

Лекции по дифференциальной геометрии и топологии

А. А. Тужилин

13 сентября 2021 г.
14:32:28

Оглавление

1 Топологические многообразия	4
1.1 Топологические многообразия	4
1.1.1 Локально евклидовы пространства	4
1.1.2 Хаусдорфовость	6
1.1.3 Вторая аксиома счетности	6
1.2 Примеры многообразий	7
1.2.1 Топологические группы	7
1.2.2 Фактортопология	8
1.2.3 Действие группы	9
1.2.4 Топология, индуцированная транзитивным действием топологической группы	10
1.2.5 Действие группы на множестве с дополнительной структурой	10
Литература	12
Упражнения	13
2 Карты и атласы	15
2.1 Карты и атласы	15
2.2 Топологические многообразия с краем	18
2.3 Подмногообразия	20
Литература	21
Упражнения	22
3 Гладкие многообразия	23
3.1 Гладкие многообразия	23
3.1.1 Эквивалентные гладкие структуры	26
3.2 Гладкие отображения гладких многообразий	27
Литература	29
Упражнения	30
4 Касательные векторы, гладкие отображения, ориентируемость	31
4.1 Касательный вектор и касательное пространство	31
4.1.1 Координатное определение касательного вектора	31
4.1.2 Определение касательного вектора через классы эквивалентных кривых	32
4.1.3 Определение касательного вектора через дифференцирования в точке	32
4.1.4 Канонический базис касательного пространства	33
4.2 Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий	33
4.2.1 Определение дифференциала через классы эквивалентности кривых	33
4.2.2 Определение дифференциала через координатное представление	33
4.2.3 Определение дифференциала через дифференцирования в точке	34
4.3 Ранг дифференциала	34
4.3.1 Теорема о ранге	35
4.4 Погружения, субмерсии, локальные диффеоморфизмы	36
4.5 Вложения и гладкие подмногообразия	37
4.6 Срезающие функции и теорема вложения	39

Оглавление	2
4.7 Ориентируемость гладких многообразия (начало)	40
Литература	43
Упражнения	44
5 Расслоения	45
5.1 Общее определение расслоений	45
5.2 Локально тривиальные расслоения	49
5.2.1 Дополнительные структуры на расслоениях	51
Литература	53
Упражнения	54
6 Тензорные расслоения на гладких многообразиях, гладкие сечения	55
6.1 Тензорные расслоения на гладких многообразиях	55
6.2 Подрасслоения тензорных расслоений	57
6.3 Сечения	58
6.4 Перенесение назад ковариантных тензорных полей	60
Упражнения	61
7 Тензорные операции	62
7.1 Унарные тензорные операции	62
7.2 Бинарные тензорные операции	63
7.3 Поднятие и опускание индексов	66
7.4 Индуцированное псевдоскалярное произведение на тензорах	67
7.5 Обобщенная операция “звездочка”	68
7.6 Полилинейные отображения на сечениях и тензорные поля	69
Литература	71
Упражнения	72
8 Внешнее дифференцирование	74
8.1 Дифференциальные формы, внешний дифференциал	74
Литература	78
Упражнения	79
9 Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса.	81
9.1 Разбиение единицы	81
9.2 Определение интеграла от дифференциальной формы	83
9.3 Множества меры ноль	84
9.4 Об интеграле Римана	85
9.5 Общая формула Стокса	87
9.6 Некоторые следствия из общей формулы Стокса	89
9.6.1 Формула Грина	89
9.6.2 Выбор ориентации на подмногообразии коразмерности 1	89
9.6.3 Векторные поля вдоль подмногообразий коразмерности 1 и их потоки	90
9.6.4 Формула Остроградского–Гаусса и формула Стокса для поверхностей	90
9.6.5 Теорема “о барабане”	91
Литература	92
Упражнения	93
10 Когомологии де Рама.	95
10.1 Когомологии де Рама: определения и примеры	95
10.1.1 Примеры вычисления когомологий	96
10.2 Когомологии и формула Стокса	97
10.3 Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама	98
10.4 Точная последовательность Майера–Вьеториса	100
10.5 Градуированная алгебра когомологий де Рама	102
Литература	103
Упражнения	104

11 Степень гладкого отображения.	105
11.1 Теорема Сарда и следствия из нее	106
11.2 Степень гладкого отображения	106
11.2.1 Степень отображения относительно регулярного значения, ее гомотопическая инвариантность	106
11.2.2 Диффеотопия	109
11.2.3 Независимость степени от регулярного значения	110
11.3 Степень отображения и интеграл	111
11.4 Некоторые приложения интегральной формулы	112
11.4.1 Теорема Гаусса-Бонне	112
11.4.2 Теорема об индексе векторного поля	112
11.4.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке	113
11.4.4 Теорема о барабане	113
Литература	114
Упражнения	115
12 Ковариантное дифференцирование.	116
12.1 Связность в векторных расслоениях	116
12.2 Связность на касательном расслоении	117
12.2.1 Существование аффинной связности, закон изменения символов Кристоффеля	117
12.2.2 Ковариантные производные тензорных полей	118
12.2.3 Ковариантные производные вдоль кривых	119
12.2.4 Параллельный перенос и геодезические	120
12.3 Риманова связность	121
12.4 Тензор кривизны	123
12.4.1 Симметрии тензора кривизны	124
12.5 Подмногообразия римановых многообразий (краткий обзор)	126
Литература	129
Упражнения	130

Лекция 1

Топологические многообразия

План. Топологические многообразия, локально евклидовы пространства, локальная хаусдорфовость, локальная компактность, локальная связность, локальная линейная связность, первая аксиома счетности, локальная стягиваемость, локальная метризуемость, однозначная определенность размерности локально евклидова пространства, теорема Брауэра об инвариантности области, нехаусдорфовы локально евклидовы пространства, вторая аксиома счетности, сепарабельность, σ -компактность, компактное исчерпание, паракомпактность, линделёфовость, примеры многообразий, открытое подмножество евклидова пространства, дискретное топологическое пространство, триангулированные двумерные поверхности без края, неявная поверхность, вещественное проективное пространство, декартово произведение конечного числа многообразий, дизъюнктное объединение не более чем счетного числа многообразий одной размерности, топологическая группа, примеры топологических групп, являющихся многообразиями, фактортопология, примеры факторпространств, являющихся многообразиями, действие группы на множестве, свойства действия, топология, индуцированная транзитивным действием топологической группы на множестве, действие группы на множестве с дополнительной структурой, случай действия на топологическом и метрическом пространствах, левое и правое действия, свободное действие конечной группы на многообразии, линзовые пространства.

В предыдущем семестре мы изучали геометрию поверхностей, погруженных в евклидово пространство, где поверхность параметризовалась областью арифметического пространства, что приводило к существенным ограничениям топологии поверхностей, а также упрощало геометрические конструкции. Теперь же мы избавимся от всех этих ограничений. Мы начнем с обобщения области, которое приведет нас к понятию многообразия, а также многообразия с краем, частным случаем которого является промежуток. Кроме того, в качестве объемлющего пространства у нас также будут выступать многообразия.

1.1 Топологические многообразия

Под *топологическими многообразиями* или просто *многообразиями* мы понимаем хаусдорфовы локально евклидовы пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Мы начнем с обсуждения использованных только что понятий и постараемся объяснить, чем замечательны такие пространства и почему мы ограничиваемся именно ими.

1.1.1 Локально евклидовы пространства

Топологическое пространство X называется *локально евклидовым*, если у каждой точки $x \in X$ имеется (открытая) окрестность U^x , гомеоморфная некоторому открытому множеству в \mathbb{R}^n , где n не зависит от выбора точки x и называется *размерностью* пространства X .

Следующие свойства евклидовых пространств естественно наследуются и локально евклидовыми:

- локальная хаусдорфовость (у каждой точки есть хаусдорфова окрестность);
- локальная компактность (каждая точка содержится в некотором компакте вместе с некоторой своей открытой окрестностью);
- локальная связность (у каждой точки есть база окрестностей, состоящая из связных открытых множеств);
- локальная линейная связность (у каждой точки есть база окрестностей, состоящая из линейно связных открытых множеств);

- наличие первой аксиомы счетности (у каждой точки есть счетная база окрестностей)¹;
- локальная стягиваемость (у каждой точки есть база стягиваемых окрестностей; топологическое пространство Y называется *стягиваемым*, если тождественное отображение Y в себя может быть непрерывно продеформировано в постоянное отображение, переводящее пространство Y в некоторую точку $y_0 \in Y$, т.е. существует непрерывное отображение $F: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$, для которого $F(0, y) = y$ и $F(1, y) = y_0$ для всех $y \in Y$);
- локально метризуемо (у каждой точки есть метризуемая окрестность, т.е. окрестность, гомеоморфная метрическому пространству).

Задача 1.1. Пусть X — локально евклидово пространство.

- (1) Покажите, что связные компоненты X являются открытыми множествами. Таким образом, связные компоненты локально евклидова пространства также локально евклидовы. Приведите пример топологического пространства, в котором некоторые связные компоненты не являются открытыми множествами.
- (2) Докажите, что X является линейно связным, если и только если X — связно. В частности, компоненты линейной связности локально евклидова пространства совпадают с его компонентами связности. Приведите пример связного топологического пространства, которое не является линейно связным.

Возникает естественный вопрос: однозначно ли определена размерность локально евклидова пространства? В частности, могут ли для некоторых различных n и m открытые множества $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ быть гомеоморфными? Конечно, если множества U и V пусты, то они гомеоморфны, в частности, размерность пустого локально евклидова пространства однозначно не определена. Однако, для непустых открытых множеств такого не происходит, что вытекает из знаменитой теоремы Брауэра, которую мы упоминали в прошлом семестре. Напомним ее.

Теорема 1.2 (Об инвариантности области, Брауэр [1]). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество и $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда $V = \rho(U)$ также открыто и ρ — гомеоморфизм между U и V .

Замечание 1.3. Напомним сходное по духу топологическое утверждение: непрерывное инъективное отображение компактного топологического пространства в хаусдорфово является топологическим вложением, т.е. гомеоморфизмом с образом.

Итак, пусть, скажем, $m < n$, и $U \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое подмножество, гомеоморфное открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}^m$ с помощью гомеоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$. Тогда если $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное вложение пространства \mathbb{R}^m , например, в виде координатного подпространства в \mathbb{R}^n , то композиция $f \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывна и инъективна, однако, в противоречие с теоремой Брауэра, $(f \circ \varphi)(U)$ не является открытым подмножеством в \mathbb{R}^n . В частности, мы доказали следующий результат.

Предложение 1.4. Пусть $m < n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — непустые открытые множества, тогда U и V не гомеоморфны. В частности, размерность непустого локально евклидова пространства определена однозначно.

Решение следующей задачи также легко получается из теоремы 1.2.

Задача 1.5. Иногда локально евклидово пространство определяют более общо, понимая под окрестностью точки x топологического пространства X каждое множество $N \subset X$, для которого существует открытое множество $U \subset X$, удовлетворяющее $x \in U \subset N$ (окрестности не обязаны быть открытыми множествами). Покажите, что пространство X , в котором каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью N , гомеоморфной открытому подмножеству \mathbb{R}^n , является локально евклидовым (в прежнем смысле), а каждая такая окрестность N на самом деле является открытым подмножеством X .

¹Говоря про счетность, мы, следуя традиции, имеем в виду не более чем счетные множества (множества, которые можно “пересчитать” с помощью натуральных чисел — всех или их конечной части). Другой взгляд на счетность — рассматривать последовательность, допуская, что некоторые элементы могут встречаться более одного раза. В этом смысле каждое конечное множество можно превратить в биективное натуральным числам, повторяя некоторые из элементов бесконечно много раз.

1.1.2 Хаусдорфовость

Как мы уже отмечали, локально евклидовы пространства являются локально хаусдорфовыми. Вытекает ли отсюда хаусдорфовость такого пространства в целом?

Пример 1.6. Пусть $X = \mathbb{R} \sqcup \{0'\}$. Введем на X топологию следующим образом: открытыми множествами будем считать все открытые подмножества $\mathbb{R} \subset X$ в стандартной топологии, а также подмножества X , получающиеся из открытых подмножеств $\mathbb{R} \subset X$, содержащих 0, добавлением $0'$ или заменой 0 на $0'$. Полученное топологическое пространство называется *прямой Александрова* или *прямой с раздвоенным нулем*. Полученное пространство является локально евклидовым, однако точки 0 и $0'$ не отделимы, так что X хаусдорфовым не является.

Отсутствие хаусдорфовости приводит к разного рода усложнениям теории, например, к неоднозначности предельного перехода или неметризуемости пространства. Пример 1.6 показывает, что глобальная хаусдорфовость из локальной евклидовости не вытекает, так что если мы хотим ее иметь, нужно требовать ее отдельно.

1.1.3 Вторая аксиома счетности

Еще одно соображение: у локально евклидовых пространств могут быть базы сколь угодно большой мощности, что может привести к отсутствию ряда важных свойств, в частности, к неметризуемости такого пространства [1]. Чтобы избавиться от подобных “сложностей”, принято вводить дополнительные ограничения. Приведем ряд популярных требований.

- (1) *Вторая аксиома счетности*, т.е. наличие у пространства счетной базы.
- (2) *Сепарабельность*, т.е. наличие счетной всюду плотной последовательности.
- (3) *σ -компактность*, т.е. возможность покрыть пространство счетным числом компактов.
- (4) *Наличие компактного исчерпания*, т.е. такого покрытия $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ компактными подмножествами, что при каждом i выполняется $K_i \subset \text{Int } K_{i+1}$.
- (5) *Паракомпактность*, т.е. возможность вписать в каждое открытое покрытие локально конечное открытое покрытие. Напомним, что покрытие топологического пространства X произвольными множествами называется *локально конечным*, если каждая точка из X имеет окрестность, пересекающую лишь конечное число элементов покрытия. Покрытие D множества X называется *измельчением покрытия C* этого множества, если каждый элемент из D содержится в некотором элементе из C . Также говорят, что покрытие D *вписано* в покрытие C . Ясно, что каждое компактное пространство является паракомпактным.
- (6) *Линделёфовость*, т.е. возможность выбрать в каждом покрытии счетное подпокрытие (обобщение компактности).

Замечание 1.7. Между приведенными требованиями имеются многочисленные связи, обсуждение которых выходит за рамки нашей программы. Отметим лишь, что при определенных условиях ряд из них эквивалентны (скажем, вторая аксиома счетности, линделёфовость и σ -компактность), а наличие некоторых из них эквивалентно (тоже при дополнительных предположениях) важным для приложений дополнительным свойствам. Так, паракомпактность тесно связана с метризуемостью, а вторая аксиома счетности — с возможностью топологического вложения в арифметическое пространство.

Задача 1.8. Пусть X — локально евклидово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Покажите, что тогда пространство X сепарабельно, σ -компактно, обладает компактным исчерпанием, линделёфово, а если X еще и хаусдорфово, то оно — паракомпактно.

Таким образом, в соответствии с задачей 1.8, вторая аксиома счетности оказывается самым сильным требованием, что мотивирует наш выбор окончательного списка ограничений.

Определение 1.9. *Топологическим многообразием* или просто *многообразием* будем называть хаусдорфово локально евклидово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, т.е. обладающее не более чем счетной базой.

1.2 Примеры многообразий

Приведем примеры многообразий.

Пример 1.10. *Любое открытое множество U в \mathbb{R}^n* , в частности, все \mathbb{R}^n , так как U — локально (и даже глобально) евклидово, все \mathbb{R}^n обладает счетной базой (можно взять открытые шары с рациональными точками и рациональными радиусами), а вторая аксиома счетности наследуется подмножествами (проверьте). В частности, матричная группа $GL(n, \mathbb{R})$ представляет собой открытое подмножество пространства \mathbb{R}^{n^2} (убедитесь в этом).

Пример 1.11. *Дискретное топологическое пространство* является нульмерным локально евклидовым и хаусдорфовым, но не всегда удовлетворяет второй аксиоме счетности: такое пространство — многообразие, если и только если оно — не более чем счетно.

Пример 1.12. *Триангулированные двумерные поверхности без края*, которые Вы изучали на предыдущем курсе, — двумерные многообразия. Собственно говоря, по модулю доказательства возможности введения триангуляции на двумерных многообразиях без края, мы приводили план классификации таких многообразий.

Пример 1.13. *Неявная поверхность.*

Задача 1.14. Докажите, что неявная поверхность, заданная k гладкими функциями на области в \mathbb{R}^n , удовлетворяющими теореме о неявном отображении, является $(n - k)$ -мерным многообразием.

В частности, многообразиями являются окружности, сферы произвольной размерности, торы, разные матричные группы, скажем, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ и другие.

Пример 1.15. *Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$* , точки которого — прямые в \mathbb{R}^{n+1} , проходящие через начало координат. На этом множестве задается функция расстояния следующим образом: расстояние между двумя прямыми равно наименьшему углу между ними. Это расстояние является метрикой (проверьте). Покажем, что $\mathbb{R}P^n$ является многообразием размерности n .

Рассмотрим отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы прямую, проходящую через эту точку и центр сферы. Это отображение является локальной изометрией, так как сферическое расстояние между близкими точками сферы равно углу между соответствующими прямыми, поэтому f — локальный гомеоморфизм. Так как сфера — многообразие, то $\mathbb{R}P^n$ — локально евклидово пространство. Так как топология на $\mathbb{R}P^n$ — метрическая, то пространство $\mathbb{R}P^n$ хаусдорфово. Так как непрерывный образ компакта — компакт, то пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно, в частности, из покрытия окрестностями, гомеоморфными открытым подмножествам \mathbb{R}^n , можно выделить конечное подпокрытие. Последнее доказывает, что топология $\mathbb{R}P^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пример 1.16. *Декартово произведение конечного числа многообразий* также является многообразием, так как произведение конечного числа открытых подмножеств евклидовых пространств также является открытым подмножеством некоторого евклидова пространства, хаусдорфовость сохраняется, а в качестве базы произведения можно взять всевозможные произведения множеств из баз, откуда вытекает наличие второй аксиомы счетности.

Пример 1.17. *Дизъюнктное объединение не более чем счетного числа многообразий одной размерности.*

1.2.1 Топологические группы

Топологической группой называется топологическое пространство, на котором задана непрерывная групповая операция такая, что переход к обратному элементу тоже непрерывен². Более подробно, если G — определяемая топологическая группа, то требуется, чтобы отображение $G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, задающее групповую операцию, было непрерывным, и отображение $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, переводящее каждый элемент группы в обратный к нему, тоже было бы непрерывным. Нас будут интересовать в первую очередь *топологические группы, являющиеся многообразиями*. Приведем примеры.

²Ряд авторов, определяя топологическую группу, требует заранее, чтобы она была хаусдорфовым пространством, см. например [2]

Пример 1.18. Все не более чем счетные группы (с дискретной топологией), вещественная прямая \mathbb{R} и арифметическое пространство \mathbb{R}^n (операция — сложение векторов), окружность (сложение аргументов) и декартово произведение конечного числа окружностей, т.е. тор, матричные группы $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$ и т.д. (относительно умножения матриц).

Пример 1.19. Превратим группу $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ аффинных преобразований арифметического пространства \mathbb{R}^n в топологическую. Для этого напомним, что каждое аффинное преобразование однозначно задается матрицей $A \in GL(n, \mathbb{R})$ и вектором $b \in \mathbb{R}^n$ параллельного переноса, так что преобразование, соответствующее паре (A, b) , имеет вид $x \mapsto Ax + b$. Таким образом, группу $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как подмножество \mathbb{R}^{n^2+n} с индуцированной топологией. Так как $GL(n, \mathbb{R})$ — открытое подмножество в \mathbb{R}^{n^2} , то $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ — открытое подмножество в \mathbb{R}^{n^2+n} и, значит, естественно наделяется топологией многообразия.

Покажем, что групповая операция (композиция) и переход к обратному элементу непрерывны. Для этого заметим, что выражение $A_2(A_1x + b_1) + b_2 = A_2A_1x + (A_2b_1 + b_2)$, где $A_i \in GL(n, \mathbb{R})$, а $b_i \in \mathbb{R}^n$, записывается многочленами второго порядка от компонент матриц A_i и векторов b_i и, значит, непрерывно зависит от этих компонент. Таким образом, групповая операция в $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна. Далее, аффинное преобразование, обратное к $x \mapsto Ax + b$, задается парой $(A^{-1}, -A^{-1}b)$. Так как компоненты обратной матрицы — рациональные функции (отношение многочленов, задающих алгебраические дополнения элементов матрицы, к многочлену, задающему определитель матрицы), то на невырожденных матрицах A отображение $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно. Также непрерывно и отображение $(A, b) \mapsto -A^{-1}b$. Таким образом, и переход к обратному элементу непрерывен. Итак, мы превратили $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ в топологическую группу. Тем самым, мы также превратили в топологические группы (с индуцированной топологией) все подгруппы в $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Наиболее интересными для нас будут подгруппа $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$, состоящая из всех изометрий пространства \mathbb{R}^n , подгруппа $\text{Aff}_0(\mathbb{R}^n)$ всех аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию, и подгруппа $\text{Iso}_0(\mathbb{R}^n) = \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \cap \text{Aff}_0(\mathbb{R}^n)$ всех изометрий пространства \mathbb{R}^n , сохраняющих ориентацию.

Прежде чем переходить к следующему примеру, напомним ряд конструкций.

1.2.2 Фактортопология

Пусть X — топологическое пространство, на котором задано отношение эквивалентности \sim . Каждое отношение эквивалентности разбивает множество на классы эквивалентности и обратно, каждое разбиение множества задается отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим X/\sim . Для $x \in X$ пусть $[x]$ — класс эквивалентности, содержащий x . Рассмотрим естественную проекцию $\pi: X \rightarrow X/\sim$, заданную так: $\pi: x \mapsto [x]$. Фактортопология на X/\sim определяется следующим образом: подмножество $U \subset X/\sim$ открыто, если и только если множество $\pi^{-1}(U)$ открыто в X . Иными словами, в X/\sim открыты в точности те коллекции классов эквивалентности, объединение которых открыто в X . Множество X/\sim вместе с фактортопологией называется **факторпространством**.

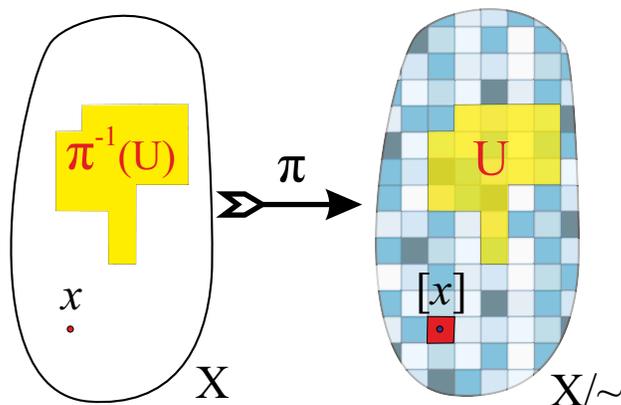


Рис. 1.1: Фактортопология.

Следующие задачи облегчают изучение топологии факторпространств.

Задача 1.20. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм топологических пространств. Предположим, что на X и Y заданы эквивалентности \sim_1 и \sim_2 соответственно такие, что $x \sim_1 x'$, если и только если $f(x) \sim_2 f(x')$. Тогда корректно определено отображение $F: X/\sim_1 \rightarrow Y/\sim_2$, $F: [x] \mapsto [f(x)]$, причем F — тоже гомеоморфизм.

Задача 1.21. Пусть X — компактное топологическое пространство, и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение в хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим \sim отношение эквивалентности, задающее разбиение $\{f^{-1}(y)\}_{y \in f(X)}$ пространства X . Тогда X/\sim гомеоморфно $f(X)$.

Замечание 1.22. Покажем, что требование компактности пространства X в задаче 1.21 существенно. Пусть $X = [0, 2\pi]$, $Y = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, а f задается стандартно в виде $f: t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Так как отношение \sim тривиально в этом случае, то X/\sim гомеоморфно X , но X и Y не гомеоморфны. Отметим, что в этом примере выполняются все условия задачи 1.21, кроме компактности X .

Покажем, что требование хаусдорфовости Y существенно. Пусть $X = \{a, b\}$ с дискретной топологией, $Y = \{a, b\}$ с антидискретной топологией, а $f: X \rightarrow Y$ — тождественное отображение множества $\{a, b\}$. Тогда \sim тривиальна, так что X и X/\sim гомеоморфны, но X и Y не гомеоморфны. В этом примере выполняются все условия задачи 1.21, кроме хаусдорфовости Y .

Приведем примеры *факторпространств, являющихся многообразиями*. Заодно проиллюстрируем, как работают утверждения из задач 1.20 и 1.21.

Пример 1.23. Покажем, что окружность представляет факторпространство, полученное из отрезка отождествлением его концов (в этом случае классы эквивалентности \sim для внутренних точек отрезка — одноточечны, а оба конца отрезка входят в один класс). По задаче 1.20, пространства, полученные отождествлением концов отрезка, с топологической точки зрения не зависят от выбора отрезка: эти пространства гомеоморфны. Возьмем отрезок $[0, 2\pi]$ и рассмотрим отображение $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$, заданное стандартным образом: $f: t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Отрезок компактен, окружность хаусдорфова, отображение непрерывно и сюръективно, разбиение отрезка на прообразы точек окружности совпадает с разбиением, заданным эквивалентностью \sim . В силу задачи 1.21, факторпространство $[0, 2\pi]/\sim$ гомеоморфно окружности S^1 .

Ровно также показывается, что сфера размерности n получается из n -мерного замкнутого шара отождествлением всех точек его границы, или, например, тор вращения в \mathbb{R}^3 , а, значит, и любой двумерный тор, гомеоморфен пространству, получающемуся из квадрата склейкой соответствующих сторон. Более общо, можно показать, что все двумерные поверхности без края получаются соответствующими отождествлениями сторон многоугольников. Кроме того, представление двумерных поверхностей без края в виде сферы с некоторым количеством ручек или пленок Мёбиуса состоит во введении фактортопологии на дизъюнктом объединении сферы с дырками и нужного числа ручек или пленок Мёбиуса.

Опишем важный пример фактортопологии, которая порождается действием группы. Начнем с определения действия произвольной группы на произвольном множестве.

1.2.3 Действие группы

Пусть X — произвольное множество и $\text{Sym}(X)$ — *симметрическая группа*, т.е. группа всех биективных отображений X в себя (операция — композиция отображений). Пусть G — произвольная группа и $\varphi: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ — некоторый гомоморфизм: для любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$. Тогда говорят, что φ задает *действие группы G на множестве X* , или что X *является G -пространством*. Традиционно каждый элемент $g \in G$ отождествляют с биекцией $\varphi(g)$, так что для каждого $x \in X$ вместо $\varphi(g)(x)$ пишут $g x$. Важный частный случай G -пространства возникает, когда X — группа, G — подгруппа X , а действие состоит в умножении слева: тут $g x$ обозначает перемножение элементов $g \in G$ и $x \in X$ в объемлющей группе X .

Следующая задача описывает различные свойства действия группы, многие из которых непосредственно вытекают из гомоморфности отображения φ .

Задача 1.24. Пусть множество X является G -пространством. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если $e \in G$ — единица (нейтральный элемент) группы, то $e x = x$ для каждого $x \in X$.
- (2) Для любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$. В частности, если $y = g x$, то $x = g^{-1}y$.
- (3) Множество всех $g \in G$, для которых $g x = x$ для фиксированного $x \in X$, является подгруппой в G , которая называется *стационарной подгруппой точки x* или *стабилизатором x* и обозначается G_x .

- (4) Если $y = gx$, то $G_y = gG_xg^{-1}$.
- (5) Множество $Gx = \{gx : g \in G\}$ называется *орбитой точки x* . Через каждую точку x проходит орбита Gx . Две орбиты или не пересекаются, или совпадают, так что определено разбиение пространства X на орбиты, которое обозначается X/G и называется *семейством орбит*.
- (6) Для $x \in X$ рассмотрим отображение $f_x : G \rightarrow X$, заданное так: $f_x(g) = gx$. Тогда $f_x(gG_x) = gx$, поэтому корректно определено отображение $F_x : G/G_x \rightarrow Gx$, $F_x : gG_x \mapsto gx$, причем F_x — биекция.
- (7) Пусть Y — тоже некоторое G -пространство. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *эквивариантным* или *G -отображением*, если оно уважает действие группы G , т.е. для любых $x \in X$ и $g \in G$ выполняется $f(gx) = gf(x)$. Рассмотрим биекцию $F_x : G/G_x \rightarrow Gx$ из пункта (6). Тогда отображение F_x — эквивариантно (на множество G/G_x и орбите Gx естественно индуцировано действие группы G).
- (8) Действие группы G называется *транзитивным*, если имеется ровно одна орбита (совпадающая тем самым с X). Такое множество X называется *однородным G -пространством*. В силу пунктов (6) и (7), каждая точка x однородного G -пространства X задает эквивариантную биекцию $F_x : G/G_x \rightarrow X$.
- (9) Действие группы G называется *свободным*, если стационарная подгруппа G_x каждой точки $x \in X$ тривиальна, т.е. содержит только нейтральный элемент. Для свободно действующей группы G выполняется следующее эквивалентное условие: если $g_1x = g_2x$ для некоторых $x \in X$ и $g_1, g_2 \in G$, то $g_1 = g_2$.

1.2.4 Топология, индуцированная транзитивным действием топологической группы

В случае однородного G -пространства X , где X — множество, а G — топологическая группа, множество X наделяется естественной топологией с помощью следующей конструкции.

Конструкция 1.25. В силу пункта (7) упражнения 1.24, имеется биекция $F_x : G/G_x \rightarrow X$. Так как G — топологическое пространство, то на G/G_x определена фактортопология. Множество всех F_x -образов открытых подмножеств G/G_x задает топологию на X . Будем говорить, что эта топология *индуцирована транзитивным действием топологической группы G* .

Задача 1.26. Покажите, что для топологической группы G , на однородном G -пространстве X с топологией, индуцированной действием G , отображения $x \mapsto gx$, $x \in X$, $g \in G$, являются гомеоморфизмами.

Приведем пример использования конструкции 1.25.

Задача 1.27. Рассмотрим на плоскости множество X всех прямых. На X транзитивно действует топологическая группа $G = \text{Iso}_0(\mathbb{R}^2)$ сохраняющих ориентацию изометрий, что индуцирует на X топологию. Покажите, что полученное топологическое пространство гомеоморфно бесконечному листу Мёбиуса, представляющему факторпространство полосы $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ по эквивалентности, отождествляющей центрально-симметричные точки границы, т.е. точки $(-1, -y)$ и $(1, y)$.

Замечание 1.28. Аналогичным образом можно задать топологию на вещественном проективном пространстве, а именно, мы можем на множестве всех прямых в \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через начало координат, подействовать транзитивно группой ортогональных преобразований $O(n+1, \mathbb{R})$. Стационарная подгруппа G_x порождается всевозможными ортогональными преобразованиями в ортогональном дополнении к прямой x , которые образуют группу $O(n, \mathbb{R})$, а также центральной симметрией. В результате, мы перенесем на $\mathbb{R}P^n$ топологию с $O(n+1, \mathbb{R})/G_x$, и эта топология совпадет с метрической, определенной выше. Причина совпадения топологий описывается в задаче 1.30, приведенной ниже.

1.2.5 Действие группы на множестве с дополнительной структурой

Если множество X обладает дополнительной структурой, например, является топологическим или метрическим пространством, то вместо симметрической группы $\text{Sym}(X)$ берут ее подгруппу, составленную из биекций, сохраняющих структуру. Так, в случае топологического пространства рассматривают группу $\text{Homeo}(X)$ всех гомеоморфизмов X на себя³, а в случае метрического — группу $\text{Iso}(X)$ всех изометрий пространства X .

³В некоторых монографиях, скажем в [2], при определении G -пространства для топологического X сразу требуется, чтобы X было хаусдорфовым.

Если X — топологическое пространство, а G — топологическая группа, то действие G на X (гомеоморфизмами X) называется **непрерывным**, если непрерывно отображение $G \times X \rightarrow X$, заданное так: $(g, x) \mapsto gx$.

Задача 1.29. Пусть X — топологическое пространство, а G — произвольная группа, наделенная дискретной топологией. Докажите, что каждое действие группы G на X непрерывно.

Задача 1.30. Предположим, что компактная группа G (например, конечная дискретная группа) действует непрерывно на хаусдорфовом топологическом пространстве X . Покажите, что для каждого $x \in X$ орбита Gx гомеоморфна G/G_x (на Gx рассматривается топология, индуцированная из X , а на G/G_x — фактортопология). В частности, если это действие транзитивно, то пространство X гомеоморфно G/G_x .

Задача 1.31. Выведите из задачи 1.30, что $\mathbb{R}P^n$ с метрической топологией гомеоморфно $O(n+1, \mathbb{R})/G_x$, где $x \in \mathbb{R}P^n$, а G_x — стабилизатор точки x .

Замечание 1.32. Действие группы, рассмотренное нами, также называют **действием слева** или **левым действием**. Можно определить **правое действие**, которое отличается от левого лишь тем, что для любых $g_1, g_2 \in G$ и любого $x \in X$ выполняется $x(g_1g_2) = (xg_1)g_2$. Это действие можно свести к левому, заменив группу G на **противоположную** ей группу G^{op} , совпадающую с G как множество, но имеющую другую операцию $*$, связанную с операцией в G так: $g_1 * g_2 = g_2g_1$. Группы G и G^{op} изоморфны посредством отображения $g \mapsto g^{-1}$. Мотивация рассмотрения этого действия состоит в том, что в случае, когда X — группа, а G — подгруппа X , естественно рассматривать не только умножение слева на элементы из G и называть его действием, как было сделано в пункте (б) задачи 1.24, но и умножение справа.

В первую очередь нас будут интересовать примеры, в которых пространства орбит X/G являются многообразиями. Следующая задача позволяет строить многочисленные примеры таких многообразий.

Задача 1.33. Пусть G — конечная группа, действующая свободно на многообразии X , тогда X/G — многообразии той же размерности.

Пример 1.34. Рассмотрим на стандартной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ свободное действие группы $\mathbb{Z}_2 \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$, в которой элемент, отличный от нейтрального, — центральная симметрия. Тогда S^n/\mathbb{Z}_2 — многообразие размерности n в соответствии с задачей 1.33. Как и в примере 1.15, рассмотрим отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, ставящее в соответствие каждой точке сферы S^n прямую, проходящую через эту точку и центр сферы. Как мы уже отмечали, f — локальный гомеоморфизм, в частности, отображение f непрерывно. Так как сфера S^n компактна, пространство $\mathbb{R}P^n$ — хаусдорфово, а разбиение на орбиты, заданное действием группы \mathbb{Z}_2 , совпадает с разбиением, порожденным отображением f , применима задача 1.21, в соответствии с которой пространство S^n/\mathbb{Z}_2 с фактортопологией гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$. Таким образом, мы продемонстрировали еще один способ показать, что $\mathbb{R}P^n$ — многообразие размерности n .

Пример 1.35. Рассмотрим нечетномерную сферу $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Обозначим декартовы координаты в \mathbb{R}^{2n} следующим образом: $(x^1, y^1, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n)$. Запишем точку (x^k, y^k) из соответствующей двумерной координатной плоскости в комплексном виде: $z^k = x^k + iy^k$. Таким образом, каждую точку из \mathbb{R}^{2n} можно записать в комплексной форме (z^1, \dots, z^n) , что позволяет отождествить \mathbb{R}^{2n} с \mathbb{C}^n . Рассмотрим теперь целые числа p, q_1, \dots, q_n такие, что для каждого k числа q_k и p взаимно просты. Рассмотрим теперь действие группы $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$ на S^{2n-1} , заданное так:

$$(z^1, \dots, z^n) \mapsto (e^{2\pi i q_1 k/p} z^1, \dots, e^{2\pi i q_n k/p} z^n), \quad k \in \mathbb{Z}_p.$$

Несложно проверяется, что это действие свободное. Таким образом, в соответствии с задачей 1.33, факторпространство S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p — многообразие размерности $2n-1$, которое называется **линзовым пространством** и обозначается $L(p; q_1, \dots, q_n)$. Особый интерес представляют трехмерные линзовые пространства $L(p; q)$, введенные Генрихом Титце в 1908 году.

Литература

- [1] David Fernández-Bretón, Nicholas G. Vlamis, Mathieu Baillif, *Ends of non-metrizable manifolds: a generalized bagpipe theorem*, arXiv:2004.10913 [math.GN], 2021, <https://arxiv.org/pdf/2004.10913.pdf>
- [2] Бредон Г. *Введение в теорию компактных групп преобразований*. — М.: Наука, 1980.

Упражнения к главе 1

Упражнение 1.1. Пусть X — локально евклидово пространство.

- (1) Покажите, что связные компоненты X являются открытыми множествами. Таким образом, связные компоненты локально евклидова пространства также локально евклидовы. Приведите пример топологического пространства, в котором некоторые связные компоненты не являются открытыми множествами.
- (2) Докажите, что X является линейно связным, если и только если X — связно. В частности, компоненты линейной связности локально евклидова пространства совпадают с его компонентами связности. Приведите пример связного топологического пространства, которое не является линейно связным.

Упражнение 1.2. Иногда локально евклидово пространство определяют более общо, понимая под окрестностью точки x топологического пространства X каждое множество $N \subset X$, для которого существует открытое множество $U \subset X$, удовлетворяющее $x \in U \subset N$ (окрестности не обязаны быть открытыми множествами). Покажите, что пространство X , в котором каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью N , гомеоморфной открытому подмножеству \mathbb{R}^n , является локально евклидовым (в прежнем смысле), а каждая такая окрестность N на самом деле является открытым подмножеством X .

Упражнение 1.3. Пусть X — локально евклидово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Покажите, что тогда пространство X сепарабельно, σ -компактно, обладает компактным исчерпанием, линделёфово, а если X еще и хаусдорфово, то оно — паракомпактно.

Упражнение 1.4. Докажите, что неявная поверхность, заданная k гладкими функциями на области в \mathbb{R}^n , удовлетворяющими теореме о неявном отображении, является $(n - k)$ -мерным многообразием.

Упражнение 1.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм топологически пространств. Предположим, что на X и Y заданы эквивалентности \sim_1 и \sim_2 соответственно такие, что $x \sim_1 x'$, если и только если $f(x) \sim_2 f(x')$. Тогда корректно определено отображение $F: X/\sim_1 \rightarrow Y/\sim_2$, $F: [x] \mapsto [f(x)]$, причем F — тоже гомеоморфизм.

Упражнение 1.6. Пусть X — компактное топологическое пространство, и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение в хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим \sim отношение эквивалентности, задающее разбиение $\{f^{-1}(y)\}_{y \in f(X)}$ пространства X . Тогда X/\sim гомеоморфно $f(X)$.

Упражнение 1.7. Пусть множество X является G -пространством. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если $e \in G$ — единица (нейтральный элемент) группы, то $ex = x$ для каждого $x \in X$.
- (2) Для любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$. В частности, если $y = gx$, то $x = g^{-1}y$.
- (3) Множество всех $g \in G$, для которых $gx = x$ для фиксированного $x \in X$, является подгруппой в G , которая называется *стационарной подгруппой точки x* или *стабилизатором x* и обозначается G_x .
- (4) Если $y = gx$, то $G_y = g G_x g^{-1}$.
- (5) Множество $Gx = \{gx : g \in G\}$ называется *орбитой точки x* . Через каждую точку x проходит орбита Gx . Две орбиты или не пересекаются, или совпадают, так что определено разбиение пространства X на орбиты, которое обозначается X/G и называется *семейством орбит*.
- (6) Для $x \in X$ рассмотрим отображение $f_x: G \rightarrow X$, заданное так: $f_x(g) = gx$. Тогда $f_x(g G_x) = gx$, поэтому корректно определено отображение $F_x: G/G_x \rightarrow Gx$, $F_x: g G_x \mapsto gx$, причем F_x — биекция.
- (7) Пусть Y — тоже некоторое G -пространство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *эквивариантным* или *G -отображением*, если оно уважает действие группы G , т.е. для любых $x \in X$ и $g \in G$ выполняется $f(gx) = g f(x)$. Рассмотрим биекцию $F_x: G/G_x \rightarrow Gx$ из пункта (6). Тогда отображение F_x — эквивариантно (на множество G/G_x и орбите Gx естественно индуцировано действие группы G).
- (8) Действие группы G называется *транзитивным*, если имеется ровно одна орбита (совпадающая тем самым с X). Такое множество X называется *однородным G -пространством*. В силу пунктов (6) и (7), каждая точка x однородного G -пространства X задает эквивариантную биекцию $F_x: G/G_x \rightarrow X$.

- (9) Действие группы G называется **свободным**, если стационарная подгруппа G_x каждой точки $x \in X$ тривиальна, т.е. содержит только нейтральный элемент. Для свободно действующей группы G выполняется следующее эквивалентное условие: если $g_1x = g_2x$ для некоторых $x \in X$ и $g_1, g_2 \in G$, то $g_1 = g_2$.

Упражнение 1.8. Покажите, что для топологической группы G , на G -пространстве X с топологией, индуцированной действием G , отображения $x \mapsto gx$, $x \in X$, $g \in G$, являются гомеоморфизмами.

Упражнение 1.9. Рассмотрим на плоскости множество X всех прямых. На X транзитивно действует топологическая группа $G = \text{Iso}_0(\mathbb{R}^2)$ сохраняющих ориентацию изометрий, что индуцирует на X топологию. Покажите, что полученное топологическое пространство гомеоморфно бесконечному листу Мёбиуса, представляющему факторпространство полосы $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ по эквивалентности, отождествляющей центрально-симметричные точки границы, т.е. точки $(-1, -y)$ и $(1, y)$.

Упражнение 1.10. Пусть X — топологическое пространство, а G — произвольная группа, наделенная дискретной топологией. Докажите, что каждое действие группы G на X непрерывно.

Упражнение 1.11. Предположим, что компактная группа G (например, конечная дискретная группа) действует непрерывно на хаусдорфовом топологическом пространстве X . Покажите, что для каждого $x \in X$ орбита Gx гомеоморфна G/G_x (на Gx рассматривается топология, индуцированная из X , а на G/G_x — фактортопология). В частности, если это действие транзитивно, то пространство X гомеоморфно G/G_x .

Упражнение 1.12. Выведите из задачи 1.11, что \mathbb{RP}^n с метрической топологией гомеоморфно $O(n+1, \mathbb{R})/G_x$, где $x \in \mathbb{RP}^n$, а G_x — стабилизатор точки x .

Упражнение 1.13. Пусть G — конечная группа, действующая свободно на многообразии X , тогда X/G — многообразие той же размерности.

Лекция 2

Карты и атласы

План. Карты и атласы на множестве, задание топологии многообразия с помощью атласа, примеры, вещественное проективное пространство, многообразии Грассмана, многообразии Штифеля, топологические многообразия с краем, примеры, подмногообразия.

Мы начнем эту лекцию с часто используемого приема, позволяющего ввести на множестве тех или иных объектов структуру топологического многообразия. Как видно из названия, идея исходит из практики составления географических карт.

2.1 Карты и атласы

Ниже мы приведем еще ряд важных примеров многообразий, которые получаются факторизацией G -пространств. Но предварительно обсудим важное понятие карт и атласа, которые, в частности, тоже позволяют задавать на некоторых множествах топологию многообразия.

Фиксируем неотрицательное целое число n . Пусть M — произвольное множество. Пару (U, φ) , где $U \subset M$ — некоторое подмножество, а $\varphi: U \rightarrow V$ — биекция на открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$ назовем **картой**. Биекция φ сопоставляет точкам из U координаты их образов в V (относительно декартовых координат в \mathbb{R}^n), поэтому U называется **координатной окрестностью**, а выбор карты (U, φ) называют **заданием локальных координат**.

Говорят, что карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) на множестве M **пересекаются**, если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, и **открыто пересекаются**, если $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — непустые открытые множества. На открытом пересечении карт, то есть в таком $U_\alpha \cap U_\beta$, отображения φ_α и φ_β задают две системы координат. Тем самым, определены **замены координат** $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ и $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$: первая действует из $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ в $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, а вторая — в обратном направлении, см. рис. 2.1. Эти замены координат также принято называть **отображениями склейки** или **функциями перехода**.

Будем говорить, что семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ **покрывает** M , если $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$, т.е. если $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — покрытие множества M . Семейство карт такое, что

- (1) если две карты пересекаются, то они открыто пересекаются,
- (2) все отображения склейки являются гомеоморфизмами,
- (3) семейство карт покрывает M ,

называется **атласом на множестве M** (сравните это понятие с географическим атласом).

Пример 2.1. Пусть M — многообразие. Так как M — локально евклидово пространство, его можно покрыть открытыми множествами U_α , каждое из которых гомеоморфно некоторому открытому подмножеству V_α посредством некоторого гомеоморфизма φ_α , поэтому пары $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ являются картами. Так как все φ_α — гомеоморфизмы, а непустые пересечения пар карт являются открытыми множествами, имеются лишь открытые пересечения карт, и все отображения склейки — гомеоморфизмы. Значит, такое семейство карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ является атласом.

Опишем конструкцию, позволяющую в некоторых случаях задавать структуру многообразия на определенных множествах.

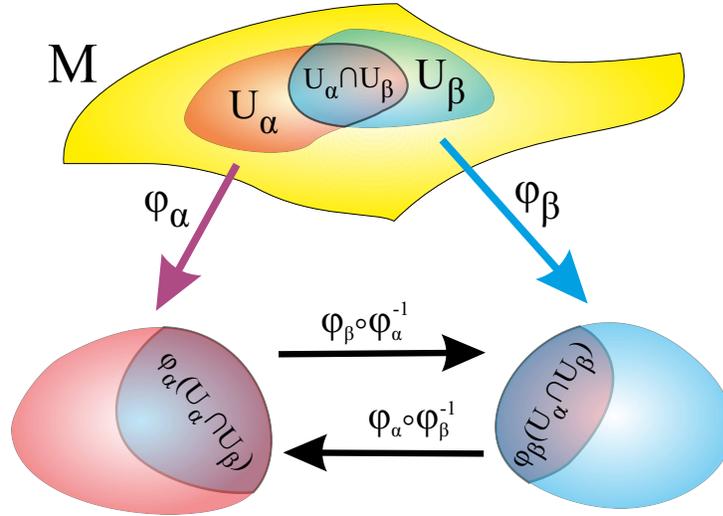


Рис. 2.1: Отображения склейки или функции перехода.

Конструкция 2.2. Предположим, что на множестве M мы задали некоторый атлас

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n)\}_{\alpha \in I}.$$

Обозначим $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ объединение по всем α семейств φ_α -прообразов открытых множеств в V_α .

Задача 2.3. Докажите, что гомеоморфность отображений склейки приводит к следующему результату:

- (1) семейство $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ является базой некоторой топологии τ , для которой все φ_α — гомеоморфизмы, так что (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство;
- (2) если множество индексов I не более чем счетно, то (M, τ) удовлетворяет второй аксиоме счетности (отметим, что вторая аксиома счетности может иметь место даже для несчетных I , что обычно нужно отдельно проверять).

Приведите пример, демонстрирующий, что если отказаться от открытости пересечения карт в определении атласа, то топология τ уже не обязана быть локально евклидовой.

В силу задачи 2.3, если пространство (M, τ) еще и оказалось хаусдорфовым, то оно является многообразием. Для проверки хаусдорфовости достаточно показать, что точки, не попавшие в одно и то же U_α , имеют непересекающиеся базисные окрестности (для попавших это очевидно так).

Приведем пример применения конструкции 2.2.

Пример 2.4. Рассмотрим вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Пусть x^1, \dots, x^{n+1} — декартовы координаты в \mathbb{R}^{n+1} . Каждая прямая $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через начало координат, однозначно задается любой своей точкой (x^1, \dots, x^{n+1}) , отличной от начала координат. Так как все эти точки отличаются друг от друга умножением на некоторую константу, т.е. соответствующие координаты разных точек пропорциональны, то ℓ принято описывать в виде $(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1})$ и называть такую запись **однородными координатами прямой** ℓ . Ясно, что прямые, пересекающие гиперплоскость $x^i = 1$, в однородных координатах полностью описываются условием $x^i \neq 0$; обозначим множество этих прямых U_i . В результате получим покрытие $\{U_i\}$ всего $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим биекции $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида

$$\varphi_i: (x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1}) \mapsto \frac{1}{x^i}(x^1, x^2, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})$$

(где, напомним, $\widehat{x^i}$ означает, что этот элемент исключен). Отметим, что все φ_i взаимно однозначны, так как каждая прямая из U_i пересекает гиперплоскость $x^i = 1$ ровно в одной точке, и для разных прямых точки разные. Таким образом, каждое (U_i, φ_i) является картой на множестве $\mathbb{R}P^n$.

Пусть $(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1})$ — однородные координаты прямой $\ell \in \mathbb{R}P^n$. Тогда ℓ лежит в $U_i \cap U_j$, если и только если одновременно $x^i \neq 0$ и $x^j \neq 0$. Положим $\varphi_k(\ell) := (x^1, \dots, \widehat{x^k}, \dots, x^{n+1})$, тогда $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ состоит из всех точек \mathbb{R}^n с координатами $(x_j^1, \dots, \widehat{x_j^j}, \dots, x_j^{n+1})$, для которых $x_j^i \neq 0$, что доказывает открытость всех непустых пересечений пар карт.

Вычислим теперь $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Имеем

$$(2.1) \quad x_j^p = \frac{x^p}{x^j} = \frac{x^p}{x^i} : \frac{x^j}{x^i} = \begin{cases} x_i^p/x_i^j, & \text{если } p \neq i, \\ 1/x_i^j, & \text{если } p = i, \end{cases} \quad \text{или} \\ (x_j^1, \dots, \widehat{x_j^j}, \dots, x_j^i, \dots, x_j^{n+1}) = \frac{1}{x_i^j} (x_i^1, \dots, \widehat{x_i^j}, \dots, 1, \dots, x_j^{n+1}).$$

Эти формулы показывают, что отображения $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ и $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ непрерывны, поэтому являются гомеоморфизмами. Так как построенные карты покрывают $\mathbb{R}P^n$, мы получаем атлас, обозначим его \mathcal{A} , и, с помощью конструкции 2.2, используем \mathcal{A} для построения локально евклидовой топологии τ на $\mathbb{R}P^n$. Так как атлас \mathcal{A} конечен, задача 2.3 гарантирует, что топология τ удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Для завершения проверки того, что (M, τ) — многообразие, остается доказать хаусдорфовость. Конечно, можно было бы сказать, что на этом пространстве естественно определена метрика, однако тогда нам нужно было бы проверить, что метрическая топология совпадает с топологией, определенной с помощью конструкции 2.2. Хотя это и не сложно, мы, желая все проверки осуществить только в терминах построенного атласа \mathcal{A} , поступим иначе.

Рассмотрим прямые ℓ и ℓ' с однородными координатами $(x^1 : x^2 : \dots : x^{n+1})$ и $(y^1 : y^2 : \dots : y^{n+1})$ соответственно и предположим, что эти прямые не лежат одновременно ни в одном U_j . Это означает, что в однородных координатах при каждом j или $x^j = 0$, или $y^j = 0$. Пусть $y^j \neq 0$, тогда $x^j = 0$. Пусть $x^i \neq 0$. Прямую ℓ будем записывать в координатах x_i^p , а прямую ℓ' — в координатах y_j^q . Так как $x^j = 0$, то $x_i^j = 0$. Рассмотрим открытую окрестность U прямой ℓ , представляющую собой открытое подмножество U_i , составленное из всех прямых с координатами (z_i^1, \dots) , у которых $|z_i^j| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Такая прямая попадает в U_j , если и только если у нее $z_i^j \neq 0$. Но тогда в U_j ее i -ая координата z_i^j равна $1/z_i^j$, т.е. $|z_i^j| > 1/\varepsilon$. Рассмотрим открытую окрестность U' прямой ℓ' , составленную из всех прямых в U_j с координатами (w_j^1, \dots) , у которых $|y_j^i - w_j^i| < \varepsilon$. Ясно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ окрестности U и U' не пересекаются, чем и доказывается хаусдорфовость.

Пример 2.5. Опишем, как можно построить обобщение проективного пространства, называемое **вещественным многообразием Грассмана**. Точками этого многообразия являются k -мерные линейные подпространства в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Имеются различные обозначения этого многообразия, из которых мы выберем $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Чтобы ввести локально евклидову топологию, построим атлас по аналогии со случаем $\mathbb{R}P^{n-1}$. Напомним, что мы рассматривали U_i , представляющие множества всех прямых, пересекающих гиперплоскость $\Pi_i = \{x^i = 1\}$, где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbb{R}^n . Далее, мы выясняли, что прямая ℓ с однородными координатами $(x^1 : x^2 : \dots : x^n)$ пересекает Π_i , если и только если $x^i \neq 0$. Заметим, что это условие можно переписать в следующем эквивалентном виде. Пусть \mathbb{R}_i обозначает i -ую координатную прямую, а $\pi_i: \ell \rightarrow \mathbb{R}_i$ — ограничение ортогональной проекции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_i$ на ℓ . Тогда приведенное выше условие равносильно биективности π_i .

Напомним также, что биекцию $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ мы строили так: мы брали единственную точку пересечения P прямой $\ell \in U_i$ с гиперплоскостью Π_i , и под $\varphi_i(\ell)$ понимали все координаты точки P , за исключением i -ой. Снова перепишем это условие в эквивалентной форме: берем вектор $e_i \in \mathbb{R}_i$ из стандартного базиса пространства \mathbb{R}^n , тогда, в силу взаимной однозначности проекции π_i , определен и единственен вектор $v := \pi_i^{-1}(e_i) \in \ell$. Ясно, что $P = v$, поэтому $Q := \varphi_i(\ell)$ — это ортогональная проекция точки P на координатное подпространство \mathbb{R}_J^{n-1} , $J = (1, \dots, \widehat{i}, \dots, n)$, дополнительное до \mathbb{R}_i , т.е. натянутое на базисные векторы $e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n$. Отметим также, что плоскость Π_i получается из дополнительного пространства \mathbb{R}_J^{n-1} смещением на базисный вектор e_i , т.е. $\Pi_i = e_i + \mathbb{R}_J^{n-1}$, так что $\{P\} = \ell \cap (e_i + \mathbb{R}_J^{n-1})$.

Теперь все готово для описания построения атласа на G_k . Вместо одного индекса i , берем k индексов $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$, и пусть \mathbb{R}_I^k обозначает координатное подпространство, натянутое на векторы e_{i_1}, \dots, e_{i_k} стандартного базиса \mathbb{R}^n . Для $V \in G_k(\mathbb{R}^n)$ пусть $\pi_I: V \rightarrow \mathbb{R}_I^k$ — ограничение ортогональной проекции $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_I^k$ на V , тогда в качестве U_I выберем множество всех V , для которых проекция π_I биективна, т.е. является изоморфизмом линейных пространств V и \mathbb{R}_I^k . Положим $v_a = \pi_I^{-1}(e_{i_a}) \in V$, тогда v_1, \dots, v_k — базис пространства V , однозначно определенный тем, что $\pi_I(v_a) = e_{i_a}$.

Пусть \mathbb{R}_J^{n-k} , $J = (1, \dots, \widehat{i_1}, \dots, \widehat{i_k}, \dots, n)$, — координатное пространство, дополнительное к \mathbb{R}_J^k . Тогда вектор v_a можно представить как единственную точку P_a пересечения пространства V и аффинного подпространства $e_{i_a} + \mathbb{R}_J^{n-k}$. В отличие от случая $\mathbb{R}P^{n-1}$, теперь у нас имеется не одна точка P , а целых k точек: P_1, \dots, P_k . Ортогонально спроецируем эти точки на подпространство \mathbb{R}_J^{n-k} , и пусть Q_a — проекция точки P_a . В результате мы получим k векторов. Эти k векторов однозначно определяют пространство V , и каждые k векторов Q'_1, \dots, Q'_k из \mathbb{R}_J^{n-k} однозначно задают некоторое k -мерное линейно подпространство $V' \in U_I$, натянутое на векторы $v'_a = e_a + Q'_a$ (здесь мы рассматриваем Q_a как точки из \mathbb{R}^n , лежащие в $\mathbb{R}_J^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$). Кроме того, разным наборам Q'_1, \dots, Q'_k соответствуют разные подпространства V' (проверьте). Определим биекцию $\varphi_I: U_I \rightarrow (\mathbb{R}_J^{n-k})^k \approx \mathbb{R}^{(n-k)k}$, положив $\varphi_I(V) = (Q_1, \dots, Q_k)$ (здесь мы рассматриваем точки Q_a не как элементы пространства \mathbb{R}^n , а как элементы $(n-k)$ -мерного пространства \mathbb{R}_J^{n-k}).

