ , чтобы  $t$  было больше расстояния от каждой точки  $x \in X \setminus P'$  до  $\pi$ . Так как  $a \in \ell_a$  и поэтому расстояние от любого  $x \in X \setminus P'$  до  $\ell_a$  не больше  $\text{diam } X$ , получаем следующую оценку:  $|cx| \leq \sqrt{t^2 + d^2}$ . Покажем, что при достаточно больших  $t$  выполняется

$$|cx| \leq \sqrt{t^2 + d^2} < |ca| = t + s.$$

Последнее неравенство равносильно  $d^2 < 2ts + s^2$ , что заведомо верно при достаточно больших  $t$ . Из сказанного вытекает, что для такой точки  $c$ , точки из  $X \setminus P'$  не являются самыми далекими от  $c$  точками из  $X$ , поэтому самые далекие от  $c$  точки из  $X$  находятся в  $X \cap P'$ . Осталось воспользоваться леммой 17.8.  $\square$

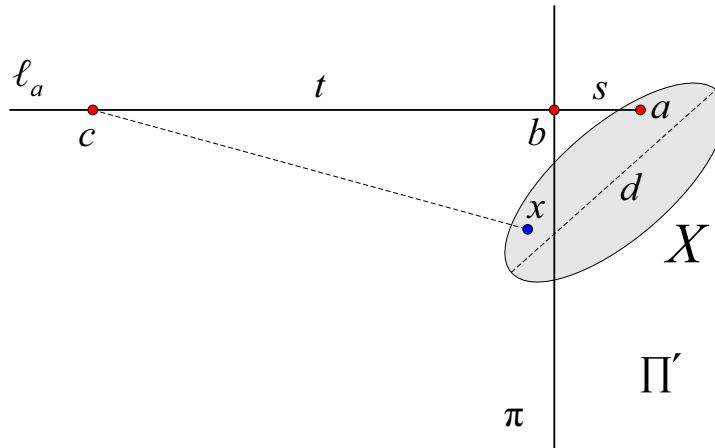


Рис. 17.2: К доказательству леммы 17.9.

**Теорема 17.10** (Страшевич). Пусть  $V = \text{vert } X$  — множество всех вершин выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^n$ , тогда  $X$  равно замыканию  $\text{conv } V$  выпуклой оболочки множества  $V$ .

**Доказательство.** Положим  $Y = \overline{\text{conv } V}$ . Так как  $V \subset X$ , а  $X$  выпукло и замкнуто, то  $Y \subset X$ . Предположим, что  $Y \neq X$ , т.е. существует  $a \in X \setminus Y$ . Тогда  $X$  содержит более одной точки, так что  $n \geq 1$ , и по теореме 16.15, существует гиперплоскость  $\pi$ , строго разделяющая  $a$  и  $Y$ . Но тогда открытое полупространство  $\Pi'$ , ограниченное  $\pi$  и содержащее  $a$ , пересекает  $X$ , поэтому, в силу леммы 17.9,  $\Pi'$  содержит вершину, противоречие.  $\square$

Приведем еще ряд важных результатов об экстремальных точках.

**Лемма 17.11.** Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество и  $y \in Y$ . Тогда точка  $y$  экстремальна для  $Y$ , если и только если множество  $Y \setminus \{y\}$  выпукло.

**Доказательство.** Пусть точка  $y$  экстремальна. Выберем произвольные  $a, b \in Y \setminus \{y\}$ , тогда  $[a, b] \subset Y \setminus \{y\}$ , так как иначе, в силу выпуклости  $Y$ , имеем  $[a, b] \subset Y$  и  $y \in (a, b)$ , т.е.  $y$  — не экстремальная точка.

Обратно, если точка  $y$  не экстремальна, то существует  $[a, b] \subset Y$ , для которого  $y \in (a, b)$ , но тогда  $a, b \in Y \setminus \{y\}$ , но  $[a, b] \not\subset Y \setminus \{y\}$ , так что  $Y \setminus \{y\}$  не выпукло.  $\square$

**Следствие 17.12.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное множество аффинной размерности  $n$  и  $X = \text{conv } M$ , тогда каждая экстремальная точка  $x \in X$  содержится в  $M$ .

**Доказательство.** По лемме 17.11, множество  $X \setminus \{x\}$  выпукло, так что если  $x \notin M$ , то  $M \subset X \setminus \{x\}$  и, значит,  $M$  содержится в меньшем выпуклом множестве, чем  $\text{conv } M$ , противоречие с определением выпуклой оболочки.  $\square$

**Замечание 17.13.** Выше мы видели, что, в отличие от вершин, экстремальные точки ведут себя более естественно. На самом деле, можно определить аналоги не только вершин, но и граней всех размерностей. Соответствующие определения и результаты мы приведем в разделе упражнений.

## 17.2 Двойственность

Напомним, что через  $2^{\mathbb{R}^n}$  мы обозначали множество всех подмножеств подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $0$  обозначает начало координат в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим отображение  $D: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ , определенное так:

$$D(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq 1\}.$$

Отметим, что для  $a \neq 0$  множество  $D(a)$  — замкнутое полупространство, внутренность которого содержит  $0$ , а для  $a = 0$  имеем  $D(0) = \mathbb{R}^n$ . Более того, для каждого замкнутого полупространства  $\Pi$ , содержащего внутри себя  $0$ , существует и однозначно определено  $a \in \mathbb{R}^n$ , для которого  $\Pi = D(a)$ .

Отображение  $D$  индуцирует отображение из  $2^{\mathbb{R}^n}$  в себя, которое мы будем обозначать той же буквой  $D$ : для непустого  $A \subset \mathbb{R}^n$  положим  $D(A) = \bigcap_{a \in A} D(a)$ , а для  $A = \emptyset$  пусть  $D(A) = \mathbb{R}^n$ . Заметим, что  $D(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ . Множество  $D(A)$  будем называть *полярной*  $A$  или *двойственным множеством* и обозначать также  $A^*$ . Если  $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$  — одноточечное множество, то, для краткости, вместо  $\{a\}^*$  будем писать  $a^*$ . Отметим, что для каждого  $A \subset \mathbb{R}^n$  полярна  $A^*$ , являясь пересечением замкнутых выпуклых множеств, сама замкнутая и выпуклая. Кроме того,

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq 1 \text{ для всех } a \in A\}.$$

**Теорема 17.14.** Для произвольных  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , шара  $W = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  и ненулевого  $\lambda \in \mathbb{R}$  выполняется

- (1) если  $A \subset B$ , то  $A^* \supset B^*$ ;
- (2) если  $\{A_i\}_{i \in I}$  — семейство подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , то  $(\bigcup_{i \in I} A_i)^* = \bigcap_{i \in I} A_i^*$ ;
- (3)  $(\lambda A)^* = (1/\lambda)A^*$ ;
- (4) если  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  — отрезок, то  $[a, b]^* = \{a, b\}^* = a^* \cap b^*$ . В частности, если  $a = 0$  и  $\|b\| = 1$ , то  $[0, b]^* = b^*$  — содержащее 0 полупространство, ограниченное гиперплоскостью  $\pi$ , перпендикулярной  $[0, b]$  и проходящей через  $b$ ;
- (5)  $W^* = W$ ;
- (6) если  $A$  — компакт с непустой внутреннейстью, содержащей 0, то  $A^*$  — выпуклое тело, причем  $0 \in \text{Int } A^*$ ;
- (7) если  $A$  — выпуклое тело и  $0 \in A$ , то  $A^{**} = A$ ;
- (8) для произвольного  $A$  имеем  $A^* = (\text{conv } A)^*$ , в частности, если  $A$  — выпуклое тело, то  $A^* = (\text{ext } A)^*$ .

**Доказательство.** (1)–(3) очевидны.

(4) По определению полярны, множество  $\{a, b\}^*$  состоит из всех  $x \in \mathbb{R}^n$ , для которых одновременно выполняется  $\langle a, x \rangle \leq 1$  и  $\langle b, x \rangle \leq 1$ . Пусть  $(1-t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$ , — произвольная точка отрезка  $[a, b]$ , тогда для каждого  $x \in \{a, b\}^*$  имеем

$$\langle (1-t)a + tb, x \rangle = (1-t)\langle a, x \rangle + t\langle b, x \rangle \leq (1-t) + t = 1,$$

т.е.  $\{a, b\}^* \subset ((1-t)a + tb)^*$ , откуда и вытекает утверждение.

