

# Лекции по классической дифференциальной геометрии

А. А. Тужилин

27 января 2021

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
1 Множества . . . . .	4
2 Тензоры . . . . .	6
3 Ориентация конечномерного векторного пространства . . . . .	9
4 Билинейные формы и квадратичные формы . . . . .	9
5 Матрица Грама билинейной формы . . . . .	9
6 Параллелепипеды и их объемы . . . . .	9
7 Ортогонализация Грама–Шмидта . . . . .	10
8 Сопряженные линейные отображения . . . . .	11
9 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду . . . . .	12
10 Нормированные пространства . . . . .	12
11 Метрические пространства . . . . .	13
12 Топология . . . . .	14
13 Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ . . . . .	18
14 Дифференцирование . . . . .	18
15 Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .	21
Некоторые курсы лекций и монографии по дифференциальной геометрии . . . . .	24
<b>1 Кривые</b>	<b>30</b>
1.1 Общие определения . . . . .	30
1.2 Длина кривой . . . . .	31
1.3 Натуральная и равномерная параметризации кривых . . . . .	33
1.4 Кривые в арифметическом пространстве, разные способы их задания . . . . .	34
1.4.1 Задание кривой в виде графика отображения . . . . .	35
1.4.2 Задание кривой в виде неявного отображения . . . . .	35
1.5 Интегральная формула длины регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	36
<b>2 Кривизны кривых</b>	<b>40</b>
2.1 Формулы Френе и кривизны . . . . .	40
<b>3 Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых</b>	<b>47</b>
3.1 Восстановление кривой по кривизнам . . . . .	47
3.1.1 Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне . . . . .	48
3.2 Геометрия плоских кривых . . . . .	49
3.2.1 Эволюты и эвольвенты . . . . .	50
3.2.2 Порядок касания кривых . . . . .	51
3.2.3 Огибающие семейства кривых на плоскости . . . . .	52
<b>4 Поверхности в евклидовом пространстве.</b>	<b>56</b>
4.1 Общие определения . . . . .	56
4.1.1 Задание поверхности в виде графика отображения . . . . .	58
4.1.2 Задание поверхности в виде неявного отображения . . . . .	59
4.2 Формализация понятия поверхности . . . . .	60
Литература к главе 4 . . . . .	62

<b>5</b>	<b>Дифференциальные свойства поверхностей</b>	<b>65</b>
5.1	Поверхности и отображения . . . . .	65
5.1.1	Касательные векторы и касательное пространство . . . . .	66
5.1.2	Дифференциал отображения поверхностей . . . . .	67
5.2	Первая фундаментальная форма поверхности . . . . .	69
5.2.1	Изометричные отображения поверхностей . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Тензорное исчисление на поверхностях</b>	<b>75</b>
6.1	Тензорная запись первой фундаментальной формы . . . . .	75
6.2	Векторные поля и ковариантные дифференцирования . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Параллельный перенос</b>	<b>82</b>
7.1	Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму	82
7.2	Векторные поля вдоль кривых, параллельный перенос . . . . .	84
7.2.1	Параллельные векторные поля и параллельный перенос вдоль кривых . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Геодезические</b>	<b>88</b>
8.1	Геодезические . . . . .	88
8.2	Операции над поверхностями. Касательное расслоение к поверхности . . . . .	89
8.2.1	Ограничение поверхности на область . . . . .	90
8.2.2	Произведение поверхностей . . . . .	90
8.2.3	Касательное расслоение . . . . .	90
8.3	Экспоненциальное отображение и нормальные координаты . . . . .	91
8.4	Минимизационные свойства геодезических . . . . .	92
8.4.1	Теорема Хопфа–Ринова . . . . .	96
	Литература к главе 8 . . . . .	99
<b>9</b>	<b>Вторая фундаментальная форма</b>	<b>101</b>
9.1	Коммутатор векторных полей . . . . .	101
9.2	Вторая фундаментальная форма поверхности и оператор Вейнгартена . . . . .	102
9.2.1	Главные направления и главные кривизны . . . . .	104
9.2.2	Сечения . . . . .	105
9.2.3	Гиперповерхности . . . . .	105
9.2.4	Средняя кривизна поверхности произвольной коразмерности . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Формулы Гаусса и Петерсона–Майнарди–Кодацци, блистательная теорема Гаусса, теорема Бонне</b>	<b>111</b>
	Литература . . . . .	115

# Введение

**План.** Синтетический характер дифференциальной геометрии, множества, основные операции с множествами (объединение, пересечение, дополнение, дизъюнктивное объединение, произведение), покрытие и разбиение, отношения, отображения и их графики, частичный порядок, линейный порядок, эквивалентность, тензорные обозначения (верхние и нижние индексы, отсутствие символов суммирования, обозначение штрихами нового базиса и координат векторов в новом базисе), определение тензоров (инвариантное и координатное), примеры тензоров (векторы, ковекторы, билинейные формы), линейные комбинации тензоров одного типа и тензорные произведения, линейное пространство тензоров одного типа, базис этого пространства, тензорные свойства, ориентация конечномерного векторного пространства, квадратичные формы, матрица Грама билинейной формы, скалярное произведение, параллелепипеды и их объемы, ортогонализация Грама-Шмидта, сопряженные линейные отображения пространств со скалярными произведениями, приведение пары квадратичных форм к каноническому виду, нормированные пространства, норма и скалярное произведение, метрические пространства, ограниченные линейные отображения, норма линейного отображения, открытые и замкнутые шары, сферы, открытые и замкнутые окрестности множеств, ограниченные подмножества метрических пространств, ограниченные линейные отображения нормированных пространств и их нормы, топология, открытые множества, дискретная и антидискретная топологии, база и предбаза топологии, виды и конструкции топологий, индуцированная топология, метрическая топология, топология пространства ограниченных линейных отображений, топология дизъюнктивного объединения, топология произведения или тихоновская топология, окрестности точек, проколотые окрестности, изолированные точки, точка прикосновения, внутренняя точка, граничная точка, замыкание, внутренность, граница, хаусдорфово пространство, связное пространство, компактное пространство, непрерывное отображение топологических пространств, кривая в топологическом пространстве, линейно связные и локально линейно связные пространства, последовательности, сходящиеся последовательности в топологическом пространстве, фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, полные метрические пространства, банаховы пространства, арифметическое пространство, евклидово пространство, дифференцирование, дифференциал, производная, частная производная, матрица Якоби, теорема о производной композиции отображений, дифференциалы высших порядков, гладкие отображения, теорема об обратном отображении, частный дифференциал, теорема о неявном отображении, дифференциальные уравнения, теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, обобщения (уравнения высоких порядков, автономные и неавтономные уравнения), теорема о продолжении решения неавтономного линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

В этом семестре мы будем изучать геометрические объекты в стандартном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , а также геометрию Лобачевского.

Напомним, что арифметическое пространство  $\mathbb{R}^n$  представляет собой совокупность всевозможных упорядоченных наборов  $(x^1, \dots, x^n)$  из  $n$  вещественных чисел. Это пространство снабжено рядом структур, которые мы будем использовать. Прежде всего,  $\mathbb{R}^n$  — векторное пространство, так что арсенал линейной алгебры будет неоднократно востребован. В частности, при изучении поверхностей нам особенно пригодится теорема о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду. Отметим также, что в следующем семестре мы будем преимущественно заниматься тензорным исчислением.

Важным частным случаем билинейной формы на  $\mathbb{R}^n$  является стандартное скалярное произведение, называемое *евклидовым* и превращающее  $\mathbb{R}^n$  в евклидово пространство. Наличие этого произведения приводит к таким понятиям, как ортогональный и ортонормальный базис, процессу ортогонализации Грама-Шмидта, ортогональным преобразованиям, матрице Грама, и др.

Скалярное произведение порождает норму, а норма — расстояние между точками (метрику), так что  $\mathbb{R}^n$  превращается в метрическое пространство, которое можно изучать методами метрической геометрии.

Описанная выше метрика задает на  $\mathbb{R}^n$  топологию, поэтому теория топологических пространств и непрерывных отображений также начинает играть.

Наличие топологии, структуры линейного пространства и нормы позволяет приближать разного рода отображения линейными отображениями, что приводит к понятию производной и дифференциала. Таким образом, подключается и математический анализ. Из математического анализа нам, прежде всего, будут нужны теоремы о неявной функции, об обратном отображении и о производной композиции отображений. Эти “три кита” будут постоянно возникать в том или ином контексте как в этом семестре, так и в следующем.

Дифференцирование приводит также к дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных. Особый интерес будут для нас представлять теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений.

Обратная операция к дифференцированию — интегрирование, будет использоваться нами, например, при вычислении площадей и объемов геометрических фигур. Кроме того, с помощью дифференцирования и интегрирования мы будем строить разные алгебраические инварианты геометрических объектов.

Заменяя вещественные числа на комплексные, мы приходим к комплексной дифференциальной геометрии. Кроме того, даже при изучении вещественной геометрии переход к комплексным функциям оказывается

чрезвычайно полезным. Так, комплексные отображения будут использоваться нами при изучении геометрии Лобачевского.

Напомним также про альтернативный подход к изучению линейных пространств, когда на векторы смотрят как на точки, а линейную структуру задают репером, разрешая в качестве начала координат выбирать любую точку пространства. Так возникает аффинная геометрия.

Все описанное выше не только демонстрирует синтетический характер дифференциальной геометрии, но, в первую очередь, прозрачно намекает, что слушателям нашего курса нужно тщательно ознакомиться с основными результатами перечисленных выше разделов математики. Ниже мы приведем ряд ссылок на выложенные в интернете лекции, на учебные пособия и монографии, посвященные изложению основ дифференциальной геометрии.

## Предварительные определения и результаты

Напомним основные определения и результаты, которые были разобраны на других лекциях и семинарах и которые будут нам полезны в дальнейшем. Также введем обозначения, существенно сокращающие формулы. Отметим, что ряд определений мы будем давать в более общем виде. Цель этого — двоякая. С одной стороны, сущность многих конструкций раскрывается именно в общих формулировках, когда убирается разнообразие несущественные детали, сопровождающие упрощенное изложение. С другой стороны, понимание того, что конструкции, с которыми мы будем иметь дело, намного шире, открывают возможность поиска приложений, находящихся далеко за пределами нашего курса.

### 1 Множества

Пусть  $X$  — произвольное множество. Через  $2^X$  будем обозначать множество всех подмножеств  $X$ . Рассмотрим семейство  $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$ , где множество индексов  $\mathcal{A}$  может быть любым, в частности, пустым множеством. Объединение  $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$  и пересечение  $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$  будем иногда обозначать  $\cup \mathcal{Y}$  и  $\cap \mathcal{Y}$  соответственно. Если  $\mathcal{A} = \emptyset$ , то положим  $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \emptyset$ , а  $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = X$ .

Семейство  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  подмножеств  $X$  называется *покрытием*  $X$ , если  $X = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$ . Если при этом разные  $Y_\alpha$  не пересекаются, то семейство  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  называется *разбиением*  $X$ . *Подпокрытие* — подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Если  $Y, Z \subset X$ , то  $Y \setminus Z = \{y \in Y : y \notin Z\}$  определено даже если  $Z$  не является подмножеством  $Y$ . Если  $Y \subset X$ , то  $X \setminus Y$  называется *дополнением*  $Y$ . Напомним, что

$$X \setminus \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus Y_\alpha) \quad \text{и} \quad X \setminus \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus Y_\alpha).$$

Отметим, что наше соглашение относительно объединений и пересечений для пустых семейств индексов  $\mathcal{A}$  согласуются с предыдущими формулами.

Даже если множества  $X$  и  $Y$  пересекаются, то на них можно смотреть как на непересекающиеся множества, например, заменив  $X$  на  $X \times \{1\}$ , а  $Y$  — на  $Y \times \{2\}$ . *Дизъюнктное объединение*  $X \sqcup Y$  — это объединение именно таких, рассматриваемых как непересекающиеся, множеств  $X$  и  $Y$ . Эта конструкция естественно переносится и на произвольные семейства множеств  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  (мы заменяем каждое  $X_\alpha$  на  $X_\alpha \times \{\alpha\}$ ) и приводит к дизъюнктному объединению  $\sqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ .

Произведение множеств семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  — это множество всех отображений  $x: \mathcal{A} \rightarrow \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  таких, что  $x(\alpha) \in X_\alpha$  при каждом  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Элемент  $x(\alpha)$  обычно обозначается через  $x_\alpha$  и называется  *$\alpha$ -ой координатой точки  $x$* . Для конечного множество  $X_1, \dots, X_n$  произведение записывают в виде  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

*Отношением  $\sigma$  между множествами  $X$  и  $Y$*  называется произвольное подмножество в  $X \times Y$ . Важным частным случаем отношения является *график  $\Gamma_f$  отображения  $f: X \rightarrow Y$* , т.е.  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ . Если  $X = Y$ , то  $\sigma$  называется *отношением на  $X$* .

Отношение  $\sigma$  на множестве  $X$  называется

- *рефлексивным*, если  $(x, x) \in \sigma$  для любого  $x \in X$ ;
- *симметричным*, если  $(x, y) \in \sigma$  влечет  $(y, x) \in \sigma$ ;
- *антисимметричным*, если  $(x, y) \in \sigma$  и  $(y, x) \in \sigma$  влечет  $x = y$ ;
- *транзитивным*, если  $(x, y), (y, z) \in \sigma$  влечет  $(x, z) \in \sigma$ .

Рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение называется *частичным порядком*. Пример — отношение включения (принадлежности одного множества другому), заданное на семействе всех (или некоторых) подмножеств данного множества. Частичный порядок часто обозначают “ $\leq$ ” или “ $\geq$ ”, имея в виду, что  $y \geq x$  равносильно  $x \leq y$ . Если  $x \leq y$  и  $x \neq y$ , то пишут  $x < y$  или  $y > x$ .

Элементы  $x, y \in X$  называются *сравнимыми в частичном порядке  $\sigma$* , если или  $(x, y) \in \sigma$ , или  $(y, x) \in \sigma$ . Порядок  $\sigma$  называется *линейным*, если в нем любые два элемента сравнимы. Пример — стандартный порядок на множестве вещественных чисел.

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*. Множество попарно эквивалентных элементов называется *классом эквивалентности*. Каждое множество, на котором задано отношение эквивалентности, разбивается на классы эквивалентности (проверьте). Обратно, каждое разбиение множества задает соответствующее отношение эквивалентности: элементы эквивалентны, если они принадлежат одному и тому же элементу разбиения.

**Дополнительный материал.** Для более глубокого ознакомления с теорией множеств, полезно изучить *аксиоматику фон Неймана–Бернайса–Гёделя*. Одной из “спорных” аксиом теории множеств является *аксиома выбора*: если  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — множество, элементы  $X_\alpha$  которого являются непустыми множествами, то существует множество  $\{x_\alpha : x_\alpha \in X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . Иными словами, мы можем построить множество, выбрав в каждом  $X_\alpha$  некоторый элемент  $x_\alpha$ .