Итак, мы определили на $G_k(\mathbb{R}^n)$ конечный набор карт (U_I, φ_I) , покрывающий $G_k(\mathbb{R}^n)$ (каждое k -мерное линейное подпространство можно однозначно спроецировать на некоторое k -мерное координатное подпространство, поймите почему). Можно показать, что если две карты пересекаются, то это пересечение открыто, а отображения склейки — гомеоморфизмы, так что конструкции 2.2 задает на $G_k(\mathbb{R}^n)$ топологию локально евклидова пространства. Так как карт конечное число, то эта топология удовлетворяет второй аксиоме счетности. Более того, эта топология хаусдорфова. Отметим, что проверка перечисленных только что свойств более техническая, чем в случае проективных пространств, и мы оставляем ее заинтересовавшимся слушателям в качестве самостоятельного упражнения.

Многообразия Грассмана можно получить факторизацией из другого многообразия, которое мы сейчас опишем.

Пример 2.6. Рассмотрим в арифметическом пространстве \mathbb{R}^n , наделенном стандартным евклидовым скалярным произведением, всевозможные упорядоченные наборы из k единичных попарно ортогональных векторов. Сейчас мы опишем, как наделить это множество топологией многообразия, которое называется **многообразием Штифеля**. Как и в случае с многообразиями Грассмана, имеется много разных обозначений многообразия Штифеля, из которых мы выберем $V_k(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что каждый набор $(v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как точку в \mathbb{R}^{kn} , записав последовательно координаты этих векторов в одну строку. Условия на эти векторы задаются $k(k+1)/2$ уравнениями, состоящими их многочленов второго порядка на координаты векторов. Аналогично тому, как доказывается, что ортогональная группа $O(n, \mathbb{R})$ является неявной поверхностью, показывается максимальность ранга матрицы Якоби этой системы уравнений. Таким образом, $V_k(\mathbb{R}^n)$ является неявной поверхностью в \mathbb{R}^{kn} и, как мы уже обсудили выше, представляет собой многообразие. Ясно, что $V_n(\mathbb{R}^n) = O(n, \mathbb{R})$, а $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$. Также понятно, что $V_k(\mathbb{R}^n)$ лежит в декартовом произведении k сфер $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Многообразию Грассмана можно получить в виде факторпространства, если подействовать естественным образом на множество $V_k(\mathbb{R}^n)$ ортогональной группой $O(n, \mathbb{R})$ (напомним, что каждое ортогональное преобразование переводит ортонормальную систему векторов в ортонормальную). Это действие транзитивное и непрерывное, а стабилизатор произвольного элемента $v = (v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ изоморфен группе $O(n-k, \mathbb{R})$ (мы рассматриваем ортогональные преобразования, оставляющие неподвижными все векторы v_i , при этом ортогональное дополнение к v переходит в себя, а его векторы подвергаются всевозможным ортогональным преобразованиям). Так как ортогональная группа компактна, а пространство $V_k(\mathbb{R}^n)$ хаусдорфово, то, в силу задачи 1.30, пространство $V_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно $O(n, \mathbb{R})/O(n-k, \mathbb{R})$.

Чтобы получить многообразие Грассмана, можно подействовать на пространстве Штифеля ортогональной группой $O(k, \mathbb{R})$, оставляющей каждый набор векторов $(v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ в том же самом линейном подпространстве \mathbb{R}^n . А можно сразу подействовать группой $O(n, \mathbb{R})$ на множество $\Gamma_k(\mathbb{R}^n)$ всех плоскостей и убедиться, что стабилизатор каждого элемента изоморфен группе $O(n-k, \mathbb{R}) \times O(k, \mathbb{R})$ (не меняя подпространства, мы можем как угодно менять все ортонормальные его базисы с помощью $O(k, \mathbb{R})$, и все ортонормальные базисы его ортогонального дополнения, что делается с помощью $O(n-k, \mathbb{R})$). Таким образом, $\Gamma_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно $O(n, \mathbb{R})/(O(n-k, \mathbb{R}) \times O(k, \mathbb{R}))$.

2.2 Топологические многообразия с краем

Выше мы определили многообразия как топологические пространства, локально устроенные как открытые подмножества \mathbb{R}^n . В принципе, эту конструкцию можно было бы обобщить, заменив \mathbb{R}^n на семейство хаусдорфовых топологических пространств Y_α , удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Результат применения конструкции будем называть **многообразиями с модельными пространствами** Y_α . В этих терминах, мы начинали

с многообразий, у которых модельным пространством является \mathbb{R}^n . Если в качестве модельных пространств Y_α взять не все пространство \mathbb{R}^n , а его полупространства $\mathbb{R}_\lambda^n = \{(x^1, \dots, x^n) : \lambda(x^1, \dots, x^n) \geq 0\}$, где x^1, \dots, x^n — стандартные координаты на \mathbb{R}^n , а $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ — произвольный ненулевой линейный функционал, то мы получим определение многообразия с краем. Итак, **многообразием с краем** называется хаусдорфово топологическое пространство M , удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и такое, что у каждой точки $P \in M$ имеется открытая окрестность U , гомеоморфная некоторому открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}_\lambda^n$. Как и в случае многообразий, такие окрестности, а также гомеоморфизмы $\varphi: U \rightarrow V$, будем называть **координатными**, и под **локальными координатами точки P** понимать декартовы координаты ее образа $\varphi(P)$.

Отметим, что в \mathbb{R}_λ^n имеется два типа точек: **внутренние**, т.е. не лежащие в гиперпространстве $\{\lambda = 0\}$, и **краевые** или **граничные**, т.е. лежащие на гиперпространстве $\{\lambda = 0\}$. Точку P многообразия с краем M назовем **внутренней**, если в некоторых локальных координатах она имеет вид (P^1, \dots, P^n) с $\lambda(P^1, \dots, P^n) \neq 0$, т.е. (P^1, \dots, P^n) — внутренняя точка \mathbb{R}_λ^n . Иначе точку P назовем **краевой** или **граничной**. Из теоремы 1.2 несложно извлекается решение следующих задач.

Задача 2.7. Покажите, что открытое подмножество \mathbb{R}^n не гомеоморфно открытому подмножеству \mathbb{R}_λ^n , содержащему хотя бы одну граничную точку.

Задача 2.8. Пусть M — многообразие с краем и P — его произвольная точка. Докажите, что во всех локальных координатах, или всегда $\lambda(P^1, \dots, P^n) > 0$, или всегда $\lambda(P^1, \dots, P^n) = 0$.

Из задачи 2.8 вытекает, что внутреннюю (краевую) точку P можно определить и так: точка внутренняя (граничная), если во всех локальных координатах величина $\lambda(P^1, \dots, P^n)$ отлична от нуля (равна нулю). Таким образом, каждое многообразие с краем M разбивается на два подмножества: **внутренность** $\text{Int } M$, состоящую из всех внутренних точек, и **край** или **границу** ∂M — множество всех краевых точек.

Задача 2.9. Докажите, что внутренность и граница (если не пуста) многообразия с краем являются многообразиями (в первоначальном определении).

Приведем примеры многообразий с краем.

Пример 2.10. Каждый промежуток или не более чем счетное дизъюнктивное объединение промежутков является многообразием с краем. В край входят все концевые точки, входящие в промежутки. Так, граница отрезка состоит из двух точек, полуинтервала — из одной, а граница интервала пуста.

Пример 2.11. Первоначально определенные многообразия также являются многообразиями с краем, однако край у них всегда пустой.

Пример 2.12. Невырожденный замкнутый шар в \mathbb{R}^n является примером многообразия с краем, у которого край является $(n - 1)$ -мерной сферой.

Пример 2.13. Более общо, пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, у которой на множестве уровня $F = c$ дифференциал всюду отличен от нуля (такая функция удовлетворяет вдоль $F = c$ теореме неявной функции). Тогда множество M , являющееся решением неравенства $F \leq c$ является многообразием с краем, причем край — это множество $F = c$.

В разделе 2.1 мы определили на произвольном множестве карты и атлас, и описали конструкцию 2.2, которая в некоторых случаях позволяет по атласу построить топологию многообразия. Заменяем \mathbb{R}^n , которое фигурировало в этих описаниях, на произвольные хаусдорфовы топологические пространства Y_α , удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Тогда полученные карты и атласы будем называть соответственно картами и атласами с модельными пространствами Y_α . В частном случае $Y_\lambda = \mathbb{R}_\lambda^n$ мы получим карты и атласы, по которым дословное повторение конструкции 2.2 порождает на множестве топологию многообразия с краем.

Кроме того, каждое многообразие с краем M размерности n покрывается открытыми множествами U_α , гомеоморфными открытым подмножествам $V_\alpha \subset \mathbb{R}_\lambda^n$ посредством некоторых гомеоморфизмов $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$. Пары $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ являются **картами**, а их совокупность — **атласом** (сравните с примером 2.1).

Так как многообразия с краем встречаются также часто, как и обычные многообразия, **мы в дальнейшем под многообразием будем понимать многообразие с краем**. Если край пуст, то будем говорить про **многообразие с пустым краем**. Важным частным случаем являются компактные многообразия с пустым краем. Такие многообразия принято называть **замкнутыми**.

Замечание 2.14. С помощью модельных пространств можно определить *многообразия с угловыми точками*, рассмотрев в качестве Y_α многогранные углы в \mathbb{R}^n . Примерами таких многообразий являются всевозможные многогранники в \mathbb{R}^n , которые, не являясь многообразиями с краем, выпадают из нашего рассмотрения, хотя на них вполне переносятся многие результаты. В [2] приводится частный случай этой конструкции, где в качестве Y_α выбираются положительные ортанты и, тем самым, параллелепипеды и симплексы тоже включаются в область интересов. Отметим также, что в [2] при определении многообразий с краем рассматриваются не всевозможные \mathbb{R}_λ^n , а лишь полупространства $x^n \geq 0$. Это приводит к тому, что при определении ориентации многообразия с краем через ориентированные атласы (см. ниже) отрезок прямой оказывается неориентируемым, так что для него приходится пользоваться другим определением ориентируемости. Наши эстетические взгляды вынуждают нас отказаться от этого в некоторых случаях более удобного подхода, и рассматривать общие модельные пространства \mathbb{R}_λ^n , как это делается, скажем, в [3].

2.3 Подмногообразия

Начнем с примера. Пусть M и N — многообразия, а $f: N \rightarrow M$ — топологическое вложение. Тогда f позволяет отождествить N с его образом $W = f(N)$, который называется *подмногообразием* M . Эквивалентный взгляд на подмногообразии в многообразии M : это каждое подмножество $W \subset M$, гомеоморфное некоторому многообразию N . Приведем более общую формулировку.

Пусть Y и Z — хаусдорфовы топологические пространства со второй аксиомой счетности, а M — многообразии с модельным пространством Y . Подмножество W многообразия M назовем *подмногообразием с модельным пространством* Z , если W гомеоморфно такому многообразию. Если Y и Z равны \mathbb{R}^n или \mathbb{R}_λ^n (в любом сочетании), то мы получаем понятие подмногообразия или подмногообразия с краем.

Пример 2.15. Неявная поверхность в \mathbb{R}^m — подмногообразие \mathbb{R}^m . Выше мы привели многочисленные примеры таких подмногообразий, к которым, скажем, относятся сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, все матричные группы $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ и другие, являющиеся подмногообразиями \mathbb{R}^{n^2} , торы T^n — подмногообразия \mathbb{R}^{2n} и т.д.

Задача 2.16. Пусть M — многообразии с краем ∂M . Покажите, что ∂M и $\text{Int } M$ являются подмногообразиями в M .

Имеются многочисленные результаты, описывающие, какие многообразия могут быть подмногообразиями в других многообразиях, в частности, в евклидовом пространстве. Мы не будем здесь приводить эти результаты, а отложим обсуждения до того, как определим гладкую структуру на многообразиях.

Литература

- [1] Brouwer L.E.J. *Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen, 1912, v. 71, pp. 305–315; а также Mathematische Annalen, 1912, v. 72, pp. 55–56.
- [2] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012.
- [3] Abraham R., Marsden J., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 1988.

Упражнения к главе 2

Упражнение 2.1. Предположим, что на множестве M мы задали некоторый атлас

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n)\}_{\alpha \in I}.$$

Обозначим $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ объединение по всем α семейств φ_α -прообразов открытых множеств в V_α .

Докажите, что гомеоморфность отображений склейки приводит к следующему результату:

- (1) семейство \mathcal{B} является базой некоторой топологии τ , для которой все φ_α — гомеоморфизмы, так что (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство;
- (2) если множество индексов I не более чем счетно, то (M, τ) удовлетворяет второй аксиоме счетности (отметим, что вторая аксиома счетности может иметь место даже для несчетных I , что обычно нужно отдельно проверять).

Приведите пример, демонстрирующий, что если отказаться от открытости пересечения карт в определении атласа, то топология τ уже не обязана быть локально евклидовой.

Упражнение 2.2. Покажите, что открытое подмножество \mathbb{R}^n не гомеоморфно открытому подмножеству \mathbb{R}_λ^n , содержащему хотя бы одну граничную точку.

Упражнение 2.3. Пусть M — многообразие с краем и P — его произвольная точка. Докажите, что во всех локальных координатах, n -ая координата точки P или всегда отлична от нуля, или всегда равна нулю.

Упражнение 2.4. Докажите, что внутренность и граница (если не пуста) многообразия с краем являются многообразиями (в первоначально определении).

Упражнение 2.5. Пусть M — многообразие с краем ∂M . Покажите, что ∂M и $\text{Int } M$ являются подмногообразиями в M .

Лекция 3

Гладкие многообразия

План. Гладкие атласы, максимальный топологический атлас, гладко согласованные карты, гладко согласованные атласы, максимальный гладкий атлас или гладкая структура, гладкое многообразие, стандартные гладкие структуры, стандартная гладкая структура на открытом подмножестве \mathbb{R}^n , стандартная гладкая структура на открытом подмножестве многообразия, стандартная гладкая структура на неявной поверхности (в частности, на сферах, матричных группах, пространстве Штифеля), стандартная гладкая структура на декартовом произведении гладких многообразий (в частности, на торе и на цилиндре), стандартная гладкая структура на несвязном объединении гладких многообразий, группы Ли, задание на множестве гладкой структуры с помощью атласа (в частности, на проективных пространствах и пространствах Грассмана), эквивалентные гладкие структуры, экзотические гладкие структуры, гладкие отображения гладких многообразий, диффеоморфизмы, примеры.

В предыдущей лекции мы изучали топологические многообразия. Теперь мы введем понятие гладкой структуры, которая позволяет использовать мощные средства математического анализа. Для более детального ознакомления с материалом рекомендуется [1].

3.1 Гладкие многообразия

В разделе 2.1 мы определили карты и атласы, как на произвольном множестве, так и на топологическом многообразии (с краем). Напомним, что на n -мерном многообразии картой является пара (U, φ) , состоящая из открытого множества, гомеоморфного некоторому открытому множеству $V \subset \mathbb{R}_\lambda^n$ посредством гомеоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$. Атласом на многообразии является любая коллекция карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, покрывающая M , т.е. для которой $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Для топологических многообразий естественно определены непрерывные отображения, а вот дифференцировать мы не можем, даже если запишем отображение в локальных координатах: ведь если в одних координатах отображение задавалось набором гладких функций, то в других эти функции уже могут перестать быть гладкими, так как отображения склейки гладкость сохранять не обязаны — они всего лишь гомеоморфизмы. Чтобы преодолеть эту проблему и научиться дифференцировать на многообразиях, можно ограничиться лишь теми картами, для которых отображения склейки гладкие. Такие атласы называются *гладкими*.

Следующее утверждение, мгновенно вытекающее из теоремы о неявном отображении, часто помогает упростить проверку гладкости атласа.

Предложение 3.1. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — непустые открытые множества и $F: U \rightarrow V$ — гладкое взаимно однозначное отображение, у которого в каждой точке матрица Якоби невырождена. Тогда отображение F^{-1} — также гладкое.

Замечание 3.2. Напомним, что дифференцируемость отображения F , заданного на открытой окрестности V точки $P \in \mathbb{R}_\lambda^n$, лежащей на крае $\lambda = 0$, означает, что F может быть продолжено до дифференцируемого отображения на некоторую открытую окрестность точки P , рассматриваемой как точка из $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}_\lambda^n$. Дифференциальные свойства такого продолжения не зависят от конкретного выбора продолжения, так как дифференциал — линейное отображение, определенное в нашем случае на полупространстве касательного пространства.

Задача 3.3. Пусть $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(x^1, x^2) = x^2$, а $F, G: \mathbb{R}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функции следующего вида: $F(x^1, x^2) = x^2$ и $G(x^1, x^2) = \sqrt{x^2}$. Покажите, что F — гладкая функция, а G — нет.

Задача 3.4. Приведите пример атласа на прямой \mathbb{R} , не являющегося гладким.

Рассмотрим множество $\tau(M)$, составленное из всех карт многообразия M . Ясно, что каждый атлас является подмножеством в $\tau(M)$. Таким образом, если на множестве всех атласов, заданных на M , рассмотреть частичный порядок: $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$, если и только если $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, то $\tau(M)$ окажется единственным максимальным элементом этого порядка. Семейство $\tau(M)$ будем называть **максимальным топологическим атласом**.

Рассмотрим две произвольные пересекающиеся карты из $\tau(M)$. Будем говорить, что эти карты **гладко согласованы**, если функции перехода между ними — гладкие. Пусть теперь $\mathcal{A} \subset \tau(M)$ — некоторый гладкий атлас. Карта (U, φ) на многообразии M называется **гладко согласованной** с \mathcal{A} , если она гладко согласована со всеми пересекающимися ее картами атласа \mathcal{A} . Легко видеть, что любые две пересекающиеся карты из $\tau(M)$, гладко согласованные с гладким атласом $\mathcal{A} \subset \tau(M)$, также гладко согласованы между собой. Таким образом, если добавить к \mathcal{A} все гладко согласованные с ним карты, то мы получим гладкий атлас \mathcal{S} , содержащий \mathcal{A} . Так как \mathcal{S} нельзя вложить в больший гладкий атлас, то он является максимальным на множестве всех гладких атласов, заданных на M . Атлас \mathcal{S} будем называть **максимальным гладким атласом** или **гладкой структурой** на M .

Два гладких атласа на топологическом многообразии M называются **гладко согласованными**, если их объединение — гладкий атлас. Ясно, что два гладких атласа на M содержатся в одной и той же гладкой структуре, если и только если они гладко согласованы.

Гладким многообразием называется топологическое многообразие, на котором задана некоторая гладкая структура, т.е. максимальный гладкий атлас.

Замечание 3.5. Из проведенных выше рассуждений вытекает, что для задания гладкого многообразия не обязательно описывать весь максимальный гладкий атлас \mathcal{S} , а достаточно предъявить произвольный гладкий атлас \mathcal{A} , содержащийся в \mathcal{S} .

Задача 3.6. Постройте на прямой \mathbb{R} две разных гладких структуры.

Как вытекает из задачи 3.6, на данном топологическом многообразии может существовать много разных гладких структур. Тем не менее, для целого ряда конкретных топологических многообразий имеются традиционные конструкции гладких структур, которые мы будем называть **стандартными**. *Как правило, если не оговорено противное, рассматривая такие многообразия как гладкие, мы будем иметь в виду именно стандартные гладкие структуры, не оговаривая это каждый раз.*

Пример 3.7 (Стандартная гладкая структура на открытом подмножестве \mathbb{R}^n). Непустое открытое множество V в евклидовом пространстве гладкий допускает атлас, состоящий ровно из одной карты: (V, id) , где id — тождественное отображение.

Пример 3.8 (Стандартная гладкая структура на открытом подмножестве гладкого многообразия). Пусть M — гладкое многообразие с гладким атласом \mathcal{A} , а $V \subset M$ — его непустое открытое подмножество. Тогда на V естественным образом индуцируется гладкий атлас: достаточно для все карт $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ таких, что $V \cap U \neq \emptyset$, рассмотреть пары $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$, тогда множество таких пар образуют гладкий атлас на V . Множество V с так определенной гладкой структурой иногда называют **открытым подмногообразием** в M .

Пример 3.9 (Стандартная гладкая структура на неявной поверхности). Для неявной поверхности, заданной гладкими функциями, рассмотрим стандартный атлас, составленный из проекций на координатные подпространства фрагментов поверхности, которые задаются в виде графиков векторнозначных отображений. Тогда полученный атлас — гладкий. Именно таким образом строятся стандартные гладкие структуры на сферах, всех рассмотренных выше матричных группах, а также на пространстве Штифеля.

Задача 3.10. Докажите, что атлас, описанный в примере 3.9, — гладкий, причем любые два таких атласа гладко согласованы.

Пример 3.11 (Стандартная гладкая структура на декартовом произведении гладких многообразий). Декартово произведение конечного числа гладких многообразий M_1, \dots, M_n , в котором не более одного M_i имеет непустой край, — гладкое многообразие, если в качестве его гладкого атласа взять декартовы произведения карт $(U_{\alpha_i}^i, \varphi_{\alpha_i}^i)$ гладких атласов многообразий M_i и, а именно,

$$\left(\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}^i, \prod_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i}^i \right), \quad \text{где} \quad \left(\prod_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i}^i \right) (P_1, \dots, P_n) = (\varphi_{\alpha_1}^1(P_1), \dots, \varphi_{\alpha_n}^n(P_n))$$

(в случае присутствия многообразия с непустым краем может понадобиться сделать соответствующую пере-
 нумеровку координатных осей, чтобы получить карты в окрестности края описанного выше вида). Таким об-
 разом, скажем, тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ раз}}$ или цилиндр $T^n \times [0, 1]$ наделяются гладкими атласами. Легко видеть,

что если M_1, \dots, M_{n-1} — гладкие многообразия без края, а гладкое многообразие M_n имеет непустой край,
 то $\partial(M_1 \times \cdots \times M_n) = M_1 \times \cdots \times \partial M_n$, в частности, край цилиндра $T^n \times [0, 1]$ представляет собой несвязное
 объединение двух торов T^n .

Отметим, что если несколько многообразий имеют непустой край, то возникают “угловые точки”, так что
 полученное пространство не является гладким многообразием с краем. Например, рассмотрим произведение
 двух замкнутых лучей $\ell_i \subset \mathbb{R}$, $\ell_i = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Стандартная структура на луче порождается одной картой
 (ℓ_i, id_i) , где id_i — тождественное отображение. Стандартная структура на произведении лучей должна поро-
 ждаться атласом из одной карты $(\ell_1 \times \ell_2, \text{id}_1 \times \text{id}_2)$, но $(\text{id}_1 \times \text{id}_2)(\ell_1 \times \ell_2)$ не является открытым подмножеством
 полушарности (оно является квадрантом с угловой точкой — началом координат).

Пример 3.12 (Стандартная гладкая структура на несвязном объединении гладких многообразий). Несвязное
 объединение не более чем счетного числа гладких многообразий M_i (с краем или без) одной и той же размер-
 ности, — гладкое многообразие, если в качестве его гладкого атласа взять дизъюнктное объединение гладких
 атласов многообразий M_i .

Замечание 3.13. Пример 3.9 показывает, как топологические группы из примера 1.18 можно превратить в
 гладкие многообразия. А что при этом произойдет с групповыми операциями, которые раньше были непре-
 рывными? Оказываются, групповые операции в гладких атласах из стандартных гладких структур тоже будут
 гладкими. Гладкость операции сложения на \mathbb{R}^n вытекает из того, гладкая структура задается одной картой, так
 что соответствующие локальные координаты — стандартные декартовы, а координатные функции, задающие
 сложение и переход к противоположному вектору, — линейные.

Рассмотрим теперь матричные группы. Так как $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ — открытое подмножество \mathbb{R}^{n^2} , то на нем глад-
 кая структура снова определяется ровно одной картой и, значит, локальные координаты — снова стандартные
 декартовы. В этих координатах умножение матриц и переход к обратной матрице задаются многочленами и
 рациональными функциями, т.е. также являются гладкими. Ограничения этих операций на соответствующую
 матричную группу записывается в координатах, заданных с помощью теоремы о неявном отображении, так: мы
 должны выразить декартовы координаты из \mathbb{R}^{n^2} через координаты в соответствующих координатных подпро-
 странствах, на которые однозначно проецируется рассматриваемая матричная группа. Как мы уже отмечали,
 эти выражения задаются гладкими функциями, так что и групповые операции в таких координатах — гладкие.

Отметим также, что гладкое многообразие, на котором задана групповая операция, являющаяся гладкой,
 вместе с операцией перехода к обратному элементу, называется *группой Ли*. Теория групп Ли хорошо разра-
 ботана в силу многочисленных применений этих групп в геометрии, топологии, алгебре, теории динамических
 систем и т.д. Итак, к настоящему моменту мы вкратце познакомились со следующими группами Ли: $\text{GL}(n, \mathbb{R})$,
 $\text{O}(n, \mathbb{R})$, $\text{SO}(n, \mathbb{R})$, $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ (которую также обозначают $\text{E}(n)$ и называют *евклидовой группой*), где
 в качестве операции используется произведение матриц или композиция преобразований; при $n \geq 2$ эти группы
 некоммутативны. Также мы познакомились с коммутативными группами Ли, а именно, с \mathbb{R}^n и T^n , в которых
 операция — сложение (в случае тора, сложение по модулю).

Пример 3.14 (Задание на множестве гладкой структуры с помощью атласа). Семейство карт \mathcal{A} на множестве
 M такое, что

- (1) если две карты пересекаются, то они открыто пересекаются,
- (2) все отображения склейки являются диффеоморфизмами,
- (3) семейство карт покрывает M ,

называется *гладким атласом на множестве M* .

В соответствии с задачей 2.3, гладкий атлас \mathcal{A} задает на M локально евклидову топологию. Предположим
 дополнительно, что топологическое пространство M является хаусдорфовым и удовлетворяет второй аксиоме
 счетности, т.е. является топологическим многообразием. Тогда \mathcal{A} — гладкий атлас, превращающий M в гладкое
 многообразие.

Пример 3.15 (Стандартные гладкие структуры на проективных пространствах и пространствах Грассмана).
 Примеры 2.4 и 2.5 строят атласы на проективных пространствах и пространствах Грассмана. Непосредственно
 проверяется, что эти атласы — гладкие.

Замечание 3.16. Мы не обсуждали многочисленные комплексные группы Ли, как и комплексные многообразия, которыми они являются. Также имеются симплектические группы, состоящие из преобразований, сохраняющих невырожденную кососимметричную билинейную форму. Есть преобразования, сохраняющие симметричную, невырожденную, но не положительно определенную билинейную форму (преобразования Лоренца). Имеются также обобщения полей вещественных и комплексных чисел такие, как тело кватернионов, алгебра Кэли (октавионов или октав), алгебры Клиффорда, и по ним также строятся некоторые группы Ли, например, спинорные группы. Со всеми этими объектами Вы познакомитесь в будущих курсах.

3.1.1 Эквивалентные гладкие структуры

Если \mathcal{S} — гладкая структура на многообразии M , и $F: M \rightarrow M$ — произвольный гомеоморфизм, то можно рассмотреть новый набор карт $F(\mathcal{S}) := \left\{ (F(U), \varphi \circ F^{-1}) \right\}_{(U, \varphi) \in \mathcal{S}}$. Функции перехода для такого атласа имеют вид

$$(\varphi_\beta \circ F^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ F^{-1})^{-1} = \varphi_\beta \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1},$$

т.е. эти функции снова гладкие, так что $F(\mathcal{S})$ — гладкий атлас. Из максимальнойности \mathcal{S} вытекает и максимальность $F(\mathcal{S})$, т.е. $F(\mathcal{S})$ — тоже гладкая структура на M . Такие гладкие структуры называются *эквивалентными*. Иными словами, две гладкие структуры \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 на многообразии M называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $F: M \rightarrow M$, для которого $\mathcal{S}_2 = F(\mathcal{S}_1)$.

Задача 3.17. Убедитесь, что разные гладкие структуры на \mathbb{R} , которые Вы должны были построить в задаче 3.6, — эквивалентны.

Возникает интересный вопрос: сколько классов эквивалентности гладких структур имеется на том или ином многообразии? В частности, на любом ли топологическом многообразии существует хотя бы одна гладкая структура? Изучением этого вопроса занимается *дифференциальная топология* — очень нетривиальная наука. Приведем без доказательства некоторые известные результаты.

- ▼ Если размерность многообразия не превосходит 3, то на нем всегда существует гладкая структура, причем все гладкие структуры эквивалентны.
- ▼ В 1960 году Кервер (Kervaire) построил пример 10-мерного топологического многообразия, на котором нет ни одной гладкой структуры. Дональдсон (Donaldson) и Фридман (Freedman) показали, что многие односвязные (с тривиальной фундаментальной группой) компактные 4-мерные многообразия не имеют гладкой структуры (одним из примером является такое 4-мерное многообразие, которое обозначается E_8 — Фридман, 1982). К настоящему моменту известно, что для каждого $n \geq 4$ существует n -мерное топологическое многообразие, на котором нет ни одной гладкой структуры [1, р. 40].
- ▼ На арифметических пространствах \mathbb{R}^n при $n \neq 4$ имеется лишь одна, с точностью до эквивалентности, гладкая структура, однако при $n = 4$ классов эквивалентности гладких структур бесконечно много (арифметическое пространство с нестандартной гладкой структурой называется *экзотическим*).
- ▼ На сферах ситуация более интересная. Кервер и Милнор построили список известных количеств различных неэквивалентных гладких структур на сферах в зависимости от их размерностей n . Приведем таблицу для $n \leq 20$.

Размерность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Количество	1	1	1	≥ 1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	523264	24

Отметим, что случай $n = 4$ остается неизвестным (до начала 2021 года, когда пишутся эти лекции) и называется *гладкой проблемой Пуанкаре*. Как и в случае арифметических пространств, сферы с нестандартными гладкими структурами называются *экзотическими*.

Замечание 3.18. В дальнейшем мы, как правило, будем иметь место с гладкими многообразиями, на которых выше были определены стандартные гладкие структуры. Скажем, на непустых открытых подмножествах U арифметического пространства \mathbb{R}^n , в частности, на самом \mathbb{R}^n , рассматриваемая гладкая структура всегда будет порождена атласом из одной карты (U, id) . Для новых примеров, не укладывающихся в описанные выше схемы, мы будем приводить атласы явно.

3.2 Гладкие отображения гладких многообразий

В предыдущем семестре мы изучали гладкие отображения поверхностей. Напомним, что это были такие отображения множеств, задающих поверхности, для которых некоторая и, значит, любая координатная запись представляла собой гладкое отображение. В случае с гладкими многообразиями ситуация вполне аналогична, хотя и имеются некоторые тонкости. Приведем формальное определение.

Начнем со следующего соглашения: говоря про **координатные окрестности** и **локальные координаты** на гладком многообразии, мы будем иметь в виду соответственно окрестности и координаты, заданные произвольной картой из гладкой структуры этого многообразия.

Пусть $F: M \rightarrow N$ — непрерывное отображение гладких многообразий. Определим **координатную запись отображения** F . Выберем произвольную точку $P \in M$, локальные координаты x^1, \dots, x^m , заданные некоторой картой (U, φ) , $P \in U$, локальные координаты y^1, \dots, y^n , заданные в некоторой карте (V, ψ) , $F(P) \in V$, тогда, в силу непрерывности отображения F , множество $W := U \cap F^{-1}(V)$ также является координатной окрестностью точки P , а $(W, \varphi|_W)$ — картой из той же гладкой структуры. Запишем ограничение $F|_W$ в координатах, заданных картами $(W, \varphi|_W)$ и (V, ψ) : $y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$. Иными словами, запишем в стандартных координатах отображение

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(W) \rightarrow \psi(V).$$

Это отображение, а также набор функций $y^i(x^1, \dots, x^m)$, называются **координатной записью отображения** F , соответствующей выбранным картам (U, φ) и (V, ψ) . Непрерывное отображение гладких многообразий назовем **гладким**, если все его координатные записи — гладкие отображения.

Замечание 3.19. Отметим, что свойство отображения F быть гладким или нет не меняется при замене атласов на гладко согласованные с ними, поэтому для проверки гладкости отображения гладких многообразий достаточно проверить гладкость координатных записей только для карт произвольно выбранных атласов из заданных гладких структур. Например, отображение $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ гладких многообразий (со стандартными гладкими структурами) является гладким, если и только если оно — гладкое в смысле матанализа (т.е. для атласа из карт $\{(\mathbb{R}^m, \text{id})\}$ и $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$). Другой пример: **гладкая кривая** в гладком многообразии — это гладкое отображение из промежутка (который является многообразием с краем) в многообразие. Для проверки гладкости на промежутке достаточно рассмотреть стандартную координату. Наконец, **гладкая функция** на гладком многообразии — это гладкое отображение из многообразия в \mathbb{R} . Здесь также, при проверке гладкости, достаточно рассматривать на \mathbb{R} стандартную координату.

Замечание 3.20. Требование непрерывности отображения $F: M \rightarrow N$ существенно, так как иначе W может не оказаться открытым множеством, и мы не сможем говорить о гладкости отображения $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, заданного на $\varphi(W)$ (представьте, что $\varphi(W)$ состоит, например, из одной точки, а размерность многообразия M больше нуля).

Задача 3.21. Приведите пример двух атласов на прямой \mathbb{R} таких, что тождественное отображение не является гладким. Являются ли эти атласы эквивалентными?

Задача 3.22. Покажите, что следующее определение гладкого отображения гладких многообразий эквивалентно приведенному выше: произвольное, не обязательно непрерывное, отображение $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий является **гладким**, если для любой точки $P \in M$, любой координатной окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$ существует такая координатная окрестность $U \subset M$ точки P , что $F(U) \subset V$ и координатная запись отображения F — гладкая.

Следующее упражнение упрощает во многих случаях проверку гладкости отображения между гладкими многообразиями.

Задача 3.23 (Склеивающая лемма для гладких отображений). Пусть M и N — гладкие многообразия, а $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — покрытие M непустыми открытыми множествами, рассматриваемыми как открытые подмногообразия. Предположим, что для каждого $\alpha \in I$ задано гладкое отображение $F_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$, причем семейство отображений $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ согласовано в следующем смысле: если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Тогда существует единственное отображение $F: M \rightarrow N$ такое, что $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$, причем это отображение — гладкое.

В следующем упражнении перечисляются некоторые отображения гладких многообразий, которые автоматически являются гладкими.

Задача 3.24. Докажите следующие утверждения

- (1) Каждое постоянное отображение гладких многообразий — гладкое;
- (2) Если U — непустое открытое подмножество гладкого многообразия M , рассматриваемое как открытое подмногообразие, то отображение включения $U \hookrightarrow M$ — гладкое.
- (3) Композиция гладких отображений гладких многообразий — гладкая.
- (4) Пусть M_1, \dots, M_k , а также N , — гладкие многообразия. Положим $M = M_1 \times \dots \times M_k$, и пусть $\pi: M \rightarrow M_i$ — каноническая проекция. Тогда отображение $F: N \rightarrow M$ — гладкое, если и только если все отображения $F_i = \pi_i \circ F: N \rightarrow M_i$ — гладкие.

Приведем примеры гладких отображений, обоснование которых легко получается из утверждений задачи 3.24.

Пример 3.25. Каждое отображение из нульмерного многообразия в любое гладкое многообразие — гладкое.

Пример 3.26. Отображение $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varepsilon(t) = (\cos t, \sin t)$, — гладкое.

Пример 3.27. Если ε — отображение из примера 3.26, то отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, заданное в декартовых координатах x^1, \dots, x^n на \mathbb{R} так: $F(x^1, \dots, x^n) = (\varepsilon(x^1), \dots, \varepsilon(x^n))$ является гладким.

Пример 3.28. Отображение включения $F: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкое.

Пример 3.29. Отображение $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой отличной от начала координат точке единственную прямую, проходящую через эту точку и начало координат, — гладкое.

Пример 3.30. Отображение $q: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы единственную прямую, проходящую через эту точку и центр сферы, — гладкое.

Биективное отображение гладких многообразий, гладкое вместе со своим обратным, называется **диффеоморфизмом**. Гладкие многообразия, между которыми существует диффеоморфизм, называются **диффеоморфными**. В дифференциальной геометрии диффеоморфные многообразия считаются одинаковыми точно так же, как в топологии считаются одинаковыми гомеоморфные пространства.

Отметим, что диффеоморфизм $F: M \rightarrow N$ устанавливает естественное взаимно однозначное соответствие между гладкими структурами \mathcal{S}_M и \mathcal{S}_N : если $(U, \varphi) \in \mathcal{S}_M$, то $(F(U), \varphi \circ F^{-1}) \in \mathcal{S}_N$, и если $(V, \psi) \in \mathcal{S}_N$, то $(F^{-1}(V), \psi \circ F) \in \mathcal{S}_M$. Кроме того, гладкие структуры на многообразии эквивалентны, если и только если многообразия с такими структурами диффеоморфны.

Задача 3.31. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть (U, φ) — карта гладкого многообразия M . Тогда $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ — диффеоморфизм.
- (2) Не используя теорему Брауэра об инвариантности области, покажите, что у диффеоморфных многообразий размерности равны.
- (3) Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Тогда F — диффеоморфизм, если и только если F — биективно, а матрицы Якоби его координатных записей невырождены.

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012.

Упражнения к главе 3

Упражнение 3.1. Пусть $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(x^1, x^2) = x^2$, а $F, G: \mathbb{R}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функции следующего вида: $F(x^1, x^2) = x^2$ и $G(x^1, x^2) = \sqrt{x^2}$. Покажите, что F — гладкая функция, а G — нет.

Упражнение 3.2. Приведите пример атласа на прямой \mathbb{R} , не являющегося гладким.

Упражнение 3.3. Постройте на прямой \mathbb{R} две разных гладких структуры.

Упражнение 3.4. Для неявной поверхности, заданной гладкими функциями, рассмотрим стандартный атлас, составленный из проекций на координатные подпространства фрагментов поверхности, которые задаются в виде графиков векторнозначных отображений. Докажите, что полученный атлас — гладкий, причем любые два таких атласа гладко согласованы.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что разные гладкие структуры на \mathbb{R} , которые Вы должны были построить в задаче 3.3, — эквивалентны.

Упражнение 3.6. Приведите пример двух атласов на прямой \mathbb{R} таких, что тождественное отображение не является гладким. Являются ли эти атласы эквивалентными?

Упражнение 3.7. Покажите, что следующее определение гладкого отображения гладких многообразий эквивалентно приведенному выше: произвольное, не обязательно непрерывное, отображение $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий является *гладким*, если для любой точки $P \in M$, любой координатной окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$ существует такая координатная окрестность $U \subset M$ точки P , что $F(U) \subset V$ и координатная запись отображения F — гладкая.

Упражнение 3.8. Пусть M и N — гладкие многообразия, а $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — покрытие M непустыми открытыми множествами, рассматриваемыми как открытые подмногообразия. Предположим, что для каждого $\alpha \in I$ задано гладкое отображение $F_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$, причем семейство отображений $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ согласовано в следующем смысле: если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Тогда существует единственное отображение $F: M \rightarrow N$ такое, что $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$, причем это отображение — гладкое.

Упражнение 3.9. Докажите следующие утверждения

- (1) Каждое постоянное отображение гладких многообразий — гладкое;
- (2) Если U — непустое открытое подмножество гладкого многообразия M , рассматриваемое как открытое подмногообразие, то отображение включения $U \hookrightarrow M$ — гладкое.
- (3) Композиция гладких отображений гладких многообразий — гладкая.
- (4) Пусть M_1, \dots, M_k , а также N , — гладкие многообразия. Положим $M = M_1 \times \dots \times M_k$, и пусть $\pi: M \rightarrow M_i$ — каноническая проекция. Тогда отображение $F: N \rightarrow M$ — гладкое, если и только если все отображения $F_i = \pi_i \circ F: N \rightarrow M_i$ — гладкие.

Упражнение 3.10. Докажите гладкость отображений из примеров 3.25–3.30 лекции 3.

Упражнение 3.11. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть (U, φ) — карта гладкого многообразия M . Тогда $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ — диффеоморфизм.
- (2) Не используя теорему Брауэра об инвариантности области, покажите, что у диффеоморфных многообразий размерности равны.
- (3) Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Тогда F — диффеоморфизм, если и только если F — биективно, а матрицы Якоби его координатных записей невырождены.

Лекция 4

Касательные векторы, гладкие отображения, ориентируемость

План. Касательный вектор и касательное пространство (координатное определение, через классы эквивалентности гладких кривых, через дифференцирование в точке), канонический базис касательного пространства, дифференциал гладкого отображения гладких многообразий, дифференциалы гладких функций как ковекторы, кокасательное пространство и его базис, двойственный каноническому, ранг дифференциала, ранг отображения, отображения постоянного ранга, отображения полного ранга, гладкое погружение и гладкая субмерсия, теорема о ранге, локальный диффеоморфизм, гладкое вложение, гладкое подмногообразие, коразмерность подмногообразия, объемлющее многообразие, гиперповерхность, открытое подмногообразие, срезающие функции, вложение гладких многообразий в конечномерные арифметические пространства, ориентируемость гладких многообразий, ориентированный атлас, максимальный ориентированный атлас или ориентация гладкого многообразия, ориентируемые и неориентируемые гладкие многообразия, примеры.

Мы начнем с определения центрального понятия теории гладких многообразий — касательного вектора.

4.1 Касательный вектор и касательное пространство

В случае поверхностей определение касательного вектора опиралось на заданное погружение в объемлющее пространство \mathbb{R}^n , так как мы могли представить кривую на поверхности как кривую в \mathbb{R}^n . Теперь такого нет. С другой стороны, для поверхностей один и тот же касательный вектор мы записывали также во внутренних координатах поверхности и выясняли, что при замене координат на поверхности координаты вектора умножаются на матрицу Якоби замены. Отметим, что для поверхностей мы могли бы отказаться от представления касательного вектора как вектора в объемлющем пространстве, а ограничиться заданием его внутренних координат связанных друг с другом по описанному выше закону. Именно такой подход реализуется на гладких многообразиях. Приведем так называемое координатное определение касательного вектора к гладкому многообразию.

4.1.1 Координатное определение касательного вектора

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие и P — некоторая его точка. Рассмотрим всевозможные локальные координаты $x = (x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки P , и припишем каждой из этих систем координат упорядоченный набор чисел $v_x = (v_x^1, \dots, v_x^n)$, т.е. некоторый вектор из \mathbb{R}^n . Если такие наборы отличаются друг от друга умножением на матрицу Якоби замены координат, вычисленную в точке P , т.е. $v_y^i = y_{x^j}^i(P)v_x^j$, $v_y = y_x(P)v_x$, то совокупность этих наборов будем называть **касательным вектором в точке P** (здесь по j предполагается суммирование). Если v — касательный вектор, то набор чисел (v_x^1, \dots, v_x^n) будем называть **координатами касательного вектора v в локальных координатах x^i** .

Задача 4.1. Предположим, что в некоторых локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки P гладкого многообразия M мы задали произвольные n чисел $v_x = (v_x^1, \dots, v_x^n)$, и, с помощью умножения на матрицы Якоби, “перенесли” эти наборы во все остальные локальные координаты y в окрестности P , т.е. приписали y набор чисел $v_y = y_x(P)v_x$. Покажите, что в результате мы получили касательный вектор, т.е. наборы чисел, приписанные любым локальным координатам y и z , также отличаются на матрицу Якоби: $v_z = z_y(P)v_y$.

Так как умножение вектора на матрицу — линейная операция, то для любых двух касательных векторов v и w в точке $P \in M$ корректно определена линейная комбинация: достаточно проделать эту операцию с

координатами этих векторов одновременно во всех локальных системах координат. А именно, если $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то для каждой локальной системы координат x в окрестности P положим

$$u_x := (\lambda v + \mu w)_x = \lambda v_x + \mu w_x,$$

тогда для любых локальных координат y и z в окрестности P выполняется $u_z = z_y(P)u_y$. Тем самым, мы наделили множество всех касательных векторов в точке P структурой векторного пространства, изоморфного \mathbb{R}^n . Это пространство называется **касательным** и обозначается $T_P M$.

Другое эквивалентное определение получается из следующего наблюдения.

4.1.2 Определение касательного вектора через классы эквивалентных кривых

Пусть $\gamma: (a, b) \rightarrow M$, $\gamma(t_0) = P$, — гладкая кривая, проходящая через точку $P \in M$. Рассмотрим в окрестности P локальные координаты x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n . В этих координатах кривая γ записывается как $\gamma_x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ и $\gamma_y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$. Тогда векторы скорости этих координатных записей связаны друг с другом так: $\dot{y}^i(t_0) = y^i_{x^j}(P)\dot{x}^j(t_0)$. Вы видим, что это — тот же самый закон, который связывает координаты касательного вектора. Таким образом, мы можем определить касательный вектор просто как записанный во всех локальных координатах вектор скорости гладкой кривой, проходящей через P . Отметим, что любой набор чисел (v^1, \dots, v^n) можно задать как вектор скорости координатного представления некоторой кривой γ в локальных координатах x^i : для этого достаточно положить $x^i(t) = P^i + v^i t$, где (P^1, \dots, P^n) — координаты точки P в локальных координатах x^i . Тогда $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}_x(0) = v_x$. Таким образом, с помощью гладких кривых можно задать все касательные векторы.

Как и в случае поверхностей, разные кривые могут задавать один и тот же касательный вектор: для этого их векторы скоростей в некоторых локальных координатах должны совпасть. Гладкие кривые, проходящие через точку $P \in M$, у которых в некоторых локальных координатах (а, значит, и в любых) векторы скоростей совпадают, назовем **эквивалентными** (легко видеть, что это отношение действительно является эквивалентностью). Таким образом, кривые задают один и тот же касательный вектор, если и только если они эквивалентны. Это соображение позволяет дать равносильное определение: **касательный вектор в точке $P \in M$** — это класс эквивалентности гладких кривых, проходящих через P . Если γ — кривая из такого класса, то весь класс эквивалентности будем обозначать $[\gamma]$, так что, в силу этого определения, $[\gamma] \in T_P M$.

Как мы только что видели, идея использовать гладкие кривые для определения касательного вектора основана на том, что некоторая дифференциальная характеристика кривых (вектор скорости их координатной записи) при переходе в другие локальные координаты меняется так же, как и координаты касательного вектора. Третье равносильное определение дается в терминах дифференцирования в точке, которые тоже меняются по тому же закону.

4.1.3 Определение касательного вектора через дифференцирование в точке

Будем рассматривать гладкие функции, заданные на всевозможных открытых окрестностях $U \subset M$ точки $P \in M$. Семейство всех таких функций обозначим \mathcal{F}_P . Отметим, что на \mathcal{F}_P определены операции сложения и умножения функций: если функции определены на разных окрестностях, то нужно сначала ограничить их на пересечение, а затем уже поточечно сложить или перемножить. Также на \mathcal{F}_P определено умножение на числа (при этом область определения функции не меняется). Таким образом, на \mathcal{F}_P определены линейные комбинации. Тем не менее, \mathcal{F}_P не является векторным пространством (объясните почему).

Наличие линейных комбинаций позволяет определить линейные отображения $\nu: \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{R}$ как просто сохраняющие линейные комбинации. Если линейное отображение ν еще и удовлетворяет правилу Лейбница, т.е. для любых $f, g \in \mathcal{F}_P$ выполняется $\nu(fg) = \nu(f)g(P) + f(P)\nu(g)$, то такое ν называется **дифференцированием в точке P** . Множество всех дифференцирований в точке P обозначим \mathcal{D}_P .

Итак, дифференцирования в точке P — это вещественные функции на множестве \mathcal{F}_P , удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Такие функции, как и любые, определенные на одном и том же множестве, можно складывать и умножать на числа. Оказывается, эти операции сохраняют описанные выше дополнительные условия.

Задача 4.2. Проверьте, что линейная комбинация дифференцирований в точке P также является дифференцированием. Убедитесь, что семейство \mathcal{D}_P всех дифференцирований в точке P образует векторное пространство.

Пример 4.3. Пусть x^1, \dots, x^n — локальные координаты в окрестности точки P , тогда частные производные $\partial_{x^i}|_P$ являются дифференцированиями в P и, значит, для любых чисел $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $v^i \partial_{x^i}|_P$ — тоже дифференцирование. Ниже мы покажем, что других дифференцирований не бывает.

Пусть снова x^1, \dots, x^n — локальные координаты в окрестности P . Для $f \in \mathcal{F}_P$ рассмотрим линейную функцию $\ell_f = f_{x^i}(P) x^i$, тогда $\ell_f \in \mathcal{F}_P$.

Задача 4.4. Покажите, что для любого дифференцирования $\nu \in \mathcal{D}_P$ выполняется $\nu(f) = \nu(\ell_f) = f_{x^i}(P) \nu(x^i)$. Таким образом, $\nu = \nu(x^i) \partial_{x^i}|_P$.

Из задачи 4.4 вытекает, что каждое дифференцирование $\nu \in \mathcal{D}_P$ в координатах x^i записывается в виде $v^i \partial_{x^i}|_P$, где $v^i = \nu(x^i)$. Также из этой задачи вытекает, что если y^1, \dots, y^n — другие локальные координаты в окрестности точки P , то $\nu(y^i) = y^i_{x^j}(P) \nu(x^j)$. Таким образом, мы видим, что если дифференцированию ν поставить в каждой локальной системе координат x^i , определенной в окрестности точки P , набор чисел $(\nu(x^1), \dots, \nu(x^n))$, то эти наборы чисел будут связаны между собой так же, как и координаты касательного вектора. Кроме того, как мы уже отмечали, для любых чисел (v^1, \dots, v^n) линейная комбинация $v^i \partial_{x^i}|_P$ является дифференцированием в точке P . Только что сказанное позволяет дать третье равносильное определение касательного вектора.

Касательным вектором в точке $P \in M$ гладкого многообразия M называется каждое дифференцирование в точке P . Таким образом, касательное пространство $T_P M$ изоморфно пространству \mathcal{D}_P всех дифференцирований в точке P , где изоморфизм задается в каждом локальных координатах x^i в окрестности P отображением $(v^1, \dots, v^n) \mapsto v^i \partial_{x^i}|_P$.

4.1.4 Канонический базис касательного пространства

Как и в случае поверхностей, каждые локальные координаты в окрестности точки P задают канонический базис касательного пространства $T_P M$, а именно, для координатного определения i -ый вектор e_i представляет собой вектор стандартного базиса арифметического пространства \mathbb{R}^n , т.е. все его координаты, кроме i -ой, равны нулю, а i -ая координата равна 1.

В терминах определения через классы эквивалентности кривых, в качестве базисных классов нужно выбирать те, которые содержат координатные кривые (все координаты, кроме i -ой, фиксированы, а i -ая меняется, параметризуя координатную кривую).

Наконец, в терминах дифференцирований, i -ый базисный вектор представляет собой частную производную $\partial_{x^i}|_P$.

4.2 Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий

В случае поверхностей мы определяли дифференциал как отображение касательных пространств, который вектор скорости кривой, представляющий касательный вектор исходной поверхности, отображает в вектор скорости образа кривой. Затем мы показывали, что в локальных координатах дифференциал является линейным отображением касательных пространств, матрица которого — матрица Якоби координатной записи отображения. В случае многообразий все эти идеи переносятся почти дословно.

4.2.1 Определение дифференциала через классы эквивалентности кривых

Итак, пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий и $v \in T_P M$ — касательный вектор. Пусть $\gamma: (a, b) \rightarrow M$, $\gamma(t_0) = P$, — гладкая кривая, для которой $v = [\gamma]$. Композиция $F \circ \gamma$ является гладкой кривой в N , проходящей через $f(P)$, так что $[F \circ \gamma] \in T_{F(P)} N$. Записывая отображение F в координатах в окрестности точки $P \in M$ и $F(P) \in N$, убеждаемся, с помощью теоремы о дифференцировании сложной функции, что класс эквивалентности $[F \circ \gamma]$ не меняется при замене кривой γ на эквивалентную ей. Тем самым, мы можем определить отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$, положив $dF|_P: [\gamma] \mapsto [F \circ \gamma]$. Это отображение дает нам первое определение **дифференциала отображения F в точке P** .

4.2.2 Определение дифференциала через координатное представление

Дадим теперь определение дифференциала отображения F через координатное представление касательных векторов. Пусть в окрестности точки P введены локальные координаты x^1, \dots, x^m , в окрестности $F(P)$ — локаль-

ные координаты y^1, \dots, y^n , и $y^j = y^j(x^1, \dots, x^m)$ — координатная запись отображения F . Тогда координаты касательного вектора $v \in T_P M$, являющегося вектором скорости кривой $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$, имеют вид $v^i = \dot{x}^i(t_0)$; координаты вектора скорости кривой $F \circ \gamma$, записанной в координатах y^j , $(F \circ \gamma)(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$, вычисляются по теореме о дифференцировании сложной функции: $\dot{y}^j(t_0) = y_{x^i}^j(P) \dot{x}^i(t_0) = y_{x^i}^j(P) v^i$. Как было выяснено в предыдущем разделе, координаты касательного вектора меняются при замене координат ровно так же, как координаты вектора скорости фиксированной кривой. Поэтому, если мы проделаем только что описанные вычисления для всех возможных систем координат в окрестностях точек P и $F(P)$, то мы будем получать координаты одного и того же касательного вектора в точке P (заданного кривой γ) и одного и того же касательного вектора в точке $F(P)$ (заданного кривой $F \circ \gamma$). Тем самым, во введенных координатах дифференциал $dF|_P$ задается матрицей Якоби $(y_{x^i}^j)|_P$ координатной записи отображения F , вычисленной в точке P .

4.2.3 Определение дифференциала через дифференцирование в точке

Наконец, приведем определение дифференциала в терминах дифференцирований в точке. Для этого заметим, что отображение $F: M \rightarrow N$ определяет отображение $F^*: \mathcal{F}_{F(P)} \rightarrow \mathcal{F}_P$ следующим образом: если $f \in \mathcal{F}_{F(P)}$ определена на открытой окрестности $U \subset N$ точки $F(P)$, то $F^*(f)$ зададим на открытой окрестности $F^{-1}(U)$ точки P , положив $F^*(f) = f \circ F$. Ясно, что F^* — линейное отображение, переводящее произведение в произведение.

Далее, если $\nu \in \mathcal{D}_P$ — дифференцирование в точке P , то определим отображение $dF|_P(\nu): \mathcal{F}_{F(P)} \rightarrow \mathbb{R}$ так: для каждой $f \in \mathcal{F}_{F(P)}$ положим $dF|_P(\nu)(f) = \nu(F^*(f))$. Так как F^* сохраняет линейные комбинации и произведения функций, то $dF|_P(\nu)$ является дифференцированием в точке $F(P)$. Запишем это дифференцирование в координатах.

Пусть x^1, \dots, x^m — локальные координаты в окрестности точки P , а y^1, \dots, y^n — локальные координаты в окрестности точки $F(P)$, и пусть $\nu = v^i \partial_{x^i}|_P$, $dF|_P(\nu) = w^j \partial_{y^j}|_{F(P)}$. Тогда для $f \in \mathcal{F}_{F(P)}$ имеем

$$dF|_P(\nu)(f) = w^j \partial_{y^j}|_{F(P)}(f) = \nu(F^*(f)) = v^i \partial_{x^i}|_P(f \circ F) = v^i y_{x^i}^j(P) \partial_{y^j}|_{F(P)}(f),$$

откуда $w^j = y_{x^i}^j(P) v^i$. Таким образом, мы видим, что дифференцирование $dF|_P(\nu)$, рассматриваемое как касательный вектор из $T_{F(P)} N$, имеет те же координаты, что и образ касательного вектора при действии дифференциала. Следовательно, отображение $\nu \mapsto dF|_P(\nu)$ и есть дифференциал отображения F , записанный в терминах дифференцирований в точке.