(5) По пункту (4), каждый радиус шара  $W$  переходит в полупространство, содержащее шар  $W$  и ограниченное гиперплоскостью, касающейся шара и проходящей через конец этого радиуса. Все множество  $W^*$  — пересечение таких полупространств, т.е. сам шар  $W$ .

(6) Как мы уже отмечали, множество  $A^*$  замкнуто и выпукло. Так как 0 содержится в  $\text{Int } A$ , невырожденный шар  $B_\varepsilon(0)$  также содержится в  $A$ . По пунктам (5) и (3) имеем  $B_\varepsilon(0)^* = B_{1/\varepsilon}(0)$ , а по пункту (1) выполняется  $A^* \subset B_\varepsilon(0)^* = B_{1/\varepsilon}(0)$ , поэтому  $A^*$  ограничено и, значит, компактно. С другой стороны, множество  $A$  ограничено, поэтому  $A \subset B_\delta(0)$  для некоторого  $\delta > 0$ , откуда  $A^* \supset B_\delta(0)^* = B_{1/\delta}(0)$ , поэтому 0 — внутренняя точка  $A^*$  и  $A^*$  — выпуклое тело.

(7) По определению,  $x \in A^*$ , если и только если для всех  $a \in A$  выполняется  $\langle a, x \rangle \leq 1$ . Таким образом, для каждого  $a \in A$  и всех  $x \in A^*$  имеем  $\langle a, x \rangle \leq 1$ , но это означает, что  $a \in A^{**}$ . Таким образом,  $A \subset A^{**}$ . Докажем обратное включение.

Пусть существует  $y \in A^{**}$ , не содержащееся в  $A$ . По теореме 16.15, существует гиперплоскость  $\pi$ , строго разделяющая  $A$  и  $\{y\}$ . Так как  $0 \in A$ , то  $\pi$  не проходит через 0, поэтому  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = 1\}$  для некоторого  $u \neq 0$ . Так как  $0 \in A$ , то для каждой точки  $a \in A$  выполняется  $\langle u, a \rangle < 1$ , в то время как  $\langle u, y \rangle > 1$ . Но тогда  $u \in A^*$ , поэтому  $y \notin A^{**}$ , противоречие.

(8) Начнем с вспомогательного результата. Пусть  $\text{seg } A$  обозначает объединение всех отрезков с концами в точках из  $A$ , а  $\text{seg}^k A = \text{seg}(\text{seg}^{k-1} A)$ .

**Задача 17.15.** Для  $A \subset \mathbb{R}^n$  покажите, что  $\text{seg}^n A = \text{conv } A$ .

Перейдем к доказательству утверждения этого пункта. Для этого достаточно проверить, что  $A^* = (\text{seg } A)^*$ . Представим  $A$  в виде  $A = \bigcup_{\{a,b\} \subset A} \{a, b\}$ , тогда, с учетом пунктов (2) и (4), получаем

$$A^* = \left( \bigcup_{\{a,b\} \subset A} \{a, b\} \right)^* = \bigcap_{\{a,b\} \subset A} \{a, b\}^* = \bigcap_{\{a,b\} \subset A} [a, b]^* = \left( \bigcup_{\{a,b\} \subset A} [a, b] \right)^* = (\text{seg } A)^*,$$

что и требовалось.  $\square$

Оказывается, имеется естественное соответствие между множествами граней выпуклого тела и его поляр. Напомним, что через  $\mathcal{F}(X)$  мы обозначили множество всех граней выпуклого тела  $X$ .

**Лемма 17.16.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело, для которого  $0 \in \text{Int } X$ . Тогда для любой непустой грани  $F \in \mathcal{F}(X)$  и каждой точки  $x_0 \in F$  множество

$$F^\circ = \{y \in X^* : \langle y, x_0 \rangle = 1\}$$

является гранью поляры  $X^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $\pi$  — опорная гиперплоскость к  $X$ , для которой  $F = X \cap \pi$ . Так как  $0 \in \text{Int } X$ , то  $\pi$  не проходит через  $0$ , поэтому  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = 1\}$  для некоторого ненулевого  $a \in \mathbb{R}^n$ . Так как  $\pi$  — опорная гиперплоскость и  $\langle a, 0 \rangle = 0 < 1$ , то  $\langle a, x \rangle \leq 1$  для всех точек  $x \in X$ . Но тогда  $a \in X^*$ .

Так как  $x_0 \in F \subset \pi$ , то  $\langle a, x_0 \rangle = 1$ . Положим

$$\pi^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x_0 \rangle = 1\}.$$

Напомним, что  $X^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 1 \text{ для всех } x \in X\}$ , поэтому для всех  $y \in X^*$  выполняется  $\langle y, x_0 \rangle \leq 1$ , так что гиперплоскость  $\pi^\circ$  не разрезает  $X^*$ . Кроме того,  $\langle a, x_0 \rangle = 1$ , так что  $a \in \pi^\circ \cap X^*$ , откуда  $\pi^\circ$  — опорная гиперплоскость к  $X^*$ , поэтому  $F^\circ = \pi^\circ \cap X^*$  — грань поляры  $X^*$ .  $\square$

**Лемма 17.17.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело, для которого  $0 \in \text{Int } X$ . Тогда для любой непустой грани  $F \in \mathcal{F}(X)$  и каждой точки  $x_0 \in \text{relint } F$

$$F^\circ = \{y \in X^* : \langle y, x_0 \rangle = 1\}$$

поляры  $X^*$  совпадает с множеством

$$(17.1) \quad \widehat{F} = \{y \in X^* : \langle y, x \rangle = 1 \text{ для всех } x \in F\}.$$

**Доказательство.** Так как  $x_0 \in F$ , то  $\widehat{F} \subset F^\circ$ . Докажем обратное включение. Предположим противное, т.е. существует  $y_0 \in F^\circ \setminus \widehat{F}$ . Это означает, что для некоторого  $x_1 \in F$  выполняется  $\langle y_0, x_1 \rangle < 1$ . Так как  $x_0 \in \text{relint } F$ , существует  $x_2 \in F$  такое, что  $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$  для некоторого  $t \in (0, 1)$ . Так как  $y_0 \in X^*$ , имеем  $\langle y_0, x_2 \rangle \leq 1$ , поэтому  $\langle y_0, x_0 \rangle < 1$ , противоречие.  $\square$

Таким образом, для выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^n$  определено отображение

$$(17.2) \quad \Psi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X^*), \quad \Psi_X(F) = \widehat{F}, \quad \text{где } \widehat{F} \text{ определяется формулой (17.1).}$$

**Теорема 17.18.** Для выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^n$  такого, что  $0 \in \text{Int } X$ , отображение  $\Psi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X^*)$ , определенное выше, является биекцией, обращающей включение, т.е. если  $F_1 \subset F_2$ , то  $\Psi_X(F_1) \supset \Psi_X(F_2)$ . Более того,  $\Psi_{X^*} \circ \Psi_X = \text{id}$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $\Psi_X$  — биекция. Для этого достаточно показать, что  $\Psi_{X^*} \circ \Psi_X = \text{id}$ , так как для выпуклого тела  $X$ , содержащего во внутренней точке  $0$ , поляр  $X^*$  также является выпуклым телом, содержащим внутри себя  $0$ , см. теорему 17.14, поэтому из  $\Psi_{X^*} \circ \Psi_X = \text{id}$  вытекает  $\Psi_X \circ \Psi_{X^*} = \text{id}$ .

Пусть  $F \in \mathcal{F}(X)$ , тогда

$$\Psi_{X^*}(\Psi_X(F)) = \{z \in X^{**} : \langle y, z \rangle = 1 \text{ для всех } y \in \widehat{F}\}.$$

Так как, по теореме 17.14,  $X^{**} = X$ , и для каждого  $x \in F$  и всех  $y \in \widehat{F}$  выполняется  $\langle y, x \rangle = 1$ , имеем  $F \subset \Psi_{X^*}(\Psi_X(F))$ . Докажем обратное включение.

Предположим, что существует  $z_0 \in \Psi_{X^*}(\Psi_X(F)) \setminus F$ . Пусть  $\pi$  — опорная гиперплоскость для  $X$  такая, что  $F = X \cap \pi$ . Так как  $0 \in \text{Int } X$ , то  $\pi$  не проходит через  $0$ , поэтому существует ненулевой  $a \in \mathbb{R}^n$ , для которого  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = 1\}$ . По определению,  $a \in \widehat{F}$  и  $\langle a, z_0 \rangle < 1$ , но тогда  $z_0 \notin \Psi_{X^*}(\widehat{F}) = \Psi_{X^*}(\Psi_X(F))$ , противоречие.