Эта аксиома приводит к разным “странным” результатам. Например, к *парадоксу Банаха–Тарского*: сферу единичного радиуса в пространстве  $\mathbb{R}^3$  можно разбить на пять частей и так переместить эти части, чтобы в результате образовалось две сферы единичного радиуса. Этот парадокс демонстрирует, в частности, невозможность распространить на все подмножества пространства  $\mathbb{R}^3$  понятие площади так, чтобы оно обладало естественными свойствами. Вот еще один пример.

**Задача 1.** Покажите, что существует функция на вещественной прямой, которая на каждом интервале принимает все возможные значения.

Тем не менее, без аксиомы выбора математика становится существенно беднее, так что мы не будем от нее отказываться.

Пусть на множестве  $X$  задан частичный порядок. Элемент  $x \in X$  называется *минимальным* (*максимальным*), если не существует элемента  $y$  такого, что  $y < x$  (соответственно,  $y > x$ ). При этом  $x$  не обязан быть сравним со всеми элементами множества  $X$ . Если, дополнительно,  $x$  сравним со всеми элементами из  $X$ , то такой  $x$  называется *наименьшим* (соответственно, *наибольшим*).

Если  $Y$  — подмножество частично упорядоченного множества, то определены также *мажоранты* и *миноранты*  $Y$  — такие элементы  $x \in X$ , что в первом случае  $y \leq x$ , а во втором —  $y \geq x$  для всех  $y \in Y$ . Отметим, что мажоранта и миноранта сравнимы со всеми элементами из  $Y$ , а также что они имеют и другое название — *верхняя грань* и *нижняя грань* соответственно.

Линейно упорядоченное множество, в котором каждое непустое подмножество имеет минимальный и, значит, наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным*.

**Теорема 2** (Цермело). *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Эта теорема и ряд других свойств приводит к построению теории ординалов и кардиналов, трансфинитной шкалы и трансфинитной индукции — обобщению индукции на вполне упорядоченные множества произвольной мощности.

**Задача 3.** Семейство  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  подмножеств множества  $X$  называется *покрытием*  $X$ , если  $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$ . Покрытие называется *разбиением*, если его разные элементы не пересекаются. Покрытие  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  множества  $X$  называется *вписанным* в другое его покрытие  $\{Y_\beta\}_{\beta \in B}$ , если для каждого  $\alpha$  существует  $\beta$  такое, что  $X_\alpha \subset Y_\beta$ . Докажите, что для каждого покрытия имеется вписанное в него разбиение.

**Задача 4.** Используя теорему Цермело, покажите, что пространство  $\mathbb{R}^3$  можно разбить на окружности конечного ненулевого радиуса (т.е. точки — окружности нулевого радиуса, и прямые — окружности бесконечно радиуса, в разбиении не участвуют).

Подмножество частично упорядоченного множества называется *цепью*, если индуцированный на нем порядок — линейный.

**Теорема 5** (Лемма Цорна). *Предположим, что каждая цепь в частично упорядоченном множестве  $X$  имеет мажоранту, тогда для любого  $x \in X$  существует сравнимый с  $x$  максимальный элемент.*

В следующей задаче мы рассмотрим произвольное (не обязательно конечномерное) линейное пространство. Все линейные комбинации векторов из  $V$  будут конечными. Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если в ней не все коэффициенты равны нулю. Система векторов называется *линейно независимой*, если в ней не существует равных нулю нетривиальных линейных комбинаций. Система векторов называется *полной*, если каждый вектор выражается в виде линейной комбинации векторов этой системы. *Базисом Гамеля* в векторном пространстве  $V$  называется всякая полная линейно независимая система векторов.

**Задача 6.** Докажите, что каждая линейно независимая система векторов произвольного линейного пространства содержится в некотором базисе Гамеля.

**Задача 7.** Рассмотрим вещественную прямую  $\mathbb{R}$  как векторное пространство над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел. Покажите, что существует линейное над  $\mathbb{Q}$  отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тождественное на  $\mathbb{Q}$  и переводящее  $\sqrt{2}$  в  $\sqrt{3}$ .

## 2 Тензоры

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться соглашениями, принятыми в тензорном исчислении. Эти соглашения призваны упростить вид формул за счет избавления от значков суммирования везде, где это возможно, а также более рациональной записи базисных векторов и координат при замене базиса. Важным требованием этих соглашений является правильный выбор между верхними и нижними индексами.

Итак, пусть  $V$  — векторное пространство конечной размерности  $n$ . Базисные векторы будем нумеровать нижними индексами, например  $e_1, \dots, e_n$ , а координаты векторов — верхними индексами, например  $v = (v^1, \dots, v^n) \in V$ . У элементов двойственного пространства  $V^*$  — все наоборот: ковекторы двойственного к  $e_1, \dots, e_n$  базиса будем обозначать  $e^1, \dots, e^n$ , так что  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ , где  $\delta_j^i$  — символы Кронекера, а координаты ковектора будем нумеровать нижними индексами:  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Важное замечание: в формулах нужно следить за тем, чтобы индексы сохраняли свою высоту, т.е. верхние оставались верхними, а нижние — нижними.

Далее, если в формуле встречается дважды один и тот же индекс как в верхнем, так и в нижнем положении, то мы предполагаем, что по этому индексу происходит суммирование, хотя знак суммы мы не пишем. Например,  $v = v^i e_i$  и  $\xi = \xi_i e^i$  — разложения вектора и ковектора по двойственным базисам. Подобное соглашение может создавать проблемы, так как иногда по повторяющимся индексам суммировать не нужно. Договоримся, что по индексам, заданным числами, суммирование не производится, например в  $v^1 e_1$  суммирования нет. Кроме того, отсутствие суммирования мы будем особо оговаривать (это оправдано тем, что суммирование встречается чаще, чем его отсутствие).

Пусть теперь мы хотим заменить базис  $e_i$  на другой. Конечно, можно изменить символ “ $e$ ” на новый символ, скажем на “ $f$ ”, а также поменять индекс  $i$  на другой индекс. Оказывается, более удобным вместо  $f$  воспользоваться штрихованным индексом, например  $e^{i'}$  или  $e^{i''}$ . При этом индекс  $i$  также можно заменить на  $i'$  или  $i''$ , в результате чего мы получим  $e_{i'}$  или  $e_{i''}$ . Хотя сейчас все правильно, но, как видно, штрихов у нас слишком много. В тензорном исчислении принято соглашение не писать штрих при  $e$ , а считать, что если у индекса  $i$  стоит штрих, то  $e_{i'}$  — это уже новый базисный вектор, а не старый с номером  $i'$ . Аналогично поступают и с координатами векторов и ковекторов. Таким образом,  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$  — новый базис, в котором вектор  $v$  имеет координаты  $(v^{1'}, \dots, v^{n'})$ .

Сформулированные выше принципы позволяют автоматически писать многие формулы, не акцентируя внимание на том, координаты вектора или ковектора мы преобразуем. Приведем примеры. Пусть, как и выше,  $e_i$  и  $e_{i'}$  — два разных базиса. Тогда переходы между этими базисами задаются взаимно обратными матрицами  $(c_i^{i'})$  и  $(c_{i'}^i)$ , где последнее можно записать с помощью символов Кронекера (элементов единичной матрицы):

$$c_i^{i'} c_{i'}^j = \delta_j^i, \quad c_{i'}^j c_j^{i'} = \delta_j^i.$$

Эти матрицы определяются по разложениям векторов одного базиса по векторам другого, что можно записать чисто автоматически исходя из приведенных выше правил:

$$e_{i'} = c_{i'}^i e_i, \quad e_i = c_i^{i'} e_{i'}.$$

При этом закон изменения двойственных базисов, а также координат векторов и ковекторов тоже пишется автоматически:

$$e^{i'} = c_i^{i'} e^i, \quad e^i = c_{i'}^i e^{i'}, \quad v^{i'} = c_i^{i'} v^i, \quad v^i = c_{i'}^i v^{i'}, \quad \xi_{i'} = c_{i'}^i \xi_i, \quad \xi_i = c_i^{i'} \xi_{i'}.$$

**Замечание 8.** В линейной алгебре имеется соглашение относительно того, что называть матрицей перехода от одного базиса к другому. Запишем эту матрицу в наших терминах. Предположим, что мы переходим от базиса  $e_i$  к базису  $e_{i'}$ . Тогда *матрицей перехода  $C$  от нового базиса  $e_{i'}$  к старому  $e_i$*  называется матрица, по столбцам которой расположены координаты векторов исходного базиса относительно нового, т.е. вектор  $e_i$  в новом базисе имеет вид  $c_i^{i'} e_{i'}$ , и коэффициенты  $(c_i^{i'}, \dots, c_i^{n'})$  выписаны в  $i$ -ый столбец матрицы  $C$ :

$$C = \begin{pmatrix} c_1^{i'} & c_2^{i'} & \cdots & c_n^{i'} \\ c_1^{j'} & c_2^{j'} & \cdots & c_n^{j'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n'} & c_2^{n'} & \cdots & c_n^{n'} \end{pmatrix} = (c_i^{i'}).$$

Если  $(v^1, \dots, v^n)$  — координаты вектора в базисе  $e_i$ , то в новом базисе координаты этого вектора будут

$$Cv = (c_i^{1'} v^i, \dots, c_i^{n'} v^i).$$

Полилинейные (линейные по каждому аргументу) отображения вида

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ штук}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ штук}} \rightarrow \mathbb{R}$$

называются *тензорами типа  $(p, q)$* . Если  $e_i$  — базис  $V$ , а  $e^i$  — двойственный базис  $V^*$ , то числа

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$$

называются *компонентами* или *координатами тензора  $T$  в базисе  $e_i$* . Легко видеть, что тензор  $T$  однозначно определяется своими координатами, так как его значение на наборе ковекторов  $\xi^1, \dots, \xi^p$  и векторов  $v_1, \dots, v_q$ , в силу полилинейности, имеет вид

$$T(\xi_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \xi_{i_p}^p e^{i_p}, v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_q^{j_q} e_{j_q}) = \xi_{i_1}^1 \cdots \xi_{i_p}^p v_1^{j_1} \cdots v_q^{j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Приведем ряд частных случаев тензоров.

- Векторы — тензоры типа  $(1, 0)$ , так как их можно рассматривать как линейные отображения  $v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(\xi) = v^i \xi_i$ .
- Ковекторы — тензоры типа  $(0, 1)$ , так как они, по определению, являются линейными отображениями  $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Билинейные формы, например, скалярное произведение, — тензоры типа  $(0, 2)$ , так как они, по определению, являются билинейными отображениями  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Как меняются координаты тензора при замене базиса? Это легко понять, воспользовавшись полилинейностью:

$$(1) \quad T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = T(e^{i'_1}, \dots, e^{i'_p}, e_{j'_1}, \dots, e_{j'_q}) = T(c_{i_1}^{i'_1} e^{i_1}, \dots, c_{i_p}^{i'_p} e^{i_p}, c_{j_1}^{j'_1} e_{j_1}, \dots, c_{j_q}^{j'_q} e_{j_q}) = c_{i_1}^{i'_1} \cdots c_{i_p}^{i'_p} c_{j_1}^{j'_1} \cdots c_{j_q}^{j'_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Убедитесь, что этот *тензорный закон* согласуется с правилами преобразования координат векторов, ковекторов, билинейных форм и линейных операторов.

Тензорный закон позволяет дать эквивалентное определение тензоров, которое называется *координатным: тензором типа  $(p, q)$  на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$*  называется отображение, которое ставит в соответствии каждому базису пространства  $V$  набор из  $n^{p+q}$  чисел вида  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ , причем числа, поставленные разным базисам, связаны друг с другом по тензорному закону (1). Отметим, что исходное определение тензоров, называется *инвариантным*.

Приведем еще один пример тензоров, за одно применив координатное определение. Напомним, что *линейный оператор* на векторном пространстве  $V$  — это линейное отображение векторного пространства  $V$  в себя. Если  $A$  — матрица линейного оператора в некотором базисе  $e_i$ , а  $C = (c_i^{i'})$  — матрица перехода от нового базиса  $e_{i'}$  к старому, то матрица  $A'$  этого оператора в базисе  $e_{i'}$  имеет вид  $CA C^{-1}$ . Обозначим через  $a(i, j)$  элементы матрицы  $A$ , а через  $a(i', j')$  — элементы матрицы  $A'$  (мы пока не знаем, какие индексы должны быть верхними, какие — нижними). Тогда  $a(i', j') = \sum_{i, j} c_i^{i'} c_j^j a(i, j)$ , поэтому в  $a(i, j)$  индекс  $i$  — верхний, а  $j$  — нижний. Таким образом, мы получаем  $a_{j'}^{i'} = c_i^{i'} c_j^j a_j^i$ , т.е. закон преобразования тензоров типа  $(1, 1)$ . Итак, линейный оператор, точнее, компоненты матрицы линейного оператора, — это тензор типа  $(1, 1)$ . Но тогда этот оператор должен соответствовать отображению  $A: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Это отображение выглядит так:  $A(\xi, v) = \xi(A(v))$ .

**Задача 9.** Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  и  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый его базис. Припишем этому базису  $n^{p+q}$  чисел  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ , и, воспользовавшись тензорным законом (1), примененным к этим числам, припишем также  $n^{p+q}$  чисел каждому из всех остальных базисов. Покажите, что полученные наборы чисел связаны друг с другом по тензорному закону, т.е. порождают некоторый тензор. В частности, каждый базисный вектор  $e_i$  порождает тензор  $E_i$  типа  $(1, 0)$ : в базисе  $e_1, \dots, e_n$  он имеет координаты  $(E_i)^j = \delta_i^j$ , а в базисе  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$  — координаты  $(E_i)^{j'} = c_j^{j'} \delta_i^j = c_i^{j'}$ , где  $c_j^{j'}$  — компоненты матрицы замены базиса, т.е.  $e_j = c_j^{j'} e_{j'}$ . Аналогично, каждый базисный ковектор  $e^i$  порождает тензор типа  $(0, 1)$  (проделайте соответствующие построения).

**Задача 10.** Покажите, что тензорный закон сохраняет линейные комбинации  $\lambda T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \mu S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  и произведения  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}$ . Таким образом, для тензоров  $T$  и  $S$  типа  $(p, q)$  определены линейные комбинации  $\lambda T + \mu S$ , а тензоры  $T$  и  $S$  типов  $(p, q)$  и  $(r, s)$  можно перемножать (эта операция называется *тензорным произведением* и обозначается  $T \otimes S$ ). Проверьте, что тензорное произведение некоммутативно, но ассоциативно и дистрибутивно.

**Задача 11.** Выведите из предыдущих упражнений, что тензоры типа  $(p, q)$  образуют векторное пространство размерности  $n^{p+q}$ , и что для произвольного базиса  $e_1, \dots, e_n$  и двойственного базиса  $e^1, \dots, e^n$  тензоры  $E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_p} \otimes E^{j_1} \otimes \dots \otimes E^{j_q}$  образуют базис этого пространства.