Пример 4.5. Как и в случае поверхностей, дифференциал гладкой функции $F: M \rightarrow \mathbb{R}$, определенной на гладком многообразии, можно рассматривать как линейный функционал на каждом касательном пространстве $T_P M$, т.е. элемент каждого двойственного (**кокасательного**) пространства $T_P^* M$. То же самое касается и дифференциала гладкой функции, определенной на непустом открытом подмножестве $U \subset M$, в частности, дифференциалов координатных функций $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$, заданных с помощью карты (U, φ) . Аналогично случаю поверхностей показывается, что дифференциалы $dx^i|_P$ образуют базис $T_P^* M$, двойственный к каноническому базису $\partial_{x^i}|_P$.

4.3 Ранг дифференциала

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, тогда в каждой точке определен дифференциал $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$, являющийся линейным отображением векторных пространств, поэтому для него определен **ранг** $\text{rank } dF|_P$, т.е. размерность образа $\text{im } dF|_P$. Этот ранг будем называть также **рангом отображения F в точке P** . Отображение F называется **отображением постоянного ранга**, если во всех точках $P \in M$ его ранг один и тот же.

Замечание 4.6. Для работы с рангом обычно используют координатную запись отображения F , тогда ранг — это в точности ранг матрицы Якоби, являющейся матрицей координатной записи дифференциала. Так как ранг не зависит от выбора локальных координат, иногда бывает полезно выбрать координаты специальным образом, так, чтобы в них отображение F записывалось в наиболее простом виде.

Напомним, что $\text{rank } dF|_P \leq \min\{\dim M, \dim N\}$. Если в этом неравенстве достигается равенство, то F называется отображением **полного ранга в точке P** , и если при этом F имеет постоянный ранг, то F называется **отображением полного ранга**. Отображение F полного ранга называется (гладким) **погружением**, если $\dim M \leq \dim N$, и (гладкой) **субмерсией**, если $\dim M \geq \dim N$.

Так как условие полноты ранга отображения $F: M \rightarrow N$ в точке P состоит в том, что некоторый максимальный минор матрицы Якоби координатной записи для дифференциала $dF|_P$ отличен от нуля, а для гладкого F компоненты этой матрицы непрерывно зависят от P , то условие полноты ранга выполняется и в некоторой открытой окрестности точки P . Тем самым, имеет место следующий результат.

Предложение 4.7. *Для гладкого отображения $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий, множество всех $P \in M$, в которых F является отображением полного ранга, — открытое подмножество M . В частности, если дифференциал $dF|_P$ инъективен (сюръективен), то F — погружение (субмерсия) в некоторой окрестности точки P .*

4.3.1 Теорема о ранге

Следующая теорема описывает, как выглядят локально отображения постоянного ранга.

Теорема 4.8. *Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладкого m -мерного многообразия M без края в гладкое n -мерное многообразие N без края, причем ранг отображения F постоянен и равен r . Тогда в окрестностях точек P и $F(P)$ можно выбрать такие координаты x^1, \dots, x^m и y^1, \dots, y^n соответственно, что в этих координатах $P = (0, \dots, 0)$, $F(P) = (0, \dots, 0)$, а координатная запись отображения F имеет вид*

$$y^1 = x^1, \dots, y^r = x^r, y^{r+1} = 0, \dots, y^n = 0$$

(если $r = n$, то уравнения $y^{r+1} = 0, \dots$ отсутствуют). В частности, если F — субмерсия, то координатная запись F выглядит так:

$$y^1 = x^1, \dots, y^n = x^n,$$

а если F — погружение, то так:

$$y^1 = x^1, \dots, y^m = x^m, y^{m+1} = 0, \dots, y^n = 0.$$

Доказательство. Пусть $v^j = v^j(u^1, \dots, u^m)$ — какая-нибудь координатная запись в окрестности точки P . С помощью сдвигов добьемся того, чтобы координаты точек P и $F(P)$ совпадали с началами координат. Матрица Якоби $J = (v^j_{u^i})$ имеет во всех точках в координатной окрестности точки P один и тот же ранг r . Перенумеруем, если необходимо, координаты так, чтобы в точке P был невырожденным минор, натянутый на первые r строк и столбцов. Полученные координаты будем обозначать теми же u^i и v^j . Уменьшим, если необходимо, координатную окрестность точки P так, чтобы этот минор был невырожден во всей полученной окрестности.

Рассмотрим отображение из \mathbb{R}^m с координатами u^i в \mathbb{R}^n с координатами x^i , заданное так:

$$\begin{cases} x^i = v^i(u^1, \dots, u^m) & \text{при } i \leq r, \\ x^j = u^j & \text{при } j > r. \end{cases}$$

Матрица Якоби этого отображения невырождена в точке $P = (0, \dots, 0)$, поэтому в некоторой окрестности $(0, \dots, 0)$ определено обратное отображение, имеющее вид

$$\begin{cases} u^i = u^i(x^1, \dots, x^m) & \text{при } i \leq r, \\ u^j = x^j & \text{для } j > r. \end{cases}$$

Ясно, что координатная запись отображения F в координатах x^i и v^k выглядит так:

$$\begin{cases} v^i = x^i & \text{при } i \leq r, \\ v^j = v^j(u^1(x^1, \dots, x^m), \dots) =: v^j(x^1, \dots, x^m) & \text{при } j > r. \end{cases}$$

Так как ранг матрицы дифференциала отображения F везде равен r и не зависит от того, в каких локальных координатах мы его записываем, то все производные $v^j_{x^k}$, где $j, k > r$, должны быть тождественно равны нулю (обратите внимание, что в матрице Якоби $(v^j_{u^i})$ левый верхний угол размера $r \times r$ равен единичной матрице, поэтому “правый нижний угол” должен тождественно зануляться). Выберем в текущей координатной окрестности точки P подокрестность, представляющую в координатах x^i прямоугольный параллелепипед. Тогда, в силу выбора окрестности, заключаем, что в ней функции $v^j(x^1, \dots, x^m)$ не зависят от x^{r+1}, \dots, x^m (в этой окрестности координатные линии связные).

Итак, координатная запись отображения F имеет вид:

$$\begin{cases} v^i = x^i & \text{при } i \leq r, \\ v^j = v^j(x^1, \dots, x^r) & \text{при } j > r. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь отображение из \mathbb{R}^n с координатами v^i в \mathbb{R}^n с координатами y^i , заданное так:

$$\begin{cases} y^i = v^i & \text{при } i \leq r, \\ y^j = v^j - v^j(v^1, \dots, v^r) & \text{при } j > r. \end{cases}$$

У этого отображения матрица Якоби в $(0, \dots, 0)$ невырождена, поэтому в окрестности нуля эти функции задают замену координат, что позволяет записать отображение F в координатах x^i и y^i . Но в этих координатах отображение F имеет как раз тот вид, который декларируется в условии теоремы. \square

Замечание 4.9. Теорема 4.8 фактически говорит о том, что отображение постоянного ранга в малых окрестностях своих точек является, при специальном выборе локальных координат, линейным.

Замечание 4.10. Теорема 4.8 обобщается на случай, когда многообразие M может иметь непустой край, а край N пуст. Сложность переноса доказательства состоит в том, что для точки P из края ∂M координатную запись отображения F приходится продолжать до гладкого в окрестность, открытую в пространстве \mathbb{R}^m , но такое продолжение не обязано иметь постоянный ранг. Если же многообразие N имеет непустой край, то отображение F может вести себя крайне сложно в окрестности края, и без дополнительных ограничений не удается добиться простого канонического вида этого отображения (представьте кривую, которая касается края).

4.4 Погружения, субмерсии, локальные диффеоморфизмы

Напомним, что гладкое отображение $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий, имеющее полный ранг, называется *субмерсией*, если $\text{rank } F = \dim N$, и *погружением*, если $\text{rank } F = \dim M$. Приведем примеры субмерсий и погружений.

Пример 4.11 (Субмерсии и погружения).

- ▼ Пусть M_1, \dots, M_k — гладкие многообразия, где не более одного из них имеет непустой край. Рассмотрим отображение проекции $\pi_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$, тогда это — субмерсия. В частности, проекция \mathbb{R}^n на любое свое координатное подпространство — субмерсия.
- ▼ Гладкая кривая в гладком многообразии размерности не меньше 1 является погружением, если и только если вектор скорости кривой всюду отличен от нуля.
- ▼ Отображение $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varepsilon(t) = (\cos t, \sin t)$, — субмерсия, как и отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, заданное в декартовых координатах x^1, \dots, x^n на \mathbb{R} так: $F(x^1, \dots, x^n) = (\varepsilon(x^1), \dots, \varepsilon(x^n))$.

Гладкое отображение $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий называется *локальным диффеоморфизмом*, если для каждой точки P существует открытая окрестность $U \subset M$ такая, что $F(U)$ — открытое подмножество N и ограничение $F|_U: U \rightarrow F(U)$ — диффеоморфизм открытых подмногообразий U и $F(U)$.

Задача 4.12. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий без края. Покажите, что F — локальный диффеоморфизм, если и только если F одновременно является погружением и субмерсией.

Замечание 4.13. Отметим, что если разрешить многообразию M иметь непустой край, то условие задачи 4.12 становится неверным. Действительно, рассмотрим в качестве F включение полупространства \mathbb{R}_λ^n в пространство \mathbb{R}^n . Тогда в точках края отображение F одновременно является погружением и субмерсией, однако локальным диффеоморфизмом это отображение не является. С другой стороны, эта задача обобщается на случай, когда только N имеет непустой край.

Отметим также, что естественное обобщение теоремы об обратном отображении на случай гладких многообразий тоже не имеет места для отображения из многообразия с непустым краем, как видно из примера $\mathbb{R}_\lambda^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

Задача 4.14. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение постоянного ранга между гладкими многообразиями без края. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если F сюръективно, то F — субмерсия (указание: воспользуйтесь теоремой Бэра для локально компактных хаусдорфовых топологических пространств).
- (2) Если F инъективно, то F — погружение.
- (3) Если F — биективно, то F — диффеоморфизм.

4.5 Вложения и гладкие подмногообразия

Погружение $F: M \rightarrow N$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие N называется (гладким) **вложением**, если оно является топологическим вложением, т.е. F — гомеоморфизм между M и $F(M)$.

Пример 4.15 (Вложения).

▼ Отображение включения $U \hookrightarrow M$ непустого открытого подмножества U в объемлющее гладкое многообразие M — вложение.

▼ Если M_1, \dots, M_k — гладкие многообразия, $P_i \in M_i$ — некоторые точки, тогда отображение $\nu_j: M_j \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$, заданное так

$$\nu_j(P) = (P_1, \dots, P_{j-1}, P, P_{j+1}, \dots, P_k)$$

— вложение. В частности, отображение включения координатного подпространства $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в объемлющее пространство \mathbb{R}^n — вложение.

▼ Отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное в декартовых координатах в виде $\gamma: t \mapsto (t^3, 0)$ является гладким топологическим вложением, но не является вложением гладких многообразий, так как $\dot{\gamma}(0) = 0$ и, значит, γ не является погружением.

▼ Отображение, задающее “восьмерку” $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$ является биективным погружением, но не вложением, так как образ — компактен, а интервал $(-\pi, \pi)$ — нет, рис. 4.1.

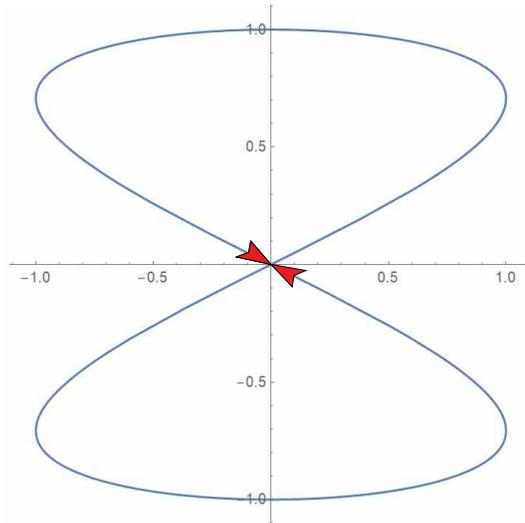


Рис. 4.1: “Восьмерка”.

▼ Отображение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow T^2 \subset \mathbb{C}^2$, заданное в координатах в виде $\gamma: t \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi \alpha it})$, где α — иррациональное число, является биективным погружением, но не вложением, рис. 4.2. Действительно, если бы γ было вложением, то бесконечное подмножество $\gamma(\mathbb{Z}) \subset T^2$ не имело бы сходящихся подпоследовательностей. Однако, в индуцированной на $\gamma(\mathbb{R})$ топологии, к точке $\gamma(0)$ сходится некоторая подпоследовательность из $\gamma(\mathbb{Z})$ (убедитесь в этом).

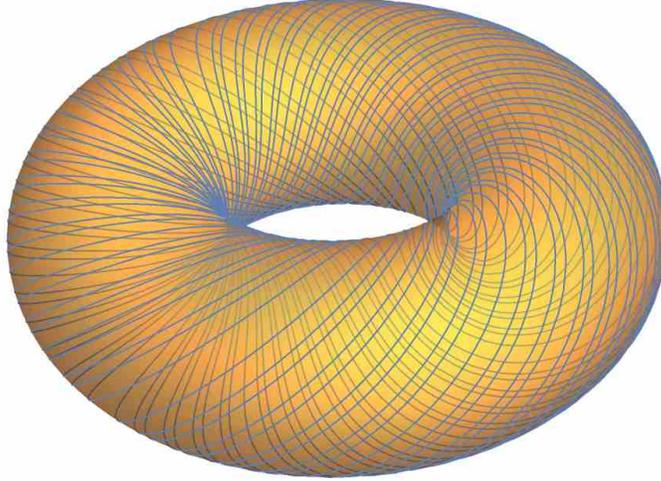


Рис. 4.2: Погружение, не являющееся вложением.

Отметим, что локально каждое погружение является вложением.

Задача 4.16. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий без края. Покажите, что F является погружением, если и только если каждая точка P обладает открытой окрестностью U такой, что $F|_U: U \rightarrow N$ — вложение.

Замечание 4.17. Задача 4.16 имеет место также и для многообразий с непустыми краями.

Пусть M — гладкое многообразие. Его топологическое подмногообразие $N \subset M$, наделенное такой гладкой структурой, что отображение включения $N \hookrightarrow M$ является гладким вложением, называется *гладким подмногообразием*. Разность $\dim M - \dim N =: \text{codim } N$ называется *коразмерностью подмногообразия N* , а M — *объемлющим многообразием для N* . Гладкие подмногообразия коразмерности 1 иногда называют *гиперповерхностями*. Отметим, что гладкое подмногообразие коразмерности 0 с пустым краем мы уже встречали: мы называли его *открытым подмногообразием*.

Замечание 4.18. Иногда [1] подмногообразия определяют более широко, а именно, то, что мы называли подмногообразиями относят к *вложенным подмногообразиям*. Также вводят понятие *погруженного многообразия*, разрешая на $N \subset M$ рассматривать топологию, отличную от индуцированной из M , и требуя лишь, чтобы отображение включения $N \hookrightarrow M$ было (гладким) погружением. Таким образом, вводя на “восьмерке” из примера 4.15 топологию полуинтервала $(-\pi, \pi)$ с помощью гомеоморфизма γ , получим погруженное подмногообразие.

Задача 4.19. Докажите следующее утверждение. Пусть $F: N \rightarrow M$ — гладкое вложение гладкого многообразия N в гладкое многообразие M . Тогда топологическое подпространство $F(N) \subset M$ — топологическое многообразие, и на нем существует единственная гладкая структура, превращающая его в гладкое подмногообразие M такое, что $F: N \rightarrow F(N)$ — диффеоморфизм.

Замечание 4.20. Гладкая структура $\mathcal{S}_{F(N)}$ на $F(N)$ из задачи 4.19 получается из гладкой структуры \mathcal{S}_N многообразия N так:

$$\mathcal{S}_{F(N)} = \left\{ (F(U), \varphi \circ F^{-1}) : (U, \varphi) \in \mathcal{S}_N \right\}.$$

Замечание 4.21. В дальнейшем, говоря про гладкие подмногообразия гладких многообразий, мы будем, для краткости, опускать слово “гладкий”, предполагая наличие гладкости по умолчанию.

Задача 4.22. Покажите, что край гладкого многообразия является гладким подмногообразием коразмерности 1 без края.

4.6 Срезающие функции и теорема вложения

Сейчас мы опишем важный класс гладких функций на гладких многообразиях. Эти функции имеют многочисленные приложения, с некоторыми из которых мы познакомимся в самое ближайшее время.

Пусть $f(t)$ — вещественная функция, равная $e^{-1/t}$ при $t > 0$, и 0 при $t \leq 0$. Непосредственно проверяется, что функция f — гладкая. Выберем два вещественных числа $r_1 < r_2$ и рассмотрим гладкую вещественную функцию

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}.$$

При $t \leq r_1$ имеем $f(t - r_1) = 0$, поэтому $h(t) = 1$. При $t \geq r_2$ функция $f(t - r_1)$ положительна, зато $f(r_2 - t) = 0$, поэтому $h(t) = 0$. Наконец, при $r_1 < t < r_2$ обе функции $f(t - r_1)$ и $f(r_2 - t)$ положительны, поэтому $0 < h(t) < 1$. Если мы желаем явно указать r_1 и r_2 , то вместо h будем писать h_{r_1, r_2} .

Выберем произвольную точку $P \in \mathbb{R}^n$, два положительных числа $r_1 < r_2$, и пусть $h = h_{r_1, r_2}$. Определим гладкую функцию $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, положив $H(x) = h(\|x - P\|)$, тогда H равна 1 на замкнутом шаре $B_{r_1}(P)$, равна 0 вне открытого шара $U_{r_2}(P)$, а для остальных x выполняется $0 < H(x) < 1$, рис. 4.3. Если мы хотим явно указать точку P и числа r_1, r_2 , то вместо H будем писать H_{P, r_1, r_2} .

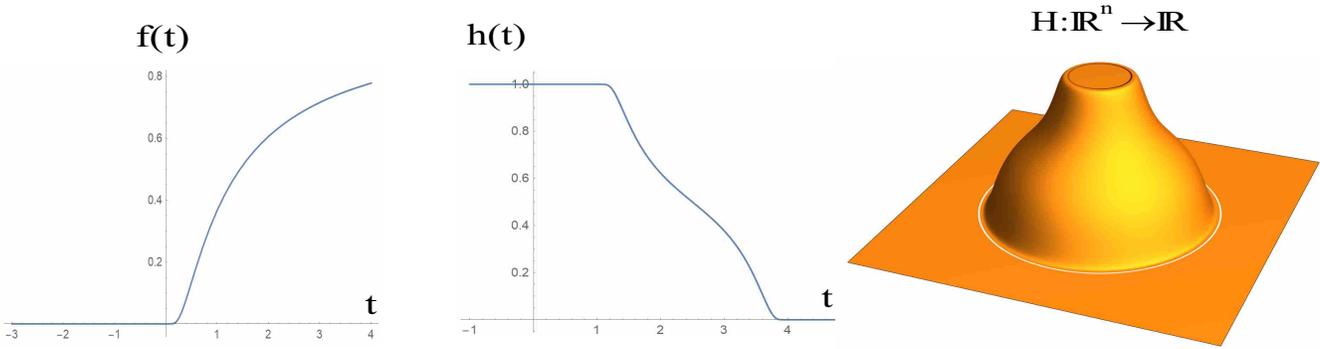


Рис. 4.3: Срезающие функции.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n . Выберем произвольную точку $P \in M$ и рассмотрим содержащую ее карту $(U, \varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}_\lambda^n \subset \mathbb{R}^n)$. Выберем в \mathbb{R}^n соответственно замкнутый и открытый шары $B_{r_1}(\varphi(P)) \subset U_{r_2}(\varphi(P))$ так, чтобы $B_{r_2}(\varphi(P)) \cap \mathbb{R}_\lambda^n \subset V$, а для внутренней точки P шар $B_{r_2}(\varphi(P))$ состоял только из внутренних точек \mathbb{R}_λ^n .

Рассмотрим на \mathbb{R}^n построенную выше функцию $H_{\varphi(P), r_1, r_2}$, и обозначим через $H_P: M \rightarrow \mathbb{R}$ функцию $H_{\varphi(P), r_1, r_2} \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$, продолженную на все M нулем. Функцию H_P назовем *срезающей с центром в P* . Отметим, что, по построению, внутренность W_P множества $H_P = 1$ является открытой окрестностью точки $P \in M$ и содержится в U вместе со своим замыканием \overline{W}_P . Такое W_P назовем *H_P -окрестностью* точки P , а $(U, \varphi) — H_P$ -картой.

Используя срезающие функции, докажем следующую теорему.

Теорема 4.23. *Каждое гладкое многообразие M можно гладко вложить в некоторое арифметическое пространство конечной размерности.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему лишь для компактных многообразий M . Общий случай мы оставляем в качестве упражнения.

Пусть n — размерность многообразия M . Для каждой точки $P \in M$ выберем некоторую срезающую функцию H_P с центром в P , и соответствующую H_P -окрестность обозначим W_P . Тогда $\{W_P\}_{P \in M}$ — открытое покрытие M , так что из него можно выбрать конечное подпокрытие. Элементы этого подпокрытия обозначим W_1, \dots, W_k , соответствующие срезающие функции — через H_1, \dots, H_k , и для каждого $i = 1, \dots, k$ через (U_i, φ_i) обозначим H_i -карту.

Рассмотрим отображения $F_i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, равные $H_i \varphi_i$ на U_i , а все остальные точки из M переводящее в $0 \in \mathbb{R}^n$. Эти отображения — гладкие (проверьте), так что следующее отображение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)}$ также является гладким:

$$F(P) = (F_1(P), \dots, F_k(P), H_1(P), \dots, H_k(P)).$$

Покажем, что дифференциал $dF|_P$ инъективен. Так как $\{W_i\}_{i=1}^k$ — покрытие M , существует такое i , что $P \in W_i$. Так как $H_i = 1$ на W_i , ограничение отображения F_i на W_i совпадает с координатным гомеоморфизмом φ_i , поэтому в координатах, заданных картой (U_i, φ_i) , отображение $F_i|_{W_i}$ является включением. Следовательно, дифференциал $dF_i|_P$ невырожден и, значит, $\text{rank } dF|_P \geq n$. Но $\text{rank } dF|_P \leq \dim M = n$, поэтому $\text{rank } dF|_P$ максимален и, значит, F — погружение.

Покажем, что отображение F инъективно. Пусть $F(P) = F(Q)$ и $P \in W_i$, тогда $H_i(P) = 1 = H_i(Q)$, так что Q лежит в замыкании $\overline{W_i} \subset U_i$ окрестности W_i . Но на $\overline{W_i}$ отображение F_i также совпадает с φ_i и, поэтому, инъективно, откуда $P = Q$.

Так как M — компактное многообразие, то $F: M \rightarrow F(M)$ — гомеоморфизм (так как биективное непрерывное отображение из компактного пространства в хаусдорфово гомеоморфно). Итак, мы показали, что F — погружение, являющееся топологическим вложением, поэтому F — гладкое вложение. Доказательство закончено. \square

Замечание 4.24. Теоремы Уитни позволяют существенно снизить размерность арифметического пространства, в которое можно погрузить или вложить гладкое n -мерное многообразие M . Слабые теоремы Уитни гарантируют, что M можно погрузить в \mathbb{R}^{2n} и вложить в \mathbb{R}^{2n+1} . Более того, вложение можно сделать собственным, т.е. таким, что прообраз каждого компактного подмножества будет компактен. Сильная теорема Уитни позволяет, при некоторых дополнительных ограничениях, снизить обе размерности на 1. Заинтересовавшихся деталями мы отсылаем к [1].

4.7 Ориентируемость гладких многообразия (начало)

Пусть M — гладкое многообразие положительной размерности, и \mathcal{A} — произвольный атлас из гладкой структуры многообразия M . Этот атлас называется *ориентированным*, если якобианы всех функций перехода положительны. Это, в частности, означает, что при замене локальных координат ориентация канонического базиса каждого касательного пространства не меняется. Таким образом, если на гладком многообразии задан ориентированный атлас, то все касательные пространства можно ориентировать так, чтобы в любых координатах, заданных картами этого атласа, канонические базисы были ориентированы положительно. По аналогии с тем, как мы определяли гладкую структуру, определим *максимальный ориентированный атлас* и назовем его *ориентацией гладкого многообразия положительной размерности*.

Альтернативным определением ориентации многообразия положительной размерности является задание ориентации на всех касательных пространствах, причем такой, чтобы в окрестности каждой точки многообразия можно было бы выбрать локальные координаты, для которых все канонические базисы имели бы одну и ту же ориентацию. Последнее условие часто называют *непрерывной зависимостью ориентации касательных пространств от точки*.

Замечание 4.25. В замечании 2.14 из лекции 2 мы обсуждали причину рассмотрения в качестве модельных пространств целого семейства полупространств \mathbb{R}^n вместо того, чтобы ограничиться любым одним из таких полупространств, скажем, $x^n \geq 0$, как это делается в разных монографиях. Если мы все-таки ограничимся $x^n \geq 0$, то тогда на отрезке $[a, b]$ мы не сможем построить ни одного ориентированного атласа. Действительно, задание ориентации на отрезке равносильно заданию направления движения по отрезку, но если мы ограничились полупространствами $x^1 \geq 0$, то в окрестности концов движение будет направлено в сторону от концов, что является движением в разные стороны и, значит, не порождается никаким ориентированным атласом.

Тем не менее, если ориентацию определять через введение непрерывно зависящей от точки ориентации касательных пространств, то даже при ограничении модельных пространств полупространствами $x^n \geq 0$ отрезок ориентировать можно. Именно такой подход реализуется в [1]. При данном нами более общем определении многообразия с краем (см. также [2]), ориентация, заданная в терминах атласов, и ориентация, заданная через ориентирование касательных пространств, — эквивалентные понятия.

Введем также понятие ориентации для нульмерного многообразия, т.е. для не более чем счетного набора точек: *ориентацией нульмерного многообразия* будем называть произвольное отображение из этого многообразия в $\{-1, 1\}$.

Каждое нульмерное многообразие ориентировать можно всегда. То же самое касается и каждого гладкого одномерного многообразия. Однако уже не каждое гладкое двумерное многообразие допускает ориентацию, например, как мы покажем ниже, лист Мёбиуса ориентировать нельзя. Если для гладкого многообразия M из

его гладкой структуры можно выбрать ориентированный атлас, то такое многообразие называется **ориентируемым** (т.е. его можно ориентировать), иначе многообразие называется **неориентируемым**.

Отметим, что для доказательства ориентируемости данного многообразия достаточно привести любой ориентированный атлас. Для проверки неориентируемости тоже можно воспользоваться конкретным атласом следующим образом. Пусть (U, φ) — произвольная карта на M , задающая локальные координаты x^1, \dots, x^n . Пусть $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отражение относительно плоскости $x^1 = 0$, т.е. отображение $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^n)$. Так как якобиан такой замены координат отрицательный, будем говорить, что карта $(U, \nu \circ \varphi)$ была получена из (U, φ) **заменой ориентации**.

Задача 4.26. Покажите, что если все карты атласа \mathcal{A} гладкого многообразия M размерности $n \geq 1$ связны, то ориентируемость M равносильна возможности превратить \mathcal{A} в ориентированный атлас заменами ориентаций в некоторых его картах.

Пример 4.27. Рассмотрим лист Мёбиуса, который получается из полуоткрытого квадрата $K = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| < 1\}$ отождествлением точек $(-1, -y)$ и $(1, y)$. Возьмем в качестве гладкого атласа семейство из двух карт (U_i, φ_i) , где $U_1 = K \setminus \{x = 0\}$ и $U_2 = K \cap \{|x| < 1\}$. Отображение $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ будет тождественным на $U_1 \cap \{x > 0\}$, и равным $(x, y) \mapsto (x + 2, -y)$ на $U_1 \cap \{x < 0\}$. Отображение φ_2 будет тождественным, рис. 4.4.

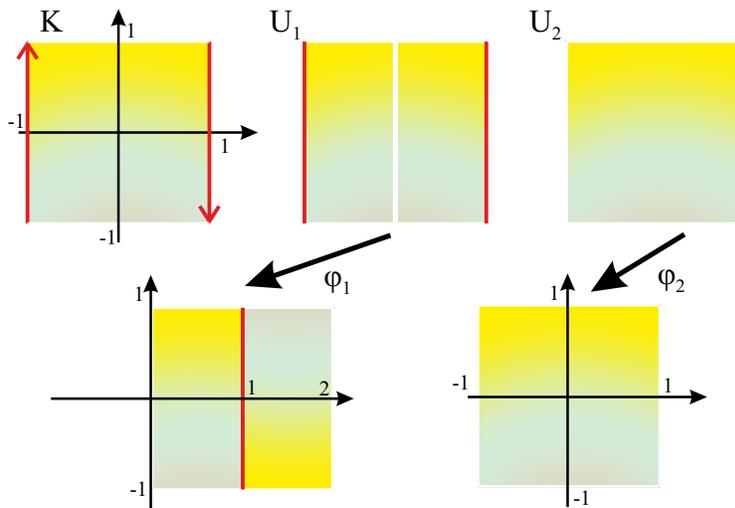


Рис. 4.4: Неориентируемость листа Мёбиуса.

Пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент, и на этих компонентах функции перехода имеют противоположные по знаку якобианы. Легко видеть, что после любой замены ориентаций якобианы замены координат на компонентах пересечения $U_1 \cap U_2$ продолжают быть разного знака. Отметим, что достаточно проверить это лишь для одной замены ориентаций, так как замена ориентаций сразу во всех картах сохраняет свойство атласа быть ориентированным или не быть им. Применив утверждение задачи 4.26, получим неориентируемость листа Мёбиуса.

Отметим, что гладкое многообразие можно ориентировать, вообще говоря, многими способами: в гладкой структуре существует несколько максимальных ориентированных атласов.

Задача 4.28. Сколькими способами можно ориентировать данное гладкое многообразие?

Задача 4.29. Покажите, что каждая неявная поверхность в \mathbb{R}^n является ориентируемым гладким многообразием.

Задача 4.30. Покажите, что произведение ориентируемых гладких многообразий — ориентируемое многообразие.

Задача 4.31. Покажите, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо, если и только если n — нечетно.

Введем важное для дальнейшего понятие адаптированного атласа на произвольном гладком многообразии M размерности $n \geq 2$. Рассмотрим на M произвольный гладкий атлас \mathcal{A} . Для каждой карты $(U, \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_\lambda^n) \in \mathcal{A}$ сделаем в U замену координат, заданную сохраняющим ориентацию невырожденным линейным отображением $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (например, специальным ортогональным), переводящим полупространство \mathbb{R}_λ^n в полупространство $\{x^1 \leq 0\}$. Так как $n \geq 2$, то это всегда можно сделать. Полученный ориентированный атлас, в котором из всех линейных функционалов λ выбирается только $\lambda = -x^1$, назовем **адаптированным** и обозначим \mathcal{A}' . Соответствующие локальные координаты также будем называть **адаптированными**. Ясно, что атласы \mathcal{A} и \mathcal{A}' одновременно или ориентированы, или нет, причем если они ориентированы, то их ориентации совпадают.

Предложение 4.32. *Край ориентируемого гладкого многообразия M , $\dim M \geq 1$, — ориентируем.*

Доказательство. Если многообразие M одномерно, то его нульмерный край всегда ориентируем. Пусть теперь $n \geq 2$.

Построим на M произвольный адаптированный атлас \mathcal{A} . Выберем произвольную карту $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, содержащую граничную точку P , и пусть x^1, \dots, x^n — локальные координаты, заданные этой картой. Тогда часть края $\partial M \cap U$ лежит в гиперпространстве $x^1 = 0$, а все неграничные точки из U удовлетворяют неравенству $x^1 < 0$.

Рассмотрим две такие карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) , задающие в окрестности граничной точки P координаты x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n . Тогда на части края $W := \partial M \cap U_1 \cap U_2$ возникает две системы координат: x^2, \dots, x^n и y^2, \dots, y^n . Обозначим J' матрицу Якоби замены этих координат, вычисленную в точке P , а через J — матрицу Якоби замены координат в $U_1 \cap U_2$, также вычисленную в точке P . Так как у всех точек из W координата y^1 равна нулю, то $y_{x^i}^1(P) = 0$ при всех $i > 1$. Таким образом, матрица J — блочная, поэтому ее определитель равен $y_{x^1}^1(P) \det J'$. Так как в P обе координаты x^1 и y^1 равны нулю, а при $x^1 < 0$ координата y^1 также отрицательна, то $y_{x^1}^1(P)$ не может быть отрицательна, иначе при убывании x^1 в окрестности точки P мы бы получили положительные y^1 . Также $y_{x^1}^1(P) \neq 0$, так как $\det J \neq 0$. Таким образом, $y_{x^1}^1(P) > 0$ и, значит, $\det J' > 0$. Тем самым, мы показали, что ориентированный атлас \mathcal{A} индуцирует ориентированный атлас на крае ∂M . \square

В доказательстве предложения 4.32 мы по ориентированному адаптированному атласу на многообразии M размерности $n \geq 2$ построили ориентированный атлас на крае ∂M этого многообразия. Как было замечено выше, адаптированный ориентированный атлас можно построить по любому ориентированному атласу с сохранением ориентации. Тем самым, достраивая полученный на крае ориентированный атлас до ориентации края, мы получим способ индуцирования ориентации с многообразия на его край. Ориентацию, индуцированную на крае ∂M из ориентации многообразия M , будем называть **канонической** или **согласованной** с ориентацией многообразия M . Именно эта ориентация будет использована нами в доказательстве теоремы Стокса (см. ниже). Также определим **каноническую или согласованную ориентацию на крае одномерного ориентированного многообразия**. Как мы уже говорили, ориентация одномерного многообразия задается направлением движения по компонентам этого многообразия. Если для данной граничной точки одномерного многообразия мы выходим из этой точки, то припишем ей -1 , а если входим в нее — то 1 .

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012.
- [2] Abraham R., Marsden J., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 1988.

Упражнения к главе 4

Упражнение 4.1. Предположим, что в некоторых локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки P гладкого многообразия M мы задали произвольные n чисел $v_x = (v_x^1, \dots, v_x^n)$, и, с помощью умножения на матрицы Якоби, “перенесли” эти наборы во все остальные локальные координаты y в окрестности P , т.е. приписали y набор чисел $v_y = y_x(P)v_x$. Покажите, что в результате мы получили касательный вектор, т.е. наборы чисел, приписанные любым локальным координатам y и z , также отличаются на матрицу Якоби: $v_z = z_y(P)v_y$.

Упражнение 4.2. Проверьте, что линейная комбинация дифференцирований в точке P также является дифференцированием. Убедитесь, что семейство \mathcal{D}_P всех дифференцирований в точке P образует векторное пространство.

Упражнение 4.3. Покажите, что для любого дифференцирования $\nu \in \mathcal{D}_P$ выполняется $\nu(f) = f_{x^i}(P)\nu(x^i)$, где x^1, \dots, x^n — локальные координаты в окрестности точки P . Таким образом, $\nu = \nu(x^i)\partial_{x^i}|_P$.

Упражнение 4.4. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий без края. Покажите, что F — локальный диффеоморфизм, если и только если F одновременно является погружением и субмерсией.

Упражнение 4.5. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение постоянного ранга между гладкими многообразиями без края. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если F сюръективно, то F — субмерсия (указание: воспользуйтесь теоремой Бэра для локально компактных хаусдорфовых топологических пространств).
- (2) Если F инъективно, то F — погружение.
- (3) Если F — биективно, то F — диффеоморфизм.

Упражнение 4.6. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий без края. Покажите, что F является погружением, если и только если каждая точка P обладает открытой окрестностью U такой, что $F|_U: U \rightarrow N$ — вложение.

Упражнение 4.7. Докажите следующее утверждение. Пусть $F: N \rightarrow M$ — гладкое вложение гладкого многообразия N в гладкое многообразие M . Тогда топологическое подпространство $F(N) \subset M$ — топологическое многообразие, и на нем существует единственная гладкая структура, превращающая его в гладкое подмногообразие M такое, что $F: N \rightarrow F(N)$ — диффеоморфизм.

Упражнение 4.8. Покажите, что край гладкого многообразия является гладким подмногообразием коразмерности 1 без края.

Упражнение 4.9. Покажите, что если все карты атласа \mathcal{A} гладкого многообразия M связны, то ориентируемость M равносильна возможности превратить \mathcal{A} в ориентированный атлас заменами ориентации в некоторых его картах.

Упражнение 4.10. Сколькими способами можно ориентировать данное гладкое многообразие?

Упражнение 4.11. Покажите, что каждая неявная поверхность в \mathbb{R}^n является ориентируемым гладким многообразием.

Упражнение 4.12. Покажите, что произведение ориентируемых гладких многообразий — ориентируемое многообразие.

Упражнение 4.13. Покажите, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо, если и только если n — нечетно.

Лекция 5

Расслоения

План. Расслоения, пространство расслоения (тотальное пространство, расслоенное пространство), база расслоения, проекция расслоения, слой расслоения, тривиальное расслоение, ограничение расслоения, подрасслоение, глобальное и локальное сечения расслоения, индуцированное отображение баз, диаграмма, морфизм расслоений (с разными базами и с одной базой), изоморфизм расслоений, расслоение, индуцированное отображением в базу, декартово произведение расслоений, прямая сумма или сумма Уитни расслоений, диагональное отображение, локально тривиальное расслоение, тривиализация, тривиализующее открытое множество, модифицированные тривиализации, отображения склейки, конструкция расслоения по тривиализациям, дополнительные структуры на расслоении, гладкие расслоения, векторные расслоения, линейные и билинейные морфизмы векторных расслоений.

В предыдущей лекции мы изучали гладкие многообразия и определили касательное пространство и дифференциал гладкого отображения. Наличие касательного пространства позволяет ввести в рассмотрение тензоры. Однако теперь касательных пространств много. Мы будем задавать тензор одного и того же типа на каждом касательном пространстве и следить за тем, как эти тензоры меняются от точки к точке. Для возможности использовать дифференциальное исчисление, мы потребуем, чтобы эта зависимость была гладкой. Так получаются тензорные поля, в частности, риманова метрика и дифференциальные формы. В действительности, структура тензорных полей разного типа и операции над тензорными полями имеют во многом одинаковые черты. Чтобы каждый раз отдельно не описывать похожие свойства, мы определим тензорные поля через конструкцию, которая называется расслоением, см. детали в [1] и [2].

5.1 Общее определение расслоений

Расслоением называется непрерывное сюръективное отображение $\pi: E \rightarrow B$, где E и B — непустые топологические пространства. Пространство E называется **пространством расслоения**, **тотальным пространством** или **расслоенным пространством**. С пространством B все проще: оно называется **базой расслоения**. Отображение π имеет также и другое название — **проекция расслоения**. Для каждой точки $b \in B$ ее прообраз $E_b := \pi^{-1}(b)$ называется **слоем на точке** b . Таким образом, $E = \sqcup_{b \in B} E_b$.

Замечание 5.1. Иногда, если понятно, как устроены база и проекция, расслоением называют само тотальное пространство. Также ряд авторов под расслоением понимают не отображение $\pi: E \rightarrow B$, а тройку (E, π, B) . Кроме того, иногда расслоение (bundle) определяют еще более общим образом, не предполагая, что E и B — топологические пространства, а разрешая им быть множествами, возможно пустыми [3]. При таком общем походе расслоение можно представлять как произвольное дизъюнктное семейство $\{E_b\}_{b \in B}$, индексированное “базой” B .

Пример 5.2. Пусть F — топологическое пространство и $E = B \times F$, тогда проекция $\pi: B \times F \rightarrow B$ на первый сомножитель является расслоением, которое называется **тривиальным**.

Пример 5.3. Если $\pi: E \rightarrow B$ — расслоение, и $A \subset B$ — произвольное непустое подпространство, то $\pi: \pi^{-1}(A) \rightarrow A$ — тоже расслоение, называемое **ограничением расслоения $\pi: E \rightarrow B$ на A** . Отметим, что, для упрощения обозначений, мы использовали тот же символ π для ограничения отображения π на $\pi^{-1}(A)$. В дальнейшем мы также будем пользоваться этим приемом.

Пример 5.4. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоения такие, что

- B' — подпространство B ,

- E' — подпространство E ,
- $\pi' = \pi|_{E'}$.

Тогда расслоение E' называется *подрасслоением в E* . Подчеркнем, что топология на E' индуцирована из E .

Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — произвольное расслоение, тогда каждое непрерывное отображение $s: B \rightarrow E$ такое, что $\pi \circ s: B \rightarrow B$ — тождественное отображение, называется *глобальным сечением* или просто *сечением* этого расслоения. *Локальным сечением над непустым открытым множеством $U \subset B$* называется сечение расслоения $\pi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$. Множество всех сечений расслоения E будем обозначать $\Gamma(E)$.

Пример 5.5. Если $\pi: B \times F \rightarrow B$ — тривиальное расслоение, то каждое сечение — это график непрерывного отображения $B \rightarrow F$. Таким образом, множество всех сечений $\Gamma(B \times F)$ естественно отождествляется с пространством $C(B, F)$ всех непрерывных отображений из B в F .

Задача 5.6. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — расслоение и $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие базы B . Предположим, что для каждого α задано локальное сечение $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, причем на каждом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ отображения s_α и s_β совпадают. Покажите, что тогда существует и единственно глобальное сечение $s: B \rightarrow E$ такое, что $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ при всех α .

Пусть даны два расслоения $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$. Тогда непрерывное отображение $H: E \rightarrow E'$ называется *послойным*, если для каждого $b \in B$ существует $b' \in B'$ такое, что $H(E_b) \subset E'_{b'}$. Таким образом, послойное отображение H индуцирует отображение баз $h: B \rightarrow B'$: $h(b) = b'$. Также говорят, что отображение H *накрывает* отображение h .

Имеется удобное представление семейств пространств и отображений между ними, называемое *диаграммой*. В этих диаграммах отображения обозначаются стрелочками, подписанными именами отображений. Диаграмма называется *коммутативной*, когда выполняется следующее условие: если из некоторого пространства A с помощью композиции отображений можно добраться до другого пространства B , причем имеется несколько таких путей, то все они дают одно и то же результирующее отображение. Кроме того, если некоторое отображение определяется остальными в диаграмме, то его обозначают пунктирной стрелочкой. Приведем условие, описывающее послойное отображение H и определяющее индуцированное отображение h с помощью коммутативной диаграммы:

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

Здесь коммутативность диаграммы означает, что $\pi' \circ H = h \circ \pi$.

Пример 5.7. Индуцированное отображение баз не обязано быть непрерывным. Рассмотрим два расслоения $\pi: [0, 2\pi) \times [0, 1] \rightarrow S^1$ и $\pi': [0, 2\pi) \times [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi)$, где $\pi(t, s) = (\cos t, \sin t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ и $\pi'(t, s) = t \in [0, 2\pi)$ (отметим, что второе расслоение тривиально, а первое — нет). Тогда тождественное отображение H является послойным, а индуцированное им отображение $h: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ разрывно, рис. 5.1.

Задача 5.8. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоения, а $H: E \rightarrow E'$ послойное отображение. Предположим, что база B может быть покрыта открытыми множествами U_α , над каждым из которых существует локальное сечение. Покажите, что тогда индуцированное отображение $h: B \rightarrow B'$ непрерывно.

Если послойное отображение расслоений индуцирует непрерывное отображение баз, то оно называется *морфизмом расслоений*, см. диаграмму (5.1).

Замечание 5.9. Если у рассматриваемых расслоений базы одинаковы, то традиционно *морфизмами* таких расслоений называют послойные отображения, накрывающие тождественное отображение баз. Иными словами, предполагается, что коммутативна диаграмма (5.2). Мы также будем следовать этому соглашению.

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array}$$

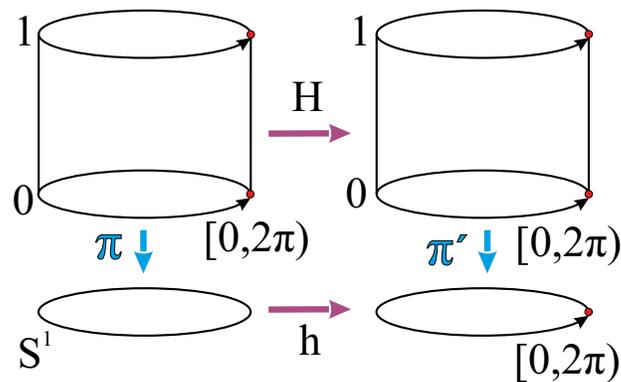


Рис. 5.1: Отображение \$h\$ — разрывно.

Пусть \$H: E \to E'\$ — морфизм расслоений \$\pi: E \to B\$ и \$\pi': E' \to B\$, тогда отображение \$H\$ индуцирует отображение \$H_*: \Gamma(E) \to \Gamma(E')\$ пространств сечений этих расслоений: если \$s: B \to E\$ — сечение \$E\$, т.е. \$s \in \Gamma(E)\$, то \$H_*(s) \in \Gamma(E')\$ определяется как \$H_*(s) = H \circ s\$.

Изоморфизмом расслоений называется биективное отображение \$H\$ тотального пространства такое, что, \$H\$ и \$H^{-1}\$ являются морфизмами. В частности, каждый изоморфизм расслоений — гомеоморфизм. Однако, не каждый морфизм, являющийся гомеоморфизмом тотальных пространств, представляет собой изоморфизм расслоений.

Пример 5.10. Если в примере 5.7 рассмотреть обратное отображение, то получим морфизм, являющийся гомеоморфизмом, но прямое отображение морфизмом не является.

Задача 5.11. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если \$\pi: E \to B\$ и \$\pi': E' \to B'\$ — расслоения, а \$H: E \to E'\$ — изоморфизм, и \$h: B \to B'\$ — индуцированное отображение (являющееся гомеоморфизмом), то для каждого сечения \$s: B \to E\$ отображение \$s' := H \circ s \circ h^{-1}: B' \to E'\$ также является сечением, которое называется **образом сечения** \$s\$. В частности, изоморфные расслоения одновременно или имеют, или не имеют глобальные сечения. Описанные только что условия изображены на следующей коммутативной диаграмме:

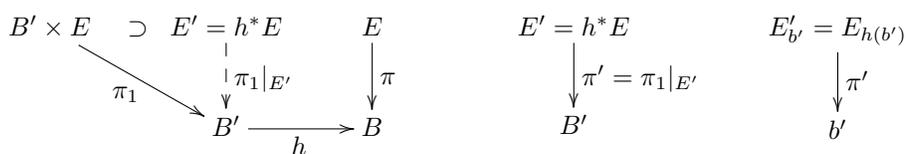
$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftarrow{H} & E' \\
 \uparrow s & \begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \downarrow \pi' \end{array} & \uparrow s' \\
 B & \xleftarrow{h} & B'
 \end{array}$$

- (2) Расслоение \$\pi: [0, 2\pi) \times [0, 1] \to S^1\$ из примера 5.7 не имеет глобального сечения.

Пусть \$\pi: E \to B\$ — расслоение над \$B\$, и \$h: B' \to B\$ — непрерывное отображение из топологического пространства \$B'\$ в базу \$B\$ расслоения \$\pi\$. Обозначим \$E'\$ подмножество в \$B' \times E\$, составленное из всех таких пар \$(b', e)\$, которые отображаются с помощью \$h\$ и \$\pi\$ в одну и ту же точку:

$$E' = \{(b', e) \in B' \times E : h(b') = \pi(e)\}.$$

Пусть \$\pi': E' \to B'\$ — ограничение проекции \$\pi_1: B' \times E \to B'\$ на \$E'\$.



Так как π_1 — непрерывное отображение, таким же является и отображение π' . Кроме того, отображение π' сюръективно (проверьте), поэтому $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоение, которое называется **индуцированным из π с помощью отображения h** . Ясно, что слоем E'_b над каждой точкой b' является слой $E_{h(b')}$ расслоения π над h -образом точки b' . Топальное пространство E' индуцированного расслоения часто обозначается h^*E .

Замечание 5.12. Приведем еще одно представление индуцированного расслоения, которое может оказаться более наглядным. Построим по расслоению $\pi: E \rightarrow B$ новое расслоение $\Pi: B' \times E \rightarrow B' \times B$, положив $\Pi(b', e) = (b', \pi(e))$. Вместо отображения $h: B' \rightarrow B$ рассмотрим его график $\Gamma_h = \{(b', h(b'))\} \subset B' \times B$, тогда определенное выше $E' \subset B' \times E$ — это, в точности, $\Pi^{-1}(\Gamma_h)$ (убедитесь в этом). Рассмотрим ограничение расслоения Π на Γ_h , т.е. $\Pi: \Pi^{-1}(\Gamma_h) \rightarrow \Gamma_h$. В силу примера 5.3, это ограничение также является расслоением. Так как проекция $\nu: \Gamma_h \rightarrow B'$, $\nu(b', h(b')) = b'$, — гомеоморфизм, мы можем отождествить Γ_h и B' с помощью отображения ν . Заменяя Γ_h на B' , получаем индуцированное расслоение. Более формально, можно положить $h^*E = E' = \Pi^{-1}(\Gamma_h)$, а $\pi' = \nu \circ \Pi$. Проиллюстрируем эту конструкцию на рисунке 5.2.

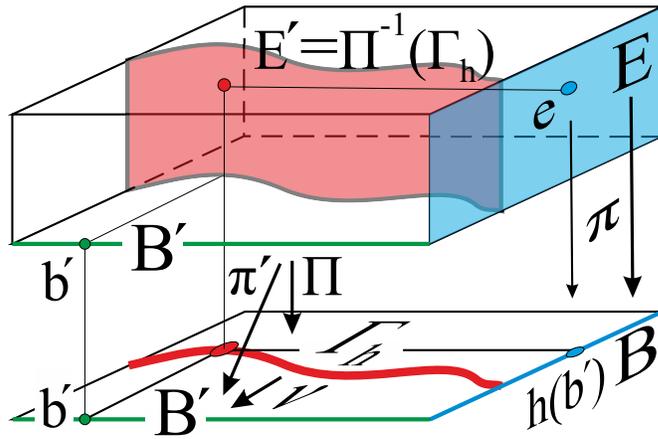


Рис. 5.2: Индуцированное расслоение.

Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоения. Определим **декартово произведение** $\pi \times \pi': E \times E' \rightarrow B \times B'$ этих расслоений, положив $(\pi \times \pi')(e, e') = (\pi(e), \pi'(e'))$. Отображение $\pi \times \pi'$ непрерывно и сюръективно, поэтому является расслоением.

Если у расслоений $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ одна и та же база, то для них можно определить **прямую сумму** или **сумму Уитни**: построим сначала декартово произведение $\pi \times \pi': E \times E' \rightarrow B \times B$ этих расслоений, затем рассмотрим **диагональное отображение** $\Delta: B \rightarrow B \times B$, заданное так: $\Delta(b) = (b, b)$, и, наконец, индуцируем с помощью Δ расслоение $\pi \oplus \pi': E \oplus E' \rightarrow B$. Таким образом, над каждым $b \in B$ слой $(E \oplus E')_b$ суммы Уитни равен $E_b \times E'_b$.

$$\begin{array}{ccccc}
 E \times E' & \Delta^*(E \times E') =: E \oplus E' & (E \oplus E')_b = E_b \times E'_b & & \\
 \downarrow \pi \times \pi' & \downarrow \pi \oplus \pi' & \downarrow \pi \oplus \pi' & & \\
 B \times B & \xleftarrow{\Delta} B & b & &
 \end{array}$$

Замечание 5.13. Если на каждом слое и на базе имеются дополнительные структуры, то, как правило, по умолчанию рассматриваются лишь те отображения, которые сохраняют эту структуру. Пока мы говорили лишь про топологические пространства и требовали непрерывность. Другие интересные структуры — структура топологического или гладкого многообразия, групповая структура, линейная структура, — возникнут у нас ниже и приведут к соответствующим ограничениям.

5.2 Локально тривиальные расслоения

Пусть F — топологическое пространство. Расслоение $\pi: E \rightarrow B$ называется *локально тривиальным со слоем* F , если у каждой точки $b \in B$ имеется такая открытая окрестность $U \subset B$ и изоморфизм $H: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ расслоения $\pi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ и тривиального расслоения $\pi_1: U \times F \rightarrow U$. Отметим, что, по определению морфизма для расслоений над одной базой, индуцированное отображение $h: U \rightarrow U$ — тождественное. Каждый такой изоморфизм H называется *тривиализацией*, а открытое множество U — *тривиализующим*.

$$\begin{array}{ccc}
 E & & \pi^{-1}(U) \xleftarrow{H} U \times F \\
 \pi \downarrow F & & \searrow \pi \quad \swarrow \pi_1 \\
 B & & U
 \end{array}$$

В случае, когда пространства в определении расслоения наделены дополнительными структурами, тривиализующий изоморфизм рассматривают не обязательно в $U \times F$, а, возможно, выбирают другое, гомеоморфное U топологическое пространство V , и тогда H — накрывающий φ изоморфизм между $\pi^{-1}(U)$ и тривиальным расслоением $V \times F$. Например, когда B — многообразие, множества U выбирают среди координатных окрестностей, и тогда V — образ координатного гомеоморфизма $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. Такие тривиализации будем в дальнейшем называть *модифицированными*.

Пример 5.14. Отметим, что расслоение π из примера 5.7 не является локально тривиальным. Действительно, если бы это было не так, то для некоторой окрестности $U \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$ точки с координатами $(1, 0)$ подпространство $\pi^{-1}(U) \subset [0, 2\pi) \times [0, 1]$ было бы гомеоморфно $U \times [0, 1]$. Это же будет верно и для окрестности U , являющейся связной и отличной от всей окружности S^1 . Но для такой окрестности $\pi^{-1}(U)$ несвязно, а $U \times [0, 1]$ — связно, так что они не могут быть гомеоморфны.

Замечание 5.15. Из примера 5.5, а также задач 5.11 и 5.8 вытекает, что каждое послойное отображение локально тривиальных расслоений является морфизмом, т.е. индуцированное им отображение баз непрерывно.

В разделе 5.1 мы определили расслоения, полученные ограничениями на подмножество базы, расслоения, индуцированные отображением в базу, декартово произведение расслоений, а также прямую сумму или сумму Уитни расслоений.

Задача 5.16. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F , и $A \subset B$ — непустое подпространство базы B . Докажите, что ограничение $\pi: \pi^{-1}(A) \rightarrow A$ расслоения π также является локально тривиальным со слоем F .

Задача 5.17. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F , а $h: B' \rightarrow B$ — непрерывное отображение из топологического пространства B' . Докажите, что индуцированное расслоение $\pi': h^*E \rightarrow B'$ также является локально тривиальным со слоем F .

Задача 5.18. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — локально тривиальные расслоения со слоем F и F' соответственно. Докажите, что декартово произведение этих расслоений также локально тривиально, а его слой равен $F \times F'$.

Задача 5.19. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B$ — локально тривиальные расслоения со слоем F и F' соответственно над одной и той же базой. Покажите, что прямая сумма этих расслоений также локально тривиальна, а ее слой равен $F \times F'$.

Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение, а U_α и U_β — пересекающиеся тривиализующие открытые множества, $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$. Тогда на $U_{\alpha\beta}$ возникает две тривиализации $H_\alpha: \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$ и $H_\beta: \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$, которые порождают отображения $H_{\alpha\beta} := H_\beta \circ H_\alpha^{-1}: U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$. Так как отображение $H_{\alpha\beta}$ является изоморфизмом тривиального расслоения $U_{\alpha\beta} \times F$ на себя (*автоморфизмом*), то его можно записать так: $H_{\alpha\beta}(b, f) = (b, \Phi_{\alpha\beta}(b)f)$, где $\Phi(b): F \rightarrow F$ — гомеоморфизм. Таким образом, мы определили отображения $\Phi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Номео}(F)$, которые, вместе с отображениями $H_{\alpha\beta}$, называются *отображениями*

склейки.