Покажем теперь, что  $\Psi_X$  обращает включение. Если  $\widehat{F}_2 = \{y \in X^* : \langle y, x \rangle = 1 \text{ для всех } x \in F_2\}$ , то для каждого  $y \in \widehat{F}_2$  и  $x \in F_1$  также выполняется  $\langle y, x \rangle = 1$ , поэтому  $y \in \widehat{F}_1$  и, значит,  $\widehat{F}_2 \subset \widehat{F}_1$ .  $\square$

## Упражнения к главе 17

**Упражнение 17.1.** Покажите, что

- (1) для выпуклого тела  $X \subset \mathbb{R}^2$  множество  $\text{ext } X$  замкнуто;
- (2) для трехмерного выпуклого тела это уже не так: рассмотрите множество  $M \subset \mathbb{R}^3$ , заданное в декартовых координатах  $x, y, z$  как объединение отрезка  $[-1, 1]$  оси  $z$  и окружности  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , лежащей в плоскости  $z = 0$ ; покажите, что для  $X = \text{conv } M$  множество  $\text{ext } X$  незамкнуто.

**Определение 17.19.** Пусть  $X$  — выпуклое тело. Выпуклое подмножество  $F \subset X$  называется *правильной гранью*, если для любых  $x, y \in X$  или  $[x, y] \subset F$ , или  $(x, y) \cap F = \emptyset$ . Отметим, что  $\emptyset$  и все  $X$  также являются (несобственными) правильными гранями. Множество всех правильных граней выпуклого тела  $X$  обозначим  $\mathcal{P}(X)$ .

**Упражнение 17.2.** Пусть  $F$  — непустое выпуклое подмножество выпуклого тела  $X$ . Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- (1)  $F$  является правильной гранью;
- (2)  $F = X \cap \text{Aff } F$  и  $X \setminus \text{Aff } F$  выпукло;
- (3) существует  $x \in X$ , для которого  $F$  — максимальное выпуклое подмножество в  $X$ , удовлетворяющее  $x \in \text{relint } F$ ;
- (4) существует последовательность  $F_0 = F, \dots, F_k = X$ , для которой  $F_{i-1} \in \mathcal{F}(F_i)$  для всех  $i$ .

**Упражнение 17.3.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое тело. Покажите, что

- (1) для каждого  $F \in \mathcal{F}(X)$  выполняется  $F \in \mathcal{P}(X)$ ;
- (2) вершина является правильной гранью, если и только если она — экстремальная точка;
- (3) не всякая правильная грань является гранью;
- (4) правильная грань — замкнутое множество;
- (5) для  $F \in \mathcal{P}(X)$  имеем  $\text{ext } F = F \cap \text{ext } X$ ;
- (6) для  $\{F_i\} \subset \mathcal{P}(X)$  выполняется  $\bigcap_i F_i \in \mathcal{P}(X)$ ;
- (7) для  $F \in \mathcal{P}(X)$  имеем  $\mathcal{P}(F) = \{P \in \mathcal{P}(X) : P \subset F\}$  (обратите внимание, что аналогичный результат не имеет места для множества граней  $\mathcal{F}(X)$ );
- (8) семейство  $\{\text{relint } F : F \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\}$  — разбиение  $X$ .

**Упражнение 17.4.** Для выпуклого плоского многоугольника выясните, как устроена его поляра. Рассмотрите отдельно случаи, когда начало координат попадает внутрь многоугольника, на его границу, и наружу.

**Упражнение 17.5.** Выясните, как выглядит поляра платонова тела, у которого описанный шар имеет радиус 1, а его центр совпадает с началом координат?

**Упражнение 17.6.** Для  $A \subset \mathbb{R}^n$  покажите, что  $\text{seg}^n A = \text{conv } A$ .

**Упражнение 17.7.** Докажите, что для произвольного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  выполняется  $A^{**} = \overline{\text{conv}(A \cup \{0\})}$ . Выведите отсюда, что для замкнутого выпуклого  $A$ , содержащего  $0$ , имеет место  $A^{**} = A$ .

## Лекция 18

# Дополнение 3: Выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^n$

**План.** Метрическая проекция точки на выпуклый компакт, метрическая проекция (отображение), свойства метрической проекции, выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , выпуклый многогранник — выпуклое тело, размерность выпуклого многогранника, свойства множеств вершин и экстремальных точек выпуклого многогранника, их конечность, критерий того, что выпуклое тело является выпуклым многогранником, совпадение у выпуклых многогранников множеств вершин и экстремальных точек, грани выпуклого многогранника как выпуклые оболочки множеств вершин, грани выпуклого многогранника как выпуклые оболочки множеств вершин, критерий того, что множество вершин выпуклого многогранника является множеством всех вершин некоторой его грани, у граней выпуклого многогранника грани являются гранями самого многогранника, множество граней выпуклого многогранника замкнуто относительно пересечений, выпуклое тело является выпуклым многогранником, если и только если оно равно пересечению конечного числа замкнутых полупространств, гиперграни выпуклого многогранника, граница выпуклого многогранника равна объединению гиперграней, структура множества граней выпуклого многогранника, поляр выпуклого многогранника, содержащего внутри себя начало координат, — выпуклый многогранник, эйлерова характеристика выпуклого многогранника, эйлеровы характеристики многогранников размерности не выше трех, эйлеровы характеристики симплексов, формула Эйлера, флаг граней выпуклого многогранника, правильные многогранники, правильные многогранники в размерности не выше трех, правильный  $n$ -мерный симплекс, куб, кросс-политоп, 24-ячейник, 120-ячейник, 600-ячейник, формулировка теоремы классификации правильных многогранников, теорема Буземана-Феллера.

Начнем с важного технического понятия выпуклой геометрии — метрической проекции.

### 18.1 Метрическая проекция

Начнем со следующей леммы.

**Лемма 18.1.** Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^n$  — непустой выпуклый компакт,  $p \in \mathbb{R}^n$ , и пусть  $y_0$  — точка, в которой функция  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(y) = |py|$ , достигает своего минимума. Тогда точка  $y_0$  однозначно определена.

**Доказательство.** Если  $p \in Y$ , то  $y_0 = p$  однозначно определена. Пусть теперь  $p \notin Y$ . Предположим противное, т.е. существует отличная от  $y_0$  точка  $y \in Y$ , для которой  $|py_0| = |py|$ . Так как  $Y$  выпукло, то  $[y_0, y] \subset Y$ , но тогда середина  $x$  отрезка  $[y_0, y]$  является основание высоты равнобедренного треугольника  $py_0y$ , поэтому  $|px| < |py_0|$ , что противоречит минимальности  $|py_0|$ .  $\square$

**Определение 18.2.** Точка  $y_0$  из леммы 18.1 называется **метрической проекцией точки  $p$  на  $Y$** . Отображение  $\Phi_Y: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ , переводящее каждую точку  $p \in \mathbb{R}^n$  в ее метрическую проекцию на  $Y$ , также называется **метрической проекцией на  $Y$** .

**Лемма 18.3.** Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^n$  — непустой выпуклый компакт,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus Y$ , и  $y_0$  — метрическая проекция точки  $p$  на  $Y$ . Обозначим  $\pi$  гиперплоскость, проходящую через  $y_0$  перпендикулярно  $[p, y_0]$ . Тогда  $\pi$  — опорная гиперплоскость к  $Y$ , причем если  $\Pi$  — замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi$  и содержащее  $Y$ , то  $(y_0, p] \subset \mathbb{R}^n \setminus \Pi$ .

**Доказательство.** Докажем сначала, что  $\pi$  — опорная гиперплоскость для  $Y$ . Так как  $y_0 \in \pi \cap Y$ , остается проверить, что  $\pi$  не разрезает  $Y$ . Предположим противное, тогда существует  $y, y' \in Y$ , лежащие в разных открытых полупространствах относительно  $\pi$ . Пусть  $y$  лежит в том же открытом полупространстве, что и точка  $p$ . Так как  $Y$  выпукло, то  $[y_0, y] \subset Y$ . В треугольнике  $py_0y$  угол  $py_0y$  острый, поэтому достаточно близкие к  $y_0$  точки на отрезке  $[y_0, y]$  находятся ближе к  $p$ , чем  $y_0$ , а это противоречит минимальности  $|py_0|$ .