Свойство координат тензора назовем *тензорным*, если оно выполняется в каждом базисе. Например, для билинейной формы  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  к таким свойствам относится

- *симметричность*:  $b_{ij} = b_{ji}$  при всех  $i$  и  $j$ ;
- *кососимметричность*:  $b_{ij} = -b_{ji}$  при всех  $i$  и  $j$ ;
- *невыврожденность*:  $\det(b_{ij}) \neq 0$  (более общо, сохранение ранга  $\text{rank}(b_{ij})$ );
- *положительная определенность*:  $b(v, v) > 0$  для каждого ненулевого  $v \in V$ .

Обобщим свойства симметричности и кососимметричности на тензоры типа  $(0, k)$ . Обозначим через  $S_k$  группу перестановок элементов множества  $\{1, \dots, k\}$ . Напомним, что для каждой перестановки  $\sigma \in S_k$  определен ее *знак*, который мы обозначим  $(-1)^\sigma$ . Если  $p = (p_1, \dots, p_k)$  — упорядоченный набор элементов  $p_i$  произвольного множества, и  $\sigma \in S_k$ , то под  $\sigma(p_1 \dots p_k) = \sigma(p)$  будем понимать упорядоченное множество  $(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)})$ .

Пусть теперь  $T$  — тензор типа  $(0, k)$ , и  $T_{i_1 \dots i_k}$  — его координаты в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

**Задача 12.** Докажите, что следующие свойства для тензора  $T$  являются тензорными:

- *симметричность*:  $T_{\sigma(i_1 \dots i_k)} = T_{i_1 \dots i_k}$  при всех  $i_1, \dots, i_k$  и  $\sigma \in S_k$ ;
- *кососимметричность*:  $T_{\sigma(i_1 \dots i_k)} = (-1)^\sigma T_{i_1 \dots i_k}$  при всех  $i_1, \dots, i_k$  и  $\sigma \in S_k$ .

Пусть  $T$  — кососимметричный тензор типа  $(0, n)$  и  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис пространства  $V$ . Тогда координаты  $T_{i_1 \dots i_n}$  этого тензора в данном базисе однозначно определяются его координатой  $T_{1 \dots n}$ : если среди индексов  $i_1, \dots, i_n$  есть совпадающие, то  $T_{i_1 \dots i_n} = 0$ ; если нет, то  $(i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, \dots, n)$  для некоторой перестановки  $\sigma \in S_n$ , поэтому  $T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{1 \dots n}$ . Из сказанного ясно, что если для  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , через  $A_v$  обозначить матрицу, в которой  $i$ -ый столбец состоит из координат вектора  $v_i$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , то

$$T(v_1, \dots, v_n) = (\det A_v) T_{1 \dots n}.$$

В частности, если  $T_{1 \dots n} = 1$ , то  $T(v_1, \dots, v_n)$  — это просто определитель матрицы  $A_v$ .

Для линейного оператора  $a: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  к тензорным свойствам относится, например,

- *невыврожденность*:  $\det(a_j^i) \neq 0$  (более общо, сохранение ранга  $\text{rank}(a_j^i)$ );
- *сохранение или изменение ориентации*:  $\det(a_j^i) > 0$  (соответственно,  $\det(a_j^i) < 0$ ).

Напомним, что такое ориентация конечномерного векторного пространства  $V$ .

### 3 Ориентация конечномерного векторного пространства

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство. Рассмотрим всевозможные базисы этого пространства и введем на них следующее отношение: базис  $e_1, \dots, e_n$  находится в отношении с базисом  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ , если и только если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен. Отметим, что единичная матрица имеет положительный определитель, поэтому отношение рефлексивно. Далее, если  $C$  — матрица перехода от первого базиса ко второму, то  $C$  невырождена,  $C^{-1}$  — матрица перехода от второго базиса к первому и  $\det C^{-1} = 1/\det C$ , так что отношение симметрично. Наконец, если  $C_1$  — матрица перехода от первого базиса ко второму, а  $C_2$  — от второго ко третьему, то  $C_1 C_2$  — матрица перехода от первого базиса к третьему и  $\det(C_1 C_2) = \det C_1 \det C_2$ , поэтому отношение транзитивно. Таким образом, введенное отношение является эквивалентностью и, поэтому, разбивает все базисы на классы. Этих классов ровно два: если базисы  $e_i$  и  $e_{i'}$  не эквивалентны базису  $e_i$ , то матрица перехода между  $e_{i'}$  и  $e_{i''}$  имеет положительный определитель (проверьте), т.е. эти базисы лежат в одном классе. Итак, имеется два класса эквивалентности базисов. Каждый из этих классов называется *ориентацией* пространства  $V$ . *Ориентировать конечномерное векторное пространство* означает выбрать один из этих двух классов и назвать его *положительным*, а оставшийся — *отрицательным*. Каждый базис из положительного класса называется *положительно ориентированным*, а из отрицательного — *отрицательно ориентированным*. Так как для задания класса эквивалентности достаточно выбрать любого его представителя, задание ориентации однозначно определяется выбором произвольного базиса и отнесением его к положительно ориентированному. *Стандартная ориентация арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$*  задается стандартным базисом.

Напомним, что симметричная положительно определенная билинейная форма называется *скалярным произведением*.

Приведем ряд нужных в дальнейшем фактов, касающихся билинейных форм.

### 4 Билинейные формы и квадратичные формы

По каждой билинейной форме  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , определенной на векторном пространстве  $V$ , строится *квадратичная форма*  $b(v, v)$ , которую мы обозначим той же буквой  $b(v)$ . Если билинейная форма симметрична, то она однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме:

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(b(v+w) - b(v) - b(w)).$$

Таким образом, многие результаты, верные для квадратичных форм, автоматически переносятся на соответствующие симметричные билинейные формы и обратно. Это приводит к тому, что часто результаты формулируются только или для квадратичных форм, или для соответствующих билинейных.

### 5 Матрица Грама билинейной формы

Пусть на векторном пространстве  $V$  задана билинейная форма  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Выберем произвольную систему векторов  $v_1, \dots, v_m$ , положим  $b_{ij} = b(v_i, v_j)$ , тогда матрица  $(b_{ij})$  называется *матрицей Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_m$  относительно формы  $b$* . Отметим, что в  $n$ -мерном векторном пространстве с базисом  $e_1, \dots, e_n$  и билинейной формой  $b$ , элементы матрицы Грама этого базиса по отношению к  $b$  представляют собой координаты формы  $b$  как тензора типа  $(0, 2)$ , вычисленные в рассматриваемом базисе.

Если  $b$  — скалярное произведение, то базис  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  называется *ортонормальным*, если матрица Грама этого базиса диагональна, и *ортонормальным*, если матрица Грама — единичная.

**Задача 13.** Пусть  $e_i$  и  $e_{i'}$  — два базиса пространства  $V$ , на котором задана билинейная форма  $b$ , и пусть  $C = (c_i^{i'})$  — матрица перехода от второго базиса к первому, т.е.  $e_i = c_i^{i'} e_{i'}$ . Тогда матрицы Грама  $B$  и  $B'$  формы  $b$  в базисах  $e_i$  и  $e_{i'}$  соответственно связаны друг с другом так:  $B = C^T B' C$ , и, значит,  $\det B = (\det C)^2 \det B'$ . В частности, определитель матрицы Грама не меняется, если и только если  $\det C = \pm 1$ .

### 6 Параллелепипеды и их объемы

Пусть  $V$  — линейное пространство и  $k \in \mathbb{N}$  не превосходит размерности пространства  $V$  (если  $V$  бесконечномерно, то  $k$  — любое). Под  *$k$ -параллелепипедом*  $P$  будем понимать упорядоченный набор  $(v_1, \dots, v_k)$  из  $k$  векторов  $v_i \in V$ . Параллелепипед  $P = (v_1, \dots, v_k)$  назовем *вырожденным*, если векторы  $v_i$  линейно зависимы, иначе параллелепипед  $P$  — *невырожденный*.

Пусть теперь на  $V$  задано скалярное произведение. Определим *объем*  $\text{vol}(P)$  параллелепипеда  $P = (v_1, \dots, v_k)$  следующим образом.

- Если  $P$  вырожден, то положим  $\text{vol}(P) = 0$ .
- Если векторы  $v_i$  образуют ортонормальную систему, то  $\text{vol}(P) = 1$ .
- Если  $P$  невырожден, то через  $V_P$  обозначим линейное подпространство, натянутое на векторы  $v_i$ ; выберем в  $V_P$  произвольный ортонормальный базис  $e = (e_1, \dots, e_k)$  (такой базис всегда можно выбрать, см. ниже раздел 7); через  $A_{e,P}$  обозначим матрицу перехода от базиса  $e$  к базису  $P$ ; наконец, положим  $\text{vol}^e(P) = |\det A_{e,P}|$ . Отметим, что если  $e' = (e_{1'}, \dots, e_{k'})$  — другой ортонормальный базис пространства  $V_P$ , и  $C$  — матрица перехода от  $e'$  к  $e$ , то  $A_{e',P} = C A_{e,P}$ , поэтому

$$\text{vol}^{e'}(P) = |\det A_{e',P}| = |\det(C A_{e,P})| = |\det C \det A_{e,P}| = |\det A_{e,P}| = \text{vol}^e(P),$$

так что величина  $\text{vol}^e(P)$  не зависит от выбора ортонормального базиса  $e$  в пространстве  $V_P$ . В силу этого, величину  $\text{vol}^e(P)$  обозначим  $\text{vol}(P)$  и возьмем ее в качестве *объема параллелепипеда*  $P$ .

Если  $P$  — параллелепипед, и пространство  $V_P$  ориентированно, то определим также *ориентированный объем*  $\text{vol}_0(P)$  так. Для вырожденного параллелепипеда  $P$  положим  $\text{vol}_0(P) = 0$ . Для невырожденного  $P$  выберем произвольный *положительно ориентированный* ортонормальный базис  $e$  пространства  $V_P$  и положим  $\text{vol}_0(P) = \det(A_{e,P})$ . Ясно, что при замене базиса  $e$  на другой положительно ориентированный базис  $e'$ , имеем  $\det(A_{e,P}) = \det(A_{e',P})$ , что обосновывает корректность нашего определения. Таким образом, ориентированный объем  $\text{vol}_0(P)$  невырожденного параллелепипеда  $P$  совпадает с  $\text{vol}(P)$  для положительно ориентированного базиса  $P$  пространства  $V_P$ , и равен  $-\text{vol}(P)$  для отрицательно ориентированного. Ориентированный объем мы в основном будем использовать в конечномерном пространстве  $V$  размерности  $n$  для невырожденных  $n$ -параллелепипедов.

Отметим, что объем 1-параллелепипеда ( $v$ ) равен длине вектора  $v$ . Объем 2-параллелепипеда ( $v_1, v_2$ ) равен площади параллелограмма, натянутого на векторы  $v_1$  и  $v_2$ . По известной формуле, эта площадь равна “произведению основания на высоту”. Обобщим эту формулу на произвольные невырожденные  $k$ -параллелепипеды при  $k \geq 2$ .

Выделим в параллелепипеде  $P = (v_1, \dots, v_k)$  *основание*  $B$ , выбрав произвольные  $(k-1)$  векторов. Пусть, для определенности,  $B = (v_1, \dots, v_{k-1})$ . Разложим вектор  $v_k$  на вектор  $h_k$ , перпендикулярный пространству  $V_B$ , натянутому на  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , и вектор  $v'_k$ , лежащий в этом пространстве (это разложение однозначно). Тогда  $\text{vol}_0(v_1, \dots, v_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, h_k)$  по свойствам определителя. Выберем теперь ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_{k-1}$  в  $V_B$  и дополним его до ортонормированного базиса  $e_1, \dots, e_k$  всего пространства  $V_P$  так, чтобы  $e_k$  был сонаправлен с  $h_k$ . Тогда  $h_k = \|h_k\|e_k$ , и, по свойству определителя,  $\text{vol}_0(v_1, \dots, h_k) = \text{vol}_0(v_1, \dots, v_{k-1})\|h_k\|$ , откуда  $\text{vol}(P) = \text{vol}(B)\|h_k\|$ . Таким образом,  $\|h_k\|$  играет роль высоты параллелепипеда, опущенной на основание  $B$ . Теми самым, мы приходим к следующему результату.

**Предложение 14.** *Объем  $k$ -параллелепипеда равен произведению объема любого его основания на высоту, опущенную на это основание.*

## 7 Ортогонализация Грама–Шмидта

Пусть на векторном пространстве  $V$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Теорема 15.** *Пусть  $v_1, \dots, v_m \in V$  — линейно независимые векторы, тогда существуют ненулевые ортонормальные векторы  $w_1, \dots, w_m \in V$  такие, что при каждом  $1 \leq k \leq m$  линейные оболочки векторов  $v_1, \dots, v_k$  и  $w_1, \dots, w_k$  совпадают.*

Векторы  $w_1, \dots, w_m$  могут быть построены с помощью процесса *ортогонализации Грама–Шмидта*: на первом шаге  $w_1 = v_1/\|v_1\|$ , и если ортонормальные векторы  $w_1, \dots, w_{k-1}$  уже определены, то полагаем

$$w'_k = v_k - \langle w_1, v_k \rangle w_1 - \dots - \langle w_{k-1}, v_k \rangle w_{k-1}, \quad w_k = w'_k/\|w'_k\|.$$

В частности, для конечномерного пространства  $V$  этот процесс позволяет построить по произвольному базису пространства  $V$  соответствующий ортонормальный.

Если требуется построить лишь ортогональный базис  $w_i$ , то можно начать с  $w_1 = v_1$ , а затем последовательно применять формулу

$$w_k = v_k - \frac{\langle w_1, v_k \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle w_{k-1}, v_k \rangle}{\langle w_{k-1}, w_{k-1} \rangle} w_{k-1}.$$

**Замечание 16.** Из построения вытекает, что для линейного пространства с заданным скалярным произведением матрица  $C$  перехода к линейно независимой системе векторов  $v_1, \dots, v_m$  от ортонормальной системы  $w_1, \dots, w_m$ , полученной ортогонализацией Грама–Шмидта, — верхнетреугольная. Найдем, чему равны диагональные элементы матрицы  $C$ .