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_{\beta\alpha} \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & H_{\alpha\beta} & \\
 U_{\alpha\beta} \times F & \xleftrightarrow{H_\alpha} \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xleftrightarrow{H_\beta} U_{\alpha\beta} \times F \\
 \pi_1 \searrow & \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 \\
 & U_{\alpha\beta} & \\
 & \uparrow \pi & \\
 & F & \\
 & \downarrow \pi & \\
 & U_{\alpha\beta} &
 \end{array}$$

Пусть теперь для локально тривиального расслоения $\pi: E \rightarrow B$ задаются модифицированные тривиализации, т.е. для каждого U_α имеется гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$. Эти гомеоморфизмы определяют **отображения склейки** на базе B , а именно,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

и, соответственно, **отображения склейки** для тривиализаций:

$$H_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times F \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times F, \quad H_{\alpha\beta}(v_\alpha, f) = (\varphi_{\alpha\beta}(v_\alpha), \Phi_{\alpha\beta}(v_\alpha)f).$$

Таким образом, мы снова определили отображения $\Phi_{\alpha\beta}$, только теперь они действуют не из $U_{\alpha\beta}$, а из $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$:

$$\Phi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \text{Homeo}(F).$$

Отметим, что исходные определения тривиализации можно рассматривать как частный случай модифицированных, положив $V_\alpha = U_\alpha$, а $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ взяв равными тождественным отображениям.

Замечание 5.20. На расслоение с модифицированными тривиализациями можно смотреть как на обобщение многообразия: собственно говоря, эти расслоения возникнут у нас, в первую очередь, в ситуациях, когда и B и E будут топологическими или гладкими многообразиями, а F — арифметическим пространством \mathbb{R}^k . Итак, пусть E и B — топологические многообразия, $F = \mathbb{R}^k$, и $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha)\}$ — атлас на B . Модифицированные тривиализации задают на E атлас специального вида. Этот атлас состоит из пар $(\pi^{-1}(U_\alpha), H_\alpha)$, где гомеоморфизм H_α послойно отображает $\pi^{-1}(U_\alpha)$ на $V_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Если при этом на каждом слое E_b еще и задана структура векторного пространства, то обычно дополнительно требуется, чтобы гомеоморфизм H_α уважал эту структуру, т.е. был линейным на слоях.

Следующая конструкция похожа на конструкцию 2.2, задающую на множестве топологию многообразия. В частном случае, когда B — топологическое многообразие, $F = \mathbb{R}^k$, а $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha)\}$ — атлас на B , эта конструкция превращает множество $E = B \times F$ в топологическое многообразие, задавая атлас специальным образом, а именно, чтобы он уважал декартовы произведения $U_\alpha \times F$. Чтобы этого добиться, используют только послойные отображения склейки.

Сформулируем конструкцию для расслоения с модифицированными тривиализациями, а проделать соответствующие построения для исходного определения тривиализации мы предлагаем слушателям в качестве простого упражнения.

Конструкция 5.21. Пусть B и F — произвольные топологическое пространства, и $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие B , $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ — гомеоморфизмы. Рассмотрим множество $E = B \times F$ (в этом месте мы не наделяем E никакой топологией, в частности, топологией произведения), а также пространство $V_\alpha \times F$ — каждое с топологией произведения. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi_1: V_\alpha \times F \rightarrow V_\alpha$ — проекции. Предположим, что заданы некоторые биекции $H_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow V_\alpha \times F$, устанавливающие взаимно однозначные соответствия между множествами $\pi^{-1}(b)$ и $\pi_1^{-1}(\varphi_\alpha(b))$ при каждом $b \in U_\alpha$.

Для непустых $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ положим $V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \subset V_\alpha$ и $V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \subset V_\beta$. Так как $U_{\alpha\beta}$ открыто в B , то $V_{\alpha\beta}$ и $V_{\beta\alpha}$ также открыты, поэтому открыты и $V_{\alpha\beta} \times F \subset V_\alpha \times F$ и $V_{\beta\alpha} \times F \subset V_\beta \times F$. Потребуем дополнительно, чтобы отображения $H_{\alpha\beta} = H_\beta \circ H_\alpha^{-1}: V_{\alpha\beta} \times F \rightarrow V_{\beta\alpha} \times F$ были гомеоморфизмами.

Выберем произвольные открытые множества $W_\alpha \subset V_\alpha \times F$ и $W_\beta \subset V_\beta \times F$. Если их H_α^{-1} - и H_β^{-1} -прообразы пересекаются, то $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Предположим, что это так, тогда $W_{\alpha\beta} := W_\alpha \cap (V_{\alpha\beta} \times F)$ и $W_{\beta\alpha} := W_\beta \cap (V_{\beta\alpha} \times F)$ также открыты, и

$$\begin{aligned}
 H_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap H_\beta^{-1}(W_\beta) &= H_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \cap H_\beta^{-1}(W_{\beta\alpha}) = (H_\beta^{-1} \circ H_{\alpha\beta})(W_{\alpha\beta}) \cap H_\beta^{-1}(W_{\beta\alpha}) = \\
 &= H_\beta^{-1}(H_{\alpha\beta}(W_{\alpha\beta}) \cap W_{\beta\alpha}) = H_\alpha^{-1}(H_{\beta\alpha}(W_{\beta\alpha}) \cap W_{\alpha\beta}).
 \end{aligned}$$

Так как $H_{\alpha\beta}$ и $H_{\beta\alpha}$ предполагаются гомеоморфизмами, множества $H_{\alpha\beta}(W_{\alpha\beta}) \cap W_{\beta\alpha} \subset V_\beta \times F$ и $H_{\beta\alpha}(W_{\beta\alpha}) \cap W_{\alpha\beta} \subset V_\alpha \times F$ открыты, а $H_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap H_\beta^{-1}(W_\beta)$ — их прообразы. Таким образом, мы показали, что каждое непустое пересечение H_α - и H_β -прообразов открытых множеств из $V_\alpha \times F$ и $V_\beta \times F$ соответственно содержится в $\pi^{-1}(U_{\alpha\beta})$ и также является как H_α -, так и H_β -прообразом некоторых открытых множеств. Это означает, что множество \mathcal{B} , составленное из H_α -прообразов всех открытых множеств из $V_\alpha \times F$ по всем $\alpha \in I$, является базой некоторой топологии τ на E : конечные пересечения элементов из \mathcal{B} также содержатся в \mathcal{B} , см. рис. 5.3.

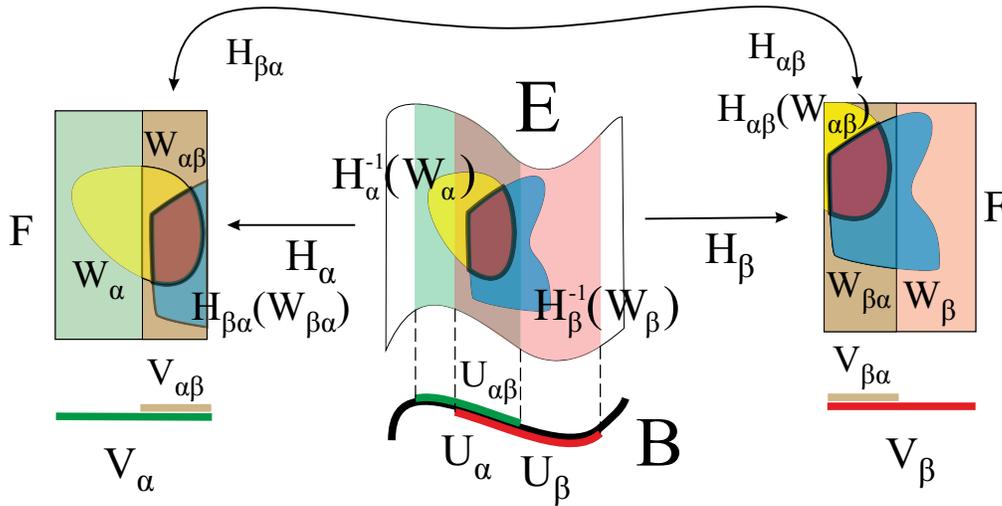


Рис. 5.3: Конструкция расслоения.

Легко проверяется (сделайте это), что

- проекция π непрерывна, так что $\pi: E \rightarrow B$ — расслоение;
- все отображения H_α — изоморфизмы, поэтому расслоение $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиально.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь локально тривиальные расслоения, которые, для краткости, будем называть просто расслоениями, опуская оборот “локально тривиальные”.

5.2.1 Дополнительные структуры на расслоениях

В соответствии с замечанием 5.13, наличие дополнительных структур на каждом слое E_b как правило приводит к ограничению на вид тривиализаций: предполагается по умолчанию, что ограничение отображений H_α на слои E_b , $b \in U_\alpha$, сохраняют структуру слоя. В частности, группы $\text{Homeo}(F)$ в определении отображений склейки в этих случаях сужаются до подгрупп $G \subset \text{Homeo}(F)$, уважающих дополнительные структуры. Например,

- если слой является линейным пространством, то ограничения отображений H_α — линейные изоморфизмы и, как следствие, подгруппа G также состоит из линейных изоморфизмов, т.е. изоморфна $GL(k, \mathbb{R})$, где k — размерность слоя; такие расслоения называются **векторными расслоениями ранга k** ;
- если слои E_b — гладкие многообразия, то ограничения отображений H_α — диффеоморфизмы, так что $G = \text{Diff}(F)$ — группа диффеоморфизмов слоя;
- если слои E_b — группа Ли, то ограничения отображений H_α — изоморфизмы групп Ли, а $G = \text{Aut}(F)$ — группа автоморфизмов F (диффеоморфизмов, сохраняющих групповую операцию).

Также наличие дополнительных структур на тотальном пространстве E и базе B обычно приводит к ограничениям. Скажем, если E и B — гладкие многообразия, то π — гладкое отображение, слой — гладкое многообразие, тривиализации — диффеоморфизмы, каждое сечение — гладкое отображение, морфизмы — гладкие отображения гладких многообразий. Такие расслоения будем называть **гладкими**.

Что касается векторных расслоений, не всегда удастся ограничиться условием линейности: у нас будут возникать конструкции, в которых морфизмы векторных расслоений не являются линейными на каждом слое (в определении операций на тензорных расслоениях). Последнее будет, например, при рассмотрении суммы Уитни $E \oplus E'$ векторных расслоений над базой B и отображения из $E \oplus E'$ в еще одно векторное расслоение над той же базой. В этом случае мы иногда будем заменять линейность на послойную билинейность и говорить про *билинейные морфизмы*, в отличие от *линейных морфизмов*.

В дальнейшем нас особенно будут интересовать гладкие векторные расслоения, многократно возникающие в дифференциальной геометрии.

Уточним конструкцию 5.21, добавив в ее построение описанные только что ограничения.

Задача 5.22. Докажите следующие утверждения.

- (1) Если в конструкции 5.21 база и слой — топологические многообразия, то эта конструкция приводит к расслоению, тотальное пространство которого также является топологическим многообразием.
- (2) Если в конструкции 5.21 база и слой — гладкие многообразия, а отображения $H_{\alpha\beta}$ — диффеоморфизмы, то эта конструкция приводит к гладкому расслоению.
- (3) Если в предыдущем пункте слой наделен структурой конечномерного векторного пространства, а ограничения отображений H_α на каждый слой E_b , $b \in U_{\alpha\beta}$, уважают эту структуру, т.е. являются линейными изоморфизмами, то конструкция 5.21 приводит к гладкому векторному расслоению.

Имеется еще много других общих результатов в теории расслоений. Однако мы не станем собирать все эти результаты в текущем разделе, а будем приводить их при необходимости для лучшего понимания конструкций, связанных с тензорными полями на гладких многообразиях (см. ниже).

Литература

- [1] Husemoller D. *Fibre bundles*, McGraw-Hill, 1966.
- [2] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012.
- [3] Goldblatt R. *Topoi, the Categorical Analysis of Logic*, Elsevier, 1984.

Упражнения к главе 5

Упражнение 5.1. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — расслоение и $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие базы. Предположим, что для каждого α задано локальное сечение $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, причем на каждом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ отображения s_α и s_β совпадают. Покажите, что тогда существует и единственно глобальное сечение $s: B \rightarrow E$ такое, что $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ при всех α .

Упражнение 5.2. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоения, а $H: E \rightarrow E'$ — послойное отображение. Предположим, что база B может быть покрыта открытыми множествами U_α , над каждым из которых существует локальное сечение. Покажите, что тогда индуцированное отображение $h: B \rightarrow B'$ непрерывно.

Упражнение 5.3. Докажите следующие утверждения.

(1) Если $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — расслоения, а $H: E \rightarrow E'$ — изоморфизм, и $h: B \rightarrow B'$ — индуцированное отображение (являющееся гомеоморфизмом), то для каждого сечения $s: B \rightarrow E$ отображение $s' := H \circ s \circ h^{-1}: B' \rightarrow E'$ также является сечением, которое называется **образом сечения** s . В частности, изоморфные расслоения одновременно или имеют, или не имеют глобальные сечения.

(2) Расслоение $\pi: [0, 2\pi) \times [0, 1] \rightarrow S^1$ из примера 5.7 не имеет глобального сечения.

Упражнение 5.4. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F , и $A \subset B$ — непустое подпространство базы B . Докажите, что ограничение $\pi: \pi^{-1}(A) \rightarrow A$ расслоения π также является локально тривиальным со слоем F .

Упражнение 5.5. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F , а $h: B' \rightarrow B$ — непрерывное отображение из топологического пространства B' . Докажите, что индуцированное расслоение $\pi': h^*E \rightarrow B'$ также является локально тривиальным со слоем F .

Упражнение 5.6. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B'$ — локально тривиальные расслоения со слоем F и F' соответственно. Докажите, что декартово произведение этих расслоений также локально тривиально, а его слой равен $F \times F'$.

Упражнение 5.7. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ и $\pi': E' \rightarrow B$ — локально тривиальные расслоения со слоем F и F' соответственно над одной и той же базой. Покажите, что прямая сумма этих расслоений также локально тривиальна, а ее слой равен $F \times F'$.

Упражнение 5.8. Докажите следующие утверждения.

(1) Если в конструкции 5.21 из лекции 5 база и слой — топологические многообразия, то эта конструкция приводит к расслоению, тотальное пространство которого также является топологическим многообразием.

(2) Если в конструкции 5.21 из лекции 5 база и слой — гладкие многообразия, а отображения $H_{\alpha\beta}$ — диффеоморфизмы, то эта конструкция приводит к гладкому расслоению.

(3) Если в предыдущем пункте слой наделен структурой конечномерного векторного пространства, а ограничения отображений H_α на каждый слой E_b , $b \in U_{\alpha\beta}$, уважают эту структуру, т.е. являются линейными изоморфизмами, то конструкция 5.21 из лекции 5 приводит к гладкому векторному расслоению.

Лекция 6

Тензорные расслоения на гладких многообразиях, гладкие сечения

План. Тензорные расслоения на гладких многообразиях, касательное и кокасательные расслоения, подрасслоения тензорных расслоений, расслоения ковариантных и контравариантных тензоров, расслоение кососимметричных тензоров, расслоение симметричных тензоров, расслоение невырожденных и положительно определенных симметричных тензоров, тензорные поля как гладкие сечения тензорных расслоений, нулевое сечение произвольного и локально тривиального векторного расслоения, линейные пространства сечений, гладкие функции как сечения тривиального линейного расслоения, векторные поля, дифференциальные формы, дифференциал гладкой функции как 1-форма, псевдориманова и риманова метрика, псевдоримановы и римановы многообразия, перенесение назад ковариантных тензорных полей, риманова метрика, индуцированная погружением, существование римановой метрики на каждом гладком многообразии.

Применим конструкцию расслоений к изучению тензорного исчисления на гладких многообразиях.

6.1 Тензорные расслоения на гладких многообразиях

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, p, q — неотрицательные целые числа, $P \in M$, и $T_P^{(p,q)}M$ обозначает линейное пространство всех тензоров типа (p, q) , определенных на касательном пространстве $T_P M$. Выбор базиса в $T_P M$ задает изоморфизм $T_P M$ и арифметического пространства \mathbb{R}^n , который порождает изоморфизм между $T_P^{(p,q)}M$ и арифметическим пространством $\mathbb{R}^{n^{p+q}}$: каждому $T \in T_P^{(p,q)}M$ ставится вектор из (некоторым образом упорядоченных) координат $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ тензора T по отношению к базису e_1, \dots, e_n . Напомним, что если e^1, \dots, e^n — двойственный базис кокасательного пространства, то

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

Положим $T^{(p,q)}M = \sqcup_{P \in M} T_P^{(p,q)}M$. Обозначим $\pi: T^{(p,q)}M \rightarrow M$ отображение, для которого $\pi(T_P^{(p,q)}M) = P$, и будем называть его **канонической проекцией**. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M , заданные картой $(U, \varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n)$ из гладкой структуры \mathcal{S} многообразия M . Тогда для каждой точки $P \in U$ каждый тензор $T \in T_P^{(p,q)}M$ записывается в каноническом базисе $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ касательного пространства $T_P M$ и двойственном базисе dx^1, \dots, dx^n кокасательного пространства в виде

$$(6.1) \quad T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Напомним, что тензоры $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$ образуют базис векторного пространства $T_P^{(p,q)}M$. Таким образом, каждая карта $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ порождает на множестве $\pi^{-1}(U) \subset T^{(p,q)}M$ биекцию $H_\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$,

$$H_\varphi: T \mapsto \left(x, \dots, T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \dots \right).$$

Пусть $(U', \varphi': U' \rightarrow V') \in \mathcal{S}$ — другая карта на M , порождающая по правилу (6.1) биекцию $H_{\varphi'}: \pi^{-1}(U') \rightarrow V' \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$. Предположим, что $W := U \cap U' \neq \emptyset$, тогда $H_\varphi(\pi^{-1}(W))$ и $H_{\varphi'}(\pi^{-1}(W))$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$. Если $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$ — локальные координаты, заданные картой (U', φ') , то отображение $H_{\varphi\varphi'}: \varphi(W) \times \mathbb{R}^{n^{p+q}} \rightarrow \varphi'(W) \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$ задается так: на W функции перехода — замена координат на M , т.е. $x^{i'} = x^{i'}(x)$, а на $\mathbb{R}^{n^{p+q}}$ — **тензорный закон**

$$(6.2) \quad T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x, T) = x_{x^{i_1}}^{i'_1}(x) \cdots x_{x^{i_p}}^{i'_p}(x) x_{x^{j_1}}^{j'_1}(x'(x)) \cdots x_{x^{j_q}}^{j'_q}(x'(x)) T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Так как при фиксировании точки многообразия M тензорный закон (6.2) становится линейным изоморфизмом (объясните почему), то, в силу задачи 5.22, конструкция 5.21 приводит к гладкому векторному расслоению $\pi: T^{(p,q)}M \rightarrow M$. Это расслоение будем называть **расслоением тензоров на гладком многообразии M** . Построенную гладкую структуру многообразия $T^{(p,q)}M$ обозначим $\mathcal{S}^{(p,q)}$.

Замечание 6.1. Тензорный закон удобно записывать в мультииндексах $I = (i_1, \dots, i_p)$, $I' = (i'_1, \dots, i'_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$, $J' = (j'_1, \dots, j'_q)$, введя естественные обозначения:

$$T_J^I = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad T_{J'}^{I'} = T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}, \quad x_I^{I'} = x_{x^{i_1}}^{i'_1} \cdots x_{x^{i_p}}^{i'_p}, \quad x_{J'}^J = x_{x^{j_1}}^{j_1} \cdots x_{x^{j_q}}^{j_q},$$

тогда тензорный закон имеет вид $T_{J'}^{I'} = x_I^{I'}(x)x_{J'}^J(x)T_J^I$. Отметим, что часто зависимость от x и x' явно не указывают, тогда тензорный закон пишется компактной: $T_{J'}^{I'} = x_I^{I'}x_{J'}^J T_J^I$ (сравните с законом изменения компонент линейного оператора).

Замечание 6.2. Гладкая структура $\mathcal{S}^{(p,q)}$ порождается любым гладким атласом $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ на M , при этом семейство карт $(\pi^{-1}(U), H_\varphi)$ по всем $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ образует гладкий атлас из $\mathcal{S}^{(p,q)}$, который мы обозначим $\mathcal{A}^{(p,q)}$.

Пример 6.3. Приведем ряд примеров расслоений тензоров.

- ▼ Тензоры типа $(0, 0)$ — скаляры, т.е. числа, поэтому гладкое многообразие $T^{(0,0)}M$ изоморфно тривиальному расслоению $M \times \mathbb{R}$ (проверьте).
- ▼ Тензоры типа $(1, 0)$ являются векторами, поэтому $T_P^{(1,0)}M$ — это касательное пространство $T_P M$, а гладкое многообразие $T^{(1,0)}M$ называется **касательным расслоением** и обозначается TM .
- ▼ Тензоры типа $(0, 1)$ являются ковекторами, т.е. элементами пространства, двойственного к $T_P M$, поэтому $T_P^{(0,1)}M$ — это кокасательное пространство $T_P^* M$, а гладкое многообразие $T^{(0,1)}M$ называется **кокасательным расслоением** и обозначается T^*M .

Задача 6.4. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий.

- (1) Покажите, что $dF: TM \rightarrow TN$ — морфизм гладких векторных расслоений, накрывающий F :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

- (2) Пусть $\pi: E \rightarrow N$ — гладкое векторное расслоение, например, $E = TN$. Покажите, что F^*E — гладкое векторное расслоение над M и постройте гладкий атлас из тривиализаций:

$$\begin{array}{ccc} E & & F^*E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ N & & M \end{array}$$

- (3) Отображение dF , которое также обозначают F_* , индуцирует послонное отображение $dF: TM \rightarrow F^*TN$: для $v \in T_P M$, $w = dF|_P(v) \in T_{F(P)}N$, мы рассматриваем w как вектор из $(F^*TN)_P = T_{F(P)}N$. Покажите, что это отображение является морфизмом гладких векторных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{F_* = dF} & F^*TN \\ \pi_M \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

- (4) Отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$ индуцирует отображение двойственных пространств $dF|_P^*: T_{F(P)}^* N \rightarrow T_P^* M$, которое называется **транспонированным**: для каждого $\xi \in T_{F(P)}^* N$ полагаем $dF|_P^*(\xi) = \xi \circ dF|_P$. Тем самым, определено послойное отображение $dF^*: F^*(T^* N) \rightarrow T^* M$. Отображение dF^* также обозначают F^* . Покажите, что $F^* = dF^*$ — морфизм гладких векторных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} F^*(T^* N) & \xrightarrow{F^* = dF^*} & T^* M \\ & \searrow \pi_M & \swarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

6.2 Подрасслоения тензорных расслоений

Опишем ряд важных подрасслоений расслоения тензоров $T^{(p,q)} M$. Доказательство того, что приводимые ниже подмножества являются подрасслоениями, можно легко вывести из следующего общего результата.

Задача 6.5. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — гладкое векторное расслоение, и предположим, что для каждой точки $b \in B$ задано m -мерное векторное подпространство $D_b \subset E_b$. Покажите, что $D = \sqcup_{b \in B} D_b$ — гладкое подрасслоение в E , если и только если выполняется следующее условие: для каждой точки $b_0 \in B$ существует окрестность $U \subset B$ и гладкие локальные сечения $\sigma_1, \dots, \sigma_m: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ такие, что $\sigma_1(b), \dots, \sigma_m(b)$ — базис D_b при всех $b \in U$.

Расслоение ковариантных и контравариантных тензоров

Эти подрасслоения формируют тензоры типа (p, q) , у которых или $p = 0$, и тогда тензоры называются **ковариантными**, или $q = 0$ — **контравариантные тензоры**. Иными словами, ковариантные тензоры представляют собой полилинейные отображения на декартовых произведениях касательных пространств, а контравариантные — на произведениях кокасательных пространствах. Мы не будем вводить специальных обозначений для пространств этих тензоров, в частности, гладкие подрасслоения в $T^{(p,q)} M$, составленные соответственно из ковариантных и контравариантных тензоров, будем обозначать $T^{(0,q)} M$ и $T^{(p,0)} M$. Для таких тензоров числа p и q часто называются их **степенями**. Обоснование того, что $T^{(0,q)} M$ и $T^{(p,0)} M$ — гладкие подрасслоения в $T^{(p,q)} M$, можно непосредственно получить с помощью конструкции 5.21 и задачи 5.22.

Расслоение кососимметричных тензоров

Обозначим $L_P^q M \subset T_P^{(0,q)} M$ семейство всех кососимметричных ковариантных тензоров типа $(0, q)$. Снова конструкция 5.21 и задача 5.22 приводят к гладкому векторному расслоению $L^q M$, которое, как несложно проверить, является подрасслоением в $T^{(0,q)} M$. Расслоение $L^q M$ называется **расслоением кососимметрических тензоров**, а число q , как и выше, — **степенью** этих тензоров. Также иногда такие тензоры называют **q -формами**.

Пример 6.6. Тензоры типа $(0, 0)$, т.е. скаляры, являются 0-формами, а тензоры типа $(0, 1)$, т.е. ковекторы, представляют собой 1-формы. Если n — размерность многообразия M , а $q > n$, то имеется единственная q -форма — нулевая.

Замечание 6.7. Аналогичные конструкции имеют место и в случае контравариантных тензоров.

Расслоение симметричных тензоров

Аналогично определяется гладкое векторное **подрасслоение** $S^q M \subset T^{(0,q)} M$ **симметричных тензоров** типа $(0, q)$. Число q также называется **степенью** этих тензоров.

Пример 6.8. Тензоры типа $(0, 0)$ и $(0, 1)$ также относятся и к симметричным тензорам. Симметричные тензоры типа $(0, 2)$ являются симметричными билинейными формами, так что пространство $S_P^2 M$ состоит из таких форм.

Замечание 6.9. Аналогичные конструкции имеют место и в случае контравариантных тензоров.

Расслоения невырожденных и положительно определенных симметричных тензоров

Так как и невырожденность, и положительная определенность являются тензорными свойствами, то в $S^2_P M$ определены подмножества $\text{PRiem}_P M$ и $\text{Riem}_P M$: первое состоит из невырожденных, а второе — из положительно определенных форм.¹ Оба эти подмножества выделяются условиями типа строгих неравенств на конечное число гладких функций (для невырожденности — неравенство нулю определителя, а для положительной определенности — критерий Сильвестра: положительность всех главных миноров), поэтому они представляют собой открытые подмножества в $S^2_P M$ и, значит, гладкие подмногообразия в векторном пространстве $T_P^{(0,2)} M$. Элементы из $\text{PRiem}_P M$ задают в $T_P M$ псевдоскалярные произведения, а элементы из $\text{Riem}_P M$ — скалярные произведения.

Вводя на многообразии M локальные координаты, убеждаемся, что $\text{PRiem} M = \sqcup_{P \in M} \text{PRiem}_P M$ и $\text{Riem} M = \sqcup_{P \in M} \text{Riem}_P M$ являются гладкими (не векторными) подрасслоениями в $S^2 M$.

Те же самые рассуждения можно провести и для тензоров типа $(2, 0)$. Соответствующие подмножества $T_P^{(2,0)} M$ будем обозначать $\text{PRiem}'_P M$ и $\text{Riem}'_P M$, а соответствующие гладкие (не векторные) подрасслоения в $T^{(2,0)} M$ — через $\text{PRiem}' M$ и $\text{Riem}' M$.

6.3 Сечения

Каждое (гладкое) сечение $T: M \rightarrow T^{(p,q)} M$ называется **тензорным полем типа (p, q) на гладком многообразии M** . Иными словами, тензорное поле T — это сопоставление каждой точке $P \in M$ некоторого тензора из $T_P^{(p,q)} M$, причем это соответствие гладко зависит от точки, т.е. его координатная запись

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \dots, T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n), \dots)$$

задается гладкими функциями, что эквивалентно гладкости функций $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)$. Эти последние функции $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)$ называются **координатами тензорного поля T** в локальных координатах (x^1, \dots, x^n) , заданных на многообразии M .

Замечание 6.10. Как мы уже отмечали в замечании 6.2, для задания гладкой структуры на многообразии $T^{(p,q)} M$ достаточно построить гладкий атлас $\mathcal{A}^{(p,q)}$ по любому гладкому атласу \mathcal{A} на M . Также мы говорили в замечании 3.19, что гладкость отображения гладких многообразий достаточно проверять на любых гладких атласах. Еще одно важное наблюдение было сформулировано в виде задачи 4.1 лекции 2, когда мы обсуждали координатное определение касательного вектора, тензорное по своему духу. В применении к тензорам на векторном пространстве, это задача может быть описана так: в некотором базисе мы задаем любой набор чисел $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, и дальше, пользуясь тензорным законом, “разносим” этот набор во все остальные базисы. Тогда **автоматически** мы получаем наборы чисел, задающие тензор. При этом, если наборы чисел были изначально заданы не только в одном базисе, но и в ряде других, и заранее заданные наборы были связаны по тензорному закону, то “разнесение” во все базисы не испортит эти заранее заданные наборы.

Приведенные только что соображения позволяют дать эквивалентное определение тензорного поля, а именно, **тензорным полем на гладком многообразии M** называется сопоставление каждой карте из произвольного гладкого атласа \mathcal{A} набора гладких функций $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)$ от координат (x^1, \dots, x^n) , заданных этой картой, причем на пересечении карт эти функции связаны друг с другом по тензорному закону (6.2).

Пример 6.11. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — произвольное (локально тривиальное) векторное расслоение, а $s: B \rightarrow E$ — отображение, для которого при каждом $b \in B$ точка $s(b) \in E_b$ является нулем векторного пространства E_b . Тогда s непрерывно и называется **нулевым сечением** расслоения E .² Также **нулевым сечением** иногда называют образ отображения s . Так как $\pi|_{s(B)}$ — непрерывное отображение, то s задает гомеоморфизм между B и нулевым сечением $s(B)$. Если B и E — гладкие многообразия, то B и нулевое сечение $s(B)$ диффеоморфны. Нулевые сечения тензорных расслоений играют важную роль в дифференциальной геометрии.

Пусть $\pi: E \rightarrow M$ — гладкое векторное расслоение, и $\Gamma(E)$ — семейство всех (гладких) сечений этого расслоения. Из примера 6.11 вытекает, что $\Gamma(E)$ не пусто. Отметим, что так как на слоях расслоения E задана

¹Обозначения PRiem и Riem происходят от терминов “псевдориманов” и “риманов”, см. ниже.

²Без требования локальной тривиальности, отображение s не обязано быть непрерывным, как показывает модификация расслоения π из примера 5.7, если заменить отрезок $[0, 1]$ на прямую \mathbb{R} .

структура векторного пространства, то на сечения распространяется операция (поточечной) линейной комбинации, превращающей $\Gamma(E)$ в (вообще говоря, бесконечномерное) векторное пространство, в котором нулем является нулевое сечение. Более того, на сечениях определено умножение на гладкие функции $f \in \mathcal{F}(M)$, поэтому для сечений определены и функциональные линейные комбинации. Таким образом, $\Gamma(E)$ — модуль над кольцом $\mathcal{F}(M)$.

Пример 6.12. Сечения тривиального расслоения $T^{(0,0)}M = M \times \mathbb{R}$ являются *гладкими функциями на M* . Семейство $\Gamma(M \times \mathbb{R})$ всех таких сечений традиционно обозначается $\mathcal{F}(M)$. Как было отмечено выше, на $\mathcal{F}(M)$ определены функциональные линейные комбинации, так что $\mathcal{F}(M)$ является модулем над кольцом $\mathcal{F}(M)$, или просто кольцом, или алгеброй.

Пример 6.13. Сечения касательного расслоения $T^{(1,0)}M = TM$ называются *векторными полями на M* . Как и в случае поверхностей, векторное пространство $\Gamma(TM)$ всех векторных полей на M , являющееся также модулем над кольцом $\mathcal{F}(M)$ гладких функций, традиционно обозначается $\mathfrak{X}(M)$. Сечения кокасательного расслоения $T^{(0,1)}M = T^*M$ называются *ковекторными полями*.

Пример 6.14. Более общо, сечения расслоения $T^{(p,0)}M$ называются *контравариантными тензорными полями степени p* . Таким образом, векторные поля — это контравариантные поля степени 1. Аналогично, сечения расслоения $T^{(0,q)}M$ называются *ковариантными тензорными полями степени q* .

Пример 6.15. Сечения расслоения L^qM косимметричных тензоров степени q называются *дифференциальными q -формами* или просто *q -формами*. Как было отмечено выше, семейство $\Gamma(L^qM)$ таких сечений образует векторное пространство, являющееся модулем над $\mathcal{F}(M)$. Важные частные случаи q -форм:

- 0-формы — гладкие функции, так что $\Gamma(L^0M) = \mathcal{F}(M)$, и
- 1-формы — ковекторные поля, поэтому $\Gamma(L^1M) = \Gamma(T^*M)$.

Частным случаем ковекторного поля является дифференциал df гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Таким образом, $d: \mathcal{F}(M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$ или $d: \Gamma(L^0M) \rightarrow \Gamma(L^1M)$. Ниже мы обобщим операцию дифференцирования на любые q -формы.

Задача 6.16. Пусть $T: M \rightarrow T^{(p,q)}M$ — отображение, сопоставляющее каждой точке P гладкого многообразия M некоторый тензор из $T^{(p,q)}M$, причем T не обязано быть даже непрерывным. Покажите, что T — гладкое тензорное поле, если и только если для любых 1-форм $\omega^1, \dots, \omega^p \in L^1M$ и любых векторных полей $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ функции $T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q): M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие.

Пример 6.17. Каждое сечение расслоения $\text{PRiem } M$ симметричных невырожденных билинейных форм называется *псевдоримановой метрикой*, а гладкое многообразие, для которого задана некоторая псевдориманова метрика — *псевдоримановым многообразием*. Если же вместо расслоения $\text{PRiem } M$ рассмотреть расслоение $\text{Riem } M$ симметричных положительно определенных билинейных форм, то получим определения *римановой метрики* и *риманова многообразия*. Примером римановой метрики может являться первая фундаментальная форма поверхности. На римановых метриках корректно определены функциональные линейные комбинации со всюду положительными функциями. Псевдоримановы метрики возникают в теории относительности Эйнштейна, используются при построении модели геометрии Лобачевского и т.д.

Задача 6.18. Пусть W — риманово многообразие размерности n , а $M \subset W$ — гладкое подмногообразие размерности m . Для каждой точки $P \in M$ обозначим $N_P M$ ортогональное дополнение в $T_P W$ к касательному пространству $T_P M$. Такое $N_P M$ называется *нормальным пространством в точке P к подмногообразию M* . Положим $NM = \sqcup_{P \in M} N_P M$.

- (1) Покажите, что на NM существует единственная гладкая структура, превращающая NM в гладкое подмногообразие TW .
- (2) Покажите, что $\pi: NM \rightarrow M$, $\pi(N_P M) = P$, — гладкое векторное подрасслоение в $TW \rightarrow W$.
- (3) Для отображения включения $i: M \rightarrow W$ рассмотрим индуцированное расслоение $i^*TW \rightarrow M$. Покажите, что i^*TW изоморфно $TM \oplus NM$.

6.4 Перенесение назад ковариантных тензорных полей

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $P \in M$, $F(P) = Q$ и $\xi \in T_Q^*N$. Как мы уже обсуждали в задаче 6.4, линейное отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_Q N$ в композиции $\xi \circ dF|_P$ с ковектором ξ является ковектором, т.е. $\xi \circ dF|_P \in T_P^*M$. Этот ковектор будем обозначать $F^*\xi$. Таким образом, мы определили отображение $F^*: T_Q^*N \rightarrow T_P^*M$, являющееся, как легко видеть, линейным (проверьте). Запишем, как выглядит F^* в координатах. Пусть x^1, \dots, x^m — локальные координаты в окрестности точки P , а y^1, \dots, y^n — локальные координаты в окрестности точки Q , и пусть $\xi = \xi_i dy^i$. Тогда

$$(F^*\xi)_k = (F^*\xi)(\partial_{x^k}) = (\xi \circ dF|_P)(\partial_{x^k}) = (\xi_i dy^i)(y_{x^k}^j \partial_{y^j}) = \xi_i y_{x^k}^i.$$

В матричном виде, если положить $\eta = F^*\xi$, то получим

$$(\eta_1, \dots, \eta_m) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} y_{x^1}^1 & \cdots & y_{x^1}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{x^m}^1 & \cdots & y_{x^m}^n \end{pmatrix}.$$

Определим теперь F^* для ковариантного тензора $T \in T_Q^{(0,q)}N$, положив

$$(6.3) \quad (F^*T)(v_1, \dots, v_q) = T(dF|_P(v_1), \dots, dF|_P(v_q))$$

для любых $v_1, \dots, v_q \in T_P M$. Ясно, что определенное отображение $F^*T: T_P M \times \cdots \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ полилинейно, т.е. $F^*T \in T_P^{(0,q)}M$. Запишем, как и выше, это отображение в координатах. Пусть $T_{j_1 \dots j_q} = T(\partial_{y^{j_1}}, \dots, \partial_{y^{j_q}})$ — координаты T , тогда

$$(6.4) \quad \begin{aligned} (F^*T)_{j_1 \dots j_q} &= (F^*T)(\partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) = T(dF|_P(\partial_{x^{j_1}}), \dots, dF|_P(\partial_{x^{j_q}})) = \\ &= (T_{i_1, \dots, i_q} dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes dy^{i_q})(y_{x^{j_1}}^{k_1} \partial_{y^{k_1}}, \dots, y_{x^{j_q}}^{k_q} \partial_{y^{k_q}}) = \\ &= T_{i_1, \dots, i_q} dy^{i_1}(y_{x^{j_1}}^{k_1} \partial_{y^{k_1}}) \cdots dy^{i_q}(y_{x^{j_q}}^{k_q} \partial_{y^{k_q}}) = T_{i_1, \dots, i_q} y_{x^{j_1}}^{i_1} \cdots y_{x^{j_q}}^{i_q} \end{aligned}$$

(сравните с тензорным законом).

Задача 6.19. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Покажите, что отображение $F^*: T_{F(P)}^{(0,q)}N \rightarrow T_P^{(0,q)}M$ индуцирует морфизм $F^*: F^*(T^{(0,q)}N) \rightarrow T^{(0,q)}M$ гладких векторных расслоений над многообразием M :

$$\begin{array}{ccc} F^*(T^{(0,q)}N) & \xrightarrow{F^*} & T^{(0,q)}M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Так как отображение F не является, вообще говоря, биективным, то определить морфизм расслоений $T^{(0,q)}N \rightarrow T^{(0,q)}M$ не удастся. Тем не менее, на сечениях этих расслоений имеется корректно определенное отображение: для тензорного поля $T \in \Gamma(T^{(0,q)}N)$ определено тензорное поле $F^*T \in \Gamma(T^{(0,q)}M)$ по формуле (6.3) (формулы (6.4) доказывают, что F^*T — гладкое сечение). Отображение $F^*: \Gamma(T^{(0,q)}N) \rightarrow \Gamma(T^{(0,q)}M)$ называют **перенесением назад** (pullback). Из формулы (6.4) видно, что F^* уважает функциональные линейные комбинации, в частности, является линейным отображением линейного пространства сечений.

Пример 6.20. Если $T \in \Gamma(T^{(0,0)}N) = \mathcal{F}(N)$, то $F^*T = T \circ F$.

Пример 6.21. Легко видеть, что F^* уважает симметричность и косую симметричность, поэтому корректно определены ограничения

$$F^*: \Gamma(S^q N) \rightarrow \Gamma(S^q M) \quad \text{и} \quad F^*: \Gamma(\Lambda^q N) \rightarrow \Gamma(\Lambda^q M).$$

Задача 6.22. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, а $g \in \text{Riem } N$ — риманова метрика. Покажите, что F^*g — риманова метрика, если и только если F — погружение.

Риманова метрика F^*g , порожденная погружением F гладкого многообразия M в риманово многообразие (N, g) называется **индуцированной на M погружением F** . Таким образом, погружение F порождает отображение $F^*: \Gamma(\text{Riem } N) \rightarrow \Gamma(\text{Riem } M)$, уважающее функциональные линейные комбинации с положительными функциями.

Из задачи 6.22 и теоремы 4.23 вытекает следующий результат.

Следствие 6.23. На каждом гладком многообразии существует риманова метрика.

Упражнения к главе 6

Упражнение 6.1. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий.

- (1) Покажите, что $dF: TM \rightarrow TN$ — морфизм гладких векторных расслоений, накрывающий F .
- (2) Пусть $\pi: E \rightarrow N$ — гладкое векторное расслоение, например, $E = TN$. Покажите, что F^*E — гладкое векторное расслоение над M и постройте гладкий атлас из тривиализаций.
- (3) Отображение dF индуцирует послойное отображение $dF: TM \rightarrow F^*TN$: для $v \in T_P M$, $w = dF|_P(v) \in T_{F(P)}N$, мы рассматриваем w как вектор из пространства $(F^*TN)_P$, которое естественно отождествляется с $T_{F(P)}N$. Покажите, что это отображение является морфизмом гладких векторных расслоений.
- (4) Отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)}N$ индуцирует отображение двойственных пространств $dF|_P^*: T_{F(P)}^*N \rightarrow T_P^*M$, которое называется **транспонированным**: для каждого $\xi \in T_{F(P)}^*N$ полагаем $dF|_P^*(\xi) = \xi \circ dF|_P$. Тем самым, определено послойное отображение $dF^*: F^*(T^*N) \rightarrow T^*M$. Покажите, что dF^* — морфизм гладких векторных расслоений.

Упражнение 6.2. Пусть $\pi: E \rightarrow B$ — гладкое векторное расслоение, и предположим, что для каждой точки $b \in B$ задано m -мерное векторное подпространство $D_b \subset E_b$. Покажите, что $D = \sqcup_{b \in B} D_b$ — гладкое векторное подрасслоение в E , т.е. D — подрасслоение в E , являющееся гладким подмногообразием E и гладким векторным расслоением, если и только если выполняется следующее условие: для каждой точки $b_0 \in B$ существует окрестность $U \subset B$ и гладкие локальные сечения $\sigma_1, \dots, \sigma_m: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ такие, что $\sigma_1(b), \dots, \sigma_m(b)$ — базис D_b при всех $b \in U$.

Упражнение 6.3. Пусть $T: M \rightarrow T^{(p,q)}M$ — отображение, сопоставляющее каждой точке P гладкого многообразия M некоторый тензор из $T_P^{(p,q)}M$, причем T не обязано быть даже непрерывным. Покажите, что T — гладкое тензорное поле, если и только если для любых 1-форм $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Lambda^1 M$ и любых векторных полей $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ функции $T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q): M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие.

Упражнение 6.4. Пусть W — риманово многообразие размерности n , а $M \subset W$ — гладкое подмногообразие размерности m . Для каждой точки $P \in M$ обозначим $N_P M$ ортогональное дополнение в $T_P W$ к касательному пространству $T_P M$. Такое $N_P M$ называется **нормальным пространством в точке P к подмногообразию M** . Положим $NM = \sqcup_{P \in M} N_P M$.

- (1) Покажите, что на NM существует единственная гладкая структура, превращающая NM в гладкое подмногообразие TW .
- (2) Покажите, что $\pi: NM \rightarrow M$, $\pi(N_P M) = P$, — гладкое векторное подрасслоение в $TW \rightarrow W$.
- (3) Для отображения включения $i: M \rightarrow W$ рассмотрим индуцированное расслоение $i^*TW \rightarrow M$. Покажите, что i^*TW изоморфно $TM \oplus NM$.

Упражнение 6.5. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Покажите, что отображение $F^*: T_{F(P)}^{(0,q)}N \rightarrow T_P^{(0,q)}M$ индуцирует морфизм $F^*: F^*(T^{(0,q)}N) \rightarrow T^{(0,q)}M$ гладких векторных расслоений над многообразием M .

Упражнение 6.6. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, а $g \in \text{Riem } N$ — риманова метрика. Покажите, что F^*g — риманова метрика, если и только если F — погружение.

Лекция 7

Тензорные операции

План. Тензорные операции на тензорных расслоениях и тензорных полях, унарные операции, умножения на числа, перестановка индексов, свертка, симметрирование, альтернирование, диаграммы унарных операций, бинарные операции, сложение тензоров, тензорное произведение, симметричное тензорное произведение, внешнее произведение, подстановка ковектора, подстановка вектора, диаграммы бинарных операций, поднятие и опускание индексов, индуцированное псевдоскалярное произведение на тензорах, обобщенная операция “звездочка”, полилинейные отображения на сечениях и тензорные поля.

Перенесем теперь операции над алгебраическими тензорами на случай тензорных расслоений и тензорных полей. Отметим, что унарные операции представляют собой линейные морфизмы тензорных расслоений, а бинарные описываются с помощью суммы Уитни и билинейных морфизмов.

7.1 Унарные тензорные операции

Приведем некоторые примеры унарных операций. Обозначим S_k группу перестановок множества $\{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$, положим $\sigma(i_1 \cdots i_k) := (i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)})$, и пусть $(-1)^\sigma$ — знак перестановки σ . Напомним, как выглядят эти операции в произвольно выбранном базисе.

- **Умножение тензора T типа (p, q) на число $a \in \mathbb{R}$:**

$$(aT)_J^I = (aT)_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = a(T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}) = a(T_J^I).$$

- **Перестановка P_σ^δ индексов одного уровня у тензора T типа (p, q) :** $\delta \in S_p$ переставляет верхние индексы, а $\sigma \in S_q$ — нижние; если переставляем только верхние индексы, то пишем P^δ , а если только нижние — то P_σ :

$$(P_\sigma^\delta T)_J^I = (P_\sigma^\delta T)_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = T_{\sigma(j_1 \cdots j_q)}^{\delta(i_1 \cdots i_p)} = T_{\sigma(J)}^{\delta(I)}.$$

Перестановка индексов разных уровней тензорной не является (проверьте).

- **Свертка C_s^r по верхнему r -ому и нижнему s -ому индексам тензора T типа (p, q) :**

$$(C_s^r T)_J^I = (C_s^r T)_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = T_{j_1 \cdots j_s = \alpha \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_r = \alpha \cdots i_p}.$$

Свертка по паре индексов одного уровня также не тензорная (проверьте).

- **Симметрирование Sym** , определенное как на ковариантных тензорах T , так и на контравариантных (запишем ее лишь в первом случае):

$$(\text{Sym } T)_I = (\text{Sym } T)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} T_{\sigma(i_1 \cdots i_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} T_{\sigma(I)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (P_\sigma T)_I.$$

Симметрирование не меняет симметричный тензор и зануляет кососимметричный тензор (проверьте).

- **Альтернирование Alt** , определенное как на ковариантных тензорах T , так и на контравариантных (запишем ее лишь в первом случае):

$$(\text{Alt } T)_I = (\text{Alt } T)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1 \cdots i_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma T_{\sigma(I)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma (P_\sigma T)_I.$$

Альтернирование не меняет кососимметричный тензор и зануляет симметричный тензор (проверьте).

Эти операции естественным образом задаются поточечно на соответствующих тензорных расслоениях над гладким многообразием M и продолжаются на пространства сечений этих расслоений, т.е. на соответствующие тензорные поля (умножение на число можно также заменить умножением на гладкую функцию). Как мы отмечали выше, эти операции являются линейными морфизмами соответствующих тензорных расслоений, при этом, умножение на ненулевое число и перестановка индексов — изоморфизмами:

$$\begin{array}{ccc}
 T^{(p,q)}M & \xrightarrow{a, P_\sigma^\delta} & T^{(p,q)}M \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T^{(p,q)}M & \xrightarrow{C_s^r} & T^{(p-1,q-1)}M \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\text{Sym}} & S^q M \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\text{Alt}} & \Lambda^q M \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}$$

7.2 Бинарные тензорные операции

Перейдем теперь к бинарным операциям. Напомним, как выглядят и эти операции в произвольно выбранном базисе:

- сложение тензоров T и S одного и того же типа (p, q) :

$$(T + S)_J^I = (T + S)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_J^I + S_J^I;$$

Эта операция коммутативная и ассоциативная.

- тензорное произведение тензора T типа (p, q) и тензора S типа (r, s) :

$$(T \otimes S)_{JL}^{IK} = (T \otimes S)_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+r}} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} = T_J^I S_L^K.$$

Эта операция некоммутативная, ассоциативная и билинейная.

- симметричное тензорное произведение ковариантных тензоров степени p и q :

$$\begin{aligned}
 (T S)_{IJ} &= (T \cdot S)_{IJ} = (T \odot S)_{IJ} = (T S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = (T \cdot S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = (T \odot S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = \\
 &= \text{Sym}(T \otimes S)_{IJ} = \text{Sym}(T \otimes S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = \\
 &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{\sigma(i_1 \dots i_p) S_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{\sigma(I) S_J} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_k} P_\sigma(T \otimes S)_{IJ}.
 \end{aligned}$$

Так как результат симметричного произведения — симметричный тензор, эту операцию обычно используют на подпространстве, составленном из симметричных тензоров. Эта операция коммутативная, ассоциативная и билинейная, даже и на несимметричных тензорах (см. задачу 7.1). Аналогичная операция определена и для контравариантных тензоров.

- внешнее произведение ковариантных тензоров степени p и q :

$$\begin{aligned}
 (T \wedge S)_{IJ} &= (T \wedge S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = \\
 &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(T \otimes S)_{IJ} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(T \otimes S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}} = \\
 &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1 \dots i_p) S_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma T_{\sigma(I) S_J} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma P_\sigma(T \otimes S)_{IJ}.
 \end{aligned}$$

Так как результат внешнего произведения — кососимметричный тензор, эту операцию обычно используют на подпространстве, составленном из кососимметричных тензоров. Эта операция косокоммутативная, ассоциативная и билинейная, даже на не кососимметричных тензорах (см. задачу 7.2). Аналогичная операция определена и для контравариантных тензоров.

Обратите внимание на разницу в традиционном определении симметричного и внешнего произведений.¹

- **Подстановка** i_ξ ковектора ξ в тензор T типа (p, q) , $p \geq 1$:

$$(\iota_\xi T)_{j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \xi_{i_1}.$$

Иными словами, мы подставляем в тензор T на его первое “ковекторное место” заданный заранее ковектор ξ , тогда по остальным аргументам полученное отображение останется полилинейным, т.е. тензором типа $(p - 1, q)$.

- **Подстановка** i_v вектора v в тензор T типа (p, q) , $q \geq 1$:

$$(\iota_v T)_{j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v^{j_1}.$$

Иными словами, мы подставляем в тензор T на его первое “векторное место” заданный заранее вектор v , тогда по остальным аргументам полученное отображение останется полилинейным, т.е. тензором типа $(p, q - 1)$.

Как мы уже говорили, на тензорных расслоениях эти операции задаются в терминах сумм Уитни и представляют собой билинейные морфизмы. Также они продолжаются на пространства сечений, т.е. на тензорные поля. Приведем соответствующие диаграммы.

- Сложение тензоров — это билинейный морфизм гладких векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{+} & T^{(p,q)}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

- Тензорное произведение — это билинейный морфизм гладких векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}M \oplus T^{(r,s)}M & \xrightarrow{\otimes} & T^{(p+r,q+s)}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

- Симметричное произведение — это билинейный морфизм гладких векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} T^{(0,p)}M \oplus T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\odot} & S^{p+q}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^{(0,p)}M \oplus T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\otimes} & T^{(0,p+q)}M \xrightarrow{\text{Sym}} S^{p+q}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \downarrow \pi \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

- Внешнее произведение — это билинейный морфизм гладких векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} T^{(0,p)}M \oplus T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\wedge} & \Lambda^{p+q}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^{(0,p)}M \oplus T^{(0,q)}M & \xrightarrow{\otimes} & T^{(0,p+q)}M \xrightarrow{\frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}} \Lambda^{p+q}M \\ \pi \oplus \pi \searrow & & \downarrow \pi \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

¹Одна из мотиваций состоит в следующем. Заметим, что тензорное произведение $dx^i \otimes dx^i$ симметрично, поэтому можно попробовать сделать так, чтобы оно совпало с $dx^i \cdot dx^i$. Это прекрасно реализуется операцией симметрирования. Последствием этого является появления дроби в формуле $dx^1 \cdot dx^2 = (x^1 \otimes dx^2 + x^2 \otimes dx^1)/2$. В случае с кососимметричными тензорами, $dx^i \wedge dx^i = 0$ при любом определении внешнего произведения, поэтому появляется возможность избавиться от дроби в формуле для $dx^1 \cdot dx^2$ и других похожих формулах: теперь $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$.

- Подстановка ι ковектора (вектора) — это билинейный морфизм гладких векторных расслоений (слева — подстановка ковектора, справа — вектора):

$$\begin{array}{ccc}
 T^*M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{\iota} & T^{(p-1,q)}M \\
 \searrow \pi \oplus \pi & & \swarrow \pi \\
 & & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 TM \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{\iota} & T^{(p,q-1)}M \\
 \searrow \pi \oplus \pi & & \swarrow \pi \\
 & & M
 \end{array}$$

Заметим один полезный факт. Так как $\Gamma(T^{(0,0)}M) = \mathcal{F}(M)$ — пространство функций на M , то тензорное, симметричное и внешнее произведение функции и тензорного поля есть поточечное перемножение значения тензора и функции. В частности, стандартное произведение функций $\mathcal{F}(M) \oplus \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ совпадает и с их тензорным (симметричным, внешним) произведением.

Задача 7.1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $P \in M$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M в окрестности точки P . Для $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $J = (j_1, \dots, j_p)$ положим $\delta_J^I = \delta_{j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_p}^{i_p}$ и $dx^I = dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$, так что δ_J^I — координаты dx^I . Пусть $T^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} dx^{\sigma(I)}$, тогда $T_J^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \delta_J^{\sigma(I)}$. Ясно, что $T^{\sigma(I)} = T^I$ для любого $\sigma \in S_p$. Пусть $K = (k_1, \dots, k_q)$ и $d_{\odot}x^I := dx^{i_1} \odot \cdots \odot dx^{i_p} = dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}$.

- (1) Покажите, что $dx^I \cdot dx^K = T^{IK}$, где $IK = (i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_q)$.
- (2) Покажите, что $T^I \cdot dx^K = T^{IK} = dx^I \cdot T^K$.
- (3) Покажите, что $T^I \cdot T^K = T^{IK}$.
- (4) Выведите из предыдущего пункта, что $d_{\odot}x^I = T^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} dx^{\sigma(I)}$.
- (5) Покажите, что симметричное произведение симметрично и ассоциативно на любых ковариантных тензорах (билинейность очевидна).
- (6) Проверьте, что тензоры $d_{\odot}x^I \in S_p^p M$, $i_1 \leq \dots \leq i_p$, образуют базис векторного пространства $S_p^p M$.
- (7) Запишите симметричный тензор $T = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ в базисе $dx^i dx^j$.

Задача 7.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $P \in M$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M в окрестности точки P . Для $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $J = (j_1, \dots, j_p)$ пусть $T^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma dx^{\sigma(I)}$, тогда $T_J^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \delta_J^{\sigma(I)}$. Ясно, что $T^{\sigma(I)} = (-1)^\sigma T^I$ для любого $\sigma \in S_p$. Пусть $K = (k_1, \dots, k_q)$ и $d_{\wedge}x^I := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

- (1) Покажите, что $p!q! dx^I \wedge dx^K = T^{IK}$, где $IK = (i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_q)$.
- (2) Покажите, что $q! T^I \wedge dx^K = T^{IK} = p! dx^I \wedge T^K$.
- (3) Покажите, что $T^I \wedge T^K = T^{IK}$.
- (4) Выведите из предыдущего пункта, что $d_{\wedge}x^I = T^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma dx^{\sigma(I)}$.
- (5) Покажите, что внешнее произведение косокоммутативно на любых ковариантных тензорах в следующем смысле: если T и S — соответственно ковариантные тензоры степени p и q , то $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$.
- (6) Покажите, что внешнее произведение ассоциативно на любых ковариантных тензорах (билинейность очевидна).
- (7) Проверьте, что тензоры $d_{\wedge}x^I \in \Lambda_p^p M$, $i_1 < \dots < i_p$, образуют базис векторного пространства $\Lambda_p^p M$.
- (8) Покажите, что p -форма $\omega = \omega_I dx^I$ в базисе $d_{\wedge}x^I$, $i_1 < \dots < i_p$, записывается так: $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_I d_{\wedge}x^I$. Для суммирования $\sum_{i_1 < \dots < i_p}$ по возрастающим индексам иногда вводят обозначение \sum'_I . Таким образом, $\omega = \sum'_I \omega_I d_{\wedge}x^I$.
- (9) Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — другие локальные координаты в окрестности P , а $\omega \in \Lambda_p^p M$. Пусть $\omega_{1\dots n}$ и $\omega_{1'\dots n'}$ — компоненты формы ω в координатах x и x' соответственно. Покажите, что $\omega_{1\dots n} = \det(x'_x|_P) \omega_{1'\dots n'}$.