Выше мы показали, что в открытом полупространстве, ограниченном  $\pi$  и содержащем  $p$ , нет точек из  $Y$ , поэтому  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi$ , а так как  $y_0 \in \pi$ , то и  $(y_0, p] \subset \mathbb{R}^n \setminus \Pi$ .  $\square$

Опишем теперь важный частный случай выпуклых тел — выпуклые многогранники.

## 18.2 Выпуклые многогранники

**Выпуклым многогранником** в  $\mathbb{R}^n$  назовем выпуклую оболочку  $X$  конечного множества точек  $M \subset \mathbb{R}^n$  при условии, что внутренность  $X$  непуста.<sup>1</sup>

Применим следствие 16.14.

**Следствие 18.4.** *Выпуклый многогранник компактен и, значит, является выпуклым телом.*

Применим лемму 16.18.

**Следствие 18.5.** *Условие непустоты внутренности в определении выпуклого многогранника  $X = \text{conv } M$  равносильно условию  $\dim M = n$ .*

Применим следствие 17.12.

**Следствие 18.6.** *Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — конечное множество аффинной размерности  $n$ . Множество экстремальных точек выпуклого многогранника  $X = \text{conv } M$  является подмножеством в  $M$ . В частности, множества  $\text{ext } X$  и  $\text{vert } X \subset \text{ext } X$  конечны.*

**Следствие 18.7.** *Выпуклое тело  $X \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклым многогранником, если и только если множество  $\text{ext } X$  его экстремальных точек конечно.*

**Доказательство.** Пусть множество  $\text{ext } X$  конечно. Так как, в силу теоремы 17.6, имеем  $X = \text{conv } \text{ext } X$ , то  $X$  — выпуклый многогранник. Обратно, если  $X$  — выпуклый многогранник, то, по лемме 18.6, множество  $\text{ext } X$  конечно.  $\square$

**Лемма 18.8.** *Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник,  $N = \text{ext } X$  — множество экстремальных точек  $X$ , и  $x \in N$ . Тогда  $Y := \text{conv}(N \setminus \{x\}) \subsetneq X$ .*

**Доказательство.** Так как, по лемме 17.11, множество  $X \setminus \{x\}$  выпукло, и так как  $N \setminus \{x\} \subset X \setminus \{x\}$ , то  $X \setminus \{x\}$  также содержит и  $Y$ , поэтому  $Y \subsetneq X$ .  $\square$

**Теорема 18.9.** *Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник, тогда множество  $\text{ext } X$  его экстремальных точек совпадает с множеством  $\text{vert } X$  его вершин. В частности,  $X = \text{conv}(\text{vert } X)$ .*

**Доказательство.** Как мы уже говорили, каждая вершина является экстремальной точкой. Покажем, что в случае многогранников каждая экстремальная точка является вершиной. Положим  $V = \text{vert } X$ . По теореме 17.10,  $X$  совпадает с замыканием  $\text{conv } V$ , но, по следствию 16.14,  $\text{conv } V$  компактно и, значит, замкнуто. Таким образом,  $X = \text{conv } V$ . Пусть  $N = \text{ext } X$ . Тогда  $V \subset N$  и, по теореме 17.6,  $\text{conv } N = X$ . Если  $V \neq N$ , то существует  $x \in N \setminus V$ , так что  $V \subset N \setminus \{x\}$ . По лемме 18.8,  $Y := \text{conv}(N \setminus \{x\}) \subsetneq X$ , однако  $X = \text{conv } V \subset Y \subset X$ , откуда  $Y = X$ , противоречие. Таким образом,  $V = N$ . Последнее утверждение вытекает из теоремы 17.6.  $\square$

В замечании 17.3 мы построили пример, демонстрирующий, что вершины грани не обязаны являться вершинами содержащего грань выпуклого тела. В случае выпуклых многогранников ситуация более естественная.

**Следствие 18.10.** *Пусть  $F$  — непустая грань выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $F$  — выпуклый многогранник в своей аффинной оболочке и  $\text{vert } F = F \cap \text{vert } X$ . Таким образом, каждая непустая грань выпуклого многогранника  $X$  является выпуклой оболочкой некоторого подмножества в  $\text{vert } X$ , поэтому, в частности, множество граней  $\mathcal{F}(X)$  конечно.*

**Доказательство.** Каждая грань  $F$  выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклым телом в своей аффинной оболочке (лемма 16.18), поэтому к  $F$  применима теорема 17.6, в соответствии с которой  $F = \text{conv}(\text{ext } F)$ . По лемме 17.5,  $\text{ext } F = F \cap \text{ext } X$ , поэтому  $\text{ext } F$  конечно и, следовательно,  $F$  — выпуклый многогранник в  $\text{Aff } F$ . Кроме того, по теореме 18.9,  $\text{ext } X = \text{vert } X$  и  $\text{ext } F = \text{vert } F$ , откуда  $\text{vert } F = F \cap \text{vert } X$ .  $\square$

Выясним теперь, когда данное множество вершин выпуклого многогранника является множеством вершин некоторой грани.

<sup>1</sup>В ряде монографий условие непустоты внутренности не требуется. Мы вводим это ограничение, чтобы согласовать его с предыдущими построениями многогранников в  $\mathbb{R}^3$ , где непустота внутренности вытекала из теоремы Жордана.



**Теорема 18.11.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник и  $W \subset V := \text{vert } X$  — некоторое множество вершин многогранника  $X$ . Тогда  $\text{conv } W$  — грань в  $X$ , если и только если  $(\text{Aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ .

**Доказательство.** Если  $W = \emptyset$  или  $W = V$ , то все очевидно. Предположим теперь, что  $W$  непусто и отлично от  $V$ .

Пусть сначала  $F := \text{conv } W$  — грань  $X$ , тогда для некоторой опорной гиперплоскости  $\pi$  выполняется  $F = X \cap \pi$ . Но тогда  $V \setminus W$  содержится в открытом полупространстве  $\Pi'$ , ограниченном  $\pi$ , поэтому, так как  $\Pi'$  выпукло,  $\text{conv}(V \setminus W) \subset \Pi'$  и, значит,  $\text{conv}(V \setminus W) \cap \pi = \emptyset$ . Но  $\text{Aff } W = \text{Aff } F \subset \pi$ , откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь  $(\text{Aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ . Мы должны показать, что  $\text{conv } W$  — грань  $X$ . Так как  $\text{conv}(V \setminus W)$  — компакт, а  $\text{Aff } W$  — замкнуто, то существуют  $x \in \text{conv}(V \setminus W)$  и  $y \in \text{Aff } W$ , на которых реализуется расстояние между  $\text{conv}(V \setminus W)$  и  $\text{Aff } W$ , т.е.  $|xy| = |\text{conv}(V \setminus W) \text{ Aff } W|$ . Так как  $(\text{Aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ , то  $|xy| > 0$ . Пусть  $\pi$  — гиперплоскость, проходящая через  $x$  перпендикулярно  $[x, y]$ . По лемме 18.3, гиперплоскость  $\pi$  является опорной для  $\text{conv}(V \setminus W)$ , причем если  $\Pi$  — ограниченное  $\pi$  замкнутое полупространство, содержащее  $\text{conv}(V \setminus W)$ , то  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi$ . Отсюда вытекает, что если  $\pi'$  — гиперплоскость, проходящая через  $y$  параллельно  $\pi$  и, значит, также перпендикулярно  $[x, y]$ , то  $\pi' \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ . Так как на  $y$  достигается расстояние от  $x$  до  $\text{Aff } W$ , то отрезок  $[x, y]$  перпендикулярен  $\text{Aff } W$  и, значит,  $W \subset \text{Aff } W \subset \pi'$ .

Обозначим  $\Pi'$  замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi'$  и содержащее  $\Pi$ , а вместе с ним и  $V \setminus W$ . Так как  $W \subset \pi' \subset \Pi'$  и  $V \setminus W \subset \Pi'$ , то  $V \subset \Pi'$ , откуда  $X = \text{conv } V \subset \Pi'$ . Следовательно,  $\pi'$  — опорная гиперплоскость к  $X$  и, значит,  $F := \pi' \cap X$  — грань  $X$ . Так как, по следствию 18.10,

$$\text{vert } F = F \cap \text{vert } X = \pi' \cap X \cap \text{vert } X = \pi' \cap \text{vert } X = W,$$

и, по теореме 18.9,  $F = \text{conv}(\text{vert } F) = \text{conv } W$ , то  $\text{conv } W$  — грань  $X$ , что и требовалось.  $\square$

**Следствие 18.12.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник,  $F \in \mathcal{F}(X)$  и  $F' \in \mathcal{F}(F)$ . Тогда  $F' \in \mathcal{F}(X)$ . Иными словами,  $\mathcal{F}(F) \subset \mathcal{F}(X)$ , т.е. у граней выпуклого многогранника  $X$  никаких других граней, кроме граней самого  $X$ , нет.