На первом шаге  $w_1 = v_1/\|v_1\|$ , поэтому первый диагональный элемент равен  $\|v_1\|$ , т.е.  $\text{vol}(V_1)$  — объему 1-параллелепипеда  $V_1 = (v_1)$ . Пусть теперь  $1 < k \leq n$ . Заметим, что на  $k$ -ом шаге мы получаем вектор  $w'_k$  как ортогональную проекцию вектора  $v_k$  на ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Таким образом, в выражении  $v_k$  через векторы  $w_1, \dots, w_k$  коэффициент перед  $w_k$  равен  $\|w'_k\|$ , т.е. высоте  $k$ -параллелепипеда  $V_k = (v_1, \dots, v_k)$ , опущенной на его основание  $V_{k-1} = (v_1, \dots, v_{k-1})$ . По предложению 14, этот коэффициент равен  $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$ . Чтобы для первого диагонального элемента получить такую же формулу, как и для  $k$ -ого при  $k > 1$ , мы положим  $V_0 = (\emptyset)$  и  $\text{vol} V_0 = 1$ . Итак, теперь при каждом  $1 \leq k \leq n$  формула для  $k$ -ого диагонального элемента матрицы  $C$  имеет вид  $\text{vol}(V_k)/\text{vol}(V_{k-1})$ . Отметим, что, как следствие, мы получили: все диагональные элементы матрицы  $C$  положительны.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений показывает, что обратная матрица  $C^{-1}$  — тоже верхнетреугольная, а ее диагональные элементы — обратные к диагональным элементам исходной матрицы и, значит, также положительные, равные  $\text{vol}(V_{k-1})/\text{vol}(V_k)$ .

## 8 Сопряженные линейные отображения

Пусть на конечномерном векторном пространстве  $V$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда для каждого вектора  $v_0 \in V$  определен линейный функционал  $\varphi_{v_0}(v) = \langle v_0, v \rangle$ , т.е. элемент из  $V^*$ . Тем самым, скалярное произведение порождает отображение  $\varphi: V \rightarrow V^*$ ,  $v_0 \mapsto \varphi_{v_0}$ . Так как скалярное произведение билинейно, то отображение  $\varphi$  линейно.

**Задача 17.** Покажите, что отображение  $\varphi$  — изоморфизм между  $V$  и  $V^*$ .

Пусть теперь  $V$  и  $W$  — конечномерные векторные пространства, наделенные скалярными произведениями, в  $L: V \rightarrow W$  — линейное отображение. Рассмотрим билинейную форму  $a(v, w) = \langle L(v), w \rangle$ , тогда при фиксированном  $w$  отображение  $\psi(v) = a(v, w)$  — линейный функционал на  $V$ , поэтому, в силу задачи 17, существует единственный вектор  $v_0$  такой, что  $\psi(v) = \langle v, v_0 \rangle$ . Этот вектор зависит от выбора  $w$ , и мы обозначим его  $L^*(w)$ . Тем самым,  $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L^*(w) \rangle$ .

**Задача 18.** Покажите, что  $L^*: W \rightarrow V$  — линейное отображение.

Отображение  $L$  называется *сопряженным* к линейному отображению  $L$ .

**Задача 19.** Докажите следующие утверждения.

- (1) Если на  $V$  и  $W$  заданы ортонормальные базисы, то матрица сопряженного отображения  $L^*$  равна транспонированной матрице отображения  $L$ . Останется ли это верным, если не требовать ортонормальности базисов?
- (2)  $(L^*)^* = L$ .
- (3)  $\ker L^\perp = \text{im } L^*$  и  $\text{im } L^\perp = \ker L^*$ , где, как всегда,  $\ker$  обозначает ядро,  $\text{im}$  — образ, а  $(\cdot)^\perp$  — ортогональное дополнение.
- (4) Отображение  $L$  называется *ортгоналным*, если оно сохраняет скалярные произведения векторов:

$$\langle L(v_1), L(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ для всех } v_1, v_2 \in V.$$

Покажите, что  $L$  — ортогонально, если и только если  $L^* \circ L = \text{id}_V$ , что равносильно  $L \circ L^* = \text{id}_W$ , где  $\text{id}_V$  и  $\text{id}_W$  — тождественные отображения на  $V$  и  $W$  соответственно.

- (5) Если  $W = V$ , и  $L = L^*$ , то  $L$  называется *самосопряженным*. Покажите, что в ортонормальном базисе матрица  $L$  равна транспонированной матрице  $L^*$ . Останется ли это верным, если не требовать ортонормальности базиса?
- (6) Если  $V = W$  и  $U \subset V$  — подпространство такое, что  $L(U) \subset U$ , то  $U$  называется  *$L$ -инвариантным*. Покажите, что если  $L$  — самосопряженный оператор,  $U \subset V$  — инвариантное подпространство, то ограничение  $L$  на  $U$  — тоже самосопряженный оператор, а  $U^\perp$  — также инвариантное подпространство.

- (7) Покажите, что собственные подпространства самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу.
- (8) Покажите, у самосопряженного оператора имеется хотя бы одно собственное подпространство. Выведите отсюда, что для самосопряженного оператора имеется ортонормальный собственный базис, в котором матрица оператора диагональна.

## 9 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Будем говорить, что квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве имеет *канонический вид* в некотором базисе, если матрица Грама этого базиса относительно соответствующей симметричной билинейной формы диагональна.

**Теорема 20.** *Для любой симметричной билинейной формы на конечномерном векторном пространстве существует такой базис, в котором матрица Грама диагональна. Таким образом, каждая квадратичная форма приводится к каноническому виду.*

Пусть теперь даны две квадратичных формы. Всегда ли их можно одновременно привести к каноническому виду?

**Задача 21.** Пусть  $\dim V = 2$ ,  $e_1, e_2 \in V$  — базис  $V$ ,  $v = x e_1 + y e_2 \in V$ ,  $a(v) = x^2$ ,  $b(v) = xy$ . Покажите, что не существует базиса, в котором обе квадратичные формы  $a$  и  $b$  имеют канонический вид.

Тем не менее, если одна из форм соответствует скалярному произведению, то одновременное приведение возможно.

**Теорема 22.** *Пусть  $a$  и  $b$  — квадратичные формы на конечномерном векторном пространстве, причем соответствующая  $a$  симметричная билинейная форма  $a(v, w)$  положительно определена. Тогда существует такой ортонормальный относительно  $a$  базис, в котором форма  $b$  имеет канонический вид.*

Как найти базис, существование которого утверждается в теореме 22? Пусть размерность линейного пространства равна  $n$ . Выбираем сначала произвольный базис, записываем в нем матрицы квадратичных форм. Пусть  $A$  и  $B$  — матрицы форм  $a$  и  $b$  соответственно. Пишем *характеристическое уравнение*  $f(\lambda) = \det(B - \lambda A) = 0$ . Это — многочлен степени  $n$ , все корни которого — вещественные (вспомните, почему это так). Именно эти корни будут стоять на диагонали матрицы Грама формы  $b$  в искомом базисе, причем каждый корень будет встречаться столько раз, какова кратность корня. Чтобы найти этот базис, берем корень  $\lambda_i$ , находим подпространство, являющееся ядром матрицы  $B - \lambda_i A$ , и выбираем в этом ядре произвольный ортонормальный базис. Ядра, соответствующие разным  $\lambda_i$ , будут взаимно ортогональны (объясните почему). Собирая вместе все эти базисы, получаем искомый. Отметим, что в силу невырожденности формы  $a$ , ее матрица  $A$  невырождена, поэтому определена матрица  $A^{-1}B$ . Найденные выше  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы  $A^{-1}B$ , кратности  $\lambda_i$  — кратности этих собственных чисел, а искомый базис — собственный ортонормальный базис матрицы  $A^{-1}B$ .

**Задача 23.** Докажите, что заданная в каждом базисе матрица  $A^{-1}B$  порождает тензор  $T$  типа  $(1, 1)$ , т.е. линейный оператор.

Приведем теперь идею доказательства теоремы 22. Выберем ортонормальный базис по отношению в скалярному произведению  $a$ . Это можно сделать ортогонализацией Грама–Шмидта. Тогда в этом базисе матрица  $A^{-1}B$  тензора  $T$  совпадает с матрицей  $B$  и, значит, симметрична. По пункту (1) задачи 19, матрица сопряженного оператора в этом базисе равна транспонированной матрице  $A^{-1}B$ , т.е. совпадает с  $B^T = B$ , откуда  $T = T^*$ , так что оператор  $T$  самосопряженный. Осталось воспользоваться пунктом (8) задачи 19.

## 10 Нормированные пространства

Пусть  $V$  — векторное пространство. Отображение  $V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto \|v\|$ , называется *нормой*, если оно удовлетворяет следующим условиям на произвольные  $v, w \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- (1)  $\|v\| \geq 0$ , причем  $\|v\| = 0$ , если и только если  $v = 0$  (положительная определенность);
- (2)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (субаддитивность);
- (3)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  (положительная однородность).

Векторное пространство, на котором задана норма, называется *нормированным пространством*.

**Пример 24.** Пусть  $V = \mathbb{R}$  — вещественная прямая, и для  $v \in V$  положим  $\|v\| = |v|$  — модуль вещественного числа. Проверьте, что эта функция — норма.

Если на  $V$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , то отображение  $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$  является нормой (проверьте). Не всякая норма задается скалярным произведением.

**Задача 25.** Приведите необходимое и достаточное условие того, что данная норма порождается скалярным произведением.

Пусть на векторном пространстве  $V$  заданы две нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$ . Эти нормы называются *эквивалентными*, если существуют вещественные числа  $0 < l \leq \Lambda < \infty$  такие, что для каждого  $v \in V$  выполняется

$$\lambda\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \Lambda\|v\|_1.$$

**Задача 26.** Убедитесь, что если в предыдущей формуле поменять местами 1 и 2, то получится равносильное определение. Покажите, что в конечномерном пространстве все нормы попарно эквивалентны. Приведите примеры неэквивалентных норм (в бесконечномерном пространстве).

## 11 Метрические пространства

Пусть  $X$  — произвольное множество. Каждая функция  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что для произвольных  $x, y, z \in X$  выполняется

- (1)  $d(x, y) \geq 0$ , причем  $d(x, y) = 0$ , если и только если  $x = y$  (положительная определенность);
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (симметричность);
- (3)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (неравенство треугольника),

называется *метрикой*, величина  $d(x, y)$  — *расстоянием между  $x$  и  $y$* , а множество  $X$ , на котором задана метрика — *метрическим пространством*. В дальнейшем мы, как правило, не будем вводить для метрики специальный символ, например  $d$ , а вместо  $d(x, y)$  будем писать  $|xy|$ . Если рассматривается несколько метрических пространств, то понять, в каком пространстве измеряется расстояние, можно по тому, где лежат точки  $x$  и  $y$ .

**Задача 27.** Пусть  $V$  — векторное пространство, а  $\|\cdot\|$  — норма на нем. Для любых  $v, w \in V$  положим  $d(v, w) = \|v - w\|$ . Покажите, что  $d$  — метрика.

**Пример 28.** Определенная в примере 24 норма задает на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  функцию расстояния  $|v - w|$ ,  $v, w \in \mathbb{R}$ .

Выше мы определили понятие эквивалентных норм. Аналогичным образом определяются эквивалентные метрики. А именно, метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$  на множестве  $X$  называются *эквивалентными*, если существуют такие вещественные  $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ , что

$$\lambda\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \Lambda\rho_1(x, y)$$

для всех  $x, y \in X$ .

**Задача 29.** Убедитесь, что если в предыдущей формуле поменять местами 1 и 2, то получится равносильное определение. Покажите, что на векторном пространстве две нормы эквивалентны, если и только если соответствующие им метрики эквивалентны.

**Задача 30.** Рассмотрим на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  стандартную метрику  $\rho_1(x, y) = |x - y|$ . Положим  $\rho_2 = \rho_1/(1 + \rho_1)$ . Покажите, что  $\rho_2$  — метрика, не эквивалентная  $\rho_1$ .

Пусть  $X$  — метрическое пространство. Тогда для любых  $x \in X$ ,  $r > 0$ ,  $t \geq 0$ ,

- множество  $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$  называется *открытым шаром с центром  $x$  и радиусом  $r$* ;
- множество  $B_t(x) = \{y \in X : |xy| \leq t\}$  называется *замкнутым шаром с центром  $x$  и радиусом  $t$* ; если  $t = 0$ , то шар  $B_t(x)$  называется *вырожденным*, а если  $t > 0$  —  *невырожденным*;

- множество  $S_t(x) = \{y \in X : |xy| = t\}$  называется *сферой с центром  $x$  и радиусом  $t$* ; если  $t = 0$ , то сфера  $S_t(x)$  называется *вырожденной*, а если  $t > 0$  —  *невырожденной*.

Пусть  $Y$  — непустое подмножество  $X$ . Тогда для  $x \in X$ ,  $r > 0$ ,  $t \geq 0$ ,

- (1)  $|xY| = \inf\{|xy| : y \in Y\}$  называется *расстоянием от точки  $x$  до подмножества  $Y$* ;
- (2) множество  $U_r(Y) = \{z \in X : |zY| < r\}$  называется *открытой  $r$ -окрестностью множества  $Y$* ;
- (3) множество  $B_t(Y) = \{z \in X : |zY| \leq t\}$  называется *замкнутой  $t$ -окрестностью множества  $Y$* .

Подмножество  $Y$  метрического пространства  $X$  называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре  $B_r(x)$ .

Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства, а  $\mathcal{L}(V, W)$  — множество всех линейных отображений из  $V$  в  $W$ . Для любых  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  и любых чисел  $a, b \in \mathbb{R}$  определена линейная комбинация  $aL_1 + bL_2$ , превращающая  $\mathcal{L}(V, W)$  в векторное пространство. Пусть теперь  $V$  и  $W$  — нормированные пространства. Рассмотрим множество  $\mathcal{B}(V, W) \subset \mathcal{L}(V, W)$ , составленное из всех линейных отображений, каждое из которых переводит замкнутый единичный шар  $B_1(0) \subset V$  в ограниченное подмножество в  $W$ . Линейные отображения из  $\mathcal{B}(V, W)$  называются *ограниченными*. Так как линейная комбинация ограниченных линейных отображений ограничена (проверьте), множество  $\mathcal{B}(V, W)$  является линейным подпространством в  $\mathcal{L}(V, W)$ . Далее, для каждого ограниченного отображения  $L \in \mathcal{B}(V, W)$  величина

$$(2) \quad \|L\| = \sup\{\|L(v)\| : v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

ограничена, а отображение  $L \mapsto \|L\|$  является нормой (докажите). Ниже мы используем ограниченные линейные отображения при определении дифференцирования.

## 12 Топология

Пусть  $X$  — произвольное множество. Семейство  $\tau \subset 2^X$  подмножеств  $X$  называется *топологией*, если  $\tau$  обладает следующими свойствами:

- (1)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (2) для любого подсемейства  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$  выполняется  $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно произвольных объединений);
- (3) для любого **конечного подсемейства**  $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$  имеем  $\cap_{i=1}^n U_i \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно конечных пересечений).

Множество, на котором задана топология, называется *топологическим пространством*, а элементы топологии — *открытыми множествами*. Часто, для краткости, топологическое пространство  $X$  с топологией  $\tau$  записывают в виде пары  $(X, \tau)$ . Также, если хотят подчеркнуть, что топология задана на множестве  $X$ , такую топологию обозначают  $\tau_X$ .