Задача 7.3. Пусть M — произвольное ориентированное риманово многообразие размерности n и \mathcal{A} — любой ориентированный атлас. Для каждой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, задающий локальные координаты $x = (x^1, \dots, x^n)$, пусть $g_{ij}(x)$ — компоненты римановой метрики в координатах x , $g = \det(g_{ij})$, и $\Omega_x := \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

- (1) Покажите, что на M существует единственная дифференциальная n -форма Ω такая, что в каждом координатном базисе она совпадает с Ω_x .
- (2) Докажите, что $\Omega(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$ равно ориентированному объему канонического базиса локальных координат x^i (объем вычисляется с помощью метрики g_{ij} , а знак соответствует ориентации канонического базиса).
- (3) Обобщите конструкцию на псевдориманову метрику g .
- (4) Сформулируйте аналогичную задачу для произвольного гладкого многообразия, на котором требуется построить соответствующую n -форму в некоторой точке P , т.е. форму $\Omega \in \Lambda_P^n M$.

Форма Ω из задачи называется **формой объема ориентированного риманова** (соответственно, **псевдориманова**) **многообразия** M .

Задача 7.4. Покажите, что перенесение назад F^* уважает тензорное, симметричное и внешнее произведения ковариантных тензоров.

Задача 7.5. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких n -мерных многообразий, а ω — произвольная n -форма на N . Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ локальные координаты на M в окрестности точки $P \in M$, а $y = (y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты на N в окрестности точки $Q = F(P)$. Запишем форму ω в координатах y : $\omega = A(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Покажите, что $F^*\omega = A(y(x)) \det(y_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, где $y(x)$ — координатная запись отображения F .

7.3 Поднятие и опускание индексов

Приведем еще несколько полезных операций. Напомним, что для каждой невырожденной симметричной билинейной формы g можно построить невырожденный симметричный тензор $\text{inv}(g)$ типа $(2, 0)$, если в каждом базисе рассмотреть матрицу (g_{ij}) формы g , и в качестве компонент тензора $\text{inv}(g)$ взять компоненты обратной матрицы $(g_{ij})^{-1}$. Отметим, что отображение inv является диффеоморфизмом как между невырожденными симметричными тензорами типов $(0, 2)$ и $(2, 0)$, так и между симметричными положительно определенными тензорами тех же типов. Операция inv переносится на тензорные расслоения и их сечения, и для тензорных расслоений она является (не линейным) изоморфизмом гладких расслоений:

$$\begin{array}{ccc} \text{PRiem } M & \xleftarrow{\text{inv}} & \text{PRiem}' M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Riem } M & \xleftarrow{\text{inv}} & \text{Riem}' M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Определим теперь операции опускания и поднятия индексов с помощью невырожденной билинейной формы g . Пусть T — тензор типа (p, q) .

- Если $p > 0$ и $1 \leq r \leq p$, то определен тензор $C_2^r(g \otimes T)$, который называется результатом **опускания верхнего индекса с номером r** .
- Если $q > 0$ и $1 \leq s \leq q$, то определен тензор $C_s^2(\text{inv}(g) \otimes T)$, который называется результатом **поднятия нижнего индекса с номером s** .

Запишем эти операции в координатах. Если g_{ij} — компоненты тензора g , а g^{ij} — компоненты тензора $\text{inv}(g)$, то

$$C_2^r(g \otimes T)_{i_r J}^{I \setminus i_r} = T_{i_r J}^{I \setminus i_r} = T_{i_r j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_p} = g_{i_r \alpha} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r = \alpha \dots i_p},$$

$$C_s^2(\text{inv}(g) \otimes T)_{J \setminus j_s}^{j_s I} = T_{J \setminus j_s}^{j_s I} = T_{j_1 \dots \widehat{j_s} \dots j_q}^{j_s i_1 \dots i_p} = g^{j_s \alpha} T_{j_1 \dots j_s = \alpha \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Так как операции опускания и поднятия индекса — линейные на каждом пространстве $T_P^{(p,q)}M$, то эти операции задают линейные морфизмы тензорных расслоений. Отметим, что если опустить индекс i_r , потом у полученного тензора поднять первый индекс и, наконец, у вновь полученного тензора первый индекс поставить на $(r+1)$ -ое место, то получим исходный тензор. Аналогично можно поступить с нижним индексом j_s . Так как перестановка индексов является изоморфизмом, то и операции опускания и поднятия индексов — такие же. Чтобы изобразить эти изоморфизмы на диаграммах, операцию опускания r -ого верхнего индекса с помощью билинейно формы g обозначим \downarrow_g^r , а операцию поднятия s -ого нижнего индекса с помощью то же билинейно формы обозначим \uparrow_s^g . Тогда имеем изоморфизмы гладких векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} T^{(p,q)}M & \xleftarrow{\downarrow_g^r} & T^{(p-1,q+1)}M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^{(p,q)}M & \xleftarrow{\uparrow_s^g} & T^{(p+1,q-1)}M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Если не фиксировать g , то получим морфизм гладких расслоений, являющийся изоморфизмом по второму аргументу:

$$\begin{array}{ccc} \text{PRiem } M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{\downarrow} & T^{(p-1,q+1)}M \\ & \searrow \pi \oplus \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{PRiem}' M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{\uparrow} & T^{(p+1,q-1)}M \\ & \searrow \pi \oplus \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

(здесь мы обозначили одной и той же буквой π все проекции на M).

7.4 Индуцированное псевдоскалярное произведение на тензорах

Мы используем невырожденные симметричные билинейные формы для задания соответствующего псевдоскалярного произведения на тензорах. Напомним, что для невырожденной симметричной билинейной формы $g \in \text{PRiem}_P M$ мы определили соответствующий тензор $\text{inv}(g) \in \text{PRiem}'_P(M)$ типа $(2,0)$. Выберем произвольный базис в $T_P M$, и пусть g_{ij} и g^{ij} — компоненты тензоров g и $\text{inv}(g)$ в этом базисе. Выберем произвольные $T, S \in T_P^{(p,q)}M$ с соответствующими компонентами в базисе e_i . Запишем компоненты тензоров T и S в мультииндексах T_J^I, S_L^K и положим $g_{IK} = g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_p k_p}$, $g^{JL} = g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_q l_q}$. Иными словами, g_{IK} и g^{JL} — компоненты, полученные из тензоров $\otimes_{r=1}^p g$ и $\otimes_{s=1}^q \text{inv}(g)$ соответствующей перестановкой индексов. Тогда число

$$g_{IK} g^{JL} T_J^I S_L^K = g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_p k_p} g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_q l_q} T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} S_{l_1 \cdots l_q}^{k_1 \cdots k_p}$$

не зависит от выбора базиса e_i , так как записывается в терминах тензорных операций: тензорного произведения и свертки. Это число обозначим через $\langle T, S \rangle_g$ или, если понятно, о каком g идет речь, — через $\langle T, S \rangle$.

Если выбрать базис в $T_P M$, в котором матрица (g_{ij}) диагональна, а на диагонали стоят ± 1 , то ненулевыми g_{IK} и g^{JL} являются только g_{II} и g^{JJ} , причем каждое из этих чисел равно ± 1 . Таким образом, если в этом базисе отождествить тензоры с векторами пространства $\mathbb{R}^{n^{p+q}}$, как мы делали выше, то число $\langle T, S \rangle_g$ будет обычным псевдоскалярным произведением этих векторов. В частности, отсюда вытекает симметричность и невырожденность определенной билинейной операции на тензорах (несмотря на то, что в инвариантной записи принимает участие некоммутативное тензорное произведение). Будем говорить, что определенное только что псевдоскалярное произведение **индуцировано псевдоскалярным произведением g** . Имеет место следующий морфизм гладких расслоений, линейный по второму и третьему аргументам:

$$\begin{array}{ccc} \text{PRiem } M \oplus T^{(p,q)}M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & M \times \mathbb{R} \\ & \searrow \pi \oplus \pi \oplus \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Замечание 7.6. Отметим, что определенная только что операция переносится и на сечения. Один из популярных вариантов получается при индуцировании на тензорные поля римановой метрики.

7.5 Обобщенная операция “звездочка”

Описанная выше операция индуцирования псевдоскалярного произведения на тензорах и тензорных полях может быть модифицирована так, чтобы в результате получилось линейное отображение тензоров. Если фиксировать один из тензоров, скажем, T , то мы получим линейное отображение $S \mapsto \langle T, S \rangle$ из $T_P^{(p,q)}M$ в вещественную прямую \mathbb{R} . Модификация состоит в том, что мы будем выбирать T не из $T_P^{(p,q)}M$, а из $T_P^{(p+a,q+b)}M$, где $a, b \geq 0$. При этом мы будем “сворачивать” все индексы тензора S с соответствующей частью индексов тензора T . В мультииндексах эта операция запишется так. Обозначим $|I|$ количество элементов в I , т.е. если $I = (i_1, \dots, i_p)$, то $|I| = p$. Выбираем мультииндексы с условием $|I| = |K| = p$, $|J| = |L| = q$, $|IA| = p + a$, $|JB| = q + b$, тогда полагаем

$$(*_T S)_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} = (*_T S)_B^A = g_{IK} g^{JL} T_{JB}^{IA} S_L^K = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_p k_p} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_q l_q} T_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+a}} S_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

Ясно, что $*_T: T_P^{(p,q)}M \rightarrow T_P^{(a,b)}M$ — линейное отображение, также линейное по T , поэтому имеет место морфизм гладких расслоений, линейный по второму и третьему аргументам:

$$\begin{array}{ccc} \text{PRiem } M \oplus T^{(p+a,q+b)}M \oplus T^{(p,q)}M & \xrightarrow{*} & T^{(a,b)}M \\ & \searrow \pi \oplus \pi \oplus \pi & \swarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Кроме того, свойства тензора T отражаются на результате операции $*_T$. Например, если T — ковариантный симметричный (кососимметричный) тензор, то $*_T S$ — такой же. Эта операция играет важную роль особенно в применении в кососимметричным ковариантным тензорам. В этом случае в качестве T выбирают нормированную форму объема, и тогда операция называется **звездочкой Ходжа**. Отметим, что сейчас речь шла о форме объема в данной точке $P \in M$. Если же мы хотим определить звездочку Ходжа на дифференциальных формах, то приходится дополнительно требовать, чтобы многообразие M было ориентированным, см. выше.

Запишем звездочку Ходжа в некотором базисе e_i касательного пространства $T_P M$. Для этого введем еще одно удобное обозначение $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, положив его равным 0, если какая-нибудь пара индексов i_k и i_l , $k \neq l$, совпадает, и $(-1)^\sigma$, если все индексы различны, а σ — перестановка $k \mapsto i_k$. Тогда если $g \in \text{Riem}_P M$ имеет компоненты g_{ij} в базисе e_i , и $g = \det(g_{ij})$, то координаты формы объема Ω имеют вид $\Omega_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ или, в мультииндексах, $\Omega_I = \sqrt{g} \varepsilon_I$. В качестве тензора T выберем $\frac{1}{q!} \Omega$ и будем применять операцию $*_T$ к q -формам $\omega \in \Lambda_P^q M$, $q \leq n$, а результат применения обозначать $*\omega$, опуская T . Таким образом, $*$: $\Lambda_P^q M \rightarrow \Lambda_P^{n-q} M$. Запишем, как выглядят компоненты формы $*\omega$:

$$*\omega_{i_{q+1} \dots i_n} = \frac{1}{q!} \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_q j_q} \omega_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_n} \omega^{i_1 \dots i_q},$$

где $\omega^{i_1 \dots i_q} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_q j_q} \omega_{j_1 \dots j_q}$ — результат поднятия индексов у q -формы ω . В мультииндексной форме,

$$(*\omega)_A = \frac{1}{q!} \Omega_{IA} g^{IJ} \omega_J = \frac{1}{q!} \Omega_{IA} \omega^I,$$

где $\omega^I = g^{IJ} \omega_J$.

Задача 7.7. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие и $g \in \text{Riem}_P M$. Обозначим Ω форму объема, соответствующую g , и пусть $\omega \in \Lambda_P^q M$ — произвольная q -форма.

- (1) Покажите, что $*(\omega) = (-1)^{q(n-q)} \omega$, в частности, $*$: $\Lambda_P^q M \rightarrow \Lambda_P^{n-q} M$ — изоморфизм векторных пространств.
- (2) Убедитесь, что если $\omega = c \in \Lambda_P^0(M)$, то $*\omega = c \Omega$.
- (3) Вычислите $*\omega$ для 1- и 2-форм ω на $M = \mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой.
- (4) Обобщите конструкцию звездочки Ходжа на псевдоскалярные произведения $g \in \text{Riem}'_P M$.

Таким образом, на ориентированном римановом многообразии имеет место следующий изоморфизм гладких векторных расслоений кососимметричных ковариантных тензоров:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^q M & \xleftrightarrow{\quad * \quad} & \Lambda^{n-q} M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

7.6 Полилинейные отображения на сечениях и тензорные поля

Напомним, что в прошлом семестре мы определяли коммутатор векторных полей на поверхности. Аналогичным образом коммутатор можно определить и для гладких многообразий. Мы приведем другой способ задания коммутатора, воспользовавшись представлением касательного вектора в виде дифференцирования функций.

Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ — векторные поля на гладком многообразии M . Тогда в каждой точке $P \in M$ касательные векторы $X(P)$ и $Y(P)$ представляют собой дифференцирование гладких функций, определенных в окрестностях точки P . Напомним, что пространство таких функций мы обозначали \mathcal{F}_P . Пусть $f \in \mathcal{F}_P$ — такая функция, тогда f определена в некоторой окрестности $U \subset M$ точки P , и мы можем дифференцировать f во всех точках $Q \in U$. Тем самым, $Y|_U(f)$ — тоже гладкая функция в окрестности точки P (ее гладкость вытекает из ее координатной записи). Но тогда мы можем применить к ней дифференцирование $X|_U$. Также мы можем поменять местами X и Y , и, наконец, из одной полученной функции вычесть другую, т.е. корректно определена функция $(X \circ Y - Y \circ X)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \in \mathcal{F}_P$. Таким образом, мы определили отображение $(X \circ Y - Y \circ X): \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{R}$. Если это отображение окажется полилинейным и удовлетворяющим правилу Лейбница, то, по определению, мы получим касательный вектор из $T_P M$.

Задача 7.8. Проверьте, что для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, определенных на гладком многообразии M , и любой точки $P \in M$ отображение $(X \circ Y - Y \circ X): \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцированием, т.е. задает касательный вектор. Покажите, что в локальных координатах x^1, \dots, x^n на M , $X = X^i \partial_{x^i}$, $Y = Y^i \partial_{x^i}$, координаты касательных векторов $(X \circ Y - Y \circ X)$ имеют вид

$$(X \circ Y - Y \circ X)^i = X^j Y_{x^j}^i - Y^j X_{x^j}^i,$$

в частности, эти координаты — гладкие функции, поэтому $X \circ Y - Y \circ X$ — векторное поле.

Векторное поле $X \circ Y - Y \circ X$ обозначается $[X, Y]$ и называется **коммутатором векторных полей X и Y** .

Напомним свойства коммутатора.

Задача 7.9. Пусть $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ — векторные поля на гладком многообразии M , а $f \in \mathcal{F}(M)$ — функция на поверхности M . Тогда

- (1) коммутатор $[X, Y]$ является билинейным кососимметричным отображением из $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ в $\mathfrak{X}(M)$;
- (2) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$,
- (3) $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$;
- (4) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби).

Возникает вопрос: является ли операция взятия коммутатора тензором? Поясним вопрос. Фиксируем точку $P \in M$ и рассмотрим, помимо полей X и Y , еще и поля X' и Y' такие, что $X'(P) = X(P)$ и $Y'(P) = Y(P)$. Верно ли, что $[X, Y](P) = [X', Y'](P)$? Если бы это было так, что коммутатор корректно определял бы билинейное отображение $\Phi: T_P M \times T_P M \rightarrow T_P M$, и тогда, рассматривая векторы из $T_P M$ как линейные отображения на $T_P^* M$, мы могли бы отождествить коммутатор с трилинейным отображением $T: T_P M \times T_P M \times T_P^* M \rightarrow \mathbb{R}$, положив $T(v, w, \xi) = \xi(\Phi(v, w))$. Прделав эту операцию в каждой точке P , мы бы получили тензорное поле T . Тем не менее, операция взятия коммутатора тензором не является.

Пример 7.10. Рассмотрим в качестве M плоскость \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами x, y , и пусть $X = (x, 0)$, $Y = (1, 0)$, $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $[X, Y]^1(P) = -1$. Если же $X' = (0, 0)$ и $Y' = Y = (1, 0)$, то $[X', Y']^1(P) = 0$.

Пусть

$$(7.1) \quad A: \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{p \text{ штук}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{q \text{ штук}} \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

— полилинейное (над \mathbb{R}) отображение. Отображение A называется **функционально полилинейным**, если для любой функции $f \in \mathcal{F}(M)$ выполняется $A(\dots, fZ, \dots) = f A(\dots, Z, \dots)$.

Теорема 7.11. *Полилинейное отображение A из формулы (7.1) задает тензорное поле типа (p, q) , если и только если отображение A — функционально полилинейно.*

Доказательство. Единственный нетривиальный момент — независимость числа $A(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)(P)$ от продолжений. В силу полилинейности, достаточно показать, что если одна из форм ω^i или одно из полей X_j равно нулю в точке P , то и $A(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)(P)$ равно нулю.

Пусть, без ограничения общности, одно из полей, скажем X_j , равно нулю в точке P . Доказательство проведем в два шага. Сначала мы покажем, что число $A(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q)(P)$ зависит лишь от значений его аргументов в сколь угодно малой окрестности точки P . Затем мы введем координаты, продолжим координатные векторные поля до глобально определенных полей и воспользуемся функциональной полилинейностью.

Начнем с простого замечания: если подставить в качестве X_j нулевое поле (нулевое сечение касательного расслоения), то из соотношения $A(\dots, 0, \dots) = A(\dots, 2 \cdot 0, \dots) = 2A(\dots, 0, \dots)$ вытекает, что $A(\dots, 0, \dots) = 0$. Далее, напомним, что в разделе 4.6 для каждой точки P гладкого многообразия M мы определили гладкую срезающую функцию $H_P: M \rightarrow \mathbb{R}$, равную нулю вне сколь угодно малой окрестности U^P точки P , и равную 1 в некоторой окрестности $W_P \subset U_P$ точки P . Пусть X'_j — другое векторное поле, совпадающее с X_j на всей окрестности U^P . Положим $Y_j = X_j - X'_j$, тогда векторное поле Y_j равно нулю на U^P и, значит, $H_P Y_j = 0$ на всем M , так что $A(\dots, H_P Y_j, \dots) = 0$. Воспользуемся функциональной полилинейностью:

$$\begin{aligned} 0 &= A(\dots, H_P Y_j, \dots)(P) = H_P(P) A(\dots, Y_j, \dots)(P) = A(\dots, Y_j, \dots)(P) = \\ &= A(\dots, X_j - X'_j, \dots)(P) = A(\dots, X_j, \dots)(P) - A(\dots, X'_j, \dots)(P), \end{aligned}$$

откуда $A(\dots, X_j, \dots)(P) = A(\dots, X'_j, \dots)(P)$. В частности, $A(\dots, X_j, \dots)(P) = A(\dots, H_P X_j, \dots)(P)$.

Выберем в качестве U_P такую окрестность, замыкание которой лежит в некоторой координатной окрестности U точки P , и пусть x^k — соответствующие локальные координаты в U . Векторные поля $H_P \partial_{x^k}$ определены в U , равны нулю вне U^P , а замыкание U^P лежит в U , поэтому, продолжив эти поля нулем вне U , мы получим глобально определенные векторные поля E_k . Пусть $X_j = X_j^k \partial_{x^k}$ в окрестности U , тогда $H_P^2 X_j = H_P X_j^k H_P \partial_{x^k}$. Продолжим $H_P X_j^k$ на все M нулем вне U , полученную гладкую функцию обозначим \bar{X}_j^k , и построим векторное поле $\bar{X}_j = \bar{X}_j^k E_k$. Так как $H_P = 1$ в окрестности W^P точки P , то поле \bar{X}_j совпадает с X_j в W^P , поэтому, как было показано выше, $A(\dots, \bar{X}_j, \dots)(P) = A(\dots, X_j, \dots)(P)$. Кроме того, так как $X_j(P) = 0$, а $E_k(P) = \partial_{x^k}|_P$, то $\bar{X}_j^k(P) = 0$. Воспользуемся теперь функциональной полилинейностью:

$$A(\dots, X_j, \dots)(P) = A(\dots, \bar{X}_j, \dots)(P) = A(\dots, \bar{X}_j^k E_k, \dots)(P) = \bar{X}_j^k(P) A(\dots, E_k, \dots)(P) = 0,$$

что и требовалось. \square

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012. - 708 p.

Упражнения к главе 7

Упражнение 7.1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $P \in M$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M в окрестности точки P . Для $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $J = (j_1, \dots, j_p)$ положим $\delta_J^I = \delta_{j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_p}^{i_p}$ и $dx^I = dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$, так что δ_J^I — координаты dx^I . Пусть $T^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} dx^{\sigma(I)}$, тогда $T_J^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \delta_J^{\sigma(I)}$. Ясно, что $T^{\sigma(I)} = T^I$ для любого $\sigma \in S_p$. Пусть $K = (k_1, \dots, k_q)$ и $d_{\odot} x^I := dx^{i_1} \odot \cdots \odot dx^{i_p} = dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}$.

- (1) Покажите, что $dx^I \cdot dx^K = T^{IK}$, где $IK = (i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_q)$.
- (2) Покажите, что $T^I \cdot dx^K = T^{IK} = dx^I \cdot T^K$.
- (3) Покажите, что $T^I \cdot T^K = T^{IK}$.
- (4) Выведите из предыдущего пункта, что $d_{\odot} x^I = T^I = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} dx^{\sigma(I)}$.
- (5) Покажите, что симметричное произведение симметрично и ассоциативно на любых ковариантных тензорах (билинейность очевидна).
- (6) Проверьте, что тензоры $d_{\odot} x^I \in S_p^p M$, $i_1 \leq \dots \leq i_p$, образуют базис векторного пространства $S_p^p M$.
- (7) Запишите симметричный тензор $T = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ в базисе $dx^i dx^j$.

Упражнение 7.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $P \in M$ и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M в окрестности точки P . Для $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $J = (j_1, \dots, j_p)$ пусть $T^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma dx^{\sigma(I)}$, тогда $T_J^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \delta_J^{\sigma(I)}$. Ясно, что $T^{\sigma(I)} = (-1)^\sigma T^I$ для любого $\sigma \in S_p$. Пусть $K = (k_1, \dots, k_q)$ и $d_{\wedge} x^I := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

- (1) Покажите, что $p!q! dx^I \wedge dx^K = T^{IK}$, где $IK = (i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_q)$.
- (2) Покажите, что $q! T^I \wedge dx^K = T^{IK} = p! dx^I \wedge T^K$.
- (3) Покажите, что $T^I \wedge T^K = T^{IK}$.
- (4) Выведите из предыдущего пункта, что $d_{\wedge} x^I = T^I = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma dx^{\sigma(I)}$.
- (5) Покажите, что внешнее произведение косокоммутативно на любых ковариантных тензорах в следующем смысле: если T и S — соответственно ковариантные тензоры степени p и q , то $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T$.
- (6) Покажите, что внешнее произведение ассоциативно на любых ковариантных тензорах (билинейность очевидна).
- (7) Проверьте, что тензоры $d_{\wedge} x^I \in A_p^p M$, $i_1 < \dots < i_p$, образуют базис векторного пространства $A_p^p M$.
- (8) Покажите, что p -форма $\omega = \omega_I dx^I$ в базисе $d_{\wedge} x^I$, $i_1 < \dots < i_p$, записывается так $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_I d_{\wedge} x^I$. Для суммирования $\sum_{i_1 < \dots < i_p}$ по возрастающим индексам иногда вводят обозначение \sum'_I . Таким образом, $\omega = \sum'_I \omega_I d_{\wedge} x^I$.
- (9) Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — другие локальные координаты в окрестности P , а $\omega \in A_p^n M$. Пусть $\omega_{1\dots n}$ и $\omega_{1'\dots n'}$ — компоненты формы ω в координатах x и x' соответственно. Покажите, что $\omega_{1\dots n} = \det(x'_x|_P) \omega_{1'\dots n'}$.

Упражнение 7.3. Пусть M — произвольное ориентированное риманово многообразие размерности n и \mathcal{A} — любой ориентированный атлас. Для каждой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, задающий локальные координаты $x = (x^1, \dots, x^n)$, пусть $g_{ij}(x)$ — компоненты римановой метрики в координатах x , $g = \det(g_{ij})$, и $\Omega_x := \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

- (1) Покажите, что на M существует единственная дифференциальная n -форма Ω такая, что в каждой координатах x она совпадает с Ω_x .
- (2) Докажите, что $\Omega(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$ равно ориентированному объему канонического базиса локальных координат x^i (объем вычисляется с помощью метрики g_{ij} , а знак соответствует ориентации канонического базиса).

- (3) Обобщите конструкцию на псевдориманову метрику g .
- (4) Сформулируйте аналогичную задачу для произвольного гладкого многообразия, на котором требуется построить соответствующую n -форму в некоторой точке P , т.е. форму $\Omega \in \Lambda_P^n M$.

Упражнение 7.4. Покажите, что перенесение назад F^* уважает тензорное, симметричное и внешнее произведение ковариантных тензоров.

Упражнение 7.5. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких n -мерных многообразий, а ω — произвольная n -форма на N . Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ локальные координаты на M в окрестности точки $P \in M$, а $y = (y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты на N в окрестности точки $Q = F(P)$. Запишем форму ω в координатах y : $\omega = A(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Покажите, что $F^*\omega = A(y(x)) \det(y_x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, где $y(x)$ — координатная запись отображения F .

Упражнение 7.6. Пусть M — ориентированное двумерное подмногообразие в \mathbb{R}^3 .

- (1) Покажите, что на M существует векторное поле единичных нормалей $N: M \rightarrow S^2$.
- (2) Обозначим K гауссову кривизну подмногообразия M . Ориентируем некоторым образом сферу S^2 . Пусть η и ω — формы площади на S^2 и M соответственно. Докажите, что для одной из двух ориентаций сферы S^2 выполняется $N^*\eta = K\omega$.

Упражнение 7.7. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие и $g \in \text{Riem}_P M$. Обозначим Ω форму объема, соответствующую g , и пусть $\omega \in \Lambda_P^q M$ — произвольная q -форма.

- (1) Покажите, что $*(*\omega) = (-1)^{q(n-q)}\omega$, в частности, $*$: $\Lambda_P^q M \rightarrow \Lambda_P^{n-q} M$ — изоморфизм векторных пространств.
- (2) Убедитесь, что если $\omega = c \in \Lambda_P^0(M)$, то $*\omega = c\Omega$.
- (3) Вычислите $*\omega$ для 1- и 2-форм ω на $M = \mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой.
- (4) Обобщите конструкцию звездочки Ходжа на псевдоскалярные произведения $g \in \text{Riem}'_P M$.

Упражнение 7.8. Проверьте, что для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, определенных на гладком многообразии M , и любой точки $P \in M$ отображение $(X \circ Y - Y \circ X): \mathcal{F}_P \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцированием, т.е. задает касательный вектор. Покажите, что в локальных координатах x^1, \dots, x^n на M , $X = X^i \partial_{x^i}$, $Y = Y^i \partial_{x^i}$, координаты касательных векторов $(X \circ Y - Y \circ X)$ имеют вид

$$(X \circ Y - Y \circ X)^i = X^j Y_{x^j}^i - Y^j X_{x^j}^i,$$

в частности, эти координаты — гладкие функции, поэтому $X \circ Y - Y \circ X$ — векторное поле.

Упражнение 7.9. Пусть $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ — векторные поля на гладком многообразии M , а $f \in \mathcal{F}(M)$ — функция на поверхности M . Тогда

- (1) коммутатор $[X, Y]$ является билинейным кососимметричным отображением из $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ в $\mathfrak{X}(M)$;
- (2) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$,
- (3) $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$;
- (4) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (тождество Якоби).

Лекция 8

Внешнее дифференцирование

План. Определение внешнего дифференцирования через полилинейное отображение на векторных полях, доказательство его функциональной линейности, запись внешнего дифференциала формы в координатах, доказательство кососимметричности результата внешнего дифференцирования формы, формула внешнего дифференцирования через дифференциалы координатных функций, свойства внешнего дифференцирования: линейность, косая коммутативность, зануление композиции дифференцирований, коммутирование с перенесением форм назад.

В примере 6.15 мы обсуждали дифференциальные формы и отметили, что дифференцирование гладких функций превращает функции, т.е. 0-формы, в ковекторные поля, т.е. в 1-формы. Там же мы обещали, что распространим операцию дифференцирования на формы произвольной степени. Сейчас мы дадим инвариантное определение этой операции, написав формулу, сопоставляющую набору векторных полей некоторую гладкую функцию и показав, что эта формула зависит от полей функционально линейно, поэтому, по теореме 7.11, задает тензорное поле. Затем мы напишем эту операцию в координатном виде и изучим свойства этой операции.

8.1 Дифференциальные формы, внешний дифференциал

Пусть ω — произвольная дифференциальная k -форма, определенная на гладком n -мерном многообразии M , а X_1, \dots, X_{k+1} — векторные поля на M . Положим

$$(8.1) \quad d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{1 \leq i \leq k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

Таким образом, мы определили полилинейное отображение

$$d\omega: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{(k+1)\text{-штука}} \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

(проверьте).

Теорема 8.1. *Определенное формулой (8.1) отображение $d\omega$ функционально линейно.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}(M)$. Покажем, что $d\omega(X_1, \dots, f X_p, \dots, X_{k+1}) = f d\omega(X_1, \dots, X_{k+1})$. Рассмотрим в первой сумме все слагаемые, отличные от p -ого, тогда из них f выносится в форму ω , а затем X_i применяется к произведению двух функций по правилу Лейбница. В случае $p = i$ функция f просто умножает X_i . Таким образом, первая сумма в выражении (8.1) равна

$$(8.2) \quad f \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) + \sum_{i \neq p} (-1)^{i-1} X_i(f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}).$$

Чтобы вычислить вторую сумму, снова заметим, что при $p \notin \{i, j\}$ функция f просто выносится из формы ω . При $p \in \{i, j\}$ мы воспользуемся формулами из задачи 7.9, а именно,

$$[f X_i, X_j] = f[X_i, X_j] - X_j(f)X_i \quad \text{и} \quad [X_i, f X_j] = f[X_i, X_j] + X_i(f)X_j.$$

Заметим, что слагаемые в этих формулах, равные $f[X_i, X_j]$, после вынесения функции f из ω , дают два недостающих слагаемых до

$$(8.3) \quad f \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

Осталось разобраться с двумя суммами

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^{p+j} [-X_j(f)] \omega(X_p, X_1, \dots, \widehat{X}_p, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \\ & \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^{i+p} X_i(f) \omega(X_p, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_p, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись косой симметрией, переместим в первой и второй суммах поле X_p на p -ое место, при этом в первой сумме знак изменится на $(-1)^{p-1}$, а во второй — на $(-1)^{p-2}$. Таким образом, суммы преобразуются так:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq p < j \leq k+1} (-1)^j X_j(f) \omega(X_1, \dots, X_p, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \\ & \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^i X_i(f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Наконец, заменим индекс j в первой сумме на i (это ничего не изменит) и сложим эти две суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p < i \leq k+1} (-1)^i X_i(f) \omega(X_1, \dots, X_p, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \sum_{1 \leq i < p \leq k+1} (-1)^i X_i(f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p, \dots, X_{k+1}) = \\ = \sum_{i \neq p} (-1)^i X_i(f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, полученное выражение сокращается со вторым слагаемым в формуле (8.2), а первое слагаемое формулы (8.2), вместе с формулой (8.3), дают как раз $f d\omega(X_1, \dots, X_{k+1})$. \square

Итак, по теореме 7.11, $d\omega$ — ковариантное тензорное поле степени $(k+1)$. Запишем $d\omega$ в координатах. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на гладком многообразии M в окрестности точки $P \in M$, и $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$ — координатная запись дифференциальной k -формы ω . Выберем окрестности U^P и V^P точки P так, чтобы замыкание U^P содержалось в V^P , а замыкание V^P — в области определения координат x . Зададим X_r равными координатным полям $\partial_{x^{i_r}}$ в окрестности U^P , продолженным 0 вне окрестности V^P . Тогда в U^P имеем $[X_i, X_j] = 0$, так что вторая сумма в правой части формулы (8.1) равна нулю в окрестности P , а первая часть имеет вид $\sum_{1 \leq p \leq k+1} (-1)^{p-1} \partial_{x^{i_p}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i}_p \dots i_{k+1}}(x)$. Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 8.2. Пусть ω — дифференциальная k -форма на гладком n -мерном многообразии M , и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M . Тогда

$$(8.4) \quad (d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}}(x) = \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{p-1} \partial_{x^{i_p}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i}_p \dots i_{k+1}}(x).$$

Из формулы 8.4 также непосредственно выводится линейность операции d и косая симметрия тензорного поля $d\omega$.

Следствие 8.3. Операция d линейна. Ковариантное тензорное поле $d\omega$, построенное выше по дифференциальной k -форме ω , является дифференциальной $(k+1)$ -формой.

Доказательство. Линейность операции d вытекает из того, что все функции, участвующие в вычислении $(d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}}(x)$, — линейны. Докажем косую симметрию тензора $d\omega$.

Выберем в выражении $(d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}}$ из формулы (8.4) два индекса i_r, i_s и поменяем их местами. Без ограничения общности, будем считать, что $r < s$. В правой части формулы (8.4) во всех слагаемых, где $p \notin \{r, s\}$, поменяется знак в силу косой симметрии ω . Остается два слагаемых: $p = r$ и $p = s$. До перестановки эти слагаемые давали вклад

$$(8.5) \quad (-1)^{r-1} \partial_{x^{i_r}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i}_r \dots i_s \dots i_{k+1}} + (-1)^{s-1} \partial_{x^{i_s}} \omega_{i_1 \dots i_r \dots \widehat{i}_s \dots i_{k+1}}.$$

После перестановки индексов получим

$$(-1)^{r-1} \partial_{x^{i_s}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_{k+1}} + (-1)^{s-1} \partial_{x^{i_r}} \omega_{i_1 \dots i_s \dots \widehat{i_s} \dots i_{k+1}}.$$

Вернем индексы i_r и i_s на их исходные места, тогда знак обоих слагаемых изменится на $(-1)^{s-r+1}$, поэтому последнее выражение превратится в

$$(-1)^s \partial_{x^{i_s}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_{k+1}} + (-1)^r \partial_{x^{i_r}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_s} \dots i_{k+1}},$$

что отличается только знаком от выражения (8.5). \square

Итак, определенная выше тензорная операция переводит дифференциальную k -форму в дифференциальную $(k+1)$ -форму. Эта операция называется **внешним дифференцированием**.

Замечание 8.4. Внешнее дифференцирование можно было определить непосредственно по формуле (8.4). Для этого достаточно рассмотреть произвольный гладкий атлас на M , в каждом локальных координатах x^i записывать дифференциальную k -форму ω , а именно, $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$, и задать функции $(d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}}(x)$ по формуле (8.4). Остается проверить (сделайте это), что на пересечениях карт полученные функции связаны друг с другом по тензорному закону и, тем самым, определяют дифференциальную $(k+1)$ -форму.

Запишем операцию внешнего дифференцирования в еще более простом виде. Для этого используем выражение (8.4) для разложения формы $d\omega$ по базису $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$, в котором, вместо суммы по упорядоченным последовательностям индексов, рассмотрим сумму по всем последовательностям индексов, так что в результате возникнет множитель $1/(k+1)!$:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{(k+1)!} (d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{p-1} \partial_{x^{i_p}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_p} \dots i_{k+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{p=1}^{k+1} \partial_{x^{i_p}} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_p} \dots i_{k+1}} dx^{i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_p}} \dots \wedge dx^{i_{k+1}} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{p=1}^{k+1} d\omega_{i_1 \dots \widehat{i_p} \dots i_{k+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_p}} \dots \wedge dx^{i_{k+1}}. \end{aligned}$$

При каждом p переобозначим индексы $i_1, \dots, \widehat{i_p}, \dots, i_{k+1}$ через j_1, \dots, j_k , тогда получим $(k+1)$ -у одинаковую сумму, откуда

$$(8.6) \quad d\omega = \frac{1}{k!} d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Замечание 8.5. Формула (8.6) для одного монома $\omega = \omega_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ имеет вид

$$d\omega = d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

(здесь сумма по повторяющимся индексам отсутствует). В силу линейности, мы можем применить эту формулу к любой сумме любых мономов (не обязательно приводить подобные).

Для дальнейшего нам будет удобно ввести более компактные обозначения для пространства дифференциальных форм, а именно, мы положим $\Omega^k(M) = \Gamma(L^k M)$. Что касается внешнего дифференцирования, мы будем обозначать его двояко: или как раньше d , или, если мы хотим подчеркнуть, что оно действует на дифференциальных формах степени k , то d_k : $d_k: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

Соберем ряд важных свойств внешнего дифференцирования.

Предложение 8.6. Пусть M — гладкое многообразие.

- (1) Операция $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ линейна.
- (2) Если $\omega \in \Omega^k(M)$ и $\eta \in \Omega^l(M)$, то $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

$$(3) \quad d \circ d = 0.$$

(4) Внешнее дифференцирование коммутирует с перенесением назад: если $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение в гладкое многообразие N , и $\omega \in \Omega^k(N)$, то $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.

Доказательство. Доказательство будем проводить в локальных координатах x на M , заданных в окрестности некоторой точки $P \in M$, и локальных координатах y , заданных на N в окрестности точки $F(P) \in N$.

(1) Обсудили выше.

(2) Так как внешнее произведение билинейно, имеем

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} \omega_{I} \eta_{J} d_{\wedge} x^I \wedge d_{\wedge} x^J.$$

Теперь воспользуемся формулой (8.6), замечанием 8.5 и косой коммутативностью внешнего произведения:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} d(\omega_I \eta_J) \wedge d_{\wedge} x^I \wedge d_{\wedge} x^J = \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} (d\omega_I \wedge d_{\wedge} x^I) \wedge (\eta_J d_{\wedge} x^J) + (-1)^k \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} (\omega_I d_{\wedge} x^I) \wedge (d\eta_J \wedge d_{\wedge} x^J) = \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(3) Так как отображение d линейной, то и $d \circ d$ тоже линейно, поэтому его равенство нулю достаточно проверить на мономах $f d_{\wedge} x^I$. Имеем $d(f d_{\wedge} x^I) = f_{x^p} dx^p \wedge d_{\wedge} x^I$, поэтому, учитывая $f_{x^q x^p} = f_{x^p x^q}$ и $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$, получаем

$$(d \circ d)(f d_{\wedge} x^I) = f_{x^p x^q} dx^q \wedge dx^p \wedge d_{\wedge} x^I = -f_{x^q x^p} dx^p \wedge dx^q \wedge d_{\wedge} x^I,$$

откуда и вытекает требуемое.

(4) Снова достаточно проверить на мономах $f d_{\wedge} y^J$. С одной стороны,

$$F^*(d(f d_{\wedge} y^J)) = F^*(f_{y^q} dy^q \wedge d_{\wedge} y^J) = f_{y^q} y_{x^p}^q y_{x^I}^J dx^p \wedge d_{\wedge} x^I = f_{x^p} y_{x^I}^J dx^p \wedge d_{\wedge} x^I,$$

где для $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_k)$ мы полагаем $y_{x^I}^J = y_{x^{i_1}}^{j_1} \cdots y_{x^{i_k}}^{j_k}$.

С другой стороны,

$$dF^*(f d_{\wedge} y^J) = d(f y_{x^I}^J d_{\wedge} x^I) = f_{x^p} y_{x^I}^J dx^p \wedge d_{\wedge} x^I + f (y_{x^I}^J)_{x^p} dx^p \wedge d_{\wedge} x^I.$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю, расписав его явно. Имеем

$$\Pi = f \sum_{q=1}^k y_{x^{i_1}}^{j_1} \cdots y_{x^{i_q} x^p}^{j_q} \cdots y_{x^{i_k}}^{j_k} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

При каждом фиксированном q мы суммируем по всем i_1, \dots, i_k и p , поэтому мы можем переименовать p в i_q , а i_q — в p :

$$\Pi = f \sum_{q=1}^k y_{x^{i_1}}^{j_1} \cdots y_{x^p x^{i_q}}^{j_q} \cdots y_{x^{i_k}}^{j_k} dx^{i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^p \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

В силу косой симметрии, $dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = -dx^{i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, а в силу симметричности вторых частных производных, $y_{x^{i_q} x^p}^{j_q} = y_{x^p x^{i_q}}^{j_q}$, откуда и вытекает требуемое. \square

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012. - 708 p.

Упражнения к главе 8

Упражнение 8.1. Пусть (x, y, z) — декартовы координаты на \mathbb{R}^3 и

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

- (1) Запишите форму ω в сферических координатах (r, φ, θ) .
- (2) Вычислите $d\omega$ как в декартовых, так и в сферических координатах.
- (3) Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — стандартная сфера и $\iota: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — включение. Вычислите $\iota^*\omega$ в координатах φ, θ (в области, где эти координаты определены).
- (4) Покажите, что форма $\iota^*\omega$ всюду отлична от нуля.

Упражнение 8.2. Пусть $x = (x^1, x^2, x^3)$ — декартовы координаты на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 со стандартным скалярным произведением. Напомним, что

- **градиентом** $\text{grad } F$ **гладкой функции** $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ называется векторное поле, которое в декартовых координатах имеет компоненты $\text{grad } F^i = F_{x^i}$;
- **дивергенцией векторного поля** $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ называется функция, которая в декартовых координатах равна $\text{div } X = \sum_i X_{x^i}^i$;
- **ротором векторного поля** $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ называется векторное поле, которое в декартовых координатах задано так

$$\text{rot } X = \det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_{x^1} & \partial_{x^2} & \partial_{x^3} \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{vmatrix},$$

где e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в \mathbb{R}^3 .

Обозначим I операцию опускания индексов у векторных полей, так что $I: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Покажите, что

- (1) $\text{grad } F = I^{-1}(dF)$;
- (2) $\text{rot } X = I^{-1} * dI(X)$;
- (3) $\text{div } X = * d * I(X)$.

Запишите градиент, дивергенцию и ротор в криволинейных координатах y^i .

Убедитесь, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \\ \text{id} \downarrow & & I \downarrow & & *I \downarrow & & * \downarrow \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Упражнение 8.3. Пусть X_1, \dots, X_n — векторные поля, заданные на n -мерном гладком многообразии M . Предположим, что в каждой точке $P \in M$ эти поля линейно независимы, поэтому в каждой точке $P \in M$ определены двойственные ковекторы $\omega^1, \dots, \omega^n$.

- (1) Покажите, что ω^i гладко зависят от точки, т.е. являются дифференциальными 1-формами.
- (2) В силу линейной независимости векторов $X_1(P), \dots, X_n(P)$, коммутатор $[X_i, X_j]$ можно выразить через $X_1(P), \dots, X_n(P)$. Пусть $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$. Покажите, что c_{ij}^k — гладкие функции на M .
- (3) Докажите, что $d\omega^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j$.

Упражнение 8.4. Пусть для гладкого многообразия M и всех неотрицательных целых k задана операция $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- операция d линейна над \mathbb{R} ;
- если $\omega \in \Omega^k(M)$ и $\eta \in \Omega^l(M)$, то $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
- $d \circ d = 0$;
- если $F \in \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$, то dF — дифференциал функции F , т.е. для любого $v \in T_p M$ выполняется $dF(v) = v(F)$.

Докажите, что тогда d — внешний дифференциал.

Лекция 9

Интегрирование дифференциальных форм. Общая формула Стокса.

План. Общий план определения интеграла от формы, разбиение единицы, подчиненное покрытие, теорема существования разбиения единицы, применение разбиения единицы для доказательства существования римановой метрики на гладком многообразии, множества меры ноль, брус, объем бруса, определение множества меры ноль в евклидовом пространстве, свойства множеств меры ноль, инвариантность множеств меры ноль при гладких отображениях в пространства той же или большей размерности, определение множества меры ноль в гладком многообразии, об интеграле Римана, множества, измеримые по Жордану, интеграл Римана только для таких множеств, неизмеримость по Жордану некоторых ограниченных открытых и компактных подмножеств евклидова пространства, уточнение определения интеграла от формы, критерий Лебега интегрируемости по Риману, свойства интеграла Римана, задача, позволяющая интегрировать дифференциальные формы без разбиения единицы, пример такого интегрирования — вычисление площади стандартной сферы, общая формула Стокса, ее доказательство, вывод формулы Грина, формулы Стокса для поверхностей, а также формулы Остроградского–Гаусса из общей формулы Стокса (обобщение на случай многообразий), теорема “о барабане”.

Мы зададим на дифференциальных формах аналог определенного интеграла Римана. Это построение проводится так.

- На n -мерном многообразии M мы будем интегрировать только дифференциальные n -формы.
- Мы сведем задачу к интегрированию функций — компонент n -форм — по открытым множествам, в которых изменяются локальные координаты, для чего мы введем в рассмотрение “разбиение единицы”, подчиненное данному гладкому атласу, что позволит нам представить форму в виде суммы “локальных” форм, каждая из которых равна нулю вне соответствующей координатной окрестности.
- Интеграл от n -формы будем определять как сумму интегралов от локальных форм. Чтобы эта сумма была всегда корректно определена, мы будем работать лишь с конечными разбиениями единицы. Но такие разбиения можно гарантированно построить лишь в случае, когда или M компактно, или форма имеет компактный носитель, т.е. когда замыкание множества точек многообразия, в которых форма отлична от нуля, — компактно.
- Следующее, чего нужно добиться — независимость интеграла от выбора гладкого атласа и подчиненного ему конечного разбиения единицы. Здесь также возникает дополнительное требование: для такой независимости нужно дополнительно требовать, чтобы якобианы всех функций перехода были бы положительны. Это связано с тем, что подынтегральное выражение в интеграле Римана при замене координат умножается на модуль якобиана, а компонента дифференциальной формы — просто на якобиан замены. Тем самым, мы приходим к необходимости иметь дело лишь с ориентируемыми многообразиями.
- Более того, наше определение устроено так, что при замене ориентации интеграл тоже может измениться (для связного многообразия он меняет знак). Таким образом, мы будем определять интеграл n -форм только по n -мерным заранее ориентированным многообразиям.

Перейдем к деталям.

9.1 Разбиение единицы

Пусть B — топологическое пространство, $\pi: E \rightarrow B$ — векторное расслоение, и $s: M \rightarrow E$ — его сечение. **Носителем** $\text{supp } s$ сечения s называется замыкание множества всех таких точек $P \in B$, что $s(P) \neq 0$.

Тем самым, мы за одно определили и носитель любого тензорного поля, в частности, гладкой функции и дифференциальной формы на гладком многообразии.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное открытое покрытие топологического пространства X . Семейство непрерывных функций $\psi_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ называется **разбиением единицы, подчиненным покрытию \mathcal{U}** , если

- $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$ при каждом $\alpha \in I$,
- семейство носителей $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — локально конечно,
- в каждой точке $P \in X$ выполняется $\sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha(P) = 1$ (так как семейство носителей локально конечно, в этой сумме все члены, кроме конечного числа, равны нулю).

В случае, когда X — гладкое многообразие, будем дополнительно требовать, чтобы все функции ψ_α были гладкими.

Теорема 9.1. *Для любого открытого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ произвольного гладкого многообразия M существует подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для компактных многообразий, а случай некомпактных многообразий оставим для самостоятельного разбора, см. [1]. Случай компактных многообразий проще тем, что искомое разбиение единицы можно выбрать конечным. В некомпактной ситуации для доказательства требуются некоторое уточнение условия паракомпактности, а именно, возможность вписать локально конечное покрытие из заранее заданной базы.

Для построения разбиения единицы мы воспользуемся срезающими функциями, определенными в разделе 4.6. Напомним, что для каждой точки P срезающая функция $H_P: M \rightarrow [0, 1]$ равна 1 на замыкании некоторой окрестности W_P точки P (такое W_P мы называли H_P -окрестностью), причем функцию H_P можно подобрать так, чтобы ее носитель лежал в любой заранее заданной окрестности точки P . В нашем случае, для каждой точки $P \in U_\alpha$ мы определим срезающую функцию H_P^α с центром в P и носителем $\text{supp } H_P^\alpha \subset U_\alpha$. Соответствующие H_P^α -окрестности обозначим W_P^α . Так как M предполагается компактным, из открытого покрытия $\{W_P^\alpha\}_{P \in U_\alpha, \alpha \in I}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{W_1, \dots, W_m\}$. Соответствующие срезающие функции обозначим H_1, \dots, H_m . Так как каждая точка $P \in M$ лежит в некотором W_i , и $H_i(P) = 1$, то $H(P) = \sum_{i=1}^m H_i(P) > 0$, поэтому определены гладкие функции H_i/H , сумма которых равна 1 в каждой точке $P \in M$.

Нам осталось перенумеровать функции H_i индексами $\alpha \in I$, добавив, если необходимо функции, тождественно равные нулю. Так как для каждого i существуют такие $\alpha \in I$ и $P \in M$, что $H_i = H_P^\alpha$ и, значит, $\text{supp } H_P^\alpha \subset U_\alpha$, мы поставим такой α в соответствие i , обозначим α через $\alpha(i)$. Для каждого $\alpha \in I$ положим

$$\psi_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \{i : \alpha(i) = \alpha\} = \emptyset, \text{ и} \\ \frac{1}{H} \sum_{i: \alpha(i) = \alpha} H_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как каждое H_i входит только к одно ψ_α и $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$, то $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — разбиение единицы, подчиненное U_α . \square

Пример 9.2. Покажем, как можно использовать разбиение единицы для доказательства существования римановой метрики на произвольном гладком многообразии. Рассмотрим на гладком многообразии M произвольный атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$, и пусть $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — подчиненное ему разбиение единицы. Определим отображение $g_\alpha: M \rightarrow S^2M$, положив

$$g_\alpha(P)(\partial_{x_\alpha^i}, \partial_{x_\alpha^j}) = \begin{cases} \psi(P)\partial_{ij} & \text{для } P \in U_\alpha, \text{ и} \\ 0, & \text{для } P \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Так как $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$, то отображение g_α — гладкое, поэтому является сечением гладкого расслоения S^2M . Определим теперь отображение $g: M \rightarrow S^2M$, положив $g = \sum_{\alpha \in I} g_\alpha$. Так как семейство носителей функций ψ_α локально конечно, то отображение g — гладкое, поэтому также является сечением расслоения S^2M . Так как в каждой точка $P \in M$ симметричная билинейная форма представляет собой конечное число положительно определенных билинейных форм, то g — риманова метрика.

9.2 Определение интеграла от дифференциальной формы

Пусть M — ориентированное компактное гладкое n -мерное многообразие и ω — дифференциальная n -форма на M .

Если $\dim M = 0$, то ориентация — это отображение $\sigma: M \rightarrow \{-1, 1\}$, а ω — функция на M . Так как M компактно, то оно состоит из конечного числа точек. Положим $\int_M \omega = \sum_{P \in M} \sigma(P) \omega(P)$.

Пусть теперь $\dim M > 0$ и \mathcal{S}_0 — ориентация M , т.е. максимальный ориентированный атлас на M . Будем рассматривать произвольные конечные атласы $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_0$, подчиненные им (точнее, покрытиям, порожденным атласами) разбиения единицы Ψ , и для каждой пары (\mathcal{A}, Ψ) определим число $\int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega$. Мы покажем, что это число не зависит от выбора пары (\mathcal{A}, Ψ) , назовем его **интегралом формы ω по многообразию M** и обозначим $\int_M \omega$.

Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^m$ и $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^m$. Положив $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$, получим $\omega = \sum_{\alpha=1}^m \omega_\alpha$, где $\omega_\alpha \in \Omega^n(M)$ и $\text{supp } \omega_\alpha \subset U_\alpha$.

Обозначим $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ локальные координаты, заданные картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, и запишем формы ω и ω_α в этих координатах:

$$\omega = T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n, \quad \omega_\alpha = \psi_\alpha(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n.$$

Положим

$$\int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega_\alpha = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n \quad \text{и} \quad \int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega = \sum_{\alpha=1}^m \int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega_\alpha,$$

где интеграл в правой части первой формулы определяется через обычный Римана и для него выполняются те же свойства, включая линейность и теорему о замене переменных, см. обсуждение в разделе 9.4.

Теорема 9.3. *Величина $\int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega$ не зависит от выбора пары (\mathcal{A}, Ψ) .*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}' = \{(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}_{\alpha'=1}^{m'}$ $\subset \mathcal{S}_0$ — другой атлас, и $\Psi' = \{\psi_{\alpha'}\}_{\alpha'=1}^{m'}$ — другое разбиение единицы, подчиненное на сей раз атласу \mathcal{A}' . Отметим, что здесь мы пользуемся идеей из тензорной алгебры обозначать штрихованными индексами не только замену самого индекса, но и замену индексированного объекта.

Положим $\theta_{\alpha\alpha'} = \psi_\alpha \psi_{\alpha'}$. Ясно, что $\text{supp } \theta_{\alpha\alpha'} \subset U_\alpha \cap U_{\alpha'}$. Мы должны показать, что $\int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega = \int_M^{(\mathcal{A}', \Psi')} \omega$.

Начнем со следующей цепочки очевидных равенств (если множество, по которому происходит интегрирование, пусто, то интеграл полагаем равным 0):

$$\begin{aligned} (9.1) \quad \int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega &= \sum_{\alpha=1}^m \int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^m \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n = \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha(x_\alpha) \left(\sum_{\alpha'=1}^{m'} \psi_{\alpha'}(x_\alpha) \right) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n = \sum_{\alpha, \alpha'} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \psi_\alpha(x_\alpha) \psi_{\alpha'}(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n = \\ &= \sum_{\alpha, \alpha'} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha'})} \theta_{\alpha\alpha'}(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся двумя фактами:

- теоремой о замене переменных в кратном интеграле, учитывая, что все якобианы замены положительны (атласы \mathcal{A} и \mathcal{A}' принадлежат одному и тому же максимальному ориентированному атласу \mathcal{S}_0), и
- законом изменения компонент дифференциальной n -формы, заданной на n -мерном многообразии, при замене локальных координат:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha'})} \theta_{\alpha\alpha'}(x_\alpha) T_\alpha(x_\alpha) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n &= \\ &= \int_{\varphi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'})} \theta_{\alpha\alpha'}(x_{\alpha'}) T_\alpha(x_{\alpha'}) \det[(x_\alpha)_{x_{\alpha'}}](x_{\alpha'}) dx_{\alpha'}^1 \dots dx_{\alpha'}^n = \\ &= \int_{\varphi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'})} \theta_{\alpha\alpha'}(x_{\alpha'}) T_{\alpha'}(x_{\alpha'}) dx_{\alpha'}^1 \dots dx_{\alpha'}^n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что

$$\int_M^{(\mathcal{A}, \Psi)} \omega = \sum_{\alpha, \alpha'} \int_{\varphi_{\alpha'}(U_{\alpha} \cap U_{\alpha'})} \theta_{\alpha\alpha'}(x_{\alpha'}) T_{\alpha'}(x_{\alpha'}) dx_{\alpha'}^1 \cdots dx_{\alpha'}^n.$$

Меняя местами α и α' и производя вычисления из цепочки равенств (9.1), получим требуемое. \square

9.3 Множества меры ноль

Брусом Π в \mathbb{R}^n называется декартово произведение отрезков $\Pi = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, а **объемом бруса** Π — произведение длин этих отрезков. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Будем говорить, что подмножество $Z \subset U$ **имеет меру ноль**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое не более чем счетное покрытие $\{\Pi_i\}_{i \in I}$ множества Z брусами $\Pi_i \subset \mathbb{R}^n$, суммарный объем которого меньше ε .