**Доказательство.** Положим  $V = \text{vert } X$ ,  $W = \text{vert } F$  и  $W' = \text{vert } F'$ . По следствию 18.7, грань  $F$  — выпуклый многогранник в  $\text{Aff } F$ , поэтому, в силу того же следствия, грань  $F'$  выпуклого многогранника  $F$  — выпуклый многогранник в  $\text{Aff } F'$ . По теореме 18.9,  $F' = \text{conv } W'$ .

По теореме 18.11,  $\text{Aff } W'$  не пересекает  $\text{conv}(W \setminus W')$ , а  $\text{Aff } W$  не пересекает  $\text{conv}(V \setminus W)$ . Пусть  $\pi$  — опорная гиперплоскость, для которой  $F = X \cap \pi$ , а  $\Pi$  — замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi$  и содержащее  $X$ . Тогда  $\text{Aff } W' \subset \pi$ .

**Задача 18.13.** Пусть  $\pi$  — гиперплоскость в  $\mathbb{R}^n$  и  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi$ . Пусть  $A \subset \Pi$  и  $B = A \cap \pi$ . Покажите, что  $\text{conv } B = \pi \cap \text{conv } A$ .

В силу следствия 18.10, имеем  $V \cap \pi = V \cap X \cap \pi = V \cap F = W$ , поэтому  $(V \setminus W') \cap \pi = W \setminus W'$ . Из задачи 18.13 вытекает, что  $\text{conv}(W \setminus W') = \text{conv}(V \setminus W') \cap \pi$ . Но тогда

$$\emptyset = (\text{Aff } W') \cap \text{conv}(W \setminus W') = (\text{Aff } W') \cap \text{conv}(V \setminus W') \cap \pi = (\text{Aff } W') \cap \text{conv}(V \setminus W'),$$

поэтому, снова в силу теоремы 18.11,  $F' = \text{conv } W'$  — грань  $X$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 18.14.** Пусть  $F_1, \dots, F_k$  — грани выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$ , тогда  $F = \bigcap_{i=1}^k F_i$  — грань  $X$ .

**Доказательство.** Если  $F = \emptyset$ , то все доказано. Пусть теперь  $F \neq \emptyset$ . Без ограничения общности предположим, что начало координат  $0 \in \mathbb{R}^n$  содержится в  $F$ . Пусть  $\pi_i$  — опорная гиперплоскость к  $X$ , для которой  $F_i = X \cap \pi_i$ . Пусть  $u_i \in \mathbb{R}^n$  — ненулевые векторы, для которых  $\pi_i$  задается уравнением  $\langle u_i, x \rangle = 0$ , причем  $X$  содержится в замкнутом полупространстве  $\langle u_i, x \rangle \geq 0$ . Положим  $u = \sum_{i=1}^k u_i$ . Меняя если необходимо длины векторов  $u_i$  добьемся того, чтобы  $u \neq 0$ . Пусть  $\pi$  — гиперплоскость, заданная уравнением  $\langle u, x \rangle = 0$ , тогда для каждой точки  $y \in F$  выполняется  $\langle u, y \rangle = \sum_{i=1}^k \langle u_i, y \rangle = 0$ , поэтому  $F \subset \pi$ . С другой стороны, для каждой точки  $z \in X$  имеем  $\langle u, z \rangle = \sum_{i=1}^k \langle u_i, z \rangle \geq 0$ , так что  $\pi$  не разрезает  $X$  и пересекает  $X$ , т.е. является опорной гиперплоскостью. Более того, если  $z \notin F$ , то для некоторого  $i$  выполняется  $\langle u_i, z \rangle > 0$ , откуда  $\langle u, z \rangle > 0$ , так что  $F = X \cap \pi$ , так что  $F$  — грань  $X$ .  $\square$

Начиная с этого места и до конца раздела мы предполагаем, что  $n \geq 1$ . Грань выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^n$ , имеющую размерность  $n - 1$ , назовем **гипергранью**.

**Теорема 18.15.** *Выпуклый многогранник  $X \subset \mathbb{R}^n$  равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных гиперплоскостями, проходящими через гиперграни  $X$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F}_{n-1} := \{F_1, \dots, F_m\}$  — множество всех гиперграней выпуклого многогранника  $X$  (это множество может быть пустым). Обозначим  $\pi_i$  опорную гиперплоскость, для которой  $F_i = \pi_i \cap X$ , и пусть  $P_i$  — ограниченное  $\pi_i$  замкнутое полупространство, содержащее  $X$ . Положим  $W = \bigcap_{i=1}^m P_i$ , если  $\mathcal{F}_{n-1} \neq \emptyset$ , и  $W = \mathbb{R}^n$  в противном случае. Тогда  $X \subset W$ . Покажем, что  $X \supset W$  и, значит,  $X = W$ .

Предположим противное, т.е. существует  $w \in W$  такая, что  $w \notin X$ . Пусть  $D$  обозначает объединение всех аффинных оболочек множеств  $\{w\} \cup F$ , где  $F$  — грань  $X$  размерности не большей  $n-2$ . Так как каждая такая аффинная оболочка имеет размерность не выше  $n-1$ , и, в силу следствия 18.10, таких аффинных оболочек конечное число, множество  $D$ , по теореме Бэра (упражнение 5.7), не содержит внутренних точек (на самом деле  $D$  — нигде не плотно, что можно непосредственно показать), так что существует точка  $x \in \text{Int } X \setminus D$ .

Так как  $X$  — замкнутое множество, отрезок  $[x, w]$  пересекает  $\partial X$  в некоторой точке  $y$ . Если  $y$  принадлежит какой-нибудь грани  $F$  размерности не больше  $n-2$ , то прямая  $wy$  лежит в  $D$ , так что  $x \in D$ , противоречие. Таким образом,  $y$  не лежит ни в одной грани размерности не больше  $n-2$  и, значит, в силу следствия 17.1,  $y$  лежит в некоторой гипергранной  $F_i$ . Но так как  $x \in \text{Int } X$ , то точка  $w$  лежит вне  $P_i$ , противоречие.  $\square$

Отметим, что имеет место и обратное утверждение. Для его доказательства нам понадобится ряд лемм. Начнем с тривиальной топологической леммы, доказательство которой оставляется слушателям.

**Лемма 18.16.** *Пусть  $Y_1, \dots, Y_m$  — подмножества топологического пространства. Тогда*

$$\text{Int} \left( \bigcap_{i=1}^m Y_i \right) = \bigcap_{i=1}^m \text{Int } Y_i.$$

В частности, если  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства и  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$ , то  $\text{Int } X = \bigcap_{i=1}^m \text{Int } P_i$ .

**Лемма 18.17.** *Если  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства и  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$  имеет непустую внутренность, то  $X = \text{Int } X$ .*

**Доказательство.** Положим  $X' = \overline{\text{Int } X}$ . По лемме 18.16, имеем  $X' = \overline{\bigcap_{i=1}^m \text{Int } P_i}$ . По упражнению 4.5,

$$X' \subset \bigcap_{i=1}^m \overline{\text{Int } P_i} = \bigcap_{i=1}^m P_i = X.$$

Докажем обратное включение. Возьмем произвольную точку  $x \in X$ , а также существующую в силу условия точку  $y \in \text{Int } X$ . По лемме 18.16,  $y \in \text{Int } P_i$  при всех  $i$ . С другой стороны,  $x \in P_i$  при всех  $i$ . Но тогда полуинтервал  $[y, x]$  содержится во всех  $\text{Int } P_i$  и, значит, в  $\text{Int } X$ . Следовательно,  $x$  — точка прикосновения для  $\text{Int } X$ , откуда  $x \in \overline{\text{Int } X} = X'$ , так что  $X \subset X'$ .  $\square$

Пусть  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства, для которых  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$ . Полупространство  $P_k$  назовем **избыточным**, если  $X = \bigcap_{i \neq k} P_i$ .