Отметим, что на множестве  $X$  можно ввести, вообще говоря, много разных топологий, и на семействе этих топологий имеется частичный порядок, заданный включением (одна топология содержится в другой). Наименьшая топология в этом порядке называется *антидискретной* и имеет вид  $\{\emptyset, X\}$ ; наибольшая топология — *дискретная*, равная  $2^X$ . Ясно, что пересечение любого семейства топологий на  $X$  также является некоторой топологией. Таким образом, для каждого семейства  $\sigma \subset 2^X$  топология, равная пересечению всех топологий на  $X$ , содержащих  $\sigma$ , является наименьшей топологией, содержащей  $\sigma$ . Говорят, что  $\sigma$  *порождает* эту топологию.

Подсемейство  $\beta \subset \tau$  топологии  $\tau$  называется *базой топологии  $\tau$* , если множество всевозможных объединений элементов из  $\beta$  совпадает с топологией  $\tau$ . Отметим, что база  $\beta$  может не содержать пустого множества, так как разрешается брать объединение по пустому семейству индексов, что дает пустое множество.

Подсемейство  $\sigma \subset \tau$  называется *предбазой топологии  $\tau$* , если всевозможные конечные пересечения образуют базу топологии  $\tau$ . Отметим, что объединение всех элементов предбазы не обязано содержать  $X$ , так как разрешается брать пересечение по пустому семейству индексов, что дает все  $X$ .

**Задача 31.** Покажите, что семейство  $\beta \subset 2^X$  является базой некоторой топологии на  $X$ , если и только если

- (1)  $\cup \beta = X$  и

(2) для любых пересекающихся  $B_1, B_2 \in \beta$  и любого  $x \in B_1 \cap B_2$  существует  $B \in \beta$  такой, что  $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ .

Покажите, что любое семейство  $\sigma$  подмножеств  $X$  является предбазой некоторой топологии  $\tau$ , при этом  $\tau$  — наименьшая топология, содержащая  $\sigma$ .

Подмножество  $F \subset X$  топологического пространства с топологией  $\tau$  называется *замкнутым*, если  $X \setminus F$  — открыто. Обозначим через  $\mathcal{F}$  множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства  $X$ . Семейство  $\mathcal{F}$  удовлетворяет следующим свойствам:

- (1)  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ;
- (2) для любого подсемейства  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{F}$  выполняется  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$  (семейство  $\mathcal{F}$  замкнуто относительно произвольных пересечений);
- (3) для любого **конечного** подсемейства  $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$  имеем  $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$  (семейство  $\mathcal{F}$  замкнуто относительно конечных объединений).

Чтобы подчеркнуть связь семейства замкнутых множеств с данным топологическим пространством  $(X, \tau)$ , иногда это семейство будем обозначать также или  $\mathcal{F}_\tau$ , или  $\mathcal{F}_X$ .

Отметим, что  $\emptyset$  и  $X$  являются одновременно открытыми и замкнутыми. Подмножество  $Y \subset X$  называется *открыто-замкнутым*, если оно одновременно открыто и замкнуто. Множества  $\emptyset$  и  $X$  называются *тривиальными открыто-замкнутыми подмножествами*.

**Задача 32.** Проверьте, что семейство  $\tau$  удовлетворяет свойствам, определяющим топологию, если и только семейство дополнений  $\mathcal{F}_\tau$  удовлетворяет перечисленным выше свойствам замкнутых множеств.

Таким образом, топологическое пространство можно определять также и в терминах замкнутых множеств. Приведем ряд конструкций, строящих топологии.

- Пусть  $Y$  — подмножество топологического пространства  $(X, \tau)$ . Тогда семейство  $\{U \cap Y : U \in \tau\}$  является топологией на  $Y$ , которая называется *индуцированной*. Если не оговорено противное, на каждом подмножестве топологического пространства мы будем рассматривать именно индуцированную топологию.
- Пусть  $X$  — метрическое пространство. Тогда семейство всех открытых шаров образует базу (проверьте), а соответствующая топология называется *метрической*. Ясно, что открытые множества в метрической топологии — это всевозможные объединения открытых шаров.
- Пусть  $\mathcal{B}(V, W)$  — линейное пространство ограниченных линейных отображений нормированных пространств, наделенное определенной выше нормой. Так как норма порождает метрику, то пространство  $\mathcal{B}(V, W)$  наделается метрической топологией.
- Пусть  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — семейство топологических пространств. Тогда семейство  $\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ , где  $U_\alpha \in \tau_\alpha$ , образует *топологию дизъюнктного объединения* на множестве  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ .
- Пусть  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — семейство топологических пространств. Тогда семейство  $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ , где  $U_\alpha \in \tau_\alpha$ , и лишь конечное число  $U_\alpha$  отлично от  $X_\alpha$ , образует *топологию произведения* или *тихоновскую топологию* на множестве  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .

**Пример 33.** Заданная в примере 28 метрика на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  порождает стандартную топологию на  $\mathbb{R}$ . На каждом подмножестве  $\mathbb{R}$ , в частности, на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , стандартная топология — индуцированная из стандартной топологии на  $\mathbb{R}$ . Эта топология совпадает с метрической топологией (проверьте).

Открытое множество, содержащее точку топологического пространства, называется *окрестностью* этой точки. Если  $x \in X$  — точка топологического пространства, то окрестность этой точки часто будем обозначать через  $U^x$ . Также нам понадобится множество  $U^x \setminus \{x\}$ , которое мы обозначим  $\dot{U}^x$  и назовем *проколотой окрестностью точки  $x$* . Точка  $x$  называется *изолированной*, если  $\{x\}$  — открытое множество.

**Задача 34.** Покажите, что точка не является изолированной, если и только если каждая ее проколота окрестность непуста.

Пусть  $Y$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Точка  $x \in X$  называется

- *точкой прикосновения*  $Y$ , если любая окрестность  $U^x$  пересекает  $Y$ ;
- *внутренней точкой*  $Y$ , если некоторая окрестность  $U^x$  содержится в  $Y$ ;
- *граничной точкой*  $Y$ , если каждая окрестность  $U^x$  пересекает как  $Y$ , так и  $X \setminus Y$ .

Множество всех точек прикосновения  $Y$  называется *замыканием*  $Y$  и обозначается  $\bar{Y}$ . Отметим, что замыкание  $Y$  равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих  $Y$  (проверьте), а потому является наименьшим замкнутым множеством, содержащим  $Y$ .

Множество всех внутренних точек  $Y$  называется *внутренностью*  $Y$  и обозначается  $\text{Int } Y$ . Внутренность представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в  $Y$  (докажите). Таким образом, множество  $Y$  является промежуточным между  $\text{Int } Y$  и  $\bar{Y}$ , а именно,  $\text{Int } Y \subset Y \subset \bar{Y}$ .

Множество всех граничных точек  $Y$  называется *границей*  $Y$  и обозначается  $\partial Y$ . Граница является замкнутым множеством, равным  $\bar{Y} \setminus \text{Int } Y$ .

Топологическое пространство, в котором любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности, называется *хаусдорфовым*.

**Задача 35.** Покажите, что метрическое пространство хаусдорфово. Приведите пример нехаусдорфова пространства.

Пространство называется *связным*, если в нем нет нетривиальных открыто-замкнутых подмножеств.

**Задача 36.** Покажите, что отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  со стандартной топологией, определенной в примере 33, связан.

Покрытие топологического пространства называется *открытым*, если все его элементы — открытые множества. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Задача 37.** Докажите, что отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  со стандартной топологией, определенной в примере 33, компактен.

Образование  $f: X \rightarrow Y$  топологического пространства  $(X, \tau_X)$  в топологическое пространство  $(Y, \tau_Y)$  называется *непрерывным*, если выполняется одно из трех эквивалентных условий:

- (1) для любой точки  $x \in X$  и любой окрестности  $U^{f(x)}$  существует такая окрестность  $U^x$ , что  $f(U^x) \subset U^{f(x)}$ ;
- (2) для любого  $U \in \tau_Y$  имеем  $f^{-1}(U) \in \tau_X$  (прообраз открытого множества открыт);
- (3) для любого  $F \in \mathcal{F}_Y$  имеем  $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$  (прообраз замкнутого множества замкнут).

**Задача 38.** Покажите, что линейное отображение  $L: V \rightarrow W$  между нормированными пространствами непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

*Кривой в топологическом пространстве  $X$ , соединяющей точки  $x, y \in X$ , называется каждое непрерывное отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  из отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  такое, что  $x = \gamma(a)$  и  $y = \gamma(b)$ . Если любые две точки топологического пространства можно соединить непрерывной кривой, то такое пространство называется *линейно связным*.*

**Задача 39.** Покажите, что линейно связное топологическое пространство связно. Приведите пример связного топологического пространства, не являющегося линейно связным.

**Задача 40.** Покажите, что образ связного (линейно связного) топологического пространства при непрерывном отображении связан (линейно связан).

Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если у каждой точки имеется линейно связная окрестность.

**Задача 41.** Покажите, что в локально линейно связном пространстве связность эквивалентна линейной связности.

*Последовательностью во множестве  $X$*  называется каждое отображение  $x: \mathbb{N} \rightarrow X$  из множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел. Обычно элементы  $x(i)$  обозначаются  $x_i$ , а последовательность записывается или как  $x_1, x_2, \dots$ , или просто  $x_i$ . Последовательность  $x_i$  точек топологического пространства  $X$  *сходится к точке  $y \in X$* , если вне каждой окрестности  $U^y$  лежит лишь конечное число точек  $x_i$ . Такая точка  $y$  называется *пределом последовательности  $x_i$*  и обозначается  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ . Последовательность, для которой существует хотя бы один предел, называется *сходящейся*. Вообще говоря, последовательность в топологическом пространстве  $X$  может иметь много разных пределов (постройте пример), но если пространство  $X$  хаусдорфово, то предел каждой сходящейся последовательности однозначно определен (проверьте).

Заменим теперь  $\mathbb{N}$  на топологическое пространство  $Z$  и, вместо последовательности в  $X$ , рассмотрим отображение  $f: Z \rightarrow X$ . Выберем произвольную точку  $z_0 \in Z$ . Будем говорить, что отображение  $f$  *стремится к  $x_0$  при  $z \rightarrow z_0$*  и писать  $x_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , если для любой окрестности  $U^{x_0}$  существует проколота окрестность  $\dot{U}^{z_0}$  такая, что  $f(\dot{U}^{z_0}) \subset U^{x_0}$ . Отметим, что такое отображение  $f$  непрерывно в точке  $z_0$ , если и только если  $x_0 = f(z_0)$ .

**Задача 42.** Положим  $Z = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$  и зададим на  $Z$  топологию, в которой базой являются все одноточечные подмножества  $\mathbb{N}$ , а также множества вида  $T_n := \{m \geq n : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что последовательность  $x: \mathbb{N} \rightarrow X$  сходится к  $y \in X$ , если и только если продолжение  $f$  отображения  $x$  на все  $Z$  такое, что  $f(\infty) = y$ , непрерывно.

Пусть  $X$  — метрическое пространство. Последовательность  $x_i$  в  $X$  называется *фундаментальной*, если числовая последовательность  $d_n = \sup\{|x_p x_q| : p \geq n, q \geq n\}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность сходится. Каждое конечномерное нормированное пространство полное. В общем случае, нормированное пространство (не обязательно конечномерное) называется *банаховым*, если оно полное.

**Задача 43.** Приведите примеры полных и неполных бесконечномерных нормированных пространств.

**Задача 44.** Покажите, что функция на линейном нормированном пространстве  $V$ , сопоставляющая каждому вектору  $v$  его норму  $\|v\|$ , непрерывна. В частности, каждый шар  $\{v \in V : \|v\| \leq r\}$  — замкнутое ограниченное подмножество  $V$ .

**Задача 45.** Покажите, что

- (1) нормы на линейном пространстве (не обязательно конечномерном) эквивалентны, если и только если они задают одну и ту же топологию;
- (2) эквивалентные метрики на произвольном множестве задают одну и ту же топологию;
- (3) неэквивалентные метрики могут задавать одну и ту же топологию (приведите пример);
- (4) на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, в частности, задаваемые ими топологии одинаковы, а замкнутые ограниченные подмножества компактны (в частности, компактными являются все замкнутые шары);
- (5) приведите пример нормированного пространства, в котором невырожденный замкнутый шар некомпактен;
- (6) на бесконечномерном пространстве могут существовать неэквивалентные нормы (приведите пример).

**Задача 46.** Пусть  $V, W$  — нормированные пространства (не обязательно конечномерные), и  $L: V \rightarrow W$  — линейное отображение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует хотя бы одна точка пространства  $V$ , в которой отображение  $L$  непрерывно.
- (2) Отображение  $L$  непрерывно в 0.
- (3) Существует такое число  $K$ , что  $\|L(v)\| \leq K \|v\|$  для любого  $v \in V$ .
- (4) Отображение  $L$  ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества  $V$  в ограниченные подмножества  $W$ .
- (5) Норма  $\|L\|$ , определенная формулой (2), ограничена.

- (6) Говорят, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств является *липшицевым*, если существует такое число  $C$ , что  $|f(x)f(x')| \leq C|x x'|$  для любых  $x, x' \in X$ . В этом пункте утверждается, что  $L$  — липшицево отображение (на  $V$  и  $W$  мы рассматриваем метрики, порожденные нормами).
- (7) Говорят, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств является *равномерно непрерывным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x, x' \in X$  с  $|x x'| < \delta$  выполняется  $|f(x)f(x')| < \varepsilon$ . В этом пункте утверждается, что  $L$  — равномерно непрерывно.

Из задачи 46 вытекает следующий результат.

**Следствие 47.** *Отображение нормированных пространств непрерывно, если и только если оно ограничено.*

**Задача 48.** Покажите, что линейные отображения из конечномерного нормированного пространства в произвольное нормированное пространство всегда непрерывно.

**Задача 49.** Приведите пример разрывного линейного отображения нормированных пространств.

### 13 Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$

Как мы уже отмечали, элементами арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  являются всевозможные упорядоченные наборы чисел  $(x^1, \dots, x^n)$ . На  $\mathbb{R}^n$  определены естественные операции сложения элементов и умножения их на числа, превращающие  $\mathbb{R}^n$  в линейное пространство:

$$(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \quad a(x^1, \dots, x^n) = (ax^1, \dots, ax^n).$$

Если  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ , то числа  $x^i$  называются *декартовыми координатами вектора  $x$* . Векторы, у которых одна из координат равна 1, а все остальные — нулю, образуют базис пространства  $\mathbb{R}^n$ , называемый *стандартным*. Отметим, что каждое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  изоморфно  $\mathbb{R}^n$ , причем каждый изоморфизм однозначно определяется выбором базиса: если  $e_i$  — базис пространства  $V$ , то отображение  $v^i e_i \mapsto (v^1, \dots, v^n)$  является изоморфизмом.