В следующем предложении перечисляются простейшие свойства множеств меры ноль.

Предложение 9.4 (Свойства множеств меры ноль).

- Множества меры ноль остаются такими под действиям движений.
- Каждое подмножество множества меры ноль само является множеством меры ноль.
- Не более чем счетное объединение множеств меры ноль — также множество меры ноль.
- Каждое подмножество линейного подпространства ненулевой координатности является множеством меры ноль.

Чтобы определить множество меры ноль в гладком многообразии, нам понадобятся следующие утверждения, которые мы сформулируем в виде задачи.

Задача 9.5. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $K \subset U$ — выпуклый компакт, и $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение. Тогда F — липшицево отображение. Если x^i и y^j — декартовы координаты в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно, а $\|F\|(x) = \sqrt{\sum_{i,j} (y_{x^i}^j)^2}$ и $C = \sup_{x \in K} \|F\|(x)$, то C — константа Липшица отображения F .
- (2) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $Z \subset U$ — множество меры ноль, и $F: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, причем $m \geq n$. Тогда $F(Z)$ — тоже множество меры ноль.

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие и \mathcal{A} — произвольный гладкий атлас. Будем говорить, что $Z \subset M$ **имеет меру ноль относительно \mathcal{A}** , если для любой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ множество $\varphi(Z \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль. Из задачи 9.5 непосредственно вытекает, что если $Z \subset M$ — множество меры ноль относительно некоторого гладкого атласа, то Z также является множеством меры ноль относительно соответствующей гладкой структуры. Такие Z называются просто **множествами меры ноль**.¹

Задача 9.6. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение n -мерных гладких многообразий, и $Z \subset M$ — множество меры ноль. Тогда $F(Z)$ — множество меры ноль.
- (2) Пусть Z — подмножество меры ноль в гладком многообразии M . Покажите, что $M \setminus Z$ всюду плотно в M .

Выше мы определили интеграл от дифференциальной формы по гладкому ориентированному компактно-му многообразию через разбиение единицы. Заметим, что функции, задающие разбиение единицы, устроены по отношению к интегрированию слишком сложно, и умножение формы на них приводит обычно к тому, что вычислить не численным образом соответствующие интегралы в картах не представляется возможным (попробуйте посчитать длину окружности с помощью разбиения единицы). Чтобы обойти эти сложности, опишем

¹В действительность, множества меры ноль — это в точности множества нулевой меры Лебега.

другой подход, существенно упрощающий вычисления. Если бы мы определяли интеграл от формы через интеграл Лебега, то можно было бы поступить так: выкинуть из многообразия M такое множество меры ноль, чтобы оставшаяся часть распалась на открытые подмножества U_i , лежащие в некоторых картах. Так как множество меры ноль не влияет на величину интеграла, сумма интегралов от координатных записей ограничений формы на U_i и равнялась бы искомому интегралу.

Однако, в случае с интегралом Римана этот алгоритм требует уточнения. Чтобы понять имеющиеся тонкости, мы напомним ряд фактов, относящихся к свойствам интеграла Римана.

9.4 Об интеграле Римана

Напомним, что интеграл Римана определяется для функций, заданных на подмножествах \mathbb{R}^n , измеримых по Жордану. Семейство таких множеств образует кольцо, т.е. замкнуто относительно конечных пересечений, объединений и разности (можно ограничиться пересечениями и симметрической разностью). Отметим, что семейство множеств, измеримых по Лебегу, образует сигма-алгебру, т.е. замкнуто также относительно счетных объединений и пересечений, а, кроме того, содержит все пространство \mathbb{R}^n . Таким образом, семейство множеств, измеримых по Жордану, беднее семейства множеств, измеримых по Лебегу в плане возможных преобразований. Еще одним существенным отличием является то, что не всякое открытое и не всякое компактное подмножество \mathbb{R}^n измеримы по Жордану. В качестве примера можно рассмотреть подмножество отрезка, называемое **толстым множеством Кантора** или **fat Cantor set** (строится похоже на канторов дисконтинуум, только на каждом шаге выкидывается более короткий интервал, что приводит к нигде не плотному множеству положительной меры Лебега). Толстое канторово множество компактно и не измеримо по Жордану. Его дополнение в отрезке — открытое подмножество прямой, — также не измеримо по Жордану. В отличие от описанной только что ситуации, семейство измеримых по Лебегу множеств содержит как все открытые в \mathbb{R}^n множества, так и все замкнутые там множества, в частности, все компакты.

Эти “особенности” интеграла Римана приводят к тому, что нужно аккуратно выбирать множества, по которым мы собираемся интегрировать (например, нельзя непосредственно интегрировать по дополнению в отрезке к толстому множеству Кантора). Описанные только что проблемы и ряд других приводят некоторых авторов к ограничению понятия атласа, когда в качестве подмножеств \mathbb{R}^n , которым гомеоморфны области определения карт, выбирают открытые шары, т.е. множества, заведомо измеримые по Жордану. Последнее вытекает из следующего критерия измеримости по Жордану: **множество измеримо по Жордану, если и только если оно ограничено, а его граница имеет меру ноль.**² Чтобы определить интеграл от функции, заданной на ограниченном множестве A , которое, возможно, не измеримо по Жордану, нужно рассмотреть какое-нибудь измеримое по Жордану множество B , включающее носитель функции, продолжить функцию нулем на это B , и интеграл по A определить как интеграл Римана по B от этого продолжения, если, конечно, продолжение интегрируемо по Риману (далее нужно показать, что интеграл Римана не зависит от выбора такого B).

В частном случае, который особенно важен для нас в связи с использованием интеграла Римана для интегрирования дифференциальных форм по гладким компактным многообразиям, мы имеем дело с формами, полученными из данной умножением на функции из разбиения единицы, подчиненного некоторому гладкому атласу. Так как носитель, обозначим его K , — замкнутое подмножество многообразия, компактного по предположению, сам носитель компактен. Так как непрерывный образ компакта также компактен, то для содержащей K карты (U, φ) его образ $\varphi(K)$ компактен в $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Как мы уже отмечали, множество $\varphi(U)$ не обязано быть измеримым по Жордану: оно может не быть ограниченным, а также его граница может оказаться “толстой”. Чтобы определить интеграл от формы в этой карте, поступают так: или включают множество $\varphi(K)$ во внутренность достаточно большого шара или куба в \mathbb{R}^n (они могут не лежать в $\varphi(U)$), или же, если требуется, чтобы замыкание этого измеримого по Жордану множества содержалось в $\varphi(U)$, покрывают $\varphi(K)$ открытыми шарами, лежащими в $\varphi(U)$ вместе со своими границами, выбирают конечное подпокрытие и получают открытое множество, граница которого лежит в $\varphi(U)$ и содержится в объединении конечного числа множеств меры ноль — границ оставшихся шаров, так что это конечное объединение шаров измеримо по Жордану. Далее пользуются продолжением, описанным выше. Именно в этом смысле нужно воспринимать данное выше определение интеграла от дифференциальной формы по гладкому многообразию.

Возникает еще один вопрос: а будет ли продолжение функции интегрируемо по Риману? И вообще, какие функции интегрируемы по Риману? Ответ на эти вопросы вытекает из критерия Лебега интегрируемости: **функция, определенная на измеримом по Жордану множестве, является интегрируемой по Риману, если и только если она ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру ноль.** В

²В [1] такие множества называются **областями интегрирования**.

частности, в рассматриваемом случае дифференциальных форм у нас имеется гладкая функция с компактным носителем, который мы включили во внутренность измеримого по Жордану множества, поэтому такая функция будет интегрируема по Риману.

Напомним ряд свойств интеграла Римана от функций, заданных на измеримых по Жордану подмножествах \mathbb{R}^n .

Предложение 9.7. Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану, $x = (x^1, \dots, x^n)$ — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , а dx обозначает $dx^1 \cdots dx^n$ из записи n -кратного интеграла. Через $\text{vol } D$ обозначим $\int_D 1 dx$ и будем называть **объемом множества** D . Пусть f и g — непрерывные ограниченные функции на D . Тогда

- (1) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется $\int_D (a f + b g) dx = a \int_D f dx + b \int_D g dx$ (линейность по функции);
- (2) если D имеет меру ноль, то $\int_D f dx = 0$;
- (3) если множества $D_1, \dots, D_k \subset D$ измеримы по Жордану, покрывают D , и при $i \neq j$ каждое пересечение $D_i \cap D_j$ имеет меру ноль, то

$$\int_D f dx = \int_{D_1} f dx + \cdots + \int_{D_k} f dx$$

(аддитивность по множеству);

- (4) если $f \geq 0$, то $\int_D f dx \geq 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $f = 0$ на $\text{Int } D$ (если $\text{Int } D = \emptyset$, то считаем это условие выполненным);
- (5) $(\inf_D f) \text{vol } D \leq \int_D f dx \leq (\sup_D f) \text{vol } D$;
- (6) $|\int_D f dx| \leq \int_D |f| dx$;

Предложение 9.8 (Замена переменных). Пусть D — подмножество \mathbb{R}^n с декартовыми координатами $x = (x^1, \dots, x^n)$, а E — подмножество \mathbb{R}^n с декартовыми координатами $y = (y^1, \dots, y^n)$. Предположим, что множества D и E открыты и измеримы по Жордану. Обозначим \bar{D} и \bar{E} их замыкания. Пусть $F: \bar{D} \rightarrow \bar{E}$ — гладкое отображение, для которого $F(D) = E$ и $F|_D$ — диффеоморфизм с образом. Обозначим $y = y(x)$ координатную запись отображения F . Тогда для каждой непрерывной функции $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ имеем

$$\int_E f(y) dy^1 \cdots dy^n = \int_D f(y(x)) |\det(x_y)| dx^1 \cdots dx^n.$$

Предложение 9.9 (Теорема Фубини). Пусть $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ — брус в \mathbb{R}^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n , а $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ выполняется

$$\int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n = \int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} \left(\cdots \left(\int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x^1, \dots, x^n) dx^{\sigma(1)} \right) \cdots \right) dx^{\sigma(n)}.$$

Приведенные свойства интеграла Римана могут быть использованы как для более детального обоснования рассуждений, проведенных выше, так и для доказательства следующего результата.

Задача 9.10 (*). Пусть M — гладкое компактное ориентированное n -мерное многообразие и ω — дифференциальная n -форма на M . Пусть D_1, \dots, D_k — открытые подмножества \mathbb{R}^n , измеримые по Жордану, и пусть для каждого i задано гладкое отображение $F_i: \bar{D}_i \rightarrow M$ из замыканий \bar{D}_i множеств D_i в M (гладкость означает, что каждое отображение F_i продолжается до гладкого отображения на некоторое открытое множество, содержащее \bar{D}_i). Предположим, что

- при каждом i ограничение F_i на D_i — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм на открытое подмножество W_i многообразия M (сохранение ориентации означает, что в каждой координатной записи относительно ориентированного гладкого атласа на M определитель матрицы Якоби положителен);
- $W_i \cap W_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- $\text{supp } \omega \subset \bar{W}_1 \cup \cdots \cup \bar{W}_k$.

Тогда

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega.$$

Замечание 9.11. Отметим, что $(F_i(D_i), F_i^{-1})$ из задачи 9.10 являются картами из максимального ориентированного атласа на M , поэтому $F_i^* \omega$ — это просто координатная запись формы ω в карте $(F_i(D_i), F_i^{-1})$, а интеграл $\int_M \omega$ равен сумме интегралов от этих координатных записей.

Пример 9.12. Покажем, как посчитать интеграл от формы объема по стандартной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть (x, y, z) — декартовы координаты в \mathbb{R}^3 . Введем на S^2 с выкинутым меридианом сферические координаты (φ, θ) , т.е. в этих координатах рассматриваемая часть сферы задается в виде $x = \cos \theta \cos \varphi$, $y = \cos \theta \sin \varphi$, $z = \sin \theta$. Положим $D = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, тогда отображение $F: (\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ можно рассматривать и на всей плоскости с координатами (φ, θ) . Это отображение — гладкое как отображение в \mathbb{R}^3 , поэтому оно является также гладким как отображение на сферу, так как каждая точка сферы включается в карту, на которой локальными координатами являются две из трех координат x, y, z . На D отображение F является диффеоморфизмом с образом W , так как в сферических координатах на W координатная запись F — тождественное отображение. Эти же соображения говорят о том, что $F^* \omega$ — это координатная запись формы объема ω в сферических координатах. Напомним, что индуцированная на сфере метрика имеет вид $ds^2 = \cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$, поэтому $g = \cos^2 \theta$, а $\sqrt{g} = \cos \theta$, так как при $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ функция $\cos^2 \theta$ положительна. Таким образом,

$$\int_M \omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta d\varphi = 4\pi.$$

Замечание 9.13. Условие того, что отображения $F_i: \bar{D}_i \rightarrow M$ из задачи 9.10 являются гладкими вплоть до границы нужно для того, чтобы границы открытых множеств W_i имели меру ноль, и чтобы координатные записи форм $F_i^* \omega$ задавались ограниченными функциями. Таким образом, вместо условия гладкости можно наложить условие на меру границ множеств W_i , а вместо реализации второго условия рассматривать несобственные интегралы Римана. Отметим, что в случае замены Римана на Лебега таких разнообразных проблем не возникает. Обсуждение различных вариантов соответствующих утверждений в математическом анализе можно найти, например в [2], [3] и [4].

9.5 Общая формула Стокса

Следующая теорема обобщает классические результаты, излагаемые в математическом анализе, а именно, формулу Грина, формулу Стокса и формулу Остроградского-Гаусса на случай многообразий произвольной размерности.

Теорема 9.14 (Общая формула Стокса). *Пусть M — гладкое компактное ориентированное n -мерное многообразие, $n \geq 1$, с возможно пустым краем ∂M , который, если не пуст, ориентирован канонически по отношению к ориентации M . Пусть ω — дифференциальная $(n-1)$ -форма на M . Тогда*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

причем если $\partial M = \emptyset$, то полагаем $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Замечание 9.15. Интеграл $\int_{\partial M} \omega$ в теореме 9.14, формально говоря, равен $\int_{\partial M} \iota^* \omega$, где $\iota: \partial M \rightarrow M$ — включение. Более наглядно, можно представлять, что ω в выражении $\int_{\partial M} \omega$ обозначает ограничение формы ω на ∂M , т.е. ω применяется лишь к векторам, касательным к краю ∂M многообразия M .

Доказательство теоремы 9.14. Напомним, что интеграл от дифференциальной формы ω по компактному ориентированному многообразию определяется как сумма интегралов от конечного числа форм ω_i таких, что носитель формы ω_i лежит в положительно ориентированной карте (U_i, φ_i) , причем $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас. Для каждой ω_i ее интеграл равен интегралу Римана по $\varphi_i(U_i)$ от координатной записи этой формы (детали см. в разделе 9.4). По теореме 9.3, эта сумма не зависит ни от выбора атласа, ни от представления ω в виде суммы форм ω_i . Так как правая и левая части доказываемой формулы линейны по формам, теорему достаточно доказать

для одной формы ω с носителем, лежащим в положительно ориентированной карте (U, φ) . При этом мы можем ограничиться картами любого вида, лишь бы из таких карт можно было составить атлас.

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Тогда ориентированная граница ∂M представляет собой конечный набор точек P , которым приписаны числа $\sigma(P)$, равные ± 1 : если в положительно ориентированной карте граничная точка имеет наименьшее значение (карта “выходит” из этой точки), то $\sigma(P) = -1$, иначе $\sigma(P) = 1$. Отметим, что, по определению, интеграл $\int_{\partial M} \omega$ равен $\sum_{P \in \partial M} \sigma(P) \omega(P)$, при этом, если граница пуста, то эта сумма полагается равной нулю.

Карту (U, φ) выберем так: пусть открытое множество $U \subset M$ связно, содержит не более одной граничной точки, причем $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_\lambda$ — это

- или интервал $(-1, 1)$, если U не содержит точек из ∂M ,
- или полуинтервал $[0, 1)$, если U содержит граничную точку P с $\sigma(P) = -1$, при этом $\varphi(P) = 0$,
- или полуинтервал $(-1, 0]$, если U содержит граничную точку P с $\sigma(P) = 1$, при этом $\varphi(P) = 0$.

Пусть t — локальная координата, заданная картой (U, φ) . Форма ω в случае $n = 1$ — гладкая функция, ее координатная запись $f(t)$ представляет ограниченную гладкую функцию с носителем в $\varphi(U)$, а $d\omega = f_t dt$ — координатная запись формы $d\omega$. Так как f — гладкая функция с носителем в U , ее продолжение нулем на замыкание множества $\varphi(U)$ — также гладкая функция, производная которой совпадает с продолжением нулем функции f_t . Эти продолжения будем обозначать теми же символами.

По определению интеграла $\int_M d\omega$, он равен $\int_{\varphi(U)} f_t dt$, а последний интеграл (см. раздел 9.4) — интегралу Римана от продолженной функции f_t по замыканию множества $\varphi(U)$. Вычислим этот интеграл для трех видов карты (U, φ) .

- В первом случае имеем $\int_{-1}^1 f_t(t) dt = f(1) - f(-1) = 0 = \int_{\partial M} \omega$.
- Во втором случае имеем $\int_0^1 f_t(t) dt = f(1) - f(0) = -f(0) = \sigma(P) \omega(P) = \int_{\partial M} \omega$.
- Во третьем случае имеем $\int_{-1}^0 f_t(t) dt = f(0) - f(-1) = f(0) = \sigma(P) \omega(P) = \int_{\partial M} \omega$.

Случай $n > 1$ разбирается аналогично. Карты (U, φ) , не пересекающие границу ∂M , будем выбирать так, чтобы $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_\lambda^n$ имело вид открытого куба $(-1, 1) \times (-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1)$. Если же карта (U, φ) пересекает границу, то выберем ее из адаптированного атласа в виде $(-1, 0] \times (-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1)$, так что часть границы ∂M , попавшей в U , имеет вид “грani” $\{0\} \times (-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1)$, причем, по определению индуцированной на границе ориентации, ограничение φ на эту “грань” задает ориентированную карту границы.

Пусть x^1, \dots, x^n — локальные координаты, заданные картой (U, φ) , а $\omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n} dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n$ — координатная запись формы ω , тогда

$$(d\omega)_{1 \dots n} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n})_{x^i}.$$

Снова будем обозначать теми же символами продолжения рассматриваемых функций нулем на замыкание множества $\varphi(U)$ и соответствующие интегралы Римана. На сей раз нам нужно разобрать два случая.

Пусть карта (U, φ) не пересекает границу, тогда

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} (d\omega)_{1 \dots n} dx^1 \cdots dx^n = \\ &= \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n})_{x^i} dx^1 \cdots dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 (\omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n})_{x^i} dx^1 \cdots dx^n = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 [\omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n}(x^1, \dots, 1, \dots, x^n) - \omega_{1 \dots \widehat{i} \dots n}(x^1, \dots, -1, \dots, x^n)] dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = \\ &= 0 = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

Пусть теперь карта (U, φ) пересекает границу, тогда

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} (d\omega)_{1\dots n} dx^1 \cdots dx^n = \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\omega_{1\dots\widehat{i}\dots n})_{x^i} dx^1 \cdots dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 (\omega_{1\dots\widehat{i}\dots n})_{x^i} dx^1 \cdots dx^n = \\ &\quad \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 [\omega_{2\dots n}(0, \dots, x^n) - \omega_{2\dots n}(-1, \dots, x^n)] dx^2 \cdots dx^n + \\ &\quad + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \int_{-1}^0 \cdots \int_{-1}^1 [\omega_{1\dots\widehat{i}\dots n}(x^1, \dots, 1, \dots, x^n) - \omega_{1\dots\widehat{i}\dots n}(x^1, \dots, -1, \dots, x^n)] dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = \\ &= \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \omega_{2\dots n}(0, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

Доказательство закончено. \square

Замечание 9.16. Общая формула Стокса имеет место и на некомпактных ориентированных многообразиях в предположении, что рассматриваемая дифференциальная форма имеет компактный носитель. Кроме того, эта теорема также переносится на многообразия с угловыми точками [1].

9.6 Некоторые следствия из общей формулы Стокса

Приведем некоторые следствия.

9.6.1 Формула Грина

Первое из них — двумерный евклидов вариант общей формулы Стокса, вытекающий из того, что на плоскости с декартовыми координатами x, y , дифференциал 1-формы $P dx + Q dy$ равен $(Q_x - P_y) dx \wedge dy$.

Задача 9.17 (Формула Грина). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, у которого замыкание \bar{D} компактно, а граница ∂D состоит из конечного числа замкнутых вложенных регулярных кривых. Пусть x, y — декартовы координаты, а P и Q — гладкие функции на \mathbb{R}^2 . Докажите, что

$$\int_{\bar{D}} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Интеграл в правой части формулы Грина называется **циркуляцией векторного поля** $X = (P, Q)$ **вдоль края** ∂D . Если на компоненте края — регулярной замкнутой кривой — ввести натуральный параметр s , а через T обозначить поле единичных векторов скорости для этой параметризации, то циркуляция поля X по этой компоненте будет иметь вид $\int \langle X, T \rangle ds$. Ниже мы приведем формулу Стокса для поверхностей, которая обобщает формулу Грина и содержит в своей правой части интеграл того же вида.

9.6.2 Выбор ориентации на подмногообразии коразмерности 1

Следующие два упражнения посвящены выбору ориентации на ориентируемом подмногообразии коразмерности 1 в ориентированном римановом многообразии. Ориентации выбираются согласовано с заранее заданным полем единичных нормалей вдоль подмногообразия. Эти результаты будут использованы в теоремах, обобщающих формулу Стокса для поверхностей и формулу Остроградского–Гаусса.

Задача 9.18. Пусть M — ориентированное n -мерное риманово многообразие, $n \geq 2$, у которого край ∂M ориентирован канонически. Выберем произвольную точку $P \in \partial M$ и пусть $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_P \partial M$ — положительно ориентированный базис. Тогда единственным образом определен единичный вектор $N \in T_P M$, ортогональный $T_P \partial M$ и такой, что N, e_1, \dots, e_{n-1} — положительно ориентированный базис $T_P M$.

(1) Покажите, что вектор N гладко зависит от точки P , т.е. N — векторное поле вдоль края ∂M .

- (2) Покажите, что в адаптированных координатах x^1, \dots, x^n в окрестности точки P угол между N и ∂_{x^1} острый (напомним, что в таких координатах окрестность лежит в полупространстве $x^1 \leq 0$, а часть края, попавшая в окрестность, — в гиперплоскости $x^1 = 0$).

Поле N из задачи 9.18 называется *полем внешних нормалей вдоль ∂M* . То, что в адаптированных координатах угол между нормалью N и базисным вектором ∂_{x^1} острый, оправдывает название “внешняя нормаль”. Также определим внешнюю нормаль и для одномерного риманова многообразия с краем. Для этого ориентируем одномерное многообразие в сторону граничной точки и возьмем в этой точке положительно ориентированный нормированный касательный вектор (если край связной компоненты состоит из двух точек, то выбираемые ориентации компоненты различные).

Задача 9.19. Пусть M — ориентированное n -мерное риманово многообразие и $S \subset M$ — ориентируемое подмногообразие размерности $n - 1$ с индуцированной из M римановой метрикой. Покажите, что вдоль S существуют поля единичных нормалей (если S — связно, то таких полей ровно два).

Пусть N — одно из этих полей. Ориентируем S . Будем говорить, что ориентация S *согласована с полем N* , если для каждой точки $P \in S$ базис касательного пространства $T_P M$, полученный последовательной записью вектора N и векторов положительно ориентированного базиса $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_P S$, также положительно ориентирован.

9.6.3 Векторные поля вдоль подмногообразий коразмерности 1 и их потоки

Пусть M — гладкое многообразие с непустым краем ∂M . *Векторным полем вдоль края ∂M* называется гладкое сечение ограничения касательного расслоения TM на край ∂M (в каждой точке края $P \in \partial M$ рассматриваем касательный вектор из $T_P M$). Если M — ориентированное риманово многообразие с канонически ориентированным краем, X — векторное поле вдоль края ∂M , а N — поле внешних нормалей, то вдоль края определена гладкая функция $\langle X, N \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, заданное римановой метрикой. Если $\Omega_{\partial M}$ — форма объема на крае, а край ∂M компактен, то интеграл $\int_{\partial M} \langle X, N \rangle \Omega_{\partial M}$ называется *поток векторного поля X через край ∂M* .

Аналогично, если M — ориентированное n -мерное риманово многообразие, $S \subset M$ — ориентируемое подмногообразие размерности $n - 1$ с индуцированной из M римановой метрикой, N — поле единичных нормалей вдоль S , а X — векторное поле вдоль S , то на S определена гладкая функция $\langle X, N \rangle$. Если S ориентировано в согласии с N , и Ω_S — форма объема на S , то интеграл $\int_S \langle X, N \rangle \Omega_S$ называется *поток векторного поля X через подмногообразие S* .

9.6.4 Формула Остроградского–Гаусса и формула Стокса для поверхностей

Напомним, что в упражнении 8.2 мы ввели инвариантную запись ротора и дивергенции векторного поля, определенного на \mathbb{R}^3 . Эти записи также имеют место и для многообразий. Подробнее, пусть M — ориентированное n -мерное риманово многообразие, $X \in \mathfrak{X}(M)$ — векторное поле, а $I: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ — операция опускания индекса. Тогда формула $\operatorname{div} X = *d*I(X)$ задает функцию и в случае, когда $n > 3$, а метрика произвольна. Эта функция по-прежнему называется *дивергенцией векторного поля X* .

Задача 9.20 (Формула Остроградского–Гаусса). Пусть M — ориентированное компактное риманово многообразие произвольной размерности и X — векторное поле на M . Пусть N — поле внешних нормалей вдоль края ∂M (край может быть пустым). Обозначим Ω_M и $\Omega_{\partial M}$ формы объема многообразия M и его края ∂M (на крае рассматриваются индуцированная метрика и каноническая ориентация). Докажите, что

$$\int_M (\operatorname{div} X) \Omega_M = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \Omega_{\partial M},$$

т.е. интеграл от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через границу многообразия M (если $\partial M = \emptyset$, то в правой части формулы стоит 0).

Определение ротора непосредственно не обобщается на размерность больше 3, так как в формуле $\operatorname{rot} X = I^{-1} * dI(X)$ оператор I^{-1} неприменим в силу того, что $*dI(X)$ — это $(n - 2)$ -форма. Таким образом, *ротор* определим лишь для трехмерных многообразий.

Задача 9.21 (Формула Стокса для поверхностей). Пусть M — ориентированное трехмерное риманово многообразие, а $S \subset M$ — компактное ориентируемое двумерное подмногообразие с индуцированной римановой метрикой. Пусть N — поле единичных нормалей вдоль S . Ориентируем S согласованно с полем N . Ориентируем край ∂S согласованно с выбранной ориентацией S . Так как ∂S одномерно, в каждой точке $P \in \partial S$ однозначно определен единичный вектор $T \in T_P \partial S$, образующий положительно ориентированный базис пространства $T_P \partial S$. Легко видеть, что семейство таких векторов образует векторное поле вдоль S .

Пусть X — векторное поле, определенное на некотором открытом подмножестве многообразия M , содержащем S . Покажите, что тогда

$$\int_S \langle \text{rot } X, N \rangle \Omega_S = \int_{\partial S} \langle X, T \rangle \Omega_{\partial S}.$$

9.6.5 Теорема “о барабане”

Формула Стокса позволяет также объяснить, почему барабан не схлопывается на край. Соответствующая теорема верна и для непрерывных отображений. Мы же докажем ее лишь для гладких.

Теорема 9.22. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар, и S — его граничная сфера. Тогда не существует гладкого отображения $F: B \rightarrow S$, неподвижного на S .

Доказательство. Действительно, пусть такое отображение существует. Рассмотрим на шаре B стандартную ориентацию, унаследованную из \mathbb{R}^n , а на крае — каноническую ориентацию, и пусть ω — форма объема на S . Тогда $\int_S \omega > 0$. С другой стороны, $d\omega = 0$, поэтому $d(F^*\omega) = 0$. Кроме того, так как отображение F неподвижно на S , от ограничение формы $F^*\omega$ на S совпадает с ω . По теореме Стокса,

$$0 < \int_S \omega = \int_S F^*\omega = \int_B d(F^*\omega) = 0,$$

противоречие. □

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. - 2nd revised ed, 2012. - 708 p.
- [2] Apostol T.M. *Mathematical Analysis*, 2nd edn. Addison–Wesley, Reading, 1974.
- [3] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edn. McGraw–Hill, New York, 1976.
- [4] Strichartz R.S. *The Way of Analysis*, revised edn. Jones & Bartlett, Boston, 2000.

Упражнения к главе 9

Упражнение 9.1. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $K \subset U$ — выпуклый компакт, и $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение. Тогда F — липшицево отображение. Если x^i и y^j — декартовы координаты в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно, а $\|F\|(x) = \sqrt{\sum_{i,j} (y_{x^i}^j)^2}$ и $C = \sup_{x \in K} \|F\|(x)$, то C — константа Липшица отображения F .
- (2) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $Z \subset U$ — множество меры ноль, и $F: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, причем $m \geq n$. Тогда $F(Z)$ — тоже множество меры ноль.

Упражнение 9.2. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение n -мерных гладких многообразий, и $Z \subset M$ — множество меры ноль. Тогда $F(Z)$ — множество меры ноль.
- (2) Пусть Z — подмножество меры ноль в гладком многообразии M . Покажите, что $M \setminus Z$ всюду плотно в M .

Упражнение 9.3 (Формула Грина). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, у которого замыкание \bar{D} компактно, а граница ∂D состоит из конечного числа замкнутых вложенных регулярных кривых. Пусть x, y — декартовы координаты, а P и Q — гладкие функции на \mathbb{R}^2 . Докажите, что

$$\int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Упражнение 9.4. В цилиндрической системе координат r, φ, z задано векторное поле $X = (z, r\varphi, \cos \varphi)$ и кривая $\gamma(t) = (a, 0, t)$, $t \in [0, 1]$. Вычислите циркуляцию поля X вдоль кривой γ .

Упражнение 9.5. Пусть M — ориентированное n -мерное риманово многообразие, $n \geq 2$, у которого край ∂M ориентирован канонически. Выберем произвольную точку $P \in \partial M$ и пусть $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_P \partial M$ — положительно ориентированный базис. Тогда единственным образом определен единичный вектор $N \in T_P M$, ортогональный $T_P \partial M$ и такой, что N, e_1, \dots, e_{n-1} — положительно ориентированный базис $T_P M$.

- (1) Покажите, что вектор N гладко зависит от точки P , т.е. N — векторное поле вдоль края ∂M .
- (2) Покажите, что в адаптированных координатах x^1, \dots, x^n в окрестности точки P угол между N и ∂_{x^1} острый (напомним, что в таких координатах окрестность лежит в полупространстве $x^1 \leq 0$, а часть края, попавшая в окрестность, — в гиперплоскости $x^1 = 0$).

Упражнение 9.6. Пусть M — ориентированное n -мерное риманово многообразие и $S \subset M$ — ориентируемое подмногообразие размерности $n - 1$ с индуцированной из M римановой метрикой. Покажите, что вдоль S существуют поля единичных нормалей (если S — связно, то таких полей ровно два).

Упражнение 9.7 (Формула Остроградского–Гаусса). Пусть M — ориентированное компактное риманово многообразие произвольной размерности и X — векторное поле на M . Пусть N — поле внешних нормалей вдоль края ∂M (край может быть пустым). Обозначим Ω_M и $\Omega_{\partial M}$ формы объема многообразия M и его края ∂M (на крае рассматриваются индуцированная метрика и каноническая ориентация). Докажите, что

$$\int_M (\operatorname{div} X) \Omega_M = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \Omega_{\partial M},$$

т.е. интеграл от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через границу многообразия M (если $\partial M = \emptyset$, то в правой части формулы стоит 0).

Упражнение 9.8. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — гладкое компактное трехмерное подмногообразие с краем ∂M , причем начало координат $O \in \mathbb{R}^3$ — внутренняя точка M . Пусть x, y, z — декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , а $X = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ — векторное поле на $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Найдите поток векторного поля X через ∂M .

Упражнение 9.9. Пусть r, φ, θ — сферические координаты в \mathbb{R}^3 , а $X = (1/r^2, 0, 0)$ — векторное поле в стандартной области определения этих координат. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — гладкое компактное трехмерное подмногообразие с краем ∂M , целиком лежащее в области определения сферических координат. Найдите поток векторного поля X через ∂M .

Упражнение 9.10 (Формула Стокса для поверхностей). Пусть M — ориентированное трехмерное риманово многообразие, а $S \subset M$ — компактное ориентируемое двумерное подмногообразие с индуцированной римановой метрикой. Пусть N — поле единичных нормалей вдоль S . Ориентируем S согласованно с полем N . Ориентируем край ∂S согласованно с выбранной ориентацией S . Так как ∂S одномерно, в каждой точке $P \in \partial S$ однозначно определен единичный вектор $T \in T_P \partial S$, образующий положительно ориентированный базис пространства $T_P \partial S$. Легко видеть, что семейство таких векторов образует векторное поле вдоль S .

Пусть X — векторное поле, определенное на некотором открытом подмножестве многообразия M , содержащем S . Покажите, что тогда

$$\int_S \langle \operatorname{rot} X, N \rangle \Omega_S = \int_{\partial S} \langle X, T \rangle \Omega_{\partial S}.$$

Упражнение 9.11. Пусть в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 с координатами x, y, z задан тор T^2 , являющийся поверхностью вращения вокруг оси z окружности $(x-2)^2 + z^2 = 1$, лежащей в плоскости $y = 0$. Введем на T^2 ориентацию так, чтобы базис объемлющего пространства \mathbb{R}^3 , полученный из внешней нормали, дополненной положительно ориентированным базисом касательного пространства, был положительно ориентирован.

- (1) Вычислите площадь тора T^2 .
- (2) Вычислите интеграл по тору T^2 от функции $f(x, y, z) = z^2 + 1$.
- (3) Вычислите интеграл по тору T^2 от дифференциальной 2-формы $\omega = z dx \wedge dy$.

Лекция 10

Когомологии де Рама.

План. Замкнутые формы, точные формы, пространство когомологий, классы когомологий, когомологии диффеоморфных многообразий, перенесение форм назад индуцирует отображение в когомологиях, геометрический смысл нулевых когомологий, когомологии промежутка, когомологии окружности, когомологии и формула Стокса, старшие когомологии замкнутого ориентируемого многообразия, гомотопическая инвариантность когомологий, лемма Пуанкаре, первые когомологии сфер, точная последовательность Майера–Вьеториса (формулировка), применение точной последовательности Майера–Вьеториса для вычисления когомологий сфер, градуированная алгебра когомологий де Рама.

Применим разработанную выше технику к изучению топологии гладких многообразий. Если два топологических пространства гомеоморфны, то для проверки этого факта достаточно построить гомеоморфизм. А как доказать негомеоморфность пространств? Как мы уже обсуждали, один из приемов — найти некоторые топологические свойства, которые у рассматриваемых пространств различны. Например, отрезок не гомеоморфен полуинтервалу, так как отрезок — компакт, а полуинтервал — нет. Но в некоторых случаях такие характеристики найти не так просто. Скажем, как отличить двумерную сферу от двумерного тора? Мы разберем одну математическую конструкцию, которая часто позволяет решать задачи такого типа. Для простоты мы будем заниматься лишь гладкими многообразиями: мы покажем, как можно построить по гладкому многообразию и целому неотрицательному числу k векторное пространство, которое называется пространством k -ых когомологий де Рама, причем у диффеоморфных многообразий k -ые когомологии равны (изоморфны) при каждом k . Таким образом, если такие пространства у двух многообразий различны, то и сами многообразия не диффеоморфны. Отметим, что непосредственное вычисление когомологии — сложная задача. Тем не менее, как мы покажем, у многообразий, которые не просто гомеоморфны, но и могут быть получены друг из друга деформациями, когомологии тоже изоморфны. Так мы докажем лемму Пуанкаре, вычисляющую когомологии \mathbb{R}^n и, значит, когомологии любого диффеоморфного ему открытого подмножества \mathbb{R}^n . Эта теорема мгновенно получается из того, что \mathbb{R}^n можно продеформировать в точку, и поэтому у \mathbb{R}^n и точки когомологии одинаковые. Перейдем к деталям.

10.1 Когомологии де Рама: определения и примеры

Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Для каждого неотрицательного целого k рассмотрим пространство $\Omega^k(M)$ дифференциальных k -форм на M . Заметим, что в силу косой симметрии, все такие пространства для $k > n$ состоят ровно из одного элемента — нулевого сечения расслоения $A^k M$, слой которого — нулевое векторное пространство, которое мы обозначим 0 . Внешние дифференциалы задают последовательность линейных отображений, дополненную, для удобства изложения, формальным отображением $\Omega^{-1}(M) := 0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(M)$:

$$\Omega^{-1}(M) := 0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0 \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

Форма $\omega \in \Omega^k(M)$ называется **замкнутой**, если $d\omega = 0$, и **точной**, если существует форма $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$, для которой $\omega = d\eta$. Отметим, что 0 -форма является точной, если и только если она равна 0 . Таким образом, множество всех замкнутых k -форм, которое мы обозначим $Z^k(M)$, является ядром линейного отображения d_k и, значит, линейным подпространством в $\Omega^k(M)$. Аналогично, множество всех точных k -форм, обозначаемое $B^k(M)$, является образом линейного отображения d_{k-1} , поэтому тоже представляет собой линейное подпространство. Так как $d_k \circ d_{k-1} = 0$ по предложению 8.6, имеем $B^k(M) \subset Z^k(M)$, и поэтому мы можем определить факторпространство $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$, называемое **k -ым пространством когомологий де Рама**

или, для краткости, просто **k -ым пространством когомологий**.¹ Элементы пространства $H^k(M)$ называются **классами когомологий**. Если ω — замкнутая k -форма на M , то ее класс когомологий будем обозначать $[\omega]$. Таким образом, $[\omega] = \omega + B^k(M)$ — аффинное подпространство в $Z^k(M)$. Замкнутые дифференциальные k -формы, принадлежащие одному классу когомологий, называются **когомологичными**. Таким образом, две замкнутые k -формы когомологичны, если и только если их разность — точная форма.

Так как диффеоморфизм является отождествлением гладких многообразий, сохраняющим все дифференцируемые свойства последних, **у диффеоморфных многообразий k -ые пространства когомологий изоморфны**. Отсюда, в частности, вытекает, что если у двух гладких многообразий какие-то k -ые пространства когомологий имеют разные размерности, то многообразия недиффеоморфны.

Теорема 10.1. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, тогда для отображения $F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ выполняется

- $F^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$ и
- $F^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$,

поэтому корректно определено отображение $F^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$, $F^*[\omega] = [F^*\omega]$, являющееся гомоморфизмом векторных пространств. Кроме того,

- $\text{id}^*: H^k(M) \rightarrow H^k(M)$ — тождественное отображение;
- если $G: N \rightarrow W$ — гладкое отображение гладких многообразий, то $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*: H^k(W) \rightarrow H^k(M)$;
- если F — диффеоморфизм, то отображение $F^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ обратимо и $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}: H^k(M) \rightarrow H^k(N)$.

Доказательство. Оба включения вытекают из того, что F^* и внешний дифференциал d коммутируют в силу предложения 8.6. Остальные утверждения проверяются непосредственно. \square

Приведем примеры вычисления когомологий.

10.1.1 Примеры вычисления когомологий

Прежде всего отметим, что у n -мерного многообразия при $k > n$ все $H^k(M)$ равны 0, так что имеет смысл вычислять лишь $H^k(M)$ для $0 \leq k \leq n$.

Пример 10.2 (Топологический смысл нулевых когомологий). Пусть многообразие M имеет p связных компонент. Тогда $H^0(M) = \mathbb{R}^p$ (здесь и в дальнейшем мы будем использовать значок равенства также в смысле “изоморфно”). Действительно, как было замечено, $B^0(M) = 0$, а дифференциальная 0-форма $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$, т.е. гладкая функция, является замкнутой, если и только если $df = 0$, что равносильно постоянству функции f на каждой связной компоненте (проверьте). Таким образом, каждая такая функция f однозначно задается приписывание каждой связной компоненте многообразия M некоторой константы, поэтому $Z^0(M) = \mathbb{R}^p = H^0(M)$.

Пример 10.3 (Когомологии промежутка). Так как прямая \mathbb{R} связна, то $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Вычислим $H^1(\mathbb{R})$. Пусть $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$. Так как $\Omega^2(\mathbb{R}) = 0$, то все 1-формы замкнуты, т.е. $Z^1(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R})$. Пусть x — декартова координата на \mathbb{R} , тогда $\omega = f(x) dx$. Форма ω точна, если и только если существует такая гладкая функция $F \in \Omega^0(\mathbb{R})$, для которой $\omega = dF = F_x(x) dx = f(x) dx$. Положим $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, тогда $F_x = f$, так что каждая 1-форма ω на прямой \mathbb{R} точна, т.е. $B^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})$, так что $H^1(\mathbb{R}) = 0$. Так как интервал диффеоморфен прямой, у интервала когомологии де Рама те же самые. Ровно так же показывается, что первые когомологии де Рама отрезка и полуинтервала (конечного или бесконечного) совпадают с когомологиями прямой. Тем самым, вы вычислили когомологии любого промежутка.

Пример 10.4 (Когомологии окружности). Так как окружность S^1 связна, то $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Кроме того, $Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1)$. Ориентируем окружность так, чтобы стандартная угловая координата была положительно ориентированной. Теперь мы можем интегрировать 1-формы, а это, в свою очередь, дает возможность определить линейное отображение $\Psi: \Omega^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(\omega) = \int_{S^1} \omega$. Пусть ω — точная форма, тогда $\omega = dF$ для

¹В литературе часто пространства $H^k(M)$ называют **группами когомологий**, акцентируя внимание лишь на операции сложения. Это связано с тем, что имеются и другие способы построения аналогичных объектов, в которых уже нет умножения на элементы поля.

некоторой гладкой функции, откуда $\Phi(\omega) = \int_{S^1} dF = 0$, где последнее равенство вытекает из теоремы Стокса, так как $\partial S^1 = \emptyset$. Тем самым, $B^1(S^1) \subset \ker \Psi$. Покажем, что на самом деле вместо предыдущего включения имеет место равенство.

Для этого рассмотрим произвольную форму $\omega \in \Omega^1(S^1)$, для которой $\Psi(\omega) = 0$. Пусть $G: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $G(t) = (\cos t, \sin t)$, — гладкое отображение, тогда форма $G^*\omega$ имеет вид $G^*\omega = g(t) dt$. По определению перенесения формы назад, имеем $g(t) = \omega(\dot{G}(t))$. Так как $\dot{G}(t) = \dot{G}(t + 2\pi)$, то функция $g(t)$ является 2π -периодической. В силу примера 10.3, существует гладкая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g dt = df$, т.е. $g = f'$.

Отметим, что ограничение отображения G на каждый отрезок $[a, a + 2\pi]$ — гладкое, а на каждый интервал $(a, a + 2\pi)$ — диффеоморфизм с образом, сохраняющий ориентацию (на прямой выбирается стандартная ориентация), поэтому в силу задачи 9.10,

$$0 = \int_{S^1} \omega = \int_{(a, a+2\pi)} G^*\omega = \int_{[a, a+2\pi]} G^*\omega = \int_a^{a+2\pi} g(t) dt = \int_a^{a+2\pi} f'(t) dt = f(a+2\pi) - f(a),$$

т.е. f — также 2π -периодическая функция на \mathbb{R} . Но тогда f порождает гладкую функцию $F: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке $P \in S^1$, представленной в виде $P = (\cos t, \sin t)$, число $f(t)$ (это сопоставление не меняется при замене t на $t + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому корректно определено). Заметим, что для каждого $a \in \mathbb{R}$ отображение $(G|_{(a, a+2\pi)})^{-1}$ является координатным гомеоморфизмом, задающим на $S^1 \setminus \{G(a)\}$ локальную координату t , для которой координатные записи ω и F имеют вид $g(t) dt$ и $f(t)$, поэтому в каждом таком координатах имеем $\omega = dF$. Так как карты такого вида образуют атлас, заключаем, что это же соотношение выполняется и на всей окружности S^1 .

Итак, мы показали, что ядро линейного отображения Ψ совпадает с $B^1(S^1)$. С другой стороны, образ этого отображения равен или 0, или \mathbb{R} . Рассмотрим форму Ω , которая каждому касательному вектору $\dot{G}(t)$ сопоставляет 1. Тогда ее координатная запись имеет вид dt . Аналогично проделанным выше вычислениям,

$$\Psi(\Omega) = \int_{S^1} \Omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,$$

поэтому образ отображения Ψ отличен от нуля, так что он равен \mathbb{R} , откуда, по известной теореме из линейной алгебры,

$$H^1(S^1) = Z^1(S^1)/B^1(S^1) = \Omega^1(S^1)/\ker \Psi = \text{im } \Psi = \mathbb{R}.$$

10.2 Когомологии и формула Стокса

Формула Стокса непосредственно влечет целый ряд результатов, касающихся вида пространств когомологий де Рама. Приведем некоторые из них.

Следствие 10.5. Пусть M — компактное ориентированное n -мерное многообразие и ω — дифференциальная $(n-1)$ -форма на M . Тогда

- если $\partial M = \emptyset$, то $\int_M d\omega = 0$;
- если $d\omega = 0$, то $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Следствие 10.5 легко обобщается.

Следствие 10.6. Пусть M — произвольное гладкое n -мерное многообразие, а ω — дифференциальная k -форма на M , причем $k < n$. Предположим, что M содержит ориентированное замкнутое k -мерное подмногообразие S такое, что $\int_S \omega \neq 0$. Тогда

- форма ω на M не является точной, и
- если форма ω — замкнута, то S не является границей никакого ориентируемого компактного подмногообразия в M .

Пусть теперь M — ориентированное компактное n -мерное **риманово** многообразие. В задаче 7.3 мы определили дифференциальную n -форму Ω риманова объема, которая в локальных координатах x^1, \dots, x^n , заданных положительно ориентированной картой, записывается в виде $\sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Задача 10.7. Пусть M — ориентированное компактное риманово многообразие, Ω — его форма объема и $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладкая неотрицательная функция. Покажите, что $\int_M f \Omega \geq 0$, причем равенство нулю достигается, если и только если $f \equiv 0$.

Из задачи 10.7 вытекает, что интеграл $\int_M \Omega$ всегда строго положительный. Он называется **объемом** ориентированного риманова многообразия M и обозначается $\text{vol } M$. Величина $\int_M f \Omega$ называется **интегралом от функции** $f \in \mathcal{F}(M)$ и иногда обозначается просто $\int_M f$.

Пусть M — замкнутое (компактное без края) ориентируемое многообразие. Из следствия 6.23 заключаем, что на нем можно ввести риманову метрику, а это задаст форму объема. Как было отмечено выше, интеграл от формы объема отличен от нуля, поэтому, учитывая следствие 10.5, заключаем, что форма объема не может быть точной. Итак, мы доказали

Следствие 10.8. На замкнутом ориентируемом n -мерном многообразии M существует дифференциальная n -форма, не являющаяся точной. В частности, для такого многообразия M выполняется $H^n(M) \neq 0$.

Замечание 10.9. В действительности, для замкнутого ориентируемого n -мерного многообразия выполняется $H^n(M) = \mathbb{R}$. Это вытекает, например, из двойственности Пуанкаре, см. например [1]. Если многообразие некомпактно, то это уже не так. Например, $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$ при $n > 0$, см. ниже.

10.3 Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама

Как мы уже отмечали, диффеоморфные гладкие многообразия имеют изоморфные когомологии. Оказывается, что понятие диффеоморфизма можно существенно ослабить, сохраняя при этом изоморфность когомологий де Рама.

Пусть M — гладкое многообразие без края, на котором задано два гладких отображения $f_0, f_1: M \rightarrow N$ в произвольное (возможно, с краем) гладкое многообразие N . Отображения f_0 и f_1 называются **гладко гомотопными**, если существует гладкое отображение $F: [0, 1] \times M \rightarrow N$ такое, что $f_0(x) = F(0, x)$ и $f_1(x) = F(1, x)$ для любого $x \in M$. Иными словами, если для фиксированного $t \in [0, 1]$ положить $f_t(x) = F(t, x)$, то гладкая гомотопность f_0 и f_1 означает возможность гладко продеформировать одно из этих отображений в другое, где f_t и есть некоторая гладкая деформация. Отображение F , а также семейство отображений f_t , называются **гладкой гомотопией, соединяющей f_0 и f_1** .

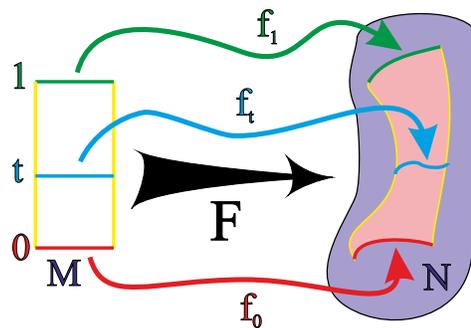


Рис. 10.1: Гладкая гомотопия, соединяющая отображения f_0 и f_1 .

Замечание 10.10. Понятие гомотопии можно определить и для непрерывных отображений топологических пространств: достаточно опустить слово “гладкий”. Однако в нашем курсе мы будем рассматривать только гладкие гомотопии, так что слово “гладкий” мы опустим именно по этой последней причине. Итак, в дальнейшем **гомотопия означает гладкую гомотопию**.

Теорема 10.11. Пусть $f_0, f_1: M \rightarrow N$ — гомотопные отображения из гладкого многообразия M с пустым краем в гладкое многообразие N . Пусть ω — замкнутая дифференциальная k -форма на N , тогда формы $f_0^* \omega$ и $f_1^* \omega$ когомологичны.

Доказательство. Пусть $F: [0, 1] \times M \rightarrow N$ — гомотопия, соединяющая f_0 и f_1 . Так как ω — замкнутая форма, то, в силу предложения 8.6, форма $\eta := F^*\omega$ также замкнута. Введем на многообразии $[0, 1] \times M$ локальные координаты x^0, x^1, \dots, x^n , где x^0 — стандартная координата на $[0, 1]$, а x^1, \dots, x^n — локальные координаты в открытом множестве $U \subset M$. Пусть $0 < i_1 < \dots < i_k$. Следующие уравнения вытекают из условия $d\eta = 0$, записанного во введенных локальных координатах:

$$(\eta_{i_1 i_2 \dots i_k})_{x^0} = (\eta_{0 \widehat{i_1} i_2 \dots i_k})_{x^{i_1}} - (\eta_{0 i_1 \widehat{i_2} \dots i_k})_{x^{i_2}} + \dots$$

Проинтегрируем эти уравнения по x^0 на отрезке $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (\eta_{i_1 i_2 \dots i_k})_{x^0} dx^0 = (f_1^*\omega)_{i_1 i_2 \dots i_k} - (f_0^*\omega)_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \int_0^1 \eta_{0 \widehat{i_1} i_2 \dots i_k} dx^0 - \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \int_0^1 \eta_{0 i_1 \widehat{i_2} \dots i_k} dx^0 + \dots$$

Определим на U семейство гладких функций

$$\alpha_{j_1 \dots j_{k-1}}^U = \int_0^1 \eta_{0 j_1 \dots j_{k-1}} dx^0.$$

Пусть x^1, \dots, x^n — другие локальные координаты на M , определенные в некотором открытом множестве $U' \subset M$ таким, что $U \cap U' \neq \emptyset$. Тогда x^0, x^1, \dots, x^n — другие локальные координаты на $[0, 1] \times U'$. Отметим, что функции перехода к этим координатам от исходных имеют вид $x^0 = x^0$ и $x^{j_p} = x^{j'_p}(x^1, \dots, x^n)$, т.е. функции $x^{j'_p}$ не зависят от x^0 . Из сказанного вытекает, что на $U \cap U'$ компоненты формы η в двух выбранных системах координат связаны так:

$$\eta_{0 j_1 \dots j_{k-1}} = x_{x^{j'_1}}^{j_1} \dots x_{x^{j'_{k-1}}}^{j_{k-1}} \eta_{0 j'_1 \dots j'_{k-1}},$$

поэтому, после интегрирования этого равенства по x^0 на отрезке $[0, 1]$, получим

$$\alpha_{j'_1 \dots j'_{k-1}}^{U'} = x_{x^{j'_1}}^{j_1} \dots x_{x^{j'_{k-1}}}^{j_{k-1}} \alpha_{j_1 \dots j_{k-1}}^U,$$

так что определенные для каждого U гладкие функции $\alpha_{j_1 \dots j_{k-1}}^U$ являются координатными записями глобально определенной дифференциальной $(k-1)$ -формы, которую мы обозначим α .

Теперь уже ясно, что $d\alpha = f_1^*\omega - f_0^*\omega$, так что формы $f_0^*\omega$ и $f_1^*\omega$ когомологичны. \square

Следствие 10.12. Пусть $f_0, f_1: M \rightarrow N$ — гомотопные отображения из гладкого многообразия M с пустым краем в гладкое многообразие N . Тогда отображения f_0 и f_1 индуцируют одинаковые отображения $f_0^* = f_1^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ на пространствах когомологий при всех k .

Два гладких многообразия M и N называются **гомотопически эквивалентными**, если существуют такие гладкие отображения $F: M \rightarrow N$ и $G: N \rightarrow M$, что их композиции гомотопны тождественным отображениям. Так как тождественное отображение многообразия индуцирует тождественное отображение в когомологиях, то, по следствию 10.12 и теореме 10.1, в случае многообразий с пустым краем, имеем (на уровне когомологий)

$$F^* \circ G^* = \text{id}: H^k(M) \rightarrow H^k(M) \quad \text{и} \quad G^* \circ F^* = \text{id}: H^k(N) \rightarrow H^k(N),$$

откуда мгновенно заключаем

Следствие 10.13. У гомотопически эквивалентных многообразий с пустым краем k -ые когомологии изоморфны при каждом k .

Пример 10.14. Заметим, что пространство \mathbb{R}^n гомотопически эквивалентно точке \mathbb{R}^0 . Действительно, рассмотрим два однозначно определенных линейных отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^0$ и $G: \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда композиция $F \circ G$ — тождественное отображение на \mathbb{R}^0 , а композиция $G \circ F$ отображает все \mathbb{R}^n в начало координат. Рассмотрим отображение $\Phi: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное так: $\Phi(t, x) = tx$. Тогда отображение Φ — гладкое, $\Phi(0, x) = (G \circ F)(x)$, а $\Phi(1, x) = x$, т.е. является тождественным отображением на \mathbb{R}^n . Таким образом, отображение $G \circ F$ гомотопно тождественному, что доказывает гомотопическую эквивалентность \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^0 . Из следствия 10.13 вытекает, что $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, а при $k > 0$ выполняется $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$.

Из примера 10.14 и того факта, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковые когомологии, вытекает следующий результат.

Следствие 10.15 (Лемма Пуанкаре). *На гладком многообразии без края у каждой точки имеется координатная окрестность (например, гомеоморфная открытому шару или всему евклидову пространству), в которой при $k \geq 1$ каждая замкнутая k -форма является точной.*

Замечание 10.16. Лемма Пуанкаре имеет место и для многообразий с краем. Ее доказательство может быть получено дословным повторением, если предварительно развить теорию многообразий с угловыми точками.

Пример 10.17 (Первые когомологии стандартных сфер). Применим лемму Пуанкаре для вычисления первых когомологий стандартной сферы S^n , $n \geq 2$. Пусть P_1 и P_2 — “северный” и “южный полюса” сферы S^n , а $U_i = S^n \setminus \{P_i\}$, тогда каждое U_i диффеоморфно \mathbb{R}^n , так что для него имеет место лемма Пуанкаре. Более того, U_i — области определения атласа из стандартной гладкой структуры на S^n , где координатные гомеоморфизмы — соответствующие стереографические проекции.