**Лемма 18.18.** *Пусть  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства,  $\pi_i$  — гиперплоскость, ограничивающая  $P_i$ . Предположим, что  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$  имеет непустую внутренность и среди  $P_i$  нет избыточных полупространств. Тогда каждое  $F_i := \pi_i \cap X$  имеет в  $\pi_i$  непустую внутренность.*

**Доказательство.** Выберем произвольное  $j$  и положим  $X' = \bigcap_{i \neq j} P_i$ , тогда  $X = X' \cap P_j$  и

$$F_j = \pi_j \cap X = \pi_j \cap X' \cap P_j = \pi_j \cap X'.$$

Покажем, что каждая точка  $x \in F_j$ , не являющаяся в  $\pi_j$  внутренней для  $F_j$ , не содержится в  $\text{Int } X'$ . Действительно, если  $x \in \text{Int } X'$ , то существует в  $\mathbb{R}^n$  открытый шар  $U^x$  с центром в  $x$ , который содержится в  $X'$ . Осталось заметить, что  $U^x \cap \pi_j$  — открытый шар в  $\pi_j$ , содержащийся в  $F_j = \pi_j \cap X'$ , поэтому  $x$  — внутренняя точка  $F_j$  в  $\pi_j$ .

Предположим теперь, что для некоторого  $j$  множество  $F_j$  не имеет в  $\pi_j$  внутренних точек, тогда, в силу сказанного выше,  $F_j \cap \text{Int } X' = \emptyset$ . Покажем, что тогда  $P_j$  — избыточное полупространство. Имеем

$$\text{Int } X' \cap \pi_j = \text{Int } X' \cap X' \cap \pi_j = \text{Int } X' \cap F_j = \emptyset.$$

Выведем отсюда, что  $\text{Int } X' \subset \text{Int } P_j$ . Для этого выберем произвольную точку  $x' \in \text{Int } X$ , тогда  $x' \in \text{Int } X'$  и  $x' \in \text{Int } P_j$ . Если  $\text{Int } X' \not\subset \text{Int } P_j$ , то существует  $y \in \text{Int } X'$ , не лежащая в  $\text{Int } P_j$ , но тогда отрезок  $[x', y] \subset \text{Int } X'$  пересечет  $\pi_j$ , следовательно,  $\text{Int } X' \cap \pi_j \neq \emptyset$ , противоречие.

Итак,  $\text{Int } X' \subset \text{Int } P_j$ . По лемме 18.17,  $X' = \overline{\text{Int } X'}$ , откуда, в силу замкнутости  $P_j$ , получаем  $X' \subset P_j$ . Но тогда  $X = X' \cap P_j = X'$ , так что полупространство  $P_j$  избыточное.  $\square$

**Следствие 18.19.** Пусть  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства,  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$  имеет непустую внутренность, и среди  $P_i$  нет избыточных полупространств. Обозначим  $\pi_i$  гиперплоскость, ограничивающую полупространство  $P_i$ , и положим  $F_i = \pi_i \cap X$ . Тогда  $\partial X = \bigcup_{i=1}^m F_i$ .

**Доказательство.** По лемме 18.16, каждая граничная точка для  $X$  лежит в некоторой гиперплоскости  $\pi_i$  и, значит, в  $F_i$ , откуда  $\partial X = \bigcup_{i=1}^m F_i$ .  $\square$

**Теорема 18.20.** Если  $P_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — замкнутые полупространства, множество  $X = \bigcap_{i=1}^m P_i$  ограничено и имеет непустую внутренность, то  $X$  — выпуклый многогранник.

**Доказательство.** Так как  $X$  ограничено и имеет непустую внутренность,  $X$  — выпуклое тело. Далее, без ограничения общности будем считать, что среди полупространств  $P_i$  нет избыточных. Доказательство проведем индукцией по  $n$ . При  $n = 1$  полупространствами являются замкнутые лучи. Так как отсутствуют избыточные полупространства и множество  $X$  ограничено, то лучей ровно два, а  $X$  — отрезок, являющийся выпуклой оболочкой двух своих концевых точек, поэтому  $X$  — выпуклый многогранник.

Предположим теперь, что  $n \geq 2$  и для всех выпуклых многогранников размерности меньше  $n$  теорема доказана. В силу следствия 18.7, достаточно показать, что множество  $\text{ext } X$  конечно. Пусть  $\pi_i$  — гиперплоскость, ограничивающая  $P_i$ , и  $F_i = X \cap \pi_i$ . По следствию 18.18, каждое  $F_i$  является гипергранью, поэтому, в силу леммы 17.5,  $\text{ext } F_i = F_i \cap \text{ext } X$ . По следствию 18.19, граница  $\partial X$  равна объединению гиперграней  $F_i$ . Так как  $\text{ext } X \subset \partial X$ , то

$$\text{ext } X = (\text{ext } X) \cap \partial X = (\text{ext } X) \cap \left( \bigcup_{i=1}^m F_i \right) = \bigcup_{i=1}^m (F_i \cap \text{ext } X) = \bigcup_{i=1}^m \text{ext } F_i.$$

Заметим, что для каждого  $q \neq i$  гиперплоскость  $\pi_q$  отлична от  $\pi_i$ , иначе или  $X$  имеет пустую внутренность, или  $P_i$  избыточное полупространство. В силу упражнения 16.2, каждое непустое пересечение  $\pi_i \cap \pi_q$  является гиперплоскостью в  $\pi_i$ , и в этом случае  $\pi_i \cap \pi_q$  — полупространство в  $\pi_i$ . Таким образом,  $F_i$  равно пересечению конечного числа замкнутых полупространств, лежащих в  $\pi_i$ , причем, в силу леммы 18.18, внутренность  $F_i$  в  $\pi_i$  непуста, поэтому к  $F_i$  применимо предположение индукции, т.е.  $\text{ext } F_i$  — конечное множество. Но тогда и  $\text{ext } X$  конечно, поэтому  $X$  — выпуклый многогранник.  $\square$

**Следствие 18.21.** Граница  $\partial X$  выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$  равна объединению гиперграней.

**Доказательство.** В силу теоремы 18.15, представим  $X$  в виде пересечения  $\bigcap_{i=1}^m P_i$  замкнутых полупространств  $P_i$ , ограниченных гиперплоскостями  $\pi_i$ , проходящими через гипергрань  $F_i = X \cap \pi_i$ . Если среди выбранных полупространств есть избыточные, выбросим их. Пусть  $I$  — множество индексов оставшихся полупространств. По следствию 18.19, имеем  $\partial X = \bigcup_{i \in I} F_i$ .  $\square$

**Следствие 18.22.** Каждая собственная грань  $F$  выпуклого многогранника  $X$  является гранью некоторой гиперграней.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \text{relint } F$ , тогда, в силу следствия 18.21, точка  $x$  лежит в некоторой гиперграней  $F_i$ . Пусть  $\pi_i$  — опорная гиперплоскость, проходящая через гипергрань  $F_i$ . Покажем, что  $F \subset F_i$ . Если  $F$  — вершина, то все доказано. Если же  $F$  отлична от вершины и существует точка  $y \in F \setminus \pi_i$ , то существует также  $z \in F$ , для которой  $x \in (y, z)$ , но тогда точки  $y, z$  располагаются в разных открытых полупространствах относительно  $\pi_i$ , так что  $z \notin X$ , противоречие. Итак,  $F \subset \pi_i$  и  $F \subset X$ , так что  $F \subset \pi_i \cap X = F_i$ . Осталось воспользоваться леммой 17.2, в силу которой  $F = F \cap F_i$  является гранью  $F_i$ .  $\square$

**Следствие 18.23.** Пусть  $F^k$  обозначает собственную грань выпуклого многогранника  $X \subset \mathbb{R}^n$ , причем  $\dim F^k = k$ . Тогда для любых  $F^i \subset F^j$  существует цепочка  $F^i \subset F^{i+1} \subset \dots \subset F^{j-1} \subset F^j$ .

**Доказательство.** В силу следствия 18.10, каждая грань  $X$  является выпуклым многогранником в своей аффинной оболочке. Отсюда и из следствия 18.22 вытекает, что  $F^i$  содержится в некоторой гиперграней  $F$  выпуклого многогранника  $F^j \subset \text{Aff } F^j$ . В силу следствия 18.12,  $F$  является некоторой гранью  $F^{j-1}$  многогранника  $X$ . Продолжая этот процесс, построим искомую цепочку.  $\square$

Важную роль в изучении многогранников играют их поляры, определенные в разделе 17.2. Из теоремы 17.2 мгновенно вытекает следующий результат.