На  $\mathbb{R}^n$  имеется стандартное скалярное произведение:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = xy = \delta_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^n x^i y^i.$$

*Евклидовым пространством* часто называется  $\mathbb{R}^n$  с так определенным скалярным произведением.

Как было отмечено выше, стандартное скалярное произведение порождает норму, которая, в свою очередь, задает расстояние, а последнее — метрическую топологию.

### 14 Дифференцирование

Для более детального ознакомления с материалом этого раздела мы рекомендуем монографии [49] и [61].

Пусть  $V$  и  $W$  — нормированные пространства. Напомним, что норма порождает метрику, а метрика — топологию. Отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  назовем *бесконечно малым в точке  $v_0 \in V$*  и будем писать  $\varphi = \bar{o}(1)$  при  $v \rightarrow v_0$ , если  $\lim_{v \rightarrow v_0} \varphi(v) = 0 \in W$ . Если же для некоторого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  выполняется  $\varphi = \|v - v_0\|^k \bar{o}(1)$ , то будем говорить, что  $\varphi$  — *бесконечно малая порядка  $k$  в точке  $v_0$*  и записывать это так:  $\varphi = \bar{o}(\|v - v_0\|^k)$  при  $v \rightarrow v_0$ . Отметим, что  $\bar{o}(1)$  — бесконечно малая порядка 0.

Будем говорить, что отображения  $f, g: V \rightarrow W$  *касаются в точке  $v_0$  с порядком  $k$* , если  $f(v) - g(v) = \bar{o}(\|v - v_0\|^k)$  при  $v \rightarrow v_0$ .

**Задача 50.** Покажите, что отображение  $f: V \rightarrow W$  нормированных пространств непрерывно в точке  $v_0 \in V$  тогда и только тогда, когда  $f$  и постоянное отображение  $g(v) \equiv f(v_0)$  касаются в точке  $v_0$  с нулевым порядком.

Отображение  $f: V \rightarrow W$  называется *дифференцируемым в точке  $v_0 \in V$* , если существует линейное ограниченное отображение  $L: V \rightarrow W$  такое, что отображения  $F(v) = f(v) - f(v_0)$  и  $G(v) = L(v - v_0)$  касаются в точке  $v_0$  с первым порядком. Отображение  $L$  называется *дифференциалом отображения  $f$  в точке  $v_0$*  и обозначается  $df|_{v_0}$ .

**Задача 51.** Покажите, что отображение нормированных пространств, дифференцируемое в точке, непрерывно в этой точке, а дифференциал определен однозначно.

**Задача 52.** Покажите, что дифференциал не меняется при замене нормы на эквивалентную.

Предположим, что пространства  $V$  и  $W$  конечномерны. Выберем в них базисы, тогда дифференциал  $df|_{v_0}$  задается матрицей  $f'(v_0)$ , которая называется *производной отображения  $f$* . Чтобы понять, чему равны элементы производной, введем понятие производной по направлению и частной производной.

Пусть  $e \in V$  — произвольный ненулевой вектор и  $v_0 \in V$  — некоторая точка. Для  $f: V \rightarrow W$ , определенного выше, рассмотрим отображение  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow W$ , заданное так:  $\gamma(t) = f(v_0 + te)$ . Если  $\gamma$  дифференцируемо в точке  $t = 0$ , то, по определению,

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(0)t + o(|t|),$$

откуда можно вычислить производную  $\gamma'(0)$ :

$$\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}.$$

Величина  $\gamma'(0)$  называется *производной по направлению* и обозначается  $\partial_e f|_{v_0}$ .

Если  $V$  и  $W$  конечномерны,  $e_1, \dots, e_m$  — базис  $V$ ,  $h_1, \dots, h_n$  — базис  $W$ , то, раскладывая  $f(v^1, \dots, v^m) = f(v^i e_i)$  по базису  $h_i$ , получим  $n$  функций  $f^j(v_1, \dots, v_m)$ , где  $f(v^1, \dots, v^m) = f^j(v_1, \dots, v_m)h_j$  (напомним, что по повторяющимся индексам, находящимся на разной высоте, мы предполагаем суммирование). Величины  $\partial_{e_i} f^j$  называются *частными производными* и обозначаются  $\frac{\partial f^j}{\partial v^i}(v_0)$ . **Чтобы не загромождать обозначения, мы в дальнейшем заменим выражения  $\frac{\partial f^j}{\partial v^i}(v_0)$  на более компактные, а именно, на  $f_{v_i}^j(v_0)$ , и если из контекста понятно, в какой точке вычисляются частные производные, то будем писать просто  $f_{v_i}^j$ .** Матрица

$$J_f = \begin{pmatrix} f_{v^1}^1 & f_{v^2}^1 & \cdots & f_{v^m}^1 \\ f_{v^1}^2 & f_{v^2}^2 & \cdots & f_{v^m}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{v^1}^n & f_{v^2}^n & \cdots & f_{v^m}^n \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Якоби отображения  $f$*  в точке  $v_0$  по отношению к выбранным базисам. Обратите внимание, что по столбцам матрицы Якоби стоит вектор  $(f^1, \dots, f^n)$ , продифференцированный по соответствующим переменным  $v^i$ .

**Теорема 53.** Пусть  $f: V \rightarrow W$  — отображение конечномерных нормированных пространств, дифференцируемое в точке  $v_0$ , тогда производная  $f'(v_0)$  этого отображения равна матрице Якоби.

Приведем далее три основных результата, которые часто используются в нашем курсе, а именно, теоремы о дифференцировании композиции отображений, об обратном отображении и о неявном отображении. Две последних теоремы получаются естественным перенесением соответствующих результатов, касающихся линейных отображений.

**Теорема 54.** Пусть  $V$ ,  $W$  и  $Z$  — три нормированных пространства, отображение  $f: V \rightarrow W$  дифференцируемо в  $v_0 \in V$ , а отображение  $g: W \rightarrow Z$  — в  $w_0 = f(v_0)$ . Тогда отображение  $g \circ f$  дифференцируемо в  $v_0$  и его дифференциал равен композиции дифференциалов  $f$  и  $g$ :  $d(g \circ f)|_{v_0} = dg|_{f(v_0)} \circ df|_{v_0}$ . В частности, если все эти пространства конечномерны и в них выбраны некоторые базисы, то матрица Якоби композиции отображений равна произведению матриц Якоби этих отображений:  $J_{g \circ f}(v_0) = J_g(f(v_0)) J_f(v_0)$ . В терминах элементов матриц Якоби последнее равенство записывается так:  $(g \circ f)_{v_i}^k = g_{w_j}^k f_{v_i}^j$ .

**Задача 55.** Покажите, что дифференциал тождественного отображения  $\text{id}: V \rightarrow V$  также является тождественным отображением. Выведите отсюда, что если  $f: V \rightarrow W$  — биективное отображение, дифференцируемое в  $v_0 \in V$ , а  $f^{-1}: W \rightarrow V$  дифференцируемо в  $w_0 = f(v_0)$ , то дифференциал  $df|_{v_0}$  является обратимым ограниченным линейным отображением, и  $df^{-1}|_{w_0} = (df|_{v_0})^{-1}$ .

Пусть теперь  $U$  — открытое подмножество нормированного пространства  $V$  и  $f: U \rightarrow W$  дифференцируемо в каждой точке из  $U$ . По задаче 51, отображение  $f$  непрерывно. Рассмотрим отображение  $df: U \rightarrow \mathcal{B}(V, W)$ , заданное так:  $df(v) = df|_v$ . Так как пространство ограниченных линейных отображений  $\mathcal{B}(V, W)$  также является нормированным, отображение  $df$  действует между нормированными пространствами, поэтому для него тоже можно говорить как про непрерывность, так и про дифференцируемость. Если это отображение непрерывно, то говорят, что  $f$  является *непрерывно-дифференцируемым* и относится к классу  $C^1$ . Продолжая этот процесс,

мы определяем по индукции дифференциал порядка  $k$  (отображение  $df$  является дифференциалом порядка 1, а само  $f$  — дифференциалом нулевого порядка). Если существует дифференциал порядка  $k$ , то дифференциалы всех предыдущих порядков непрерывны в силу той же задачи 51. Если и дифференциал порядка  $k$  непрерывен, то говорят, что  $f$  непрерывно-дифференцируемо  $k$  раз и относится к классу  $C^k$ . Если  $f$  относится к классу  $C^k$  при всех  $k$ , то говорят, что отображение  $f$  гладкое и относится к классу  $C^\infty$ . Впрочем, в дифференциальной геометрии под *гладким отображением* часто понимают отображение класса  $C^k$  для столь большого  $k$ , которое достаточно для решения рассматриваемой задачи.

Сформулируем теперь теорему об обратном отображении. Эта теорема говорит о том, что если дифференциал является обратимым линейным отображением, то и само отображение обратимо в достаточно малой окрестности точки, где вычисляется дифференциал. Фактически, это утверждение говорит о том, что биективность линейного отображения (в нашем случае — дифференциала) не меняется при достаточно малом изменении этого отображения.

Впрочем, для того, чтобы это утверждение было верным, необходимо ввести еще ряд требований. Напомним, что полное нормированное пространство называется банаховым.

**Теорема 56.** Пусть  $f: V \rightarrow W$  — гладкое отображение банаховых пространств и  $v_0 \in V$ . Если дифференциал  $df|_{v_0}$  является обратимым, то существует такая окрестность  $U = U^{v_0}$ , что ограничение  $f$  на  $U$  взаимно однозначно с образом,  $f(U)$  — открытое подмножество  $W$ , и обратное отображение  $(f|_U)^{-1}$  также является гладким.

**Замечание 57.** Нас в основном будет интересовать конечномерный случай, а именно, когда  $V = W = \mathbb{R}^n$ . Если  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $V$ , а  $y^1, \dots, y^n$  — декартовы координаты на  $W$ , то отображение  $f: V \rightarrow W$  записывается в виде  $n$  гладких функций  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ . Матрица Якоби этого отображения, вычисленная в точке  $p$ , имеет вид

$$df|_p = \begin{pmatrix} y_{x_1}^1 & y_{x_2}^1 & \cdots & y_{x_n}^1 \\ y_{x_1}^2 & y_{x_2}^2 & \cdots & y_{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{x_1}^n & y_{x_2}^n & \cdots & y_{x_n}^n \end{pmatrix}$$

(столбцы этой матрицы получаются дифференцированием “радиус-вектора”  $(y^1, \dots, y^n)$  по соответствующим координатам  $x^i$  и подстановкой координат точки  $p$ ; мы опустили указание на точку  $p$  для упрощения формулы). В данном случае, условие обратимости дифференциала — это невырожденность матрицы  $df|_p$ , что эквивалентно условию  $\det df|_p \neq 0$ . В случае  $n = 1$  отображение  $f$  — вещественная функция одной переменной, а ее невырожденность — неравенство нулю производной.

Введем понятие частного дифференциала. Пусть  $V_1, \dots, V_k, W$  — нормированные пространства. На линейном пространстве  $V_1 \times \dots \times V_k$  введем норму  $\|(v_1, \dots, v_k)\| = \max_i \|v_i\|$ . Рассмотрим произвольное отображение  $f: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  и любую точку  $p = (p_1, \dots, p_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ . Фиксируем все  $v_j, j \neq i$ , положив  $v_j = p_j$ , и зададим отображение  $f_i: V_i \rightarrow W$ ,  $f_i(v_i) = f(p_1, \dots, v_i, \dots, p_k)$ . Если это отображение дифференцируемо в точке  $p_i$ , то его дифференциал называется  *$i$ -м частным дифференциалом в точке  $p$*  и обозначается  $\partial_i f|_p$ .

**Теорема 58.** Во введенных выше обозначениях, отображение  $f: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  гладкое, если и только если все его частные дифференциалы — гладкие отображения.

Сформулируем теперь теорему о неявном отображении.

**Теорема 59.** Пусть  $V, W$  — банаховы пространства и  $f: V \rightarrow W$  — гладкое отображение. Выберем произвольное  $c \in W$  и предположим, что  $M := f^{-1}(c) \neq \emptyset$ . Возьмем некоторую точку  $p \in M$  и предположим, что  $V$  представимо в виде  $V_1 \times V_2$ , где  $V_i$  — банаховы пространства, и для этого представления частный дифференциал  $\partial_2 f|_p: V_2 \rightarrow W$  обратим. Пусть  $p = (p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$ , тогда существуют такие окрестности  $U^{p_1} \subset V_1, U^p \subset V$ , и гладкое отображение  $g: U^{p_1} \rightarrow V_2$ , что  $M \cap U^p = \Gamma_g$ , где  $\Gamma_g$  — график отображения  $g$ .

**Замечание 60.** Множество  $M$  из теоремы 59 является решением уравнения  $f(v) = c$ . В теореме предполагается, что это решение непусто, а также что в некоторой точке  $p$  из этого решения дифференциал отображения  $f$  раскладывается на два частных дифференциала, один из которых обратим. Тогда, утверждается, в окрестности точки  $p$  решение является графиком некоторого отображения, иными словами, решение (локально) однозначно проецируется на некоторое подпространство исходного пространства. Эта теорема очевидна для линейного отображения  $f$  и выполняется не только локально, но и глобально: в этом случае решение  $M$  является сдвигом

на с ядра отображение  $f$ , и  $M$  однозначно проецируется на любое дополнение к  $V_2$ , в частности, на  $V_1$  (убедитесь в этом). Если же  $f$  нелинейно, то в малой окрестности точки  $p$  оно “почти линейно”, что приводит к сохранению перечисленных выше свойств.

**Замечание 61.** Нас будет в основном интересовать конечномерный случай, когда  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $W = \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq m < n$  (случай  $m = n$  относится к теореме об обратном отображении). Снова рассмотрим на  $V$  декартовы координаты  $x^1, \dots, x^n$ , а на  $W$  — декартовы координаты  $y^1, \dots, y^m$ . Отображение  $f: V \rightarrow W$  задается  $m$  гладкими функциями  $f^i(x^1, \dots, x^n)$ , а множество  $M$  является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f^1(x^1, \dots, x^n) = c^1, \\ f^2(x^1, \dots, x^n) = c^2, \\ \dots\dots\dots \\ f^m(x^1, \dots, x^n) = c^m. \end{cases}$$

Далее, мы выбираем некоторую точку  $p \in M$  и предполагаем, что пространство  $V$  раскладывается в произведение  $V_1 \times V_2$ , для которого частный дифференциал  $\partial_2 f|_p: V_2 \rightarrow W$  обратим. В рассматриваемом конечномерном случае это равносильно тому, что дифференциал  $df|_p$  является сюръективным отображением. Отметим, что этот дифференциал — линейное отображение, которое задается вычисленной в точке  $p$  матрицей Якоби

$$df|_p = \begin{pmatrix} f_{x_1}^1 & f_{x_2}^1 & \dots & f_{x_n}^1 \\ f_{x_1}^2 & f_{x_2}^2 & \dots & f_{x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1}^m & f_{x_2}^m & \dots & f_{x_n}^m \end{pmatrix}$$

(по строкам стоят градиенты функций  $f^i$ ). Сюръективность дифференциала означает в точности то, что ранг матрицы Якоби — максимально возможный и, значит, равный  $m$ .