Пусть ω — произвольная замкнутая 1-форма на S^n . Мы покажем, что форма ω точна. Для этого рассмотрим ограничение ω_i формы ω на U_i и, пользуясь леммой Пуанкаре, найдем гладкие функции F_i на U_i такие, что $\omega_i = dF_i$. На $U_1 \cap U_2$ определены обе формы ω_i , и $0 = \omega_1 - \omega_2 = dF_1 - dF_2 = d(F_1 - F_2)$, откуда, в силу связности $U_1 \cap U_2$, функция $F_1 - F_2$ постоянна. Пусть $F_1 - F_2 = c$, тогда функция $F'_2 = F_2 + c$ также удовлетворяет условию $dF'_2 = \omega_2$, но на сей раз $F_1 = F'_2$ на пересечении $U_1 \cap U_2$. Следовательно, функции F_1 и F'_2 “склеиваются” в единую гладкую функцию $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega = dF$. Последнее и доказывает точность ω , а также и то, что $H^1(S^n) = 0$ при $n \geq 2$.

10.4 Точная последовательность Майера–Вьеториса

Для вычисления когомологий используются многочисленные точные последовательности, про одну из которых мы сейчас поговорим. Мы лишь сформулируем результат и покажем на примерах, как эта последовательность работает. Заинтересованные слушатели могут обратиться например к [1].

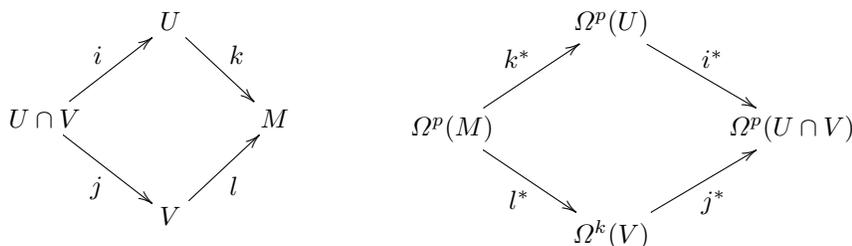
Напомним определение точной последовательности в интересующем нас случае векторных пространств. Последовательность векторных пространств и линейных отображений между последовательными ее элементами

$$\dots \xrightarrow{F_{p-2}} V_{p-1} \xrightarrow{F_{p-1}} V_p \xrightarrow{F_p} V_{p+1} \xrightarrow{F_{p+1}} \dots$$

такие, что $\ker F_p = \text{im } F_{p-1}$ для каждого допустимого p , называется **точной**. В следующей таблице приводятся некоторые фрагменты точной последовательности и то, что означает наличие такого фрагмента:

ФРАГМЕНТ	ЗНАЧЕНИЕ
$U \xrightarrow{F} V \rightarrow 0$	F — сюръекция
$0 \rightarrow U \xrightarrow{F} V$	F — инъекция
$0 \rightarrow U \xrightarrow{F} V \rightarrow 0$	F — изоморфизм
$0 \longrightarrow U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W \longrightarrow 0$	U вкладывается в V в виде ядра $\ker G = \text{im } F = F(U)$, а $W = \text{im } G = G(V)$ — образ отображения G , поэтому, отождествляя U с его образом $F(U) \subset V$, получаем изоморфизм $W = V/U$

Пусть теперь M — гладкое многообразие, U и V — открытые подмножества M , для которых $M = U \cup V$. Включения $U \cap V$ в открытые множества U и V , которые, в свою очередь, включаются в M , порождают соответствующие отображения на пространствах дифференциальных p -форм, что изображено на следующей диаграмме:



По отображениям из предыдущей диаграммы строится новая последовательность линейных отображений:

$$(10.1) \quad \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V).$$

Так как линейные отображения в диаграмме коммутируют в внешним дифференциалом, то каждое из этих отображений индуцирует соответствующее отображение в когомологиях. Итак, для каждого p мы построили цепочку

$$H^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p(U \cap V).$$

Напомним, что внешний дифференциал увеличивает на 1 степень дифференциальной формы, так что у нас есть шанс продолжить эту цепочку. Оказывается, это действительно можно сделать.

Теорема 10.18 (Майер–Вьеторис). Пусть M — гладкое многообразие, U и V — открытые подмножества M , для которых $M = U \cup V$. Тогда для любого p существует линейное отображение $\delta: H^p(U \cap V) \rightarrow H^{p+1}(M)$ такое, что следующая последовательность точна:

$$(10.2) \quad \dots \xrightarrow{\delta} H^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \dots$$

Точная последовательность (10.2) называется *последовательностью Майера–Вьеториса для открытого покрытия* $\{U, V\}$.

Не смотря на то, что мы явно не указали, как отображение δ строится, точность последовательности Майера–Вьеториса позволяет вычислять когомологии разных пространств. Проиллюстрируем это, вычислив когомологии всех стандартных сфер S^n .

Пример 10.19 (Когомологии сферы). Отметим, что S^0 — двоеточие (граница отрезка), так что $H^0(S^0) = \mathbb{R}^2$, а все остальные когомологии S^0 равны нулю. Далее, для $n \geq 1$ все сферы S^n связны, поэтому для них $H^0(S^n) = \mathbb{R}$. В случае S^1 вычисление когомологий было осуществлено в примере 10.4: единственные ненулевые когомологии — это $H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbb{R}$. Наконец, в примере 10.17 мы вычислили первые когомологии сфер S^n для $n \geq 2$: все они оказались равными нулю. Этих начальных данных достаточно для того, чтобы с помощью последовательности Майера–Вьеториса вычислить все оставшиеся пространства когомологий стандартных сфер.

Итак, фиксируем $p \geq 2$, покроем сферу S^n , $n \geq 2$, двумя открытыми множествами U_i , диффеоморфными \mathbb{R}^n , как это мы сделали в примере 10.17, и для пары $\{U_1, U_2\}$ выпишем следующий фрагмент последовательности Майера–Вьеториса:

$$H^{p-1}(U_1) \oplus H^{p-1}(U_2) \xrightarrow{i^* - j^*} H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^p(S^n) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2).$$

Заметим, что при $p \geq 2$, в силу леммы Пуанкаре, $H^{p-1}(U_i) = 0$ и $H^p(U_i) = 0$, поэтому $H^p(S^n) = H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$. С другой стороны, $U_1 \cap U_2$ гомотопически эквивалентно “экватору” S^{n-1} , так что, по следствию 10.13, $H^{p-1}(U_1 \cap U_2) = H^{p-1}(S^{n-1})$. Итак, мы показали, что при $p \geq 2$ выполняется $H^p(S^n) = H^{p-1}(S^{n-1})$. Полагая $p = n$, получаем цепочку

$$H^n(S^n) = H^{n-1}(S^{n-1}) = \dots = H^1(S^1) = \mathbb{R}.$$

Для $1 < p < n$ получаем другую цепочку:

$$H^p(S^n) = H^{p-1}(S^{n-1}) = \dots = H^1(S^{n-p+1}) = 0.$$

Итак, мы показали, что при $n \geq 1$ единственными ненулевыми когомологиями являются $H^0(S^n)$ и $H^n(S^n)$, и оба эти пространства изоморфны \mathbb{R} .

Задача 10.20. Вычислите вторые когомологии двумерной сферы, не пользуясь точной последовательностью Майера–Вьеториса.

Задача 10.21. Вычислите когомологии де Рама

- (1) плоскости без точки;
- (2) листа Мёбиуса;
- (3) прямого кругового цилиндра;
- (4) n -мерного евклидова пространства с выброшенным линейным подпространством размерности k .

10.5 Градуированная алгебра когомологий де Рама

Выше мы определили внешнее умножение дифференциальных форм разных степеней и выяснили, как оно ведет себя по отношению к внешнему дифференцированию (предложение 8.6). В следующей задаче выясняется, что внешнее произведение можно определить и на уровне когомологий де Рама.

Задача 10.22. Пусть M — гладкое многообразие, а $[\omega] \in H^k(M)$ и $[\eta] \in H^l(M)$ — классы когомологий, и $\omega_1 \in [\omega]$, $\eta_1 \in [\eta]$. Покажите, что $[\omega \wedge \eta] = [\omega_1 \wedge \eta_1]$, так что внешнее произведение корректно определяет отображение $\wedge: H^k(M) \oplus H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$.

Полезно объединить все пространства когомологий в единый алгебраический объект, а именно, рассмотреть прямую сумму $H(M) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} H^k(M)$, где при отрицательных k мы полагаем $H^k(M) = 0$. Напомним, что при $k > \dim M$ также выполняется $H^k(M) = 0$. Таким образом, элементы $H(M)$ представляют собой двусторонние последовательности, в которых лишь конечное число отлично от 0. Теперь линейные комбинации и внешнее произведение можно рассматривать как операции на $H(M)$. Таким образом, относительно линейных комбинаций $H(M)$ представляет линейное пространство, а внешнее произведение превращает $H(M)$ в алгебру. Наконец, то, что элементам слагаемых $H^k(M)$, из которых составлено пространство $H(M)$, приписывается степень k , называется *градуировкой*. Линейные комбинации сохраняют градуировку, а внешнее произведение градуировки складывает. Такие алгебры называются *градуированными*. Итак, $H(M)$ — градуированная алгебра.

Задача 10.23. Опишите градуированную алгебру $H(S^n)$. Покажите, что форма объема на S^n , $n \geq 2$, не может быть представлена в виде внешнего произведения замкнутых форм степени k и l , где $0 < k, l < n$.

Литература

- [1] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. — 2nd revised ed, 2012. - 708 p.

Упражнения к главе 10

Упражнение 10.1. Пусть M — ориентированное компактное риманово многообразие, Ω — его форма объема и $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладкая неотрицательная функция. Покажите, что $\int_M f \Omega \geq 0$, причем равенство нулю достигается, если и только если $f \equiv 0$.

Упражнение 10.2. Вычислите вторые кохомологии двумерной сферы, не пользуясь точной последовательностью Майера–Вьеториса.

Упражнение 10.3. Вычислите кохомологии де Рама

- (1) плоскости без точки;
- (2) листа Мёбиуса;
- (3) прямого кругового цилиндра;
- (4) n -мерного евклидова пространства с выброшенным линейным подпространством размерности k .

Упражнение 10.4. Пусть M — гладкое многообразие, а $[\omega] \in H^k(M)$ и $[\eta] \in H^l(M)$ — классы кохомологий, и $\omega_1 \in [\omega]$, $\eta_1 \in [\eta]$. Покажите, что $[\omega \wedge \eta] = [\omega_1 \wedge \eta_1]$, так что внешнее произведение корректно определяет отображение $\wedge: H^k(M) \oplus H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$.

Упражнение 10.5. Опишите градуированную алгебру $H(S^n)$. Покажите, что форма объема на S^n , $n \geq 2$, не может быть представлена в виде внешнего произведения замкнутых форм степени k и l , где $0 < k, l < n$.

Лекция 11

Степень гладкого отображения.

План. Регулярные и критические точки, а также регулярные и критические значения гладкого отображения гладких многообразий, теорема Сарда, топология множества регулярных значений, степень отображения по отношению к регулярному значению, структура прообраза регулярного значения, классификация (топологическая и гладкая) связных одномерных многообразий, теорема об инвариантности степени отображения относительно регулярного значения при гомотопии, диффеотопия, возможность перевести диффеотопией любую точку в любую на связном гладком многообразии с пустой границей, независимость степени от выбора регулярного значения, определение степени отображения, простейшие свойства степени отображения, теорема “о причесывании ежа”, основная теорема арифметики, степень отображения и интеграл от формы старшей степени и ее прообраза, приложение теоремы о степени и интеграле, теорема Гаусса–Бонне, теорема об индексе векторного поля, теорема Брауэра о неподвижной точке, теорема о барабане.

В настоящем разделе мы опишем основы теории степени отображения $F: M \rightarrow N$ гладких многообразий. Имеются многочисленные вариации и обобщения этого понятия. В частности, степень также определяется и для непрерывных отображений топологических многообразий. В случае, когда многообразия ориентируемые и имеют одну размерность, мы

- выбираем некоторые ориентации;
- берем “хорошие точки” $Q \in N$, т.е. такие, что прообраз $F^{-1}(Q)$ состоит из конечного числа точек $P \in F^{-1}(Q)$ (в частности, прообраз может быть пуст), и в каждой такой точке P дифференциал $dF|_P$ невырожден;
- приписываем точкам $P \in F^{-1}(Q)$ “знаки”, т.е. числа ± 1 : если $dF|_P$ сохраняет ориентацию, то приписываем $+1$, а если нет — то -1 ;
- складываем полученные ± 1 , и полученное число $\deg_Q F$ называем степенью отображения F относительно Q , причем если прообраз был пуст, то результатом считается 0.

Если больше ничего не требовать от многообразий M и N , то может оказаться, что “хороших точек” вообще нет, или что полученная величина зависит от выбора “хорошей точки”, чего хотелось бы избежать (приведите соответствующие примеры). Тем не менее, если на многообразия наложить ряд дополнительных ограничений, то получится вполне содержательное понятие: “хорошие точки” будут существовать всегда, их будет много, а величина $\deg_Q F$ не будет зависеть от Q .

Приведем список ограничений на многообразия M и N , для которых мы будем определять степень гладкого отображения $F: M \rightarrow N$. Мы будем требовать, чтобы гладкие ориентированные многообразия M и N одной размерности были бы еще и замкнутыми (компактными без края), а многообразие N — связным. В этом случае, как оказывается, степень не будет зависеть от выбора “хорошего” значения. Кроме того, как мы выясним, степень не будет меняться при гладких гомотопиях.

Итак, для содержательного определения степени, нам нужно договориться о смысле термина “хорошая точка” и доказать, что, при правильном выборе понятия, таких точек достаточно много. Под “хорошими точками” будем понимать регулярные значения отображения F , которые мы определим в следующем разделе. Доказательство того, что регулярных значений достаточно много опирается на знаменитую лемму Сарда [1], которую некоторые авторы [3] дополняют результатами Брауна [2] и называют теоремой Сарда–Брауна, а некоторые [5] дополняют также результатами Морса [4] и называют теоремой Морса–Сарда–Брауна. Кроме того, встречаются варианты “теорема Бертини–Сарда” [6], а иногда эту лемму связывают с именем Стернберга [7].

11.1 Теорема Сарда и следствия из нее

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $m = \dim M$ и $n = \dim N$. Определим понятие критической и регулярной точек отображения F . Традиционно имеется **два разных неэквивалентных определения**. Первое возникает тогда, когда речь идет о регулярных кривых, регулярных поверхностях и т.д. Здесь $m \leq n$, и для регулярности нужно требовать, чтобы ранг дифференциала dF равнялся m . В случае произвольных m и n этот подход называют регулярными те точки, в которых $\text{rank } dF$ максимален, т.е. равен $\min(m, n)$.

Другое определение, которое нужно для теоремы Сарда, связано с изучением меры образа отображения F , и критичность точек должна приводить к тому, что образ множества таких точек будет “маленьким”. В частности, при $m < n$ все точки нужно называть критическими. Именно в этом смысле мы будем использовать понятие критическая и регулярная точка в дальнейших разделах. Таким образом, точку $P \in M$ будем называть **регулярной для отображения F** , если $\text{rank } dF|_P = n$, и **критической**, если $\text{rank } dF|_P < n$. Образы критических точек будем называть **критическими значениями**. Все остальные точки из N будем называть **регулярными значениями**. Таким образом, точка $Q \in N$ является регулярным значением для F , если или $F^{-1}(Q) = \emptyset$, или $F^{-1}(Q)$ состоит только из регулярных точек. Множество критических точек отображения F обозначим C_F , а множество регулярных точек — через R_F . По определению, $R_F = M \setminus C_F$.

Теорема 11.1 (Сард). Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Тогда множество $F(C_F)$ критических значений отображения F имеет меру 0.

Теорема Сарда вытекает из аналогичного результата для евклидовых пространств, который обычно доказывается в курсе математического анализа, а также из возможности выбрать на многообразии счетный атлас и того, что счетное объединение множеств меры ноль также является множеством меры ноль.

Следствие 11.2. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Тогда множество регулярных значений $N \setminus F(C_F)$ отображения F представляет собой не более чем счетное пересечение открытых всюду плотных множеств, в частности, оно всюду плотно. Если многообразие M компактно, то множество $N \setminus F(C_F)$ открыто.

Доказательство. Так как $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, то для каждой его регулярной точки $P \in M$ существует открытая окрестность, в которой F регулярно (так как дифференциал непрерывно зависит от точки). Отсюда следует, что R_F — открытое подмножество M и, значит, множество C_F замкнуто. Так как каждое многообразие является σ -компактным, т.е. покрывается счетным числом компактных подмножеств, см. раздел 1.1.3, то и C_F представимо в виде объединения не более чем счетного числа компактных подмножеств. Так как непрерывный образ компакта также является компактом, а компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут, то множество $F(C_F)$ критических значений отображения F представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств $N_i \subset N$. Так как $F(C_F)$, в силу теоремы Сарда, имеет меру ноль, его внутренность пуста. Таким образом, каждое N_i — замкнутое множество с пустой внутренностью, поэтому $U_i := N \setminus N_i$ — открытое всюду плотное подмножество N . Отсюда заключаем, что

$$N \setminus F(C_F) = N \setminus \cup N_i = \cap (N \setminus N_i) = \cap U_i.$$

То, что $N \setminus F(C_F)$ всюду плотно вытекает из теоремы Бэра для локально компактных пространств.

Если многообразие M компактно, то замкнутое его подмножество C_F также компактно, поэтому $F(C_F)$ компактно и, значит, замкнуто в N , откуда множество регулярных значений $N \setminus F(C_F)$ открыто и всюду плотно. \square

11.2 Степень гладкого отображения

Начнем с определения степени относительно регулярного значения и покажем ее гомотопическую инвариантность, что в дальнейшем позволит доказать независимость степени от выбора регулярного значения.

11.2.1 Степень отображения относительно регулярного значения, ее гомотопическая инвариантность

Пусть M и N — замкнутые, т.е. компактные без края, ориентированные гладкие n -мерные многообразия, а $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. По следствию 11.2, множество регулярных значений отображения F — открытое и всюду плотное в N , поэтому оно непусто.

Выберем произвольное регулярное значение $Q \in N$. Так как $\{Q\}$ — замкнутое подмножество N , то $F^{-1}(Q)$ также замкнуто и, значит, компактно в M . С другой стороны, для каждой точки $P \in F^{-1}(Q)$ существует окрестность U такая, что $F|_U$ — диффеоморфизм с открытым множеством $F(U)$, в частности, $U \cap F^{-1}(Q) = \{P\}$. Таким образом, в индуцированной на $F^{-1}(Q)$ топологии каждое одноточечное множество $\{P\}$ открыто. Таким образом, топология компакта $F^{-1}(Q)$ дискретна и, значит, он состоит из конечного числа точек $\{P_1, \dots, P_k\}$.

Каждой точке P_α припишем число $\sigma(P_\alpha) \in \{-1, 1\}$, равное 1 тогда и только тогда, когда $dF|_{P_\alpha}$ сохраняет ориентацию. Последнее означает, что если $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ — локальные координаты в окрестности P_α , заданные положительно ориентированной картой, а $y = (y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в окрестности Q , также заданные положительно ориентированной картой, то $\sigma(P_\alpha) = \text{sign det}(y_{x_\alpha}^q)|_{P_\alpha} =: \text{sign det}(y_{x_\alpha})|_{P_\alpha}$. Положим

$$\deg_Q F = \sum_{\alpha=1}^k \sigma(P_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^k \text{sign det}(y_{x_\alpha})|_{P_\alpha}.$$

Полученное число называется *степенью отображения F относительно регулярного значения Q* .

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 11.3. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $m = \dim M$, $n = \dim N$, и $Q \in \text{Int } N$ — регулярное значение F . Тогда $W := F^{-1}(Q)$ — гладкое подмногообразие в M размерности $m - n$, причем $\partial W = F^{-1}(Q) \cap \partial M$.

Доказательство. Для $P \in W$ и $Q = F(P)$ рассмотрим координатные окрестности U^P и U^Q такие, что U^Q не пересекает границу и выполняется $F(U^P) \subset U^Q$. Запишем F в соответствующих координатах.

Если $P \in \text{Int } M$, то выберем в качестве U^P окрестность, также не пересекающую границу. Тогда во всех точках $W \cap U^P$ дифференциал отображения F будет иметь максимальный ранг, поэтому применима теорема о неявной функции. Эта теорема позволяет представить W в некоторой, возможно меньшей окрестности, в виде графика векторнозначной функции над открытым множеством $V \subset \mathbb{R}^{m-n}$. Но тогда проекция этого графика на V будет картой на W .

Пусть теперь $P \in \partial M$, тогда координаты в U^P меняются в некоторой окрестности в \mathbb{R}_λ^n . По определению дифференцируемости в граничных точках, координатные функции отображения F продолжаются до гладких функций в некоторые окрестности пространства \mathbb{R}^n , пересечение которых также является некоторой окрестностью U в \mathbb{R}^n . Так как в точке P отображение F имеет максимальный ранг, то это же верно и в некоторой, возможно меньшей окрестности. Снова используем теорему о неявной функции, представляем часть W в некоторой окрестности точки P в виде графика векторнозначной функции, на сей раз определенной над открытым множеством V в \mathbb{R}_λ^{m-n} . И снова проекция на V задает некоторую карту. Непосредственно проверяется, что так определенное семейство карт порождает гладкую структуру на W и превращает W в гладкое подмногообразие. Осталось заметить, что у всех точек $P \in W \cap \text{Int } M$ были окрестности, гомеоморфные открытым множествам в \mathbb{R}^{m-n} , а у точек $P \in W \cap \partial M$ — окрестности, гомеоморфные открытым подмножествам \mathbb{R}_λ^{m-n} , причем P соответствует точке на границе \mathbb{R}_λ^{m-n} . \square

Следующий факт, не смотря на тривиальность формулировки, имеет непростое доказательство, см. подробности в [9] и [10].

Теорема 11.4. Пусть M — связное одномерное топологическое (гладкое) многообразие. Тогда M гомеоморфно (диффеоморфно) одному из четырех многообразий: интервалу $(0, 1)$, полуинтервалу $[0, 1)$, отрезку $[0, 1]$, окружности S^1 . Таким образом, компактные одномерные многообразия — это отрезки и окружности.

Теорема 11.5. Пусть M и N — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия, и предположим, что $\Phi: [0, 1] \times M \rightarrow N$ — гомотопия, соединяющая гладкие отображения F_0 и F_1 , где $F_0(x) = \Phi(0, x)$ и $F_1(x) = \Phi(1, x)$. Пусть $Q \in N$ является регулярным значением как для Φ , так и для отображений F_0 и F_1 (такое Q существует, так как множество регулярных значений открыто и всюду плотно, а пересечение даже не более чем счетного числа открытых и всюду плотных множеств непусто). Тогда $\deg_Q F_0 = \deg_Q F_1$.

Доказательство. Если $n = 0$, то M и N — конечные наборы точек, а ориентация состоит в приписывании точкам знаков ± 1 . Гомотопность отображений F_0 и F_1 в этом случае означает их совпадение, так что в этом случае степени равны. Пусть теперь $n > 0$.

По лемме 11.3, множество $\Phi^{-1}(Q)$ является гладким одномерным подмногообразием в $W := [0, 1] \times M$. Так как Φ непрерывно, а W компактно как произведение компактов, то $\Phi^{-1}(Q)$ — компакт. Заметим, что каждое компактное многообразие состоит из конечного числа компонент.¹ Действительно, у каждой точки точки

¹Для общих топологических, и даже метрических пространств это не верно, например, для сходящейся последовательности точек прямой, к которой добавлен предел.

многообразия есть связная открытая окрестность, поэтому связные компоненты открыты и образуют открытое дизъюнктивное покрытие многообразия, так что если это покрытие бесконечно, то из него нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Итак, $\Phi^{-1}(Q)$ состоит из конечного числа компонент, каждая из которых, в силу теоремы 11.4, диффеоморфна или окружности, или отрезку. По лемме 11.3, окружности не пересекают $\partial W = (\{0\} \times M) \sqcup (\{1\} \times M)$, а компоненты, диффеоморфные отрезку, пересекают ∂W в точности по своим границам. Это последние компоненты обозначим $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$.

Заметим, что каждая компонента Γ_i может пересекать или одно из множеств $\{j\} \times M$, или оба эти множества. Мы покажем, что если Γ_i пересекает одно из $\{j\} \times M$, то на концах Γ_i отображение F_j ведет себя противоположным образом: в одном из концов ориентация сохраняется, а в другом — меняется, поэтому эта пара точек дает нулевой вклад в степень $\deg_Q F_j$. Если же Γ_i пересекает оба $\{j\} \times M$, то в каждом из них концевые точки дают один и тот же вклад в степени $\deg_Q F_0$ и $\deg_Q F_1$.

Чтобы это все показать, выберем произвольную компоненту Γ_i , обозначим ее для краткости Γ , и, превратив ее в регулярную кривую $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, ориентируем все пространства $T_{\gamma(t)}W$ следующим образом. Так как вся кривая $\gamma(t)$ переходит при отображении Φ в одну точку, то ее вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ входит в ядро отображения $d\Phi|_{\gamma(t)}$. Пусть $\Pi \subset T_{\gamma(t)}W$ — **трансверсальное** $\dot{\gamma}(t)$ линейное подпространство, т.е. подпространство коразмерности 1, не содержащее $\dot{\gamma}(t)$. Так как $\text{rank } d\Phi = n$, то ограничение $d\Phi$ на Π — изоморфизм с образом, т.е. с пространством $T_Q N$. Выберем в $T_Q N$ произвольный базис e_1, \dots, e_n , и пусть $v_i = (d\Phi|_{\Pi})^{-1}(e_i)$. Тогда ориентируем $T_{\gamma(t)}W$ так, чтобы его базис $\bar{v} = (\dot{\gamma}(t), v_1, \dots, v_n)$ был положительно ориентирован.

Лемма 11.6. *Заданная выше ориентация пространства $T_{\gamma(t)}W$ не зависит от выбора Π .*

Доказательство. Действительно, если Π' — другое такое подпространство, а $v'_i = (d\Phi|_{\Pi'})^{-1}(e_i)$ — базис Π' , то при каждом $s \in [0, 1]$ вектор $w_i^s = (1-s)v_i + s v'_i$ переводится отображением $d\Phi$ в e_i , поэтому векторы w_i^s линейно независимы, в частности, натянутое на них линейное пространство Π^s не содержит $\dot{\gamma}(t)$, так что $\bar{w}^s = (\dot{\gamma}(t), w_1^s, \dots, w_n^s)$ — базис $T_{\gamma(t)}W$. Матрица A^s перехода от базиса \bar{v} в базису \bar{w}^s непрерывно зависит от s , поэтому $\det(A^s)$ — непрерывная функция, всюду отличная от нуля. Но тогда эта функция всюду положительна, в частности, базисы \bar{v} и $\bar{v}' = (\dot{\gamma}(t), v'_1, \dots, v'_n)$ имеют одинаковые ориентации. \square

Далее, с помощью теоремы 4.8 (о ранге), выбрав соответствующие координаты, убеждаемся, что построенная ориентация непрерывно зависит от t , т.е. по отношению к какой-нибудь ориентации W все касательные пространства $T_{\gamma(t)}W$ ориентированы одинаково.

Напомним, что, в канонической ориентации края, базис касательного пространства к краю положительно ориентирован, если “внешняя нормаль”, т.е. вектор с первой положительной координатой, дополненный этим базисом, — положительно ориентированный базис в касательном пространстве ко всему многообразию. Воспользуемся этим соображением для завершения доказательства теоремы.

В качестве трансверсали Π в концевых точках компоненты Γ выберем гиперпространства, касательные к краю ∂W . Если Γ пересекает одну и ту же компоненту края $\{j\} \times M$, то в ее концах вектор $\dot{\gamma}$ направлен по-разному: в одном конце — внутрь W , а в другом конце — наружу. Отсюда вытекает, что в этих точках ориентация базиса v_1, \dots, v_n различная по отношению к ориентации M . Так как этот базис на обоих концах компоненты Γ получен из одного и того же базиса e_1, \dots, e_n , то дифференциал dF_j в одном из этих концов сохраняет, а в другом обращает ориентацию, поэтому суммарный вклад этих концов в $\deg_Q F_j$ равен нулю.

Пусть теперь граница Γ лежит в разных компонентах ∂W .

Лемма 11.7. *Ориентация многообразия W индуцирует противоположные ориентации компонент края $\{0\} \times M$ и $\{1\} \times M$, если рассматривать их как многообразие M после очевидного отождествления.*

Доказательство. Пусть $P \in M$, а $P_j \in \{j\} \times M$ — соответствующая P точка компоненты края. Рассмотрим связную координатную окрестность $U \subset M$ точки P из положительно ориентированного атласа на M , и пусть x^1, \dots, x^n — соответствующие координаты. Тогда t, x^1, \dots, x^n — положительно ориентированные координаты на связном открытом множестве $[0, 1] \times U \subset W$, где t — стандартная координата на $[0, 1]$ (вспомните, как задается ориентация декартова произведения ориентированных многообразий). Отсюда вытекает, что базисы $\partial_t, \partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ касательных пространств $T_{P_0}W$ и $T_{P_1}W$ — положительно ориентированы. Но, в канонической ориентации края, касательные пространства должны быть ориентированы по отношению к внешним нормальям. В нашем же случае “нормаль” $\partial_t|_{P_0}$ — внутренняя, а $\partial_t|_{P_1}$ — внешняя. Таким образом, ориентация компонент края задает противоположную ориентацию многообразия M . \square

Вернемся к доказательству теоремы. Отметим, что векторы $\dot{\gamma}$ в концах компоненты Γ в рассматриваемом случае также направлены по-разному: в одном конце — наружу, а в другом — внутрь. Отсюда и из леммы 11.7 вытекает, что базисы v_1, \dots, v_n в концах Γ имеют противоположные ориентации на крае ∂W и, значит, одинаковую ориентацию в M , так что эти концы дают одинаковые вклады в степени $\deg_Q F_0$ и $\deg_Q F_1$. \square

11.2.2 Диффеотопия

Применим теорему 11.5 для доказательства того, что степень не зависит от выбора регулярного значения. Пусть M — гладкое многообразие без границы, и $f_t: M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, — гомотопия, для которой f_0 — тождественное отображение, а все f_t — диффеоморфизмы. Тогда гомотопия f_t называется **диффеотопией**. Если $P, Q \in M$ такие, что $f_1(P) = Q$, то говорят, что диффеотопия f_t **переводит P в Q** .

Предложение 11.8. *Существует $0 < \varepsilon < 1$ такое, что для каждой точки открытого шара $U_\varepsilon(0) \in \mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса ε существует диффеотопия $f_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, переводящая 0 в эту точку и оставляющая на месте все точки вне открытого шара $U_1(0)$ с центром в 0 и радиуса 1.*

Доказательство. Случай $n = 0$ очевиден, поэтому пусть $n > 0$, и $x = (x^1, \dots, x^n)$ — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , а $\theta(x)$ — гладкая функция, для которой $\theta(0) = 1$ и $\text{supp } \theta \subset U_1(0)$ (в качестве θ можно взять соответствующую срезающую функцию). Положим

$$A = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\theta(x)|, |\theta_{x^1}(x)| \right\},$$

и возьмем произвольное $0 < \varepsilon < 1/A$. Так как $A \geq \theta(0) = 1$, то $\varepsilon < 1$. Выберем любое $a \in \mathbb{R}$, $|a| < \varepsilon$, и зададим отображение $F: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$F(t, x^1, \dots, x^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n) + t a (\theta(x), 0, \dots, 0),$$

тогда F — (гладкая) гомотопия. Более того, так как $\text{supp } \theta \subset U_1(0)$, гомотопия F оставляет неподвижными все точки вне $U_1(0)$. Покажем, что каждое отображение $f_t(x) = F(t, x)$ является диффеоморфизмом и, значит, F — диффеотопия.

Действительно, отображение f_t биективно, так как производная функции $g(x^1) := x^1 + t a \theta(x)$ по x^1 положительна и, значит, g — строго монотонно возрастающая функция при каждом фиксированном значении всех остальных переменных. Также при $x \notin \text{supp } \theta \subset U_1(0)$ функция g совпадает с тождественным отображением, поэтому g строго монотонно отображает \mathbb{R} на всю прямую \mathbb{R} и, значит, f_t гладко и биективно отображает \mathbb{R}^n на все \mathbb{R}^n . Кроме того, матрица Якоби отображения f_t невырождена в каждой точке (убедитесь в этом), поэтому каждое f_t — диффеоморфизм.

Заметим, что $f_1(0) = (a, 0, \dots, 0) \in U_\varepsilon(0)$, причем a можно выбирать любым из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, таким образом, начало координат 0 можно перевести диффеотопией в каждую точку из пересечения оси x^1 с шаром $U_\varepsilon(0)$. Чтобы перевести 0 в остальные точки шара $U_\varepsilon(0)$, будем рассматривать композиции f_t с соответствующими ортогональными преобразованиями. \square

Предложение 11.9. *Пусть M — гладкое многообразие с пустой границей, $U \subset M$ — связное открытое множество, а P и Q — точки из U . Тогда на M существует диффеотопия, переводящая P в Q .*

Доказательство. Рассмотрим непрерывную кривую $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$, для которой $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$, и покроем ее образ координатными окрестностями $U_{\gamma(t)} \subset U$ такими, что координатные гомеоморфизмы $\varphi_{\gamma(t)}$ переводят эти окрестности на все \mathbb{R}^n , отправляя точки $\gamma(t)$ в начало координат 0. Выберем $\varepsilon > 0$, для которого выполняется предложение 11.8, и пусть

$$W_{\gamma(t)} = \varphi_{\gamma(t)}^{-1}(U_\varepsilon(0)) \quad \text{и} \quad V_{\gamma(t)} = \varphi_{\gamma(t)}^{-1}(U_1(0)).$$

Так как отображение γ непрерывно, у каждого t имеется связная открытая окрестность $I_t \subset [0, 1]$ такая, что $\gamma(I_t) \subset W_{\gamma(t)}$. Семейство $\{I_t\}_{t \in [0, 1]}$ образует открытое покрытие отрезка $[0, 1]$. Выберем из него конечное подпокрытие $\{I_p := I_{t_p}\}$, удовлетворяющее следующим условиям: $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_k = 1$, причем для каждого $1 \leq p < k$ окрестности I_p и I_{p+1} пересекаются (докажите, что такое подпокрытие всегда существует).

Выберем в каждом $I_p \cap I_{p+1}$ произвольную точку c_p и положим $A_p = \gamma(t_p)$, $C_p = \gamma(c_p)$, тогда

- $P = A_1, C_1 \in W_{\gamma(0)}$,
- $C_{k-1}, A_k = Q \in W_{\gamma(1)}$,

- для $1 < p < k$ будет выполнено $C_{p-1}, A_p, C_p \in W_{\gamma(t_p)}$.

Пользуясь предложением 11.8, будем последовательно переводить точки $A_1 \rightarrow C_1 \rightarrow A_2 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k$ локальными диффеотопиями (в $U_{\gamma(t_p)}$), неподвижными вне соответствующих $V_{\gamma(t_p)}$, продолжая эти диффеотопии на все M тождественными отображениями. В результате мы переведем $A_1 = P$ в $A_k = Q$.

Чтобы получить результирующую диффеотопию, мы хотели бы “склеить” последовательные диффеотопии (после соответствующих замен параметра t) в единую диффеотопию. Если рассмотреть композицию этих диффеотопий, то возникает следующая проблема: в точках стыковки эти диффеотопии могут не гладко зависеть от параметра. Чтобы это исправить, рассмотрим срезающую функцию $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которая равна 0 на $[0, 1/3]$, монотонно возрастает до 1 на $[1/3, 2/3]$, и равна 1 на $[2/3, 1]$. Заменим каждую их построенных диффеотопий f_t на $f_{\theta(t)}$. Новые диффеотопии отличаются от старых лишь заменой параметра, но теперь их последовательное применение дает диффеотопию, гладко зависящую от t (эта конструкция аналогична гладкой параметризации сторон угла). \square

Задача 11.10. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть M — гладкое ориентированное многообразие с пустой границей, а $f_t: M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, — диффеотопия. Тогда каждое отображение f_t сохраняет ориентацию, т.е. дифференциал этого отображения переводит положительно ориентированный базис в положительно ориентированный.
- (2) Пусть M и N — гладкие замкнутые ориентированные n -мерные многообразия, $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, $f_t: N \rightarrow N$, $t \in [0, 1]$, — диффеотопия. Пусть Q — регулярное значение для F , а $Q_t = f_t(Q)$. Тогда Q_t — регулярное значение для $f_t \circ F$ и $\deg_{Q_t}(f_t \circ F) = \deg_Q F$.

11.2.3 Независимость степени от регулярного значения

Развитая выше техника позволяет доказать независимость степени отображения $F: M \rightarrow N$ от выбора регулярного значения, в предположении, что многообразии N еще и связно.

Следствие 11.11. Пусть M и N — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия, N — связно, а $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Тогда для любых регулярных значений Q и Q' отображения F выполняется $\deg_Q F = \deg_{Q'} F$.

Доказательство. В случае $n = 0$ многообразие N одноточечно, поэтому у F имеется лишь одно регулярное значение — единственная точка из N . Пусть теперь $n > 0$.

В силу предложения 11.9, на N существует диффеотопия f_t , $t \in [0, 1]$, переводящая Q в Q' . Положим $F_t = f_t \circ F$, тогда F_t — гомотопия, соединяющая F и $F_1 = f_1 \circ F$. Так как $Q' = f_1(Q)$, то, в силу задачи 11.10, точка Q' является также регулярным значением для F_1 . Так как F и F_1 гомотопны, то, по теореме 11.5, $\deg_{Q'} F = \deg_{Q'} F_1$. С другой стороны, в силу той же задачи задачи 11.10, $\deg_{Q'} F_1 = \deg_Q F$, что и требовалось. \square

Следствие 11.11 приводит к определению.

Определение 11.12. Пусть M и N — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия, N — связно, а $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Если Q — произвольное регулярное значение F , то число $\deg_Q F$ (не зависящее от выбора Q) называется **степенью отображения** F и обозначается $\deg F$.

Замечание 11.13. Легко видеть, что степень тождественного отображения равна 1, степень диффеоморфизма равна ± 1 , где $+1$ возникает в точности тогда, когда диффеоморфизм сохраняет ориентацию. Если поменять ориентацию только одного из многообразий, то степень изменит знак.

Задача 11.14. Пусть M , N и W — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия, N и W — связны, а $F: M \rightarrow N$ и $G: N \rightarrow W$ — гладкие отображения. Покажите, что $\deg(G \circ F) = \deg(F) \cdot \deg(G)$.

Задача 11.15. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — стандартная сфера, и $\nu: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ — центральная симметрия. Покажите, что $\deg \nu = (-1)^n$.

Задача 11.16. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — стандартная сфера.

- (1) Предположим, что на S^{n-1} существует невырожденное, т.е. всюду ненулевое, касательное векторное поле. Покажите, что тогда заданные на S^{n-1} тождественное отображение id и центральная симметрия ν гомотопны.

- (2) Выведите из предыдущего пункта теорему о “*причесывании ежа*”: на четномерных сферах S^{2k} не существует невырожденного касательного векторного поля.
- (3) Используя естественное отождествление \mathbb{R}^{2k} и \mathbb{C}^k , покажите, что на нечетномерных сферах S^{2k-1} существует невырожденное касательное векторное поле.

Задача 11.17. Используя степень отображения, докажите *основную теорему алгебры*: каждый многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень. [Указание: отождествите комплексную плоскость с образом стереографической проекции сферы, покажите, что многочлен P продолжается до гладкого отображения сферы в сферу, убедитесь, что отображение P сохраняет ориентацию, воспользуйтесь независимостью степени от выбора регулярного значения].

11.3 Степень отображения и интеграл

Цель этого раздела — доказать следующий результат.

Теорема 11.18. Пусть M и N — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия, N — связно, $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, и ω — дифференциальная n -форма на N . Тогда

$$\int_M F^* \omega = \deg F \int_N \omega.$$

Мы приведем ряд простых фактов, которые будут нужны нам для доказательства этой теоремы.

Задача 11.19. Докажите теорему 11.18 в случае, когда F — диффеоморфизм.

Задача 11.20. Докажите теорему 11.18 в случае, когда ограничение F на каждую связную компоненту многообразия M — диффеоморфизм.

Лемма 11.21. У каждого регулярного значения $Q \in N$, $F^{-1}(Q) = \{P_\alpha\}$, существует связная окрестность V такая, что $F^{-1}(V)$ состоит из конечного числа связных открытых множеств — окрестностей U_α точек P_α , причем ограничение отображения F на каждое такое U_α является диффеоморфизмом с V .

Доказательство. Для каждого α выберем окрестность U'_α точки P_α , ограничение на которую отображения F — диффеоморфизм с ее образом — открытым множеством $F(U'_\alpha)$. Так как многообразие — хаусдорфово топологическое пространство, окрестности U'_α можно выбрать попарно непересекающимися, что мы и сделаем. Положим $V' = \bigcap_\alpha F(U'_\alpha)$, тогда V' — открытая окрестность Q . Далее, пусть $K = M \setminus (\bigcup_\alpha U'_\alpha)$, тогда K — замкнуто и, значит, компактно, а $F(K)$ — компактно и, значит, замкнуто, причем $Q \notin F(K)$. Тогда $V'' := N \setminus F(K)$ — открытая окрестность точки Q . Пусть V — связная окрестность точки Q , содержащаяся в $V' \cap V''$. Так как $V \cap F(K) = \emptyset$, то $F^{-1}(V) \subset \bigcup U'_\alpha$. Положим $U_\alpha = F^{-1}(V) \cap U'_\alpha$. Так как $V \subset V'$, то $F(U_\alpha) = V$ и, значит, ограничение F на U_α — диффеоморфизм с V . Так как разные U'_α не пересекаются, то же самое верно и для разных U_α . Наконец, так как ограничение F на U'_α инъективно, то $F^{-1}(V) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$. \square

Доказательство теоремы 11.18. Заметим, что формула из теоремы линейно зависит от формы, поэтому теорему достаточно проверить для форм со сколь угодно малым носителем. По лемме 11.21, прообраз достаточно малой открытой окрестности $V \subset N$ регулярной точки состоит из конечного числа попарно непересекающихся окрестностей, ограничение на каждую из которых отображения F — диффеоморфизм с V . Поэтому, по задаче 11.20, теорема имеет место для форм с носителем в таких V .

Пусть теперь точка $Q \in N$ не является регулярным значением для F . Выберем регулярное значение $Q' \in N$ и построим диффеотопию $f_t: N \rightarrow N$, $t \in [0, 1]$, переводящую Q в Q' . Пусть V' — открытая окрестность Q' , для которой выполняется лемма 11.21 (если взять V' в качестве V). Положим $V = f_1^{-1}(V')$, тогда V — открытая окрестность Q . Докажем теорему для формы ω , носитель которой лежит в V .

Пусть $\omega' = (f_1^{-1})^* \omega$, тогда носитель ω' лежит в V' и, значит, для ω' выполняется утверждение теоремы. С другой стороны, f_t — гомотопия, соединяющая тождественное отображение и f_1 , при которой $f_0^* \omega' = \omega'$, а $f_1^* \omega' = \omega$, поэтому, в силу теоремы 10.11, формы ω и ω' когомологичны. Так как F^* коммутирует с внешним дифференциалом d , когомологичными также являются и формы $F^* \omega$ и $F^* \omega'$. Так как границы многообразий M и N пусты, из следствия 10.5 мгновенно заключаем, что интегралы от когомологичных форм совпадают. Итак,

$$\deg F \int_N \omega = \deg F \int_N \omega' = \int_M F^* \omega' = \int_M F^* \omega.$$

Наконец, нам осталось показать, что рассмотренных форм ω достаточно для общего случая. Чтобы это сделать, для каждой точки $Q \in N$ найдем произвольную $Q' \in N$, являющуюся регулярным значением F , построим для Q' окрестность V' , удовлетворяющую лемме 11.21, и положим $V^Q = f_1^{-1}(V')$. Из открытого покрытия $\{V^Q\}_{Q \in N}$ выберем конечное подпокрытие $\{V_1, \dots, V_k\}$ и подчиненное ему разбиение единицы $\{\psi_i\}$. Теперь произвольная дифференциальная n -форма ω на N может быть разложена на формы $\omega_i = \psi_i \omega$, носители которых лежат в соответствующих V_i . Но каждое V_i переводится некоторой диффеотопией в открытое множество V'_i , удовлетворяющее лемме 11.21, поэтому для таких форм ω_i мы доказали справедливость утверждения теоремы. \square

Покажем, как можно использовать интегральную формулу из теоремы 11.18.

11.4 Некоторые приложения интегральной формулы

В качестве первого приложения теоремы 11.18, приведем слабую форму *теоремы Гаусса–Бонне*.

11.4.1 Теорема Гаусса–Бонне

Пусть M — замкнутое ориентированное гладкое двумерное подмногообразие в \mathbb{R}^3 , а $N: M \rightarrow S^2$ — поле единичных нормалей вдоль M , существующее в силу упражнения 7.6. По тому же упражнению, можно так выбрать ориентацию сферы S^2 , что для форм площади η и ω на S^2 и M соответственно выполняется $N^* \eta = K \omega$, где K — гауссова кривизна подмногообразия M . По теореме 11.18, имеем

$$\int_M K \omega = \int_M N^* \eta = \deg N \int_{S^2} \eta = 4\pi \deg N.$$

Таким образом, мы видим, что $\frac{1}{4\pi} \int_M K \omega$ — целое число. Более того, если M_t — гладкая деформация (гомотопия) подмногообразия M в классе подмногообразий, то степень гауссова отображения не меняется, поэтому и интеграл $\frac{1}{4\pi} \int_M K \omega$ остается неизменным. На самом деле, все еще интересней: как оказывается, число $2 \deg N$ равно эйлеровой характеристике многообразия M , т.е. $2 - 2g$, где g — число ручек. Эту сильную теорему Гаусса–Бонне мы доказывать не будем.

Следующее приложение касается векторных полей, определенных на замыканиях областей в евклидовом пространстве.

11.4.2 Теорема об индексе векторного поля

Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое компактное n -мерное подмногообразие с краем $M = \partial W$, и X — векторное поле вдоль W . *Особая точка векторного поля* X — это точка $P \in W$, в которой $X(P) = 0$. Особая точка P поля X называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек. Если все точки на компактном многообразии изолированы, то их — конечное число (почему?). Пусть X таково, что все его особые точки изолированы и лежат во внутренности многообразия W . Обозначим эти изолированные точки P_1, \dots, P_k .

Для каждой P_i рассмотрим столь малую замкнутую шаровую окрестность B_i с центром в этой точке, что в B_i нет других особых точек, и шары B_i попарно не пересекаются. Обозначим S_i граничную сферу, а U_i — внутренность шара B_i . Тогда $W' := W \setminus (\cup_{i=1}^k U_i)$ — также гладкое n -мерное подмногообразие с краем, и вдоль него поле X особенностей не имеет.

Определим *гауссово отображение* $N: W \setminus (\cup_{i=1}^k \{P_i\}) \rightarrow S^{n-1}$, заданное полем X , по формуле $N(P) = X(P)/\|X(P)\|$. Ориентируем сферу S^{n-1} так, чтобы базис \mathbb{R}^n , составленный из внешней нормали к сфере и положительно ориентированного базиса касательного пространства, был положительно ориентирован в \mathbb{R}^n . Иными словами, это — каноническая ориентация края стандартно ориентированного шара, ограниченного сферой S^{n-1} .

Ориентируем многообразие W' стандартно, а его край — канонически. Отметим, что $\partial W'$ состоит из M , а также всех сфер S_i , ориентированных по отношению к внутренним нормальям. Мы же изменим ориентацию S_i , выбрав ее по отношению к внешним нормальям. Так ориентированные S_i будем обозначать $-S_i$. Для $-S_i$ и S^{n-1} , через $\text{ind}_{P_i} X$ обозначим степень ограничения гауссова отображения N на $-S_i$. Заметим, что если менять размеры сферы S_i или даже гладко деформировать ее так, чтобы в замыкании ограниченной ей области по-прежнему не содержалось других особых точек поля X , а P_i лежала бы внутри этой области, то ограничение

гауссова отображения будет гладко меняться, что не приведет к изменению его степени. Таким образом, число $\text{ind}_{P_i} X$, которое называется **индексом изолированной особой точки P_i поля X** , корректно определено (не зависит от выбора шара B_i).

Что касается границы M многообразия W , мы не будем менять его ориентацию, и через $\text{ind } X$ обозначим степень ограничения гауссова отображения N на M .

Пусть η — форма объема на S^{n-1} , а $\omega = N^*\eta$ — соответствующая $(n-1)$ -форма на W' . Так как $d\eta = 0$, то ω — замкнутая форма, поэтому, в силу теоремы Стокса и определения индексов, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{W'} d\omega = \int_{\partial W'} \omega = \int_M \omega + \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \omega = \int_M \omega - \sum_{i=1}^k \int_{-S_i} \omega = \\ &= \text{deg}(N|_M) \int_{S^{n-1}} \eta - \sum_{i=1}^k \text{deg}(N|_{-S_i}) \int_{S^{n-1}} \eta = \text{vol}(S^{n-1}) \left(\text{ind } X - \sum_{i=1}^k \text{ind}_{P_i} X \right). \end{aligned}$$

Так как число $\text{vol}(S^{n-1})$ отлично от нуля, получаем $\text{ind } X = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{P_i} X$, или, словами: в сделанных предположениях, **индекс векторного поля равен сумме индексов его особых точек**.

11.4.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар и $F: B \rightarrow B$ — гладкое отображение. Теорема Брауэра утверждает, что тогда F **имеет неподвижную точку**, т.е. существует $P \in B$, для которой $F(P) = P$. Докажем эту теорему от противного.

Предположим, что мы построили такое F , у которого нет неподвижных точек. Тогда построим на B векторное поле X , имеющее вид $X(P) = P - F(P)$. По предположению, у этого поля нет особых точек, поэтому, в силу теоремы об индексе, $\text{ind } X = 0$. Отметим, что в точках граничной сферы S поле X направлено наружу сферы S , поэтому, если N — поле единичных внешних нормалей к S , то $X_t = (1-t)X|_S + tN$ — гладко зависящее от t семейство полей вдоль S , нигде не обращающихся в ноль. Нормируем поля X_t , положив $N_t := X_t / \|X_t\|$, тогда каждое N_t можно рассматривать как отображение из S в S^{n-1} , а семейство N_t — как гомотопию, соединяющую X и N . По теореме о гомотопической инвариантности степени отображения, имеем

$$\text{ind } X = \text{deg } N_0 = \text{deg } N_1 = \text{deg } N = \pm 1,$$

противоречие.

11.4.4 Теорема о барабане

В разделе 9.6.5 мы доказали теорему 9.22, которая утверждает, что нельзя построить гладкое отображение F из шара $B \subset \mathbb{R}^n$ на его граничную сферу S , неподвижное на S . Покажем, как можно вывести эту теорему из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Пусть такое отображение существует, тогда все его внутренние точки не являются неподвижными, так как переходят в граничные точки. Рассмотрим теперь центральную симметрию $\nu: S \rightarrow S$. Тогда композиция $\nu \circ F$ не имеет неподвижных точек, противоречие.

Литература

- [1] Sard A. *The measure of critical points of differentiable maps*. Bull. Amer. Math. Soc., 1942, v. 48, pp. 883–897.
- [2] Brown A.B. *Functional dependence*. Trans. Amer. Math. Soc., 1935, v. 38, pp. 379–394.
- [3] Outerelo E., Ruiz J.M. *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society, 2009.
- [4] Morse A.P. *The behaviour of a function on its critical set*. Annals of Mathematics, 1939, v. 40, N 1, pp. 62–70.
- [5] Tromba A.J. The Morse-Sard-Brown Theorem for Functionals and the Problem of Plateau. American Journal of Mathematics, 1977, v. 99, N 6, pp. 1251–156.
- [6] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений*. М.: Наука, 1982.
- [7] Sternberg S. *Lectures on differential geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.
- [8] Lee J.M. *Introduction to smooth manifolds*. 2nd revised ed, 2012.
- [9] Lee J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 202, Springer, 2000.
- [10] Gillam W.D. *Classification of 1-manifolds*.
<http://www.math.boun.edu.tr/instructors/wdgillam/1manifolds.pdf>

Упражнения к главе 11

Упражнение 11.1. Докажите следующие утверждения.

- (1) Пусть M — гладкое ориентированное многообразие с пустой границей, а $f_t: M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, — диффеотопия. Тогда каждое отображение f_t сохраняет ориентацию, т.е. дифференциал этого отображения переводит положительно ориентированный базис в положительно ориентированный.
- (2) Пусть M и N — гладкие замкнутые ориентированные n -мерные многообразия, $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, $f_t: N \rightarrow N$, $t \in [0, 1]$, — диффеотопия. Пусть Q — регулярное значение для F , а $Q_t = f_t(Q)$. Тогда Q_t — регулярное значение для $f_t \circ F$ и $\deg_{Q_t} f_t \circ F = \deg_Q F$.

Упражнение 11.2. Пусть M , N и W — замкнутые ориентированные гладкие n -мерные многообразия размерности n , N и W — связны, а $F: M \rightarrow N$ и $G: N \rightarrow W$ — гладкие отображения. Покажите, что $\deg(G \circ F) = \deg(F) \cdot \deg(G)$.

Упражнение 11.3. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — стандартная сфера, и $\nu: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ — центральная симметрия. Покажите, что $\deg \nu = (-1)^n$.

Упражнение 11.4. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — стандартная сфера.

- (1) Предположим, что на S^{n-1} существует невырожденное, т.е. всюду ненулевое, касательное векторное поле. Покажите, что тогда заданные на S^{n-1} тождественное отображение id и центральная симметрия ν гомотопны.
- (2) Выведите из предыдущего пункта теорему о “причесывании ежа”: на четномерных сферах S^{2k} не существует невырожденного касательного векторного поля.
- (3) Используя естественное отождествление \mathbb{R}^{2k} и \mathbb{C}^k , покажите, что на нечетномерных сферах S^{2k-1} существует невырожденное касательное векторное поле.

Упражнение 11.5. Используя степень отображения, докажите основную теорему алгебры: каждый многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень. [Указание: отождествите комплексную плоскость с образом стереографической проекции сферы, покажите, что многочлен P продолжается до гладкого отображения сферы в сферу, убедитесь, что отображение P сохраняет ориентацию, воспользуйтесь независимостью степени от выбора регулярного значения].

Упражнение 11.6. Докажите теорему 11.18 в случае, когда F — диффеоморфизм.

Упражнение 11.7. Докажите теорему 11.18 в случае, когда ограничение F на каждую связную компоненту многообразия M — диффеоморфизм.

Упражнение 11.8. Пусть $F: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ — гладкое отображение. Докажите, что найдется такая точка $P \in S^{2n}$, для которой $F(P) = P$ или $F(P) = -P$.

Упражнение 11.9. Докажите, что на сфере S^{2n-1} не существует четного касательного векторного поля без особых точек (“четность” поля X означает, что $X(P) = X(-P)$ для всех $P \in S^{2n-1}$).

Упражнение 11.10. Докажите, что векторное поле в \mathbb{R}^n , нигде не касающееся сферы S^{n-1} , обладает хотя бы одной особой точкой внутри шара, ограниченного этой сферой.

Лекция 12

Ковариантное дифференцирование.

План. Связность в векторных расслоениях, ковариантная производная сечения вдоль векторного поля, аффинная связность на касательном расслоении, символы Кристоффеля аффинной связности, существование аффинной связности, закон изменения символов Кристоффеля, ковариантные производные тензорных полей, векторное поле вдоль кривой, поле скоростей кривой, продолжаемые поля вдоль кривой, ковариантная производная вдоль кривой, продолжаемые функции, параллельные векторные поля вдоль кривых, геодезические, уравнения параллельного переноса, уравнения геодезических, параллельный перенос, симметричная связность, тензор кручения, риманова связность или связность Леви-Чивиты, существование римановой связности, выражение символов Кристоффеля римановой связности через компоненты метрического тензора, зануление символов Кристоффеля в центре нормальных координат, тензор кривизны Римана, его выражение через символы Кристоффеля, тензор Риччи, симметрии тензора кривизны, скалярная кривизна, многообразия Эйнштейна, подмногообразия римановых многообразий, тензорные расслоения, ассоциированные с гладкими линейными расслоениями, тензорные поля, тензор Римана, продолжение связностей на тензорные поля, касательная и нормальная связности, вторая фундаментальная форма подмногообразия, оператор Вейнгартена, формулы Гаусса и Вейнгартена, уравнения Гаусса, уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци, уравнения Риччи, теорема реализации поверхности в евклидовом пространстве по заданным римановым метрикам на касательном и нормальном расслоении, нормальной связности, согласованной с метрикой, а также второй фундаментальной форме.