**Следствие 18.24.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник, для которого  $0 \in \text{Int } X$ , тогда его поляра  $X^*$  — также выпуклый многогранник, причем  $X^{**} = X$ . Более того, отображение  $\Psi$ , заданное формулой (17.2), устанавливает естественное биективное соответствие между гранями  $X$  и  $X^*$ , обращающее включение.

### 18.3 Формула Эйлера для выпуклых многогранников

В предыдущих лекциях мы обсудили формулу Эйлера для выпуклых многогранников  $X \subset \mathbb{R}^3$ . Напомним, что в этом случае она имеет вид  $v - e + f = 2$ , где  $v$ ,  $e$  и  $f$  — количество вершин, ребер и граней (гиперграней) рассматриваемого многогранника. В случае произвольных выпуклых многогранников  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , рассмотрим альтернированную сумму  $\chi(X)$  количеств всех собственных граней  $X$ : если  $f_i$  — число граней размерности  $i$ , то  $\chi(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i$ . Для  $n = 0$  собственных граней нет, поэтому естественно положить  $\chi(X) = 0$ . Величина  $\chi(X)$  называется **эйлеровой характеристикой выпуклого многогранника  $X$** .

Выясним, чем равно  $\chi(X)$  для многогранников малой размерности. Про нульмерный многогранник мы уже говорили: для него  $\chi(X) = 0$ . У одномерного  $X$ , т.е. у отрезка, имеется ровно две собственные грани — его вершины, поэтому  $\chi(X) = 2$ . Выпуклый многоугольник имеет одинаковое число вершин и граней, поэтому  $\chi(X) = 0$ . Трехмерные многогранники мы тоже обсудили: для них  $\chi(X) = 2$ . Таким образом, наблюдается закономерность: у четномерных многогранников эйлерова характеристика равна нулю, а у нечетномерных равна 2. Общая формула для  $n \leq 3$  имеет вид  $\chi(X) = 1 - (-1)^n$ . Оказывается, это также верно и в произвольной размерности  $n$ .

**Пример 18.25.** Пусть  $X$  — произвольный  $n$ -мерный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ . Покажем, что каждое подмножество множества вершин симплекса  $X$  является вершинами некоторой грани. Пусть  $V$  — множество вершин симплекса  $X$ . Достаточно рассмотреть случай непустого подмножества  $W \subset V$ , отличного от  $V$ . Напомним, что  $V$  состоит из  $(n+1)$ -ой точки,  $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ , и является аффинно независимым. Рассмотрим произвольную точку  $x \in \text{conv}(V \setminus W)$ , тогда  $x = \sum_{v_i \in V \setminus W} \lambda_i v_i$ , где  $\lambda_i \geq 0$  и  $\sum \lambda_i = 1$ , в частности, не все  $\lambda_i$  равны нулю. Предположим, что  $x \in \text{Aff } W$ . Тогда  $x = \sum_{v_j \in W} \mu_j v_j$ , где  $\sum \mu_j = 0$ . Но тогда

$$\sum_{v_i \in V \setminus W} \lambda_i v_i - \sum_{v_j \in W} \mu_j v_j = 0,$$

причем не все  $\lambda_i$  равны нулю, так что множество  $V$  аффинно зависимо, противоречие. Таким образом,  $(\text{Aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ , поэтому, в силу теоремы 18.11,  $\text{conv } W$  — грань симплекса  $X$ .

Из сказанного вытекает, что количество собственных  $k$ -мерных граней  $n$ -мерного симплекса равно  $C_{n+1}^{k+1}$ , так что эйлерова характеристика  $\chi(X)$  такого симплекса равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n+1}^{i+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_{n+1}^k,$$

где  $C_n^k$  равно числу сочетаний из  $n$  по  $k$ . Напомним, что для переменной  $t$  имеем

$$(1+t)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i x^i = C_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1},$$

откуда

$$0 = (1-1)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k (-1)^k + (-1)^{n+1},$$

поэтому

$$\chi(X) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_{n+1}^k = 1 - (-1)^n.$$

**Теорема 18.26** (Формула Эйлера). Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник, тогда  $\chi(X) = 1 - (-1)^n$ .

## 18.4 Правильные многомерные многогранники

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник. В силу следствия 18.22, каждая вершина  $F^0$  из  $X$  содержится в некоторой гипергранни  $F^{n-1}$ . По следствию 18.23, существует цепочка  $F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^{n-1} \subset X$ , где  $F^i \in \mathcal{F}(X)$  — грань размерности  $i$ . Каждую такую цепочку будем называть **флагом граней**.

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если для любых двух его флагов существует изометрия пространства  $\mathbb{R}^n$ , переводящая первый флаг во второй. Это означает, что ограничения изометрии на  $k$ -мерные грани, входящие в рассматриваемые флаги, являются изометриями между этими гранями.

**Пример 18.27.** Нульмерные и одномерные многогранники — правильные. Двумерные многогранники — многоугольники — являются правильными, если и только если изометриями можно перевести любую вершину в любую вершину, и любую сторону в любую сторону, а это означает равенство всех углов и всех сторон. Напомним, что для каждого  $m \geq 3$  существует правильный  $m$ -угольник. В трехмерном случае правильность влечет возможность переводить любую двумерную грань в любую двумерную грань, при этом каждую вершину и каждое ребро этой грани можно переводить в любую другую вершину и любое другое ребро этой же грани. Таким образом, в этом случае все грани многогранника должны быть равными правильными  $k$ -угольниками. Так как любая вершина многогранника может быть переведена в любую вершину, эти правильные многоугольники стыкуются в каждой вершине в одном и том же количестве. Так как любое ребро переходит в любое ребро, двугранные углы при между гипергранями должны быть одинаковы. Таким образом, мы приходим к определению правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ , данному в лекции 9. Ответ мы сообщали: такими многогранниками являются пять платоновых тел.

Приведем ряд очевидных примеров правильных многомерных многогранников.

**Пример 18.28.** *Правильный  $n$ -мерный симплекс* в своей аффинной оболочке.

**Пример 18.29.** *Куб*, являющийся выпуклой оболочкой всех точек, у которых все координаты равны  $\pm 1$ .

**Пример 18.30.** *Гипероктаэдр* или *кросс-политоп*, являющийся выпуклой оболочкой векторов стандартного базиса и им противоположных.

В размерности  $n \geq 5$ , как оказывается, никаких других правильных многогранников нет. А вот в размерности 4 имеется еще три “экзотических” многогранника.

**Пример 18.31.** *24-ячейник*, или *икоситетраэдр*, или *октакуб*, или *полиоктаэдр* является выпуклой оболочкой всех точек из  $\mathbb{R}^4$ , у которых две координаты равны  $\pm 1$ , а две оставшиеся — нулю. Его граница склеена из 24 октаэдров, которые встречаются вшестером в каждой вершине и втроем на каждом ребре. Все вместе они образуют 96 треугольных граней, 96 ребер и 24 вершины.

**Пример 18.32.** *120-ячейник*, или *гексатоникосаэдр*, или *гипердодекаэдр* — выпуклая оболочка 600 точек, являющихся всевозможными перестановками точек вида

$$(0, 0, \pm 2, \pm 2), (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \sqrt{5}), (\pm \varphi^{-2}, \pm \varphi, \pm \varphi, \pm \varphi), (\pm \varphi^2, \pm \varphi^{-1}, \pm \varphi^{-1}, \pm \varphi^{-1}),$$

а также всевозможными четными перестановками точек вида

$$(0, \pm \varphi^{-2}, \pm 1, \pm \varphi^2), (0, \pm \varphi^{-1}, \pm \varphi, \pm \sqrt{5}), (\pm \varphi^{-1}, \pm 1, \pm \varphi, \pm 2),$$

где  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Его граница склеена из 120 додекаэдров, которые в вершинах встречается вчетвером, а на ребрах — втроем. Имеет 720 пятиугольных граней, 1200 ребер и 600 вершин.

**Пример 18.33.** *600-ячейник*, или *гекзакосихор*, или *тетраплекс*, или *политерттраэдр* — выпуклая оболочка 120 точек, являющихся всевозможными перестановками точек вида

$$(0, 0, 0, \pm 1), (\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2),$$

а также точек, являющихся четными перестановками точек вида  $(\pm \varphi/2, \pm 1/2, \pm \varphi^{-1}/2, 0)$ , где  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Его граница склеена из 600 тетраэдров, встречающихся в каждой вершине в количестве 20 и на каждом ребре в количестве 5. Имеем 1200 треугольных граней, 720 ребер, 120 вершин.