Максимальность ранга означает, что в матрице Якоби есть квадратная подматрица размера  $m \times m$ , являющаяся невырожденной. Пусть столбцы этой матрицы имеют последовательные номера  $(i_1, \dots, i_m)$ , а все остальные — номера  $(j_1, \dots, j_{n-m})$ . В качестве пространств разложения  $V_1$  и  $V_2$  можно взять координатные подпространства, первое натянутое на стандартные базисные векторы  $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-m}}$ , а второе — на  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ . Обозначим через  $p_i$  проекцию точки  $p$  на пространство  $V_i$ , тогда  $p_1 = (p^{j_1}, \dots, p^{j_{n-m}})$  и  $p_2 = (p^{i_1}, \dots, p^{i_m})$ . Теорема утверждает, что существуют окрестности  $U^{p_1}$ ,  $U^p$  и гладкое отображение  $g: U^{p_1} \rightarrow V_2$ , для которых  $M \cap U^p$  совпадает с графиком этого отображения. В координатах  $x^i$ , отображение  $g$  задается  $m$  гладкими функциями  $g^i(x^{j_1}, \dots, x^{j_{n-m}})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Иногда, для удобства изложения, координаты  $x^i$  нумеруют так, чтобы  $(i^1, \dots, i^m) = (1, \dots, m)$ , тогда  $(j_1, \dots, j_{n-m}) = (m+1, \dots, n)$ , так что

$$M \cap U^p = \left\{ (g^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, g^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1}, \dots, x^n) : (x^{m+1}, \dots, x^n) \in U^{p_1} \right\}.$$

**Замечание 62.** Проведенные выше построения, связанные с дифференцируемостью, локальные, т.е. зависят лишь от значений отображения в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки, поэтому при выборе области определения отображения мы можем заменить все пространство на произвольную окрестность этой точки.

## 15 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть  $V$  — произвольное векторное пространство. *Векторным полем на  $V$*  называется произвольное отображение  $\xi: V \rightarrow V$ . Если пространство  $V$  нормированное, то можно говорить про непрерывные и гладкие поля. *Интегральной кривой векторного поля  $\xi$  с начальным условием  $v_0 \in V$*  называется каждое гладкое отображение  $v: [0, a] \rightarrow V$  из некоторого отрезка  $[0, a] \subset \mathbb{R}$  такое, что  $v(0) = v_0$  и  $\dot{v}(t) = \xi(v(t))$  при всех  $t \in [0, a]$ .

Задачу поиска интегральной траектории для поля  $\xi$  принято записывать в виде (обыкновенного) *дифференциального уравнения*  $\dot{v} = \xi(v)$ , которое кодирует приведенное выше определение интегральной кривой. При этом, интегральную траекторию  $v(t)$  называют *решением* этого дифференциального уравнения с начальным условием  $v(0) = v_0$ .

**Теорема 63** (Существование и единственность). *Пусть  $V$  — банахово пространство и  $\xi: V \rightarrow V$  — гладкое векторное поле. Тогда через каждую точку  $v_0 \in V$  проходит интегральная траектория, единственная в*

следующем смысле: интегральные траектории, проходящие через  $v_0$ , совпадают на общей части их областей определения. На эквивалентном языке, дифференциальное уравнение  $\dot{\varphi} = \xi(v)$  с гладкой правой частью  $\xi(v)$  имеет единственное решение с каждым начальным условием.

**Замечание 64.** Имеется много разных вариаций теоремы существования и единственности. Во-первых, не обязательно рассматривать векторное поле  $\xi$  на всем  $V$ . Во-вторых, вместо гладкой правой части можно рассматривать непрерывную с некоторыми дополнительными условиями. В-третьих, вместо  $\dot{v}$  в левой части дифференциального уравнения можно поставить производную более высокого порядка. Наконец, можно изучать векторные поля, меняющиеся “со временем”, т.е. при изменении параметра  $t \in [0, a]$ . Ниже мы приведем два последних варианта модификаций.

Пусть  $V$  — произвольное нормированное пространство и  $m \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\xi$  — векторное поле на  $V$ . Построим поле  $\Theta$  на  $V^m$  следующим образом. Для  $w = (v_1, \dots, v_m) \in V^m$  положим

$$\Theta(w) = \Theta(v_1, \dots, v_{m-1}, v_m) = (v_2, \dots, v_m, \xi(v_1)),$$

тогда интегральная траектория  $w(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$  этого поля удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{v}_1 = v_2, \dots, \dot{v}_{m-1} = v_m, \dot{v}_m = \xi(v_1).$$

Положив  $v_1 = v$ , мы получим, что для этого решения выполняется  $v^{(m)} = \xi(v)$ , где  $v^{(m)}$  — производная порядка  $m$ . Обратно, кривая  $v(t)$  на  $V$ , удовлетворяющая условию  $v^{(m)} = \xi(v)$ , может быть найдена как интегральная траектория описанного выше векторного поля  $\Theta$ . Таким образом, мы приходим к *дифференциальному уравнению*  $v^{(m)} = \xi(v)$ , для которого число  $m$  называется *порядком*. Из теоремы 63 вытекает, что, для однозначного задания решения, в качестве начальных условий теперь нужно брать не только точку  $v_0 \in V$ , для которой  $v(0) = v_0$ , но и начальные значения всех производных до порядка  $(m - 1)$ , т.е.  $v_{0,1}, \dots, v_{0,(m-1)} \in V$ , для которых  $v^{(k)}(0) = v_{0,k}$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$ .

Отметим, что поле  $\Theta$  можно усложнить, заменив уравнение  $v_m = \xi(v_1)$  от одной переменной  $v_1$  на уравнение от всех переменных  $v_1, \dots, v_{m-1}$ . Получим общее дифференциальное уравнение  $m$ -ой степени, *разрешенное относительно старшей производной*.

Перейдем теперь к полям, “зависящим от времени”. Для этого в качестве отображения  $\xi$  рассмотрим  $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , и в качестве интегральной траектории будем искать такие  $v: [0, a] \rightarrow V$ , что  $\dot{v}(t) = \xi(t, v(t))$ . Теорема существования и единственности здесь такая же: начальное условие по-прежнему — это точка  $v_0 \in V$ , для которой  $v(0) = v_0$ . Также аналогично определяются и уравнения  $n$ -ого порядка (сделайте это). Если поле  $\xi$  не зависит от времени, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *автономным*, если же зависит, то — *неавтономным*.

**Замечание 65.** Если вместо решений вида  $v(t)$  рассматривать функции многих переменных, то похожие построения придут к теории *дифференциальных уравнений в частных производных*. Здесь условия, однозначно определяющие решения, устроены сложнее, и мы поговорим об этом, когда возникнет необходимость.

Как мы видели в теореме 63, решения обыкновенного дифференциального с данным начальным условием отличаются лишь размерами промежутка, на котором они рассматриваются (на общей части решения совпадают). Возникает естественный вопрос: сколь далеко может простираться решение с данным начальным условием? Имеется много разных “теорем продолжения”. Мы приведем ту из них, которая достаточно скоро нам понадобится. Рассмотрим неавтономное *линейное* дифференциальное уравнение, т.е. такое, которое задается зависящим от времени  $t \in \mathbb{R}$  векторным полем  $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , удовлетворяющим условию “линейности”: при каждом  $t \in \mathbb{R}$  отображение  $A^t: V \rightarrow V$ ,  $A^t(v) = \xi(t, v)$ , является ограниченным линейным. Напомним также, что в разделе 11 мы определили *норму* для таких  $A^t$ .

**Теорема 66** (О продолжении решений). Пусть  $V$  — банахово пространство, а  $\xi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  — гладкое векторное поле, зависящее от времени и линейное по  $v$ , т.е.  $\xi(t, v) = A^t(v)$ , где для каждого  $t \in \mathbb{R}$  определен ограниченный линейный оператор  $A^t: V \rightarrow V$ . Предположим, что нормы операторов  $A^t$  ограничены в совокупности, т.е.  $\sup_t \|A^t\| < \infty$ . Тогда решение дифференциального уравнения  $\dot{\varphi} = A^t(v)$  с произвольным начальным условием продолжается на любой промежуток.

**Замечание 67.** Преимущественно мы будем рассматривать поля на пространстве  $V = \mathbb{R}^n$  или его подмножествах. Если  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^n$ , то поле  $\xi: V \rightarrow V$  задается набором из  $n$  функций

$\xi^i(x^1, \dots, x^n)$ . Соответствующее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \xi^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dot{x}^2 = \xi^2(x^1, \dots, x^n), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = \xi^n(x^1, \dots, x^n), \end{cases}$$

а его решением является каждая интегральная траектория  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  такая, что  $\dot{\gamma}(t) = \xi(\gamma(t))$  при всех  $t \in [0, a]$ . Начальное условие — это точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , из которой выходит интегральная траектория  $\gamma(t)$ :  $\gamma(0) = x_0$ . Теорема существования и единственности утверждает, что из каждой точки выходит интегральная траектория, причем эта траектория единственна в том смысле, что любые две выходящие из данной точки интегральные траектории совпадают на общей части их областей определения.

Автономное дифференциальное уравнение порядка  $m$ , разрешенное относительно старшей производной, выглядит в этом случае так:

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = \xi^1(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ (x^2)^{(m)} = \xi^2(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = \xi^n(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}). \end{cases}$$

Решениями снова являются интегральные траектории  $\gamma(t)$ , а начальные условия теперь представляют собой не только точки, из которых выходят эти траектории, но и значения в этих точках всех производных функции  $\gamma(t)$  вплоть до порядка  $m - 1$ :

$$\gamma(0) = x_0, \dot{\gamma}(0) = x_{0,1}, \dots, \gamma^{(m-1)}(0) = x_{0,m-1},$$

где  $x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,m-1} \in \mathbb{R}^n$  — некоторые векторы.

Неавтономное уравнение получается из автономного добавлением зависимости от параметра  $t$ :

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = \xi^1(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ (x^2)^{(m)} = \xi^2(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}), \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = \xi^n(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, \dots, (x^1)^{(m-1)}, \dots, (x^n)^{(m-1)}). \end{cases}$$

Начальные условия такие же.

Неавтономное уравнение является линейным, если все  $\xi^i$  линейно зависят от всех переменных, возможно, за исключением переменной  $t$ :

$$\begin{cases} (x^1)^{(m)} = a_{0i}^1(t) x^i + a_{1i}^1(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^1(t) (x^i)^{(m-1)}, \\ (x^2)^{(m)} = a_{0i}^2(t) x^i + a_{1i}^2(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^2(t) (x^i)^{(m-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ (x^n)^{(m)} = a_{0i}^n(t) x^i + a_{1i}^n(t) \dot{x}^i + \dots + a_{(m-1)i}^n(t) (x^i)^{(m-1)}, \end{cases}$$

где  $a_{qi}^p(t)$  — гладкие функции параметра  $t$ , а по повторяющимся индексам  $i$ , как принято в тензорном исчислении, предполагается суммирование.

# Некоторые курсы лекций и монографии по дифференциальной геометрии

- [1] Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. *Введение в дифференциальную геометрию “в целом”*, М., Наука, 1973.
- [2] Бляшке В. *Введение в дифференциальную геометрию*, 2-е изд., исправл. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000.
- [3] Веблен О., Уайтхед Дж. *Основания дифференциальной геометрии*. М.: ИЛ, 1949.
- [4] Вербицкий М., *Дифференциальная геометрия и векторные расслоения*: <http://bogomolov-lab.ru/KURSY/BUNDLES-2013/>
- [5] Гусейн-Заде С.М. *Лекции по дифференциальной геометрии*. М.: МГУ, 2001: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Gusejn-Zade2001ru.pdf>
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения*, т.1, Изд. 6, URSS, 2013.
- [7] Дынников И.А. *Классическая дифференциальная геометрия*: <https://www.dropbox.com/s/70cipfsyn35hd5s/classdiffgeom2019.pdf>
- [8] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Лекции по классической дифференциальной геометрии*: <http://dfgm.math.msu.su/files/IvaTuzTerm1-2017.pdf>
- [9] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.1, 2, М.: Наука, 1981.
- [10] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, изд. 4, перераб. и доп. URSS. 2020.
- [11] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. URSS. 2016.
- [12] Моденов П.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, М., Учпедгиз, 1949.
- [13] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*, М.: Физматгиз, 1958.
- [14] Норден А.П. *Теория поверхностей*. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [15] Погорелов А.В. *Дифференциальная геометрия*, М.: Наука, 1974.
- [16] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия*, URSS, 2003.
- [17] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*. 2-е изд., перераб. и доп., М.: Наука, 1986.
- [18] Постников М.М. *Лекции по геометрии: Гладкие многообразия. Семестр III*, Изд. 2, URSS, 2017.
- [19] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия*, Учеб. пособие для вузов, М.: Наука, 1988.

- [20] Прасолов В.В. *Дифференциальная геометрия*: <https://vvprasolov.livejournal.com/383931.html>
- [21] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*, М.: МЦНМО, 2016. <http://higeom.math.msu.su/people/sklyarenko/dgII.pdf> Просветов Г.И. *Дифференциальная геометрия и топология. Задачи и решения*, Изд-во: Альфа-Пресс, 2010. Подробнее: <https://www.labyrinth.ru/books/244503/>
- [22] Рашевский П.К. *Курс дифференциальной геометрии*, изд. стереотип. URSS. 2019.
- [23] Розендорн Э.Р. *Задачи по дифференциальной геометрии*, М.: Наука, 1971.
- [24] Розендорн Э.Р. *Теория поверхностей*, 2-е изд., перераб. и доп, М.: Физматлит, 2006.
- [25] Сизый С.В. *Лекции по дифференциальной геометрии*, М.: Физматлит, 2007.
- [26] Скляренко Е.Г. *Курс лекций по классической дифференциальной геометрии*: <http://higeom.math.msu.su/teaching/students/difgeom/Skljarenko%202.pdf>
- [27] Скопенков А.Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах*. М.: МЦНМО, 2008. <https://www.mcsme.ru/free-books/dubna/skopenkov-dg.pdf>
- [28] Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии*, М.: Мир, 1970.
- [29] Тайманов И.А. *Лекции по дифференциальной геометрии*, Изд-во: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005 г.
- [30] Торп Дж. *Начальные главы дифференциальной геометрии*, М.: Мир, 1982.
- [31] Троицкий Е.В. *Дифференциальная геометрия и топология*, М.: МГУ, 2003: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Troickij2003ru.pdf>
- [32] Феденко А.С. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, 2-е изд., перераб., М., Наука, 1979.
- [33] Фиников С.П. *Дифференциальная геометрия. Курс лекций*, М.: МГУ, 1961: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Finikov1961ru.djvu>.
- [34] Фоменко А.Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*. 2-е изд., исправл. и доп., Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
- [35] Чернавский А.В. *Лекции по классической дифференциальной геометрии*, 2011: <http://higeom.math.msu.su/people/chernavski/chernav-difgeom2011.pdf>
- [36] Шарипов Р.А. *Курс дифференциальной геометрии*, учебное пособие для вузов, издание Башкирского университета, Уфа 1996.
- [37] Шаров Г.С., Шелехов А.М., Шестакова М.А. *Сборник задач по дифференциальной геометрии*, МЦНМО, 2005.
- [38] Шарп Р.У. *Дифференциальная геометрия. Обобщение Картана Эрлангенской программы Клейна*, МЦНМО, 2019.
- [39] Шафаревич А.И. *Классическая дифференциальная геометрия*, учебное пособие для вузов, издание МФТИ, 2010.
- [40] Шварц Дж. *Дифференциальная геометрия и топология*, М.: Мир, 1970.
- [41] Шуликовский В.И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М.: Физматгиз, 1963.
- [42] Abbena E, Salamon S., Gray A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, (3rd ed.), Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [43] Bär C. *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010.