В данном разделе мы обобщим понятие ковариантного дифференцирования, определенного нами для поверхностей, на случай произвольных многообразий. Для более подробного ознакомления с этой темой мы рекомендуем [1] и [2].

12.1 Связность в векторных расслоениях

Пусть $\pi: E \rightarrow M$ — произвольное гладкое векторное расслоение. Напомним, что через $\Gamma(E)$ мы обозначили пространство сечений расслоения E , а через $\mathfrak{X}(M)$ — пространство векторных полей на гладком многообразии M . **Связностью на E** называется отображение

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad \nabla: (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

- оно функционально линейно по X , т.е. для любых $f, g \in \mathcal{F}(M)$ и любых $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y;$$

- линейно по Y , т.е. для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$ выполняется

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2;$$

- правилу Лейбница, а именно, для любой $f \in \mathcal{F}(M)$ имеем

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y.$$

Сечение $\nabla_X Y$ расслоения E называется **ковариантной производной сечения Y вдоль поля X** .

Следующая задача решается с помощью техники, использованной в доказательстве теоремы 7.11.

Задача 12.1. Пусть $\pi: E \rightarrow M$ — гладкое векторное расслоение и ∇ — связность на нем. Покажите, что для каждой точки $P \in M$ вектор $(\nabla_X Y)_P$ зависит лишь от значения поля X в точке P и от значения сечения Y в сколь угодно малой окрестности точки P : если $X' \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y' \in \Gamma(E)$ такие, что $X(P) = X'(P)$, а $Y = Y'$ в некоторой окрестности точки P , то $(\nabla_X Y)_P = (\nabla_{X'} Y')_P$.

12.2 Связность на касательном расслоении

Рассмотрим частный случай, когда $E = TM$ — касательное расслоение. Тогда ∇ называется **аффинной связностью**.¹

Пусть $n = \dim M$, а $U \subset M$ — открытое множество. Предположим, что существуют локальные векторные поля $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, линейно независимые в каждой точке $P \in U$ и, значит, образующие базис касательного пространства $T_P M$. Тогда локальное поле $\nabla_{E_i} E_j$ можно разложить по этим же полям:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Гладкие функции Γ_{ij}^k называются **символами Кристоффеля аффинной связности ∇ по отношению к семейству полей E_1, \dots, E_n** . Если же U — координатная окрестность, $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты в U , а $E_i = \partial_{x^i}$, то гладкие функции Γ_{ij}^k называются **символами Кристоффеля аффинной связности ∇ в координатах x** .

Отметим, что символы Кристоффеля полностью определяют связность во множестве U , так как для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $X = X^k E_k$, $Y = Y^k E_k$, выполняется

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_{E_i} (Y^j E_j) = X^i Y_{x^i}^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k = [X(Y^k) + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j] E_k.$$

12.2.1 Существование аффинной связности, закон изменения символов Кристоффеля

Чтобы доказать существование аффинной связности, сформулируем в форме задачи последовательность простых утверждений.

Задача 12.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие.

- (1) Предположим, что на M существует гладкий атлас \mathcal{A} , состоящий из одной карты (U, φ) , и пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты, заданные этой картой. Рассмотрим n^3 произвольных гладких функций $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$, где $1 \leq i, j, k \leq n$. Пусть отображение $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ задается формулой

$$\nabla_X Y = (X^i Y_{x^i}^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_{x^k}.$$

Проверьте, что ∇ — аффинная связность.

- (2) Пусть теперь $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный гладкий атлас на M , а $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу \mathcal{A} . Пусть ∇^α — аффинная связность на U_α . Для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ через $\nabla_X^\alpha Y$ обозначим векторное поле на U_α , полученное применением отображения ∇^α к ограничениям полей X и Y на U_α . Пусть $\psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$ (здесь по α нет суммирования) обозначает поле на M , полученное из поля $\psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ продолжением нулем на все M . Покажите, что отображение $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, заданное так: $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y := \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, — аффинная связность на M .

Таким образом, чтобы задать на гладком многообразии M аффинную связность, достаточно выбрать произвольный гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, подчиненное ему разбиение единицы $\{\psi_\alpha\}$, задать в координатах каждой карты набор из любых гладких функций Γ_{ij}^k , построить по нему, как это сделано в пункте (1) задачи 12.2, аффинную связность ∇^α , и “склеить” полученные аффинные связности в картах в единую аффинную связность $\sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha$ с помощью разбиение единицы. Ясно, что так задается каждая аффинная связность: достаточно данную связность ограничить на карты гладкого атласа и вычислить в координатах соответствующие символы Кристоффеля. Тогда исходная связность будет получена “склежкой” посредством произвольного разбиения единицы, подчиненного выбранному атласу.

Отметим, что имеется и другой способ построения аффинной связности без использования разбиения единицы. Для этого нужно задавать символы Кристоффеля “согласовано”. Поясним, что это значит.

Пусть на многообразии M с аффинной связностью ∇ в некотором открытом множестве $U \subset M$ задано две системы координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$. Пусть Γ_{ij}^k и $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ — символы Кристоффеля в этих координатах. Выясним, как связаны друг с другом эти наборы функций. Для сокращения формул, положим $\partial_i := \partial_{x^i}$, $\partial_{i'} := \partial_{x'^{i'}}$, $c_i^{i'} := x'^{i'}$, $c_{i'}^i := x^i$, $c_{i'j'}^i := x^i_{x'^{i'} x'^{j'}}$, тогда

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} = \nabla_{\partial_{i'}} \partial_{j'} = \nabla_{c_i^{i'} \partial_i} (c_{j'}^j \partial_j) = c_{i'}^i c_{j'}^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + c_{i'}^i c_{j'p'}^j c_i^{p'} \partial_j = c_{i'}^i c_{j'}^j \Gamma_{ij}^k c_k^{k'} \partial_{k'} + c_{j'i'}^j c_j^{k'} \partial_{k'}.$$

¹Имеются также термины **линейная связность** или просто **связность**.

Отметим, что переход к последнему слагаемому использовал тождество $c_{i'}^i c_i^{p'} = \delta_{i'}^{p'}$. Чтобы получить более симпатичную формулу, заменим в последнем слагаемом индекс j на k , тогда, в результате, заключаем

$$(12.1) \quad \Gamma_{i'j'}^{k'} = c_{i'}^i c_{j'}^j c_k^{k'} \Gamma_{ij}^k + c_k^{k'} c_{j'i'}^k.$$

Тем самым, мы видим, что закон преобразования символов Кристоффеля не тензорный: к тензорному первому слагаемому добавляется еще и слагаемое $c_k^{k'} c_{j'i'}^k$ со второй частной производной.

Задача 12.3. Пусть на гладком многообразии M в каждом локальных координатах, порожденных картами некоторого гладкого атласа, заданы наборы функций Γ_{ij}^k , связанные друг с другом на непустых пересечениях карт по формулам (12.1). Покажите, что тогда существует единственная аффинная связность, для которой заданные функции — ее символы Кристоффеля.

12.2.2 Ковариантные производные тензорных полей

Покажем, как можно продолжить аффинную связность на пространства сечений всех тензорных расслоений. Пусть $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ — произвольная аффинная связность на касательном расслоении TM к гладкому многообразию M . Продолжим ∇ на остальные тензорные расслоения $T^{(p,q)}M$ до связностей (их мы также будем обозначать ∇), удовлетворяющих следующим трем свойствам: для $f \in \mathcal{F}(M) = \Gamma(T^{(0,0)})$, $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(T^{(1,0)})$, $T \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$, $S \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$, $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq p$, $1 \leq b \leq q$,

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \nabla_X f &= X(f), \\ \nabla_X(S \otimes T) &= (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T) \quad (\text{правило Лейбница}), \\ \nabla_X(C_b^a T) &= C_b^a(\nabla_X T) \quad (\text{коммутирование со сверткой } C_b^a) \end{aligned}$$

(пока не очевидно, почему это можно сделать). Заметим, что если такое продолжение существует, то имеют место следующие формулы, первую из которых удобно записывать с использованием обозначение $\langle \omega, Y \rangle = \omega(Y)$ для 1-формы $\omega \in \Omega^1(M)$ и векторного поля $Y \in \mathfrak{X}(M)$:

- для $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(12.3) \quad \nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle;$$

- для $T \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$, $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$ и $Y_1, \dots, Y_q \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(12.4) \quad \begin{aligned} (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) - \\ &- \sum_{r=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^r, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) - \sum_{s=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, \nabla_X Y_s, \dots, Y_q). \end{aligned}$$

Чтобы вывести эти формулы, достаточно записать значение тензора на ковекторах и векторах в виде композиции тензорного произведения и свертки, например

$$\langle \omega, Y \rangle = \omega(Y) = C_1^1(\omega \otimes Y).$$

Легко проверяется (сделайте это), что выражение в правой части формулы (12.4) функционально линейно, поэтому, в силу 7.11, $\nabla_X T$ является тензорным полем типа (p, q) . Более того, если ∇ существует, то поле $\nabla_X T$ однозначно определено, поэтому рассматриваемое продолжение связности ∇ на тензорные поля однозначно. Остается проверить, что отображение $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T^{(p,q)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(p,q)}M)$, заданное формулой формула (12.4), действительно является связностью.

Задача 12.4. Покажите, что существует продолжение аффинной связности с касательного расслоения на все тензорные расслоения.

В дальнейшем под **аффинной связностью** будем также понимать построенное выше продолжение связности ∇ с касательного расслоения на тензорное. Так как значение $(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)$ в точке P зависит лишь от значений форм ω_i и полей Y_j , X в точке P , причем эта зависимость линейна по каждому аргументу, получаем следующий результат.

Следствие 12.5. Пусть $T \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$ — тензорное поле, и ∇ — аффинная связность, тогда в каждой точке $P \in M$ определено тензорное поле ∇T типа $(p, q+1)$, значение которого на ковекторах $\xi^i \in T_P^*M$ и векторах $v_j \in T_P M$, а также векторе $v \in T_P M$, однозначно вычисляется по произвольному продолжению этих аргументов до 1-форм $\omega^i \in \Omega^1(M)$ и полей $Y_j \in \mathfrak{X}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ так:

$$\nabla T(\xi^1, \dots, \xi^p, v_1, \dots, v_q, v) = (\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q).$$

Тензорное поле ∇T называется **ковариантной производной тензорного поля T** .

Запишем ∇T в координатах. Условимся писать индекс, относящийся к полю, по которому происходило ковариантное дифференцирование, в конце всех нижних индексов, например $(\nabla T)_{j_1 \dots j_q k}^{i_1 \dots i_p}$. Иногда мы будем опускать символ ∇ , а вместо этого отделять последний индекс запятой, например $T_{j_1 \dots j_q, k}^{i_1 \dots i_p}$.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M , и пусть Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля аффинной связности ∇ в координатах x , т.е. $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$. Тогда для векторного поля $Y = Y^k \partial_{x^k}$ имеем

$$\nabla_{\partial_{x^i}} Y = [Y_{x^i}^k + \Gamma_{pj}^k \delta_i^p Y^j] \partial_{x^k},$$

откуда $(\nabla Y)_i^k = Y_{,i}^k = Y_{x^i}^k + \Gamma_{ij}^k Y^j$.

Вычислим теперь ковариантную производную 1-формы $\omega = \omega_k dx^k$. Для этого воспользуемся формулой (12.3), в которой положим $X = \partial_{x^i}$ и $Y = \partial_{x^j}$. Имеем

$$\nabla_{\partial_{x^i}} [\omega(\partial_{x^j})] = (\omega_j)_{x^i} = \langle \nabla_{\partial_{x^i}} \omega, \partial_{x^j} \rangle + \langle \omega, \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} \rangle = (\nabla \omega)_{ji} + \Gamma_{ij}^k \omega_k,$$

откуда $(\nabla \omega)_{ji} = \omega_{j,i} = (\omega_j)_{x^i} - \Gamma_{ij}^k \omega_k$.

Подставляя полученные результаты в формулу (12.4) для $\omega^k = dx^{i_r}$ и $Y_s = \partial^{x^s}$, получаем итоговое выражение для ковариантной производной произвольного тензорного поля.

Следствие 12.6. Пусть ∇ — аффинная связность, тогда компоненты ковариантной производной тензорного поля T типа (p, q) в локальных координатах x^1, \dots, x^n имеют вид

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_q k}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q, k}^{i_1 \dots i_p} = (T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})_{x^k} + \sum_{r=1}^p \Gamma_{k\alpha}^{i_r} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r = \alpha \dots i_p} - \sum_{s=1}^q \Gamma_{kj_s}^\beta T_{j_1 \dots j_s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

12.2.3 Ковариантные производные вдоль кривых

Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая в гладком многообразии M , где I — некоторый промежуток. Гладкое отображение $X: I \rightarrow TM$, для которого $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, называется **векторным полем вдоль кривой γ** . Если Y — другое такое поле, то определена поточечная линейная комбинация $aX + bY$, так как при каждом t оба вектора $X(t)$ и $Y(t)$ лежат в одном и том же касательном пространстве $T_{\gamma(t)}M$. Таким образом, множество $\mathfrak{X}(\gamma)$ всех векторных полей вдоль кривой γ образуют векторное пространство. Кроме того, если $\mathcal{F}(I)$ — кольцо гладких функций на I , то для каждого $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ и $f \in \mathcal{F}(I)$ определено векторное поле вдоль γ вида fX . Таким образом, $\mathfrak{X}(\gamma)$ является модулем над кольцом $\mathcal{F}(I)$.

Важным частным случаем векторного поля вдоль кривой γ является **поле скоростей** этой кривой, которое обозначается $\dot{\gamma}$ и задается формулой $\dot{\gamma}(t) = d\gamma|_t(\partial_t)$.

Если Z — векторное поле, определенное на некотором открытом множестве $U \subset M$, содержащем образ кривой γ , то отображение $X: t \mapsto Z(\gamma(t))$ является полем вдоль кривой (докажите это). В этом случае говорят, что поле X является **продолжаемым**, а поле Z называется **продолжением X** . Не всякое поле вдоль γ продолжаемо: например, если для $t_1 \neq t_2$ выполняется $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, но $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$, то поле скоростей продолжаемым не является.

Предложение 12.7. Пусть ∇ — аффинная связность на гладком многообразии M , а $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая, t — стандартная координата на I . Тогда существует единственное линейное отображение $D_t: \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(12.5) \quad \text{для любой } f \in \mathcal{F}(I) \text{ и любого } X \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ выполняется } D_t(fX) = \dot{f}X + fD_tX;$$

$$(12.6) \quad \text{если поле } X \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ продолжаемо и } Z \text{ — его продолжение, то } (D_tX)(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Z.$$

Доказательство. Предположим, что мы уже доказали существование. Докажем единственность отображения D_t . Как и в случае связности на всем многообразии, можно показать, что $(D_t X)(t_0)$ зависит от значений X лишь в сколь угодно малой окрестности точки t_0 . Пусть x^1, \dots, x^n — локальные координаты на M в некоторой окрестности U точки $\gamma(t_0)$, а ∂_{x^i} — соответствующие координатные поля, продолженные как-нибудь до полей на всем многообразии M . Тогда поле $t \mapsto \partial_{x^i}|_{\gamma(t)}$ вдоль кривой γ продолжаемо и, для краткости, будет обозначаться как и раньше ∂_{x^i} .

Пусть в окрестности U поле X и кривая γ представимы в виде $X(t) = X^i(t)\partial_{x^i}$ и $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, тогда в этой окрестности имеем

$$(12.7) \quad (D_t X)(t_0) = \dot{X}^i(t_0)\partial_{x^i} + X^i \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \partial_{x^i} = \left[X^k(t_0) + \Gamma_{ji}^k(\gamma(t_0))\dot{\gamma}^j(t_0)X^i(t_0) \right] \partial_{x^k}.$$

Таким образом, мы видим, что если D_t существует, то его значение на каждом поле X однозначно вычисляется по известным величинам. Таким образом, мы доказали единственность.

Чтобы доказать существование, покроем образ кривой γ координатными окрестностями, в которых выполняется все то, что было верным в окрестности U ; для каждой такой окрестности зададим $D_t X$ по формуле (12.7). Тривиально проверяется, что выражение в правой части формулы (12.7) удовлетворяет условиям, определяющим D_t . Из однозначности вытекает, что на пересечениях карт полученные формулы согласованы. \square

Определенное в предложении 12.7 отображение D_t называется **ковариантной производной вдоль кривой** γ .

Замечание 12.8. На самом деле, D_t порождается связностью на соответствующем векторном расслоении в смысле раздела 12.1. Действительно, векторные поля вдоль кривой являются не чем иным, как гладкими сечениями гладкого расслоения $E = \gamma^* TM$ над I . Напомним, что на общем векторном расслоении связность D — это отображение $D: \mathfrak{X}(I) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$. Поля на I имеют вид $\varphi(t)\partial_t$, так что, в силу функциональной линейности отображения D по первому аргументу, достаточно определить D для полей ∂_t . Собственно говоря, $D_t X = D(\partial_t, X)$.

Часть полей из $\Gamma(E)$, которые мы называли продолжаемыми, порождаются полями на M . Семейство продолжаемых полей образует векторное подпространство $\Gamma_e(E)$ в $\Gamma(E)$. Также можно ввести понятие **продолжаемых функций**: это такие функции $f \in \mathcal{F}(I)$, для которых существуют функции F , определенные на M в окрестности образа кривой γ , удовлетворяющие $f = F \circ \gamma$. Семейство $\mathcal{F}_e(I) \subset \mathcal{F}(I)$ продолжаемых функций образует подкольцо в $\mathcal{F}(I)$, причем $\Gamma_e(E)$ является модулем над $\mathcal{F}_e(I)$. Весь модуль $\Gamma(E)$ получается из $\Gamma_e(E)$ с помощью функциональных комбинаций с коэффициентами из $\mathcal{F}(I)$. Отметим, что мы пользуемся этим лишь локально, т.е. для фрагментов кривой, лежащих в одной координатной карте.

Условие (12.6) говорит о том, что на продолжаемых полях связность D задается исходной связностью ∇ . Иными словами, мы определяем связность на $\Gamma_e(E)$ совпадающей с ∇ на продолжениях полей из $\Gamma_e(E)$ в окрестность многообразия M , содержащую образ γ . Как показывает предложение 12.7, это определение корректно, т.е. не зависит от выбора продолжения.

Условие (12.5) продолжает связность D , определенную на $\Gamma_e(E)$, на все $\Gamma(E)$, пользуясь тем, что $\Gamma(E)$ порождается $\Gamma_e(E)$ и кольцом $\mathcal{F}(I)$, а для функций из этого кольца определены производные вдоль полей $\varphi(t)\partial_t \in \mathfrak{X}(I)$.

Отметим, что при таком взгляде на конструкцию связности D мы можем построить аналогичную связность не только для отображения $\gamma: I \rightarrow M$, но и для любого отображения $N \rightarrow M$, где N — гладкое многообразие. В частности, таким же образом определяются векторные поля вдоль подмногообразий и их ковариантные производные вдоль полей, касательных к подмногообразию.

12.2.4 Параллельный перенос и геодезические

В прошлом семестре мы определяли параллельный перенос и геодезические вдоль кривых на поверхностях. Теперь у нас есть возможность построить аналогичные объекты на гладких многообразиях с аффинной связностью.

Пусть M — гладкое многообразие, ∇ — аффинная связность на M , и $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая. Векторное поле $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ вдоль γ называется **параллельным**, если $D_t X \equiv 0$. Если же в качестве X взять поле скоростей кривой γ , то условие $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ задает кривые, которые называются **геодезическими**.

Как и в случае поверхностей, приведенные выше условия можно записать в координатах и, в первом случае, получить систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка на компоненты поля X , которая

называется **уравнениями параллельного переноса**, а во втором случае — систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старших производных — она называется **уравнениями геодезических**.

Задача 12.9. Запишите в явном виде уравнения параллельного переноса и уравнения геодезических.

Теоремы существования и единственности решений для обыкновенных дифференциальных уравнений снова гарантируют, что

- для каждого вектора $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ существует единственное параллельное векторное поле $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$, для которого $X(t_0) = v$;
- для любой точки $P \in M$, вектора $v \in T_P M$ и числа $t_0 \in \mathbb{R}$ существует содержащий t_0 интервал I и геодезическая $\gamma: I \rightarrow M$, для которой $\gamma(t_0) = P$ и $\dot{\gamma}(t_0) = v$;
- любые две геодезических из предыдущего пункта совпадают на общей области определения;
- геодезические, проходящие через одну и ту же точку и имеющие в этой точке ненулевые коллинеарные векторы скоростей, получаются друг из друга линейной заменой параметра t (на соответствующих “общих” областях определения).

Для t_0, t_1 , построим отображение $P_{t_0, t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ так: выберем произвольный вектор $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, рассмотрим единственное параллельное вдоль γ векторное поле $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ с условием $X(t_0) = v$, и положим $P_{t_0, t_1}(v) = X(t_1)$. Отображение P_{t_0, t_1} называется **параллельным переносом**.

Задача 12.10. Покажите, что для гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ на гладком многообразии M с аффинной связностью и любых $t_0, t_1 \in I$ параллельный перенос $P_{t_0, t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ является изоморфизмом векторных пространств.

Отметим, что на поверхностях у геодезических и параллельных полей имеются дополнительные свойства. Так, параллельный перенос вдоль геодезических сохраняет скалярное произведение векторов полей в соответствующих точках. В случае многообразий мы тоже можем ввести дополнительно риманову метрику, однако такого же эффекта, как и на поверхностях, мы не добьемся, если не потребуем, чтобы связность была некоторым образом согласована с метрикой. В следующем разделе мы объясним, как можно осуществить такое согласование.

12.3 Риманова связность

Пусть на гладком многообразии M задана риманова или псевдориманова метрика g , и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает соответствующее скалярное произведение касательных векторов. Пусть на M также задана некоторая аффинная связность ∇ . Будем говорить, что связность ∇ **согласована с g** , если для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Задача 12.11. Докажите, что на римановом многообразии M с метрикой g и аффинной связностью ∇ следующие условия эквивалентны:

- (1) связность ∇ согласована с метрикой g ;
- (2) $\nabla g = 0$;
- (3) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ вдоль γ выполняется

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle D_t X, Y \rangle + \langle X, D_t Y \rangle;$$

- (4) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и параллельных вдоль γ векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ выполняется $\langle X(t), Y(t) \rangle = \text{const}$;
- (5) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и любых $t_0, t_1 \in I$ параллельный перенос $P_{t_0, t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ — изометрия.

Как оказывается, условия согласования связности и метрики еще не достаточно для однозначного определения этой связности. Чтобы добиться однозначности, требуется еще и **симметричность**. В координатах это означает, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Это свойство не зависит от выбора локальных координат, так как, в силу формулы (12.1), при переходе из координат x^i в координаты $x^{i'}$ разность $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ меняется по тензорному закону:

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} - \Gamma_{j'i'}^{k'} = x_{x^{i'}}^i x_{x^j}^j x_{x^k}^{k'} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k),$$

а свойство компонент тензора равняться нулю в некотором базисе эквивалентно равенству нулю компонент этого тензора во всех базисах.

Для конкретных вычислений полезно задать этот тензор в виде полилинейного отображения на векторных полях. Для $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ положим

$$\Omega(X, Y) = \nabla_Y X - \nabla_X Y - [X, Y],$$

тогда, как непосредственно проверяется, правая часть в приведенной формуле функционально полилинейна, поэтому также функционально полилинейным является и отображение

$$\Omega: \Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega(\omega, X, Y) = \omega(\Omega(X, Y)),$$

откуда, в силу теоремы 7.11, это отображение является тензорным полем типа (1, 2), которое называется **тензором кручения**. В координатах x^i , имеем

$$\Omega_{ij}^k = dx^k (\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} - [\partial_{x^i}, \partial_{x^j}]) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Теорема 12.12. Пусть M — риманово многообразие с метрикой g , тогда на M существует единственная симметричная аффинная связность ∇ , согласованная с метрикой.

Доказательство. Предположим, что такая связность существует, и докажем ее единственность. Запишем условие симметричности и согласованности с метрикой в координатах x^i :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (\nabla g)_{ijk} = (g_{ij})_{x^k} - \Gamma_{ki}^\alpha g_{\alpha j} - \Gamma_{kj}^\alpha g_{i\alpha} = 0.$$

Дальнейшие манипуляции абсолютно такие же, как для вывода формулы символов Кристоффеля в случае поверхностей, что приводит к формуле

$$(12.8) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_{x^i} g_{\alpha j} + \partial_{x^j} g_{i\alpha} - \partial_{x^\alpha} g_{ij}).$$

Таким образом, мы видим, что если связность ∇ существует, то она однозначно выражается через метрический тензор, а это и доказывает единственность.

Для доказательства существования нужно проверить, что найденные выражения Γ_{ij}^k действительно являются символами Кристоффеля некоторой связности, и что эта связность симметрична и согласована с метрикой. Симметричность непосредственно видна из формулы (12.8). Согласованность с метрикой получается обращением преобразований, выполненных для получения формулы (12.8). Остается показать, что Γ_{ij}^k при переходе из координат x^i в координаты $x^{i'}$ меняются по закону (12.1). Прделаем соответствующие вычисления. Для удобства, положим $c_{i'}^i = x_{x^{i'}}^i$, $c_i^{i'} = x_{x^i}^{i'}$, $c_{j'k'}^j = x_{x^{j'}x^{k'}}^j$, $\partial_{x^i} = \partial_i$, $\partial_{x^{i'}} = \partial_{i'}$, тогда

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{i'j'}^{k'} &= g^{k'\alpha'} (\partial_{i'} g_{\alpha'j'} + \partial_{j'} g_{i'\alpha'} - \partial_{\alpha'} g_{i'j'}) = c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} [\partial_{i'} (c_{j'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{\beta j}) + \partial_{j'} (c_{i'}^\beta c_{\alpha'\beta}^\alpha g_{i\beta}) - \partial_{\alpha'} (c_{i'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{i\beta})] = \\ &= c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{\beta j} + c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{\beta j} + c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j \partial_{i'} g_{\beta j} + \\ &= c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{j'i'}^\beta c_{\alpha'\beta}^\alpha g_{i\beta} + c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{i\beta} + c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j \partial_{j'} g_{i\beta} - \\ &= c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'i'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{ij} - c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{ij} - c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j \partial_{\beta} g_{ij} = \\ &= c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{\beta j} + c_k^{k'} c_{i'j'}^k + c_k^{k'} g^{k\alpha} c_{j'}^\beta c_{i'}^\alpha \partial_i g_{\alpha j} + \\ &= c_k^{k'} c_{j'i'}^k + c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{i\beta} + c_k^{k'} g^{k\alpha} c_{i'}^\beta c_{j'}^\alpha \partial_j g_{i\alpha} - \\ &= c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{\alpha'i'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{ij} - c_k^{k'} c_\alpha^{\alpha'} g^{k\alpha} c_{i'\alpha'}^\beta c_{j'\beta}^j g_{ij} - c_k^{k'} g^{k\alpha} c_{i'}^\beta c_{j'}^\alpha \partial_\alpha g_{ij} = 2c_k^{k'} c_{i'j'}^k + 2c_k^{k'} c_{i'}^\beta c_{j'}^\alpha \Gamma_{ij}^k, \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Симметричная связность, согласованная с метрикой, называется *римановой связностью* или *связностью Леви–Чивиты*.

Задача 12.13. Докажите, что для римановой связности

- (1) каждая геодезическая равномерно параметризована;
- (2) изометрия переводит риманову связность в риманову связность: если $F: M \rightarrow N$ — изометрия римановых многообразий, а ∇^M и ∇^N — римановы связности на M и N соответственно, то для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$dF(\nabla_X^M Y) = \nabla_{dF(X)}^N dF(Y);$$

- (3) изометрия переводит геодезические в геодезические.

Замечание 12.14. Отметим, что в случае римановых связностей имеется теория, аналогичная той, которую мы развивали на поверхностях. Например, можно определить экспоненциальное отображение, нормальные координаты, внутреннюю метрику (как расстояние между точками связного риманова многообразия), а также доказать, что геодезические локально минимизируют длину и имеют место утверждения теоремы Хопфа–Ринова. Ограниченность нашего курса не позволяет нам детально обсудить эти темы. Приведем лишь полезное утверждение, которое доказывается ровно так же, как и в случае поверхностей: **в центре нормальных координат символы Кристоффеля равны нулю**. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 12.15. Для каждой точки P риманова многообразия M существует такая локальная система координат в окрестности P , что в точке P компоненты метрики образуют единичную матрицу (канонический базис касательного пространства $T_P M$ — ортонормальный), а символы Кристоффеля соответствующей римановой связности равны нулю.

12.4 Тензор кривизны

Важной характеристикой связности является степень некоммутативности ковариантного дифференцирования. Рассмотрим пример. Выберем в качестве M евклидово пространство \mathbb{R}^n , тогда в декартовых координатах x^1, \dots, x^n символы Кристоффеля равны нулю, поэтому $\nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^i} = 0$ и $\nabla_X Y = X(Y^i) \partial_{x^i}$. Если в качестве X взять базисное векторное поле ∂_{x^k} , то получим $\nabla_{\partial_{x^k}} Y = Y_{x^k}^i \partial_{x^i}$. Так как вторые частные производные коммутируют, имеем

$$\nabla_{\partial_{x^k}} \nabla_{\partial_{x^l}} Y = Y_{x^k x^l}^i \partial_{x^i} = \nabla_{\partial_{x^l}} \nabla_{\partial_{x^k}} Y.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае ковариантные производные вдоль координатных полей коммутируют.

Рассмотрим теперь ковариантные производные вдоль любых полей. Имеем

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_X (Y(Z^i) \partial_{x^i}) = \nabla_X (Y^l Z_{x^l}^i \partial_{x^i}) = X(Y^l Z_{x^l}^i) \partial_{x^i} = X^k Y_{x^k}^l Z_{x^l}^i \partial_{x^i} + Y^l X^k Z_{x^k x^l}^i \partial_{x^i},$$

откуда

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = X^k Y_{x^k}^l Z_{x^l}^i \partial_{x^i} - Y^k X_{x^k}^l Z_{x^l}^i \partial_{x^i} = [X, Y]^l Z_{x^l}^i \partial_{x^i} = \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Таким образом, в евклидовом пространстве выражение

$$(12.9) \quad R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

обращается в ноль для всех векторных полей X, Y и Z .

Рассмотрим теперь произвольное гладкое многообразие M , на котором задана аффинная связность, и определим отображение

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

по формуле (12.9).

Задача 12.16. Проверьте, что отображение R , заданное формулой (12.9), — функционально линейно.

Таким образом, отображение R , в силу теоремы 7.11, задает тензорное поле типа (1, 3) по формуле

$$R(\omega, X, Y, Z) = \omega(R(X, Y)Z).$$

Это тензорное поле называется **тензором кривизны Римана**, а также сокращенно **тензором кривизны** или **тензором Римана**.

Вычислим, как выглядят компоненты тензора кривизны в локальных координатах x^1, \dots, x^n . Имеем

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= dx^i \{ R(\partial_{x^k}, \partial_{x^l}) \partial_{x^j} \} = dx^i \{ \nabla_{\partial_{x^k}} \nabla_{\partial_{x^l}} \partial_{x^j} - \nabla_{\partial_{x^l}} \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^j} - \nabla_{[\partial_{x^k}, \partial_{x^l}]} \partial_{x^j} \} = \\ &= dx^i \{ \nabla_{\partial_{x^k}} (\Gamma_{lj}^p \partial_{x^p}) - \nabla_{\partial_{x^l}} (\Gamma_{kj}^p \partial_{x^p}) \} = dx^i \{ \partial_{x^k} \Gamma_{lj}^p \partial_{x^p} + \Gamma_{lj}^p \Gamma_{kp}^q \partial_{x^q} - \partial_{x^l} \Gamma_{kj}^p \partial_{x^p} - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{lp}^q \partial_{x^q} \} = \\ &= \partial_{x^k} \Gamma_{lj}^i - \partial_{x^l} \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{lj}^p \Gamma_{kp}^i - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{lp}^i = [\partial_{x^k} \Gamma_{lj}^i + \Gamma_{lj}^p \Gamma_{kp}^i] - [\partial_{x^l} \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{lp}^i] \end{aligned}$$

(сравните с выражением для компонент тензора Римана, полученным в прошлом семестре для поверхностей). Также заметьте, что выражения в квадратных скобках в последней равенстве выглядят как ковариантные производные “векторных полей” $\Gamma_{lj}^i := \Gamma_{lj}^i \partial_{x^i}$ и $\Gamma_{kj}^i := \Gamma_{kj}^i \partial_{x^i}$, если “заморозить” нижние индексы у Γ_{lj}^i и Γ_{kj}^i , т.е. условно это выражение можно переписать в виде $\nabla_{\partial_{x^k}} \Gamma_{lj}^i - \nabla_{\partial_{x^l}} \Gamma_{kj}^i$.

Замечание 12.17. Если воспользоваться координатами из предложения 12.15, в точке $P \in M$, где все символы Кристоффеля равны нулю, компоненты тензора Римана будут выглядеть проще:

$$R_{jkl}^i = \partial_{x^k} \Gamma_{lj}^i - \partial_{x^l} \Gamma_{kj}^i.$$

Этим часто пользуются для упрощения вычислений.

Замечание 12.18. В случае римановой связности, согласованной с евклидовой метрикой, в евклидовых координатах все символы Кристоффеля тождественно равны нулю, поэтому и тензор Римана тоже равен нулю. Таким образом, если в какой-то точке риманова многообразия тензор Римана соответствующей римановой связности отличен от нуля, то ни в одной окрестности этой точки нельзя ввести координат, в которых метрика записывалась бы в евклидовом виде (матрица метрики была бы всюду единичной). В действительности, условие равенства нулю тензора Римана в некоторой окрестности является критерием возможности ввести в этой окрестности евклидовы координаты (равенство нулю тензора Римана представляет собой систему уравнений, гарантирующих совместность условий возможности привести метрику к евклидову виду).

Если свернуть тензор Римана по верхнему и среднему нижнему индексам, то получим другой важный тензор, называемый **тензором Риччи**: $\text{Ric}_{jl} := R_{jl} = R_{jil}^i$. Ниже мы выясним, что, при дополнительных предположениях, тензор Риччи будет симметричным.

Если на многообразии M задана риманова метрика g , а в качестве ∇ выбрана связность, согласованная с этой метрикой, то по тензору Римана строится еще и тензорное поле типа (0, 4) с помощью операции опускания индекса: $R_{ijkl} = g_{ip} R_{jkl}^p$. В этом случае тензор Риччи можно записать и так: $R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl}$. Как мы выясним ниже, для римановой связности тензор R_{ijkl} обладает многочисленными симметриями, из которых и вытекает симметричность тензора Риччи.

12.4.1 Симметрии тензора кривизны

Следующая теорема описывает симметрии тензора Римана при разных дополнительных ограничениях на связность ∇ .

Теорема 12.19. Пусть M — гладкое многообразие, ∇ — аффинная связность, и R_{jkl}^i — компоненты тензора Римана в некоторых локальных координатах x^1, \dots, x^n . Тогда

- (1) $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$;
- (2) если связность ∇ симметрична, то $R_{jkl}^i + R_{kjl}^i + R_{ljk}^i = 0$ (первое тождество Бьянки);
- (3) если связность согласована с метрикой, то $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
- (4) если связность риманова, то $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Доказательство. Снова, для упрощения формул, положим $\partial_{x^i} = \partial_i$.

(1) Это мгновенно вытекает из явной формулы для компонент R_{jkl}^i .

(2) Симметричность связности означает зануление тензора кривизны, поэтому на базисных полях это условие влечет $\nabla_{\partial_p} \partial_q = \nabla_{\partial_q} \partial_p$. Заметим, что первое тождество Бьянки равносильно

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j + R(\partial_l, \partial_j)\partial_k + R(\partial_j, \partial_k)\partial_l = 0.$$

По определению,

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j,$$

поэтому

$$\begin{aligned} R(\partial_k, \partial_l)\partial_j + R(\partial_l, \partial_j)\partial_k + R(\partial_j, \partial_k)\partial_l &= \\ &= \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j + \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_l} \partial_k + \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_l - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_l = \\ &= \nabla_{\partial_k} [\nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_l] + \nabla_{\partial_l} [\nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_k} \partial_j] + \nabla_{\partial_j} [\nabla_{\partial_k} \partial_l - \nabla_{\partial_l} \partial_k] = 0. \end{aligned}$$

(3) Заметим, что $R_{ijkl} = \langle \partial_i, R(\partial_k, \partial_l)\partial_j \rangle$, откуда

$$R_{ijkl} = \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle = \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j \rangle - \langle \partial_i, \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle.$$

Так как связность согласована с метрикой, имеем

$$0 = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} g_{ij} = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \nabla_{\partial_l} \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle + \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \nabla_{\partial_l} \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j \rangle,$$

откуда

$$\langle R(\partial_k, \partial_l)\partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, R(\partial_k, \partial_l)\partial_j \rangle = 0,$$

что и требовалось.

(4) Заметим сначала, что для римановой связности выполняется

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0, \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}.$$

Напишем четыре первых тождества Бьянки, полученные из одного из них циклической перестановкой индексов, затем первое и последнее уравнение возьмем с плюсом, а два средних — с минусом

$$\begin{aligned} R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0, & (+) \\ R_{jkli} + R_{jlik} + R_{jikl} &= 0, & (-) \\ R_{klij} + R_{kijl} + R_{kjl i} &= 0, & (-) \\ R_{lij k} + R_{ljki} + R_{lki j} &= 0. & (+) \end{aligned}$$

После применения доказанных тождеств к одноцветным слагаемым, получим требуемое. \square

Теперь легко видеть, что для римановой связности тензор Риччи симметричен:

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = g^{ik} R_{klij} = R_{lj}.$$

Как и в случае поверхностей, полная свертка тензора Римана

$$R = g^{jl} R_{jil}^i = g^{ik} g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} R_{jl}$$

называется **скалярной кривизной**. Как мы показывали в прошлом семестре, имеет место **теорема Гаусса**: для двумерной поверхности в трехмерном пространстве гауссова кривизна равна удвоенной скалярной кривизне. Так как символы Кристоффеля полностью определяются римановой метрикой, и, значит, в случае поверхностей, — первой фундаментальной формой, отсюда вытекает и блистательная теорема Гаусса о том, что гауссова кривизна зависит лишь от первой фундаментальной формы поверхности и не зависит от второй.

Задача 12.20. Пусть M — риманово многообразие, ∇ — риманова связность, x^1, \dots, x^n — локальные координаты на M , g_{ij} — компоненты римановой метрики, R_{ijkl} — компоненты тензора Римана (с опущенным верхним индексом), $R_{ijkl,m} := \nabla_{\partial_{x^m}} R_{ijkl}$, R — скалярная кривизна. Докажите

(1) второе тождество Бьянки:

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0,$$

[указание: воспользуйтесь нормальными координатами];

(2) “сверточное” тождество Бьянки:

$$g^{ij}R_{im,j} = \frac{1}{2}R_{,m}.$$

Риманово многообразие M называется **многообразием Эйнштейна**, если тензор Риччи Ric пропорционален метрическому тензору g : существует гладкая функция $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\text{Ric} = \lambda g$.

Задача 12.21. Докажите, что у связных многообразий Эйнштейна размерности $n \geq 3$ скалярная кривизна постоянна.

12.5 Подмногообразия римановых многообразий (краткий обзор)

В прошлом семестре мы говорили о геометрии поверхностей в евклидовом пространстве. Многое из сказанного естественным образом переносится на ситуацию, в которой объемлющее евклидово пространство заменено на риманово многообразие W , а поверхность — на погружение $F: M \rightarrow W$ гладкого многообразия M . Для простоты восприятия мы будем предполагать, что $F = \iota$ является вложением, и многообразие M будем отождествлять с его образом, так что M можно рассматривать как подмногообразие в W и писать $M \subset W$.

Вдоль многообразия M возникает три векторных расслоения. Первое из них — это ι^*TW , являющееся фактически ограничением расслоения TW на M . Оставшиеся два расслоения являются подрасслоениями ι^*TW : касательное расслоение $TM = \sqcup_{P \in M} T_P M$ и нормальное расслоение $NM = \sqcup_{P \in M} N_P M$, где $N_P M \subset T_P W$ — ортогональное дополнение к $T_P M \subset T_P W$. Таким образом, $\iota^*TW = TM \oplus NM$.

Нам также понадобится рассматривать тензоры и тензорные поля на расслоении NM . Обсудим соответствующую конструкцию на произвольном гладком векторном расслоении $\pi: E \rightarrow M$ со слоем \mathbb{R}^k . Чтобы увидеть аналогию, определенное нами расслоение тензоров будем считать частным случаем расслоения для тривиального векторного расслоения $E = M \times \mathbb{R}$. В этом случае тензор типа (p, q) в точке $P \in M$ можно представить как полилинейное отображение из соответствующего декартова произведения p штук кокасательных пространств $T_P^* M$ и q -штук касательных пространств $T_P M$ в слой $E_P \approx \mathbb{R}$. В случае общего линейного расслоения, под **тензором в точке $P \in M$** будем понимать такое же полилинейное отображение, с разницей лишь в том, что теперь $E_P \approx \mathbb{R}^k$. Векторное пространство таких тензоров обозначим $T_P^{(p,q)} E$. На $T^{(p,q)} E := \sqcup_{P \in M} T_P^{(p,q)} E$ вводится естественная структура гладкого векторного расслоения, которое мы будем называть **расслоением тензоров типа (p, q) для векторного расслоения E** . Гладкие сечения этого расслоения называются **тензорными полями** для E .

Если на E задана связность $\nabla^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, то для нее по формуле (12.9) определен тензор кривизны: если $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \Gamma(E)$, то

$$R(X, Y)N = \nabla_X^E \nabla_Y^E N - \nabla_Y^E \nabla_X^E N - \nabla_{[X, Y]}^E N.$$

Если на M тоже задана связность ∇^M , то на тензорных полях $\Gamma(T^{(p,q)} E)$ индуцируется связность $\bar{\nabla}^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T^{(p,q)} E) \rightarrow \Gamma(T^{(p,q)} E)$ по формуле (12.4): если $T \in \Gamma(T^{(p,q)} E)$, $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$ и $X, Y_1, \dots, Y_q \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(12.10) \quad (\bar{\nabla}_X^E T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) = \nabla_X^E (T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) - \\ - \sum_{r=1}^p T(\omega^1, \dots, \nabla_X^M \omega^r, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) - \sum_{s=1}^q T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, \nabla_X^M Y_s, \dots, Y_q).$$

Вернемся к рассмотрению риманова многообразия W размерности n и его гладкого подмногообразия M размерности m . Для сокращения обозначений, начиная с этого места индуцированное расслоение ι^*TW на M будем обозначать E . Риманова метрика, определенная на TW , будучи ограниченной на E , TM и NM , индуцирует соответствующие римановы метрики. В случае поверхностей индуцированную метрику на TM мы называли первой фундаментальной формой. Для каждой точки $P \in M$, на $T_P W$ имеется два ортогональных проектора: $(\cdot)^\top$ и $(\cdot)^\perp$, где первый проецирует на $T_P M$, а второй — на $N_P M$.

Далее, пусть ∇ — риманова связность на W . Аналогично конструкции из доказательства предложения 12.7, связность ∇ индуцирует связность $\nabla^E: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ на E . С помощью проекторов $(\cdot)^\top$ и $(\cdot)^\perp$ порождаются еще две связности: одна, ∇^M , на TM , а другая, ∇^N , — на NM : если $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ — векторные поля на M , а $N \in \Gamma(NM)$ — нормальное векторное поле вдоль M , то

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^E Y)^\top, \quad \nabla_X^N N = (\nabla_X^E Y)^\perp.$$

Отметим, что на M , рассматриваемом как риманово многообразие, имеется еще и риманова связность.

Задача 12.22. Покажите, что риманова связность на M совпадает с ∇^M .

Связность ∇^M называется *касательной*, хотя ее вполне можно называть *римановой связностью подмногообразия* M . Определенная же выше связность ∇^N на нормальном расслоении NM называется *нормальной*.

Так же, как и для поверхностей, определяется вторая фундаментальная форма и оператор Вейнгартена.

Задача 12.23. Покажите, что

- (1) для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $P \in M$, вектор $(\nabla_X^E Y)^\perp(P) \in N_P M$ зависит лишь от значений полей X, Y в точке P , т.е. если поля $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ таковы, что $X'(P) = X(P)$ и $Y'(P) = Y(P)$, то $(\nabla_X^E Y)^\perp(P) = (\nabla_{X'}^E Y')^\perp(P)$;
- (2) для любых $X \in \mathfrak{X}(M)$, $N \in \Gamma(NM)$ и $P \in M$, вектор $(\nabla_X^E N)^\top(P) \in T_P M$ зависит лишь от значений полей X, N в точке P , т.е. если поля $X' \in \mathfrak{X}(M)$ и $N' \in \Gamma(NM)$ таковы, что $X'(P) = X(P)$ и $N'(P) = N(P)$, то $(\nabla_X^E N)^\top(P) = (\nabla_{X'}^E N')^\top(P)$.

Так как ковариантная производная зависит от своих аргументов линейно, пункт (1) из задачи 12.23 дает билинейное отображение $B: T_P M \times T_P M \rightarrow N_P M$, а пункт (2) из этой же задачи — билинейное отображение $A: T_P M \times N_P M \rightarrow T_P M$ (производную $(\nabla_X^E N)^\top(P)$ берут со знаком минус). Первое из них называется *второй фундаментальной формой*, а второе — *оператором Вейнгартена* подмногообразия M . Принято вместо $A(v, \eta)$ писать $A_\eta(v)$ и рассматривать A_η как линейное отображение $A_\eta: T_P M \rightarrow T_P M$, с чем и связано название “оператор”.

Задача 12.24. Покажите, что для любых $v, w \in T_P M$ и $\eta \in N_P M$ выполняется

- (1) $B(v, w) = B(w, v)$, т.е. вторая фундаментальная форма симметрична;
- (2) $\langle B(v, w), \eta \rangle = \langle A_\eta v, w \rangle$.

Как и в случае поверхностей, имеет место следующие очевидные утверждения.

Задача 12.25 (формула Гаусса и формула Вейнгартена). Докажите, что для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \Gamma(NM)$ выполняется

$$\nabla_X^E Y = \nabla_X^M Y + B(X, Y) \quad (\text{формула Гаусса}), \quad \nabla_X^E N = -A_N X + \nabla_X^N N \quad (\text{формула Вейнгартена}).$$

В следующем утверждении, также принадлежащем Гауссу, выясняется, чем отличаются тензор кривизны R объемлющего риманова многообразия W и тензор кривизны R^M его подмногообразия M .

Задача 12.26 (Уравнения Гаусса). Докажите, что для любых $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \langle R^M(X, Y)Z, V \rangle - \langle B(X, V), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, V) \rangle.$$

Приведем аналог уравнений Петерсона–Майнарди–Кодацци.

Задача 12.27 (Уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци). Покажите, что для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$[R(X, Y)Z]^\perp = (\nabla_X^N B)(Y, Z) - (\nabla_Y^N B)(X, Z).$$

Как мы уже отмечали выше, тензор кривизны можно определить для каждой связности. Через R^N обозначим тензор кривизны расслоения NM .

Задача 12.28 (Уравнения Риччи). Покажите, что для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \Gamma(NM)$ имеет место

$$[R(X, Y)N]^\perp = R^N(X, Y)N + B(A_N(X), Y) - B(A_N(Y), X).$$

Если в качестве W выбрать евклидово пространство, то уравнения Гаусса, Петерсона–Майнарди–Кодацци и Риччи упростятся, а именно, слагаемые, соответствующие R , будут равны нулю.

Следствие 12.29. Если M — гладкое подмногообразие \mathbb{R}^n , а $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \Gamma(NM)$, то

$$\begin{aligned} \langle R^M(X, Y)Z, V \rangle &= \langle B(X, V), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, V) \rangle \quad (\text{уравнения Гаусса}), \\ (\nabla_X^N B)(Y, Z) &= (\nabla_Y^N B)(X, Z) \quad (\text{уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци}), \\ R^N(X, Y)N &= B(A_N(Y), X) - B(A_N(X), Y) \quad (\text{уравнения Риччи}). \end{aligned}$$

Следующая теорема говорит о том, что достаточно задать на односвязном гладком многообразии для существования реализации этого многообразия в виде поверхности в \mathbb{R}^n с соответствующими первой и второй фундаментальными формами, а также связностью на нормальном расслоении. Более того, утверждается, что такая реализация единственная с точностью до движения пространства \mathbb{R}^n .

Теорема 12.30. Пусть M — односвязное гладкое многообразие размерности m , а $E \rightarrow M$ — гладкое векторное расслоение над M , слои которого имеют размерность $(n - m)$. Пусть также заданы

- риманова метрика на M , порождающая риманову связность ∇^M и тензор Римана R^M ;
- риманова метрика на E и согласованная с ней связность ∇^E , порождающие тензор Римана R^E связности ∇^E , а также связность $\bar{\nabla}^E$ на тензорных полях $\Gamma(T^{(p,q)}E)$ по отношению к связностям ∇^E и ∇^M ;
- симметричное тензорное поле $B \in \Gamma(T^{(0,2)}E)$, порождающее функционально полилинейное отображение $A: TM \times E \rightarrow TM$, $A_N(X) := A(X, N)$, которое однозначно определяется условием $\langle A_N(X), Y \rangle_M = \langle N, B(X, Y) \rangle_E$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ — скалярные произведения, порожденные соответствующими римановыми метриками.

Предположим, что для любых $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \Gamma(NM)$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \langle R^M(X, Y)Z, V \rangle_M &= \langle B(X, V), B(Y, Z) \rangle_E - \langle B(X, Z), B(Y, V) \rangle_E \quad (\text{уравнения Гаусса}), \\ (\nabla_X^E B)(Y, Z) &= (\nabla_Y^E B)(X, Z) \quad (\text{уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци}), \\ R^E(X, Y)N &= B(A_N(Y), X) - B(A_N(X), Y) \quad (\text{уравнения Риччи}). \end{aligned}$$

Тогда существует изометричное погружение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ и изометричный изоморфизм расслоения E и NM , переводящие B во вторую фундаментальную форму поверхности F , отображение A — в оператор Вейнгартена, а ∇^E — в нормальную связность. Отображение F определено однозначно с точностью до движения пространства \mathbb{R}^n .

Замечание 12.31. Отметим, что в теореме 12.30 говорится про погружение, и для погружения используются понятия второй фундаментальной формы, связности и т.д., которые мы определяли только для вложений, чтобы не загромождать изложение дополнительными построениями. В случае погружений нужно вместо ι^*TW рассматривать F^*TW и в нем уже задавать касательное расслоение TM , нормальное расслоение NM , связности и т.д. С другой стороны, утверждение теоремы можно воспринимать локально: в окрестности каждой точки $P \in M$, где отображение F — вложение, выполняются соответствующие утверждения.

Литература

- [1] Lee J.M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York., 1997.
- [2] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, v.4, Publish or Perish, Berkeley, 1999.

Упражнения к главе 12

Упражнение 12.1. Пусть $\pi: E \rightarrow M$ — гладкое векторное расслоение и ∇ — связность на нем. Покажите, что для каждой точки $P \in M$ вектор $(\nabla_X Y)_P$ зависит лишь от значения поля X в точке P и от значения сечения Y в сколь угодно малой окрестности точки P : если $X' \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y' \in \Gamma(E)$ такие, что $X(P) = X'(P)$, а $Y = Y'$ в некоторой окрестности точки P , то $(\nabla_X Y)_P = (\nabla_{X'} Y')_P$.

Упражнение 12.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие.

- (1) Предположим, что на M существует гладкий атлас \mathcal{A} , состоящий из одной карты (U, φ) , и пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты, заданные этой картой. Рассмотрим n^3 произвольных гладких функций $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$, где $1 \leq i, j, k \leq n$. Пусть отображение $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ задается формулой

$$\nabla_X Y = (X^i Y_{x^i}^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_{x^k}.$$

Проверьте, что ∇ — аффинная связность.

- (2) Пусть теперь $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный гладкий атлас на M , а $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу \mathcal{A} . Пусть ∇^α — аффинная связность на U_α . Для векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ через $\nabla_X^\alpha Y$ обозначим векторное поле на U_α , полученное применением отображения ∇^α к ограничениям полей X и Y на U_α . Пусть $\psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$ (здесь по α нет суммирования) обозначает поле на M , полученное из поля $\psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ продолжением нулем на все M . Покажите, что отображение $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, заданное так: $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y := \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, — аффинная связность на M .

Упражнение 12.3. Пусть на гладком многообразии M в каждом локальных координатах, порожденных картами некоторого гладкого атласа, заданы наборы функций Γ_{ij}^k , связанные друг с другом на непустых пересечениях карт по формулам

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = x_{x^{i'}}^i x_{x^{j'}}^j x_{x^k}^{k'} \Gamma_{ij}^k + x_{x^k}^{k'} x_{x^{j'}}^j x_{x^{i'}}^{i'}.$$

Покажите, что тогда существует единственная аффинная связность, для которой заданные функции — ее символы Кристоффеля.

Упражнение 12.4. Покажите, что существует продолжение аффинной связности с касательного расслоения на все тензорные расслоения.

Упражнение 12.5. Запишите в явном виде уравнения параллельного переноса и уравнения геодезических.

Упражнение 12.6. Покажите, что для гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ на гладком многообразии M с аффинной связностью и любых $t_0, t_1 \in I$, параллельный перенос $P_{t_0, t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ является изоморфизмом векторных пространств.

Упражнение 12.7. Докажите, что на римановом многообразии M с метрикой g и аффинной связностью ∇ следующие условия эквивалентны:

- (1) связность ∇ согласована с метрикой g ;
- (2) $\nabla g = 0$;
- (3) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ вдоль γ выполняется

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle D_t X, Y \rangle + \langle X, D_t Y \rangle;$$

- (4) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и параллельных вдоль γ векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ выполняется $\langle X(t), Y(t) \rangle = \text{const}$;
- (5) для любой гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ и любых $t_0, t_1 \in I$ параллельный перенос $P_{t_0, t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ — изометрия.

Упражнение 12.8. Докажите, что для римановой связности

- (1) каждая геодезическая равномерно параметризована;

- (2) изометрия переводит риманову связность в риманову связность: если $F: M \rightarrow N$ — изометрия римановых многообразий, а ∇^M и ∇^N — римановы связности на M и N соответственно, то для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется

$$dF(\nabla_X^M Y) = \nabla_{dF(X)}^N dF(Y);$$

- (3) изометрия переводит геодезические в геодезические.

Упражнение 12.9. Проверьте, что отображение R , заданное формулой

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

— функционально линейно.

Упражнение 12.10. Пусть M — риманово многообразие, ∇ — риманова связность, x^1, \dots, x^n — локальные координаты на M , g_{ij} — компоненты римановой метрики, R_{ijkl} — компоненты тензора Римана (с опущенным верхним индексом), $R_{ijkl, m} := \nabla_{\partial_{x^m}} R_{ijkl}$, R — скалярная кривизна. Докажите

- (1) второе тождество Бьянки:

$$R_{ijkl, m} + R_{ijlm, k} + R_{ijmk, l} = 0,$$

[указание: воспользуйтесь нормальными координатами];

- (2) “сверточное” тождество Бьянки:

$$g^{ij} R_{im, j} = \frac{1}{2} R_{, m}.$$

Упражнение 12.11. Докажите, что у связных многообразий Эйнштейна размерности $n \geq 3$ скалярная кривизна постоянна.