**Теорема 18.34.** *С точностью до подобия, существуют лишь следующие правильные  $n$ -мерные многогранники:*

- при  $n = 0$  — *одноточечный многогранник*;
- при  $n = 1$  — *отрезок  $[0, 1]$* ;
- при  $n = 2$  — *правильные  $m$ -угольники,  $m \geq 3$* ;
- при  $n = 3$  — *пять платоновых тел*;
- при  $n = 4$  — *правильный 4-мерный симплекс, 4-мерный куб, 4-мерный кросс-политоп, 24-ячейник, 120-ячейник, 600-ячейник*;
- при  $n \geq 5$  — *правильный  $n$ -мерный симплекс,  $n$ -мерный куб,  $n$ -мерный кросс-политоп.*

## Упражнения к главе 18

**Упражнение 18.1.** Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^n$  — непустой выпуклый компакт,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus Y$  и  $y_0 = \Phi_Y(p)$  — метрическая проекция точки  $p$  на  $Y$ . Покажите, что метрическая проекция  $\Phi_Y$  переводит весь луч  $y_0p$  в  $y_0$ .

**Упражнение 18.2.** Докажите теорему Буземана–Феллера: метрическая проекция  $\Phi_Y: \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  является 1-липшицевым отображением, в частности, метрическая проекция непрерывна.

**Упражнение 18.3.** Пусть  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  — сфера, ограничивающая шар, внутри которого лежит непустой выпуклый компакт  $Y$ .

(1) Покажите, что ограничение метрической проекции  $\Phi_Y$  на  $S^{n-1}$  и границу  $\partial Y$  множества  $Y$  является сюръекцией.

(2) Выведите отсюда, что через каждую точку границы  $\partial Y$  проходит опорная гиперплоскость.

**Упражнение 18.4.** Пусть  $\pi$  — гиперплоскость в  $\mathbb{R}^n$  и  $P \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое полупространство, ограниченное  $\pi$ . Пусть  $A \subset P$  и  $B = A \cap \pi$ . Покажите, что  $\text{conv } B = \pi \cap \text{conv } A$ .

**Упражнение 18.5.** Покажите, что выпуклый многогранник  $X \subset \mathbb{R}^n$  имеет не менее  $(n + 1)$ -ой вершины и не менее  $(n + 1)$ -ой гиперграни.

**Упражнение 18.6.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый многогранник,  $F_1, \dots, F_m$  — его гиперграни,  $\pi_i$  — гиперплоскость, для которой  $F_i = X \cap \pi_i$ , и  $P_i$  — полупространство, ограниченное  $\pi_i$  и содержащее  $X$ . Покажите, что среди полупространств  $P_i$  нет избыточных.

**Упражнение 18.7.** Покажите, что ни одна гипергрань выпуклого многогранника не содержится в объединении оставшихся гиперграней.

**Упражнение 18.8.** Пусть  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклые многогранники, и  $\lambda$  — ненулевое вещественное число. Покажите, что

(1)  $\lambda X$  — выпуклый многогранник;

(2)  $X + Y$  — выпуклый многогранник;

(3) если  $\text{Int}(X \cap Y) \neq \emptyset$ , то  $X \cap Y$  — выпуклый многогранник;

(4) если  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  — гиперплоскость такая, что  $\pi \cap \text{Int } X \neq \emptyset$ , то  $\pi \cap X$  — выпуклый многогранник в  $\pi$ .

**Упражнение 18.9.** Докажите формулу Эйлера для выпуклых многогранников  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Указание: выберите прямую  $\ell$  так, чтобы ортогональные проекции разных вершин из  $X$  были различны; проведите через каждую вершину гиперплоскость, перпендикулярную  $\ell$ ; между каждой парой последовательных гиперплоскостей также проведите гиперплоскость; в результате каждая из проведенных гиперплоскостей пересечет  $X$  по  $(n-1)$ -мерному многограннику  $X_i$ ; для каждой грани  $F^j$  многогранника  $X$  аффинной размерности  $j$ , где  $1 \leq j \leq n-1$ , определите число  $\psi(F^j, X_i)$  равным 1, если выполняется  $X_i \cap \text{relint } F^j \neq \emptyset$ , и равным 0 в противном случае; используйте эту конструкцию для соответствующих вычислений.

# Литература

- [1] Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии*. Серия: Классический учебник МГУ. – Москва, изд-во URSS, Леланд, 2014.
- [2] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.
- [3] Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L. *Handbook of combinatorics*, Elsevier, 1995, vol. 1.
- [4] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.
- [5] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии*. В серии: Классический университетский учебник. (Учебник). - Москва, изд-во "Физико-математическая литература МАИК "Наука/Интерпериодика 2004. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2016.
- [6] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. Переработанное и дополненное издание. — Москва, Физматлит, 2004.
- [7] Фоменко А.Т. *Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире*. Новое, исправленное и дополненное издание. — Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2018.
- [8] Nica V. “The Mazur-Ulam theorem”, arXiv:1306.2380 [math.MG].
- [9] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. — М.: Наука, 1989.
- [10] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [11] Прасолов В.В. *Теорема Жодана*, Матем. обр., 1999, выпуск 2–3 (9–10), стр. 95–101.
- [12] Вольперт А.И. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.
- [13] Филиппов А.Ф. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.
- [14] Парамонов П.В. *Теорема Жордана*, <http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf>
- [15] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.Л. *Многогранники, графы, оптимизация*. М.: Наука, 1981.
- [16] Берже М. *Геометрия*, тт. 1-2, М.: Мир, 1984.
- [17] Долбиллин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках*. Квант, 2001, N 5, 7–12.
- [18] Долбиллин Н.П. *Теорема Минковского о многогранниках*. Квант, 2006, N 4, 3–8.
- [19] Минковский Г. *Общие теоремы о выпуклых многогранниках*. Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, 55–71.
- [20] Alexandrov V. *Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons*, 2002, <http://arXiv:math/0211286v1>.
- [21] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976 (3rd Edition).
- [22] Abrams A., Pommersheim J. *Generalized dissection and Monsky’s theorem*, 2020, arXiv:2006.04286 [math.MG].
- [23] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem)



- [24] Dehn M. *Über den Rauminhalt*. Göttingen Nachr. Math. Phys., 1900, pp. 345–354; Math. Ann., 1902, v. 55, pp. 465–478.
- [25] Болтянский В.Г. *Третья проблема Гильберта*. М.:Наука, 1977.
- [26] Болтянский В.Г. Равновеликие и равносторонние фигуры. Гостехиздат, 1956.
- [27] <http://ium.mccme.ru/f10/teoriyamery.html>
- [28] Hadwiger H. Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Ann. 1954, 127, 170–174.
- [29] Sydler J.-P. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. math. Helv. 1965, v. 40, pp. 43–80.
- [30] <http://demonstrations.wolfram.com/DissectionOfHillsTetrahedronOfType1/>
- [31] Jessen B., Thorup A. *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces*. Math. Scand., 1978, v. 43, pp. 211–240.
- [32] Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. М: Наука, 1982.
- [33] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. М: ОНТИ НКТП, 1936.
- [34] Alexandrov A.D. *Convex Polyhedra*. (English translation by Dairbekov N.S., Kutateladze S.S., and Sossinsky A.B. Comments and bibliography by Zalgaller V.A. Appendices by Shor L.A. and Volkov Yu.A.) Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005.
- [35] Brøndsted A. *An introduction to convex polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 90, 1983.
- [36] Grünbaum V. *Convex polytopes*. Second edition (Prepared and with a preface by V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler), Graduate Texts in Mathematics, 221, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [37] McCammond J. *Prologue: Regular Polytopes*.  
<https://coxeter2011.files.wordpress.com/2011/09/prologue1.pdf>
- [38] McMullen P., Shephard G.C. *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971.
- [39] Webster R. *Convexity*. Oxford University Press, New York (1994).
- [40] Ziegler G.M. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag: New York 1995.
- [41] Coxeter H.S.M. *Regular Polytopes*. New York: Pitman Publishing Company, 1947.
- [42] McMullen P. *Geometric regular polytopes*. Cambridge University Press, 2020.
- [43] Болтянский В.Г., Солтан П.С. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*. — Кишинёв: Штиинца, 1978.