- [44] Berger M., Gostiaux B. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, Springer, 1988.
- [45] Blaga P.A. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Napoca Press, Cluj-Napoca, Romania, 2005.
- [46] Bloch E.D.. *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, Boston: Springer Science & Business Media, 2011.
- [47] Burke W.L. *Applied differential geometry*, Cambridge University Press, 1997.
- [48] Chern S.-S. *Studies in global geometry and analysis*, Prentice-Hall, 1967.
- [49] Coleman R. *Calculus on normed vector spaces*, Springer, 2012.
- [50] Conrad B. *Differential Geometry handouts*, Stanford University:  
<http://math.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/>
- [51] Csikós B. *Notes on Differential Geometry*: <https://web.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif.html>
- [52] Do Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [53] *Encyclopedia of Mathematics: Differential geometry*, EMS Press, 2001:  
[https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Differential\\_geometry](https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Differential_geometry)
- [54] Forsyth A R. *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1920.
- [55] Guggenheimer H. *Differential Geometry*, Dover, 1997.
- [56] Henderson D. *Differential Geometry: A Geometric Introduction*, Prentice-Hall, 1997.
- [57] Hicks N.J. *Notes on differential geometry* (Van Nostrand Mathematical Studies No.3). D. Van Nostrand, New York, 1965.
- [58] Hsiung C.C. *A first course in differential geometry*, Wiley (Interscience), 1981.
- [59] Kreyszig E. *Differential Geometry*, New York: Dover Publications, 1991.
- [60] Kühnel W. *Differential Geometry: Curves–Surfaces–Manifolds* (Student Mathematical Library, Vol. 16, Second Edition, transl. by B. Hunt). American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [61] Lang S. *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer, 1999.
- [62] McCleary J. *Geometry from a differentiable viewpoint*, Cambridge University Press, 1994.
- [63] Millman R., Parker G. *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1997.
- [64] *MIT OpenCourseWare: Differential Geometry*, 2008:  
<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-950-differential-geometry-fall-2008/>
- [65] Murray M. *Online differential geometry course*, 1996:  
[http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/teaching\\_old.html](http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/teaching_old.html)
- [66] O'Neill B. *Elementary Differential Geometry*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1997.
- [67] Oprea J. *Differential Geometry and its Applications*, Prentice-Hall, 1996.
- [68] Palais R.S. *A Modern Course on Curves and Surface*, 2003:  
[http://virtualmathmuseum.org/Surface/a/bk/curves\\_surfaces\\_palais.pdf](http://virtualmathmuseum.org/Surface/a/bk/curves_surfaces_palais.pdf)
- [69] Palais R.S. *3DXM Surfaces Gallery*: <http://virtualmathmuseum.org>
- [70] Pressley A. *Elementary Differential Geometry*, Springer, London etc., 2nd ed, 2010.
- [71] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, v.1-5, Publish or Perish, Berkeley, 1999.

[72] Stoker J.J. *Differential Geometry*, Wiley, New York, 1949.

[73] Struik D. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, 1988.

[74] Tapp K. *Differential geometry of curves and surfaces*, Springer, 2016.

[75] Valiron G. *The Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Math. Sci. Press, Brookline 1950.

## Упражнения к введению

В приведенных ниже задачах 1 – 7 тензоры рассматриваются на  $n$ -мерном векторном пространстве.

**Упражнение 1.** Для каждого базиса  $e_i$  зададим набор чисел  $\delta_j^i$ . Покажите, что это соответствие задает тензор типа  $(1, 1)$ .

**Упражнение 2.** Пусть  $b$  — тензор типа  $(0, 2)$  (билинейная форма). Предположим, что в некотором базисе  $e_i$  матрица  $(b_{ij})$ , составленная из координат тензора  $b$  невырождена.

- (1) Докажите, что и в любом другом базисе  $e_{i'}$  матрица  $(b_{i'j'})$  из координат тензора  $b$  невырождена.
- (2) Рассмотрим в каждом базисе  $e_i$  матрицу  $(b^{ij})$ , обратную к матрице  $(b_{ij})$ . Докажите, что такое соответствие — тензор типа  $(2, 0)$ .

**Упражнение 3.** Пусть  $v$  и  $w$  — векторы, т.е. тензоры типа  $(1, 0)$ , а  $\xi$  — ковекторы, т.е. тензор типа  $(0, 1)$ . Тензор  $v \otimes \xi$  — линейный оператор, т.е. тензор типа  $(1, 1)$ , поэтому его можно применить к вектору  $w$ . Чему равен результат?

**Упражнение 4.** Фиксируем некоторый базис  $e_i$  и рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому упорядоченному набору векторов определитель матрицы, столбцы которой — координаты выбранных векторов. Так как определитель матрицы — полилинейное отображение столбцов матрицы, получаем тензор  $T$  типа  $(0, n)$ .

- (1) Запишите координаты тензора  $T$  в базисе  $e_i$ .
- (2) Запишите координаты этого тензора в другом базисе  $e_{i'}$ .

**Упражнение 5.** Тензор называется *инвариантным*, если его координаты не меняются при переходе от одного базиса к другому. В соответствии с задачей 1, тензор, имеющий в некотором базисе координаты  $\delta_j^i$ , является инвариантным тензором типа  $(1, 1)$ .

- (1) Докажите, что не существует инвариантных тензоров типа  $(p, q)$  при  $p \neq q$ .
- (2) Опишите все инвариантные тензоры типа  $(1, 1)$  и  $(2, 2)$ .

**Упражнение 6.** Покажите, что свойство положительной определенности билинейной формы — тензорное. Для положительно определенной билинейной формы, покажите, что матрица Грама системы векторов невырождена, если и только если векторы этой системы линейно независимы. Останется ли это утверждение верным, если заменить “положительную определенность” на “невырожденность”?

**Упражнение 7.** Пусть  $G$  — матрица Грама базиса  $e_i$ . Как изменится матрица Грама при переходе к другому базису  $e_{i'}$ ?

**Упражнение 8.** Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше чем 3 с базисом  $(1, x, x^2, x^3)$  и билинейной формой  $b(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$ . Покажите, что билинейная форма является скалярным произведением и ортогонализируйте этот базис.

**Упражнение 9.** Пусть  $\dim V = 2$ ,  $e_1, e_2 \in V$  — базис  $V$ ,  $v = x e_1 + y e_2 \in V$ ,  $a(v) = x^2$ ,  $b(v) = x y$ . Покажите, что не существует базиса, в котором обе квадратичные формы  $a$  и  $b$  имеют канонический вид.

**Упражнение 10.** Рассмотрим на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  стандартную метрику  $\rho_1(x, y) = |x - y|$ . Положим  $\rho_2 = \rho_1 / (1 + \rho_1)$ . Покажите, что  $\rho_2$  — метрика, не эквивалентная  $\rho_1$ .

**Упражнение 11.** Положим  $Z = \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$  и зададим на  $Z$  топологию, в которой базой являются все одноточечные подмножества  $\mathbb{N}$ , а также множества вида  $T_n := \{m \geq n : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что последовательность  $x: \mathbb{N} \rightarrow X$  сходится к  $y \in X$ , если и только если продолжение  $f$  отображения  $x$  на все  $Z$  такое, что  $f(\infty) = y$ , непрерывно.

**Упражнение 12.** Приведите примеры полных и неполных нормированных пространств.

**Упражнение 13.** Покажите, что функция на линейном нормированном пространстве  $V$ , сопоставляющая каждому вектору  $v$  его норму  $\|v\|$ , непрерывна. В частности, каждый шар  $\{v \in V : \|v\| \leq r\}$  — замкнутое ограниченное подмножество  $V$ .

**Упражнение 14.** Покажите, что

- (1) нормы на линейном пространстве (не обязательно конечномерном) эквивалентны, если и только если они задают одну и ту же топологию;
- (2) эквивалентные метрики на произвольном множестве задают одну и ту же топологию;
- (3) неэквивалентные метрики могут задавать одну и ту же топологию (приведите пример);
- (4) на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, в частности, задаваемые ими топологии одинаковы, а замкнутые ограниченные подмножества компактны (в частности, компактными являются все замкнутые шары);
- (5) приведите пример нормированного пространства, в котором невырожденный замкнутый шар некомпактен;
- (6) на бесконечномерном пространстве могут существовать неэквивалентные нормы (приведите пример).

**Упражнение 15.** Пусть  $V, W$  — нормированные пространства (не обязательно конечномерные), и  $L: V \rightarrow W$  — линейное отображение. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Существует хотя бы одна точка пространства  $V$ , в которой отображение  $L$  непрерывно.
- (2) Отображение  $L$  непрерывно в 0.
- (3) Существует такое число  $K$ , что  $\|L(v)\| \leq K \|v\|$  для любого  $v \in V$ .
- (4) Отображение  $L$  ограничено, т.е. переводит ограниченные подмножества  $V$  в ограниченные подмножества  $W$ .
- (5) Норма  $\|L\|$  ограничена.
- (6) Говорят, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств является *липшицевым*, если существует такое число  $C$ , что  $|f(x)f(x')| \leq C |xx'|$  для любых  $x, x' \in X$ . В этом пункте утверждается, что  $L$  — липшицево отображение (на  $V$  и  $W$  мы рассматриваем метрики, порожденные нормами).
- (7) Говорят, что отображение  $f: X \rightarrow Y$  метрических пространств является *равномерно непрерывным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такие, что для любых  $x, x' \in X$  с  $|xx'| < \delta$  выполняется  $|f(x)f(x')| < \varepsilon$ . В этом пункте утверждается, что  $L$  — равномерно непрерывно.

**Упражнение 16.** Покажите, что линейные отображения из конечномерного нормированного пространства в произвольное нормированное пространство всегда непрерывно. Приведите пример разрывного линейного отображения нормированных пространств.

**Упражнение 17.** Покажите, что отображение нормированных пространств, дифференцируемое в точке, непрерывно в этой точке, а дифференциал определен однозначно.

**Упражнение 18.** Покажите, что дифференциал не меняется при замене нормы на эквивалентную.

# Лекция 1

## Кривые

**План.** Промежутки, параметрическая кривая в топологическом пространстве (выходящая из точки, приходящая в точку, соединяющая точки, замкнутая, незамкнутая), замена параметра, кривая, ломаная в метрическом пространстве, длина ломаной, длина параметрической кривой в метрическом пространстве, независимость длины от параметризации, спрямляемые кривые, липшицевы отображения, константа Липшица, растяжение, спрямляемость липшицевой кривой, обобщенное неравенство треугольника, функционал длины, операции над кривыми (ограничение, склейка, замена параметра), свойства функционала длины (аддитивность, непрерывность, независимость от параметра, согласованность с топологией), натуральная и равномерная параметризация кривой, скорость равномерной параметризации, безостановочные кривые, существование равномерного и натурального параметров на безостановочной кривой, кривые в арифметическом пространстве, их координатная запись, гладкие кривые, вектор скорости гладкой кривой, возможность гладкой параметризации угла, особые и регулярные точки гладкой кривой, регулярные кривые, три способа задания регулярных кривых в евклидовом пространстве, их локальная эквивалентность, примеры, интегральная формула длины гладкой кривой в евклидовом пространстве, задание натурального параметра с помощью интегральной формулы, критерий того, что параметр регулярной кривой — натуральный, описание всех замен параметра, сохраняющих равномерность (натуральность).

### 1.1 Общие определения

В разных приложениях области определения кривых могут быть существенно разного вида. Общее у всех этих областей — то, что они являются связными подмножествами вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Эти связные подмножества мы будем называть *промежутками*. Таким образом, в качестве промежутка можно взять интервал, полуинтервал, отрезок, причем первые два могут быть как конечными, так и бесконечными, а именно, бесконечный интервал — это или открытый луч, или вся прямая, а бесконечный полуинтервал — замкнутый луч. Если  $I$  — промежуток, то через  $|I|$  обозначим его длину (величина  $|I|$  может равняться бесконечности).

Отметим, что на каждом промежутке имеются индуцированные с прямой  $\mathbb{R}$  метрика и топология, так что можно измерять расстояния между точками промежутка, длины промежутка и его подпромежутков; кроме того, определены непрерывные отображения из промежутков в топологические пространства. Далее, для каждого открытого промежутка и его отображения в линейное нормированное пространство  $V$ , например в  $\mathbb{R}^n$ , можно говорить о дифференцируемости и гладкости отображения. Если же промежуток  $I$  не является открытым, то он содержится в некотором открытом промежутке  $I'$ , и под гладким отображением из  $I$  в  $V$  будем понимать ограничение некоторого гладкого отображения из  $I'$  в  $V$ .

Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $I$  — промежуток. *Параметрической кривой* будем называть каждое непрерывное отображение  $\gamma: I \rightarrow X$ ; при этом будем говорить, что такая параметрическая кривая *параметризована промежутком  $I$* . Если промежуток  $I$  ограничен снизу (сверху) и включает свой левый (правый) конец  $a \in \mathbb{R}$  ( $b \in \mathbb{R}$ ), то говорим, что  $\gamma$  *выходит из  $\gamma(a)$  (входит в  $\gamma(b)$ )*; если  $I$  ограничен сверху и снизу и включает оба своих конца  $a$  и  $b$ , т.е.  $I = [a, b]$ , то говорим, что  $\gamma$  *соединяет  $\gamma(a)$  и  $\gamma(b)$* . Параметрическая кривая  $\gamma$  называется *замкнутой*, если она параметризована отрезком  $I = [a, b]$  и  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ; иначе параметрическая кривая  $\gamma$  называется *незамкнутой*.

Пусть  $J$  — другой промежуток, гомеоморфный  $I$ , а  $\varphi: J \rightarrow I$  — некоторый гомеоморфизм. Будем говорить, что параметрические кривые  $\gamma$  и  $\delta = \gamma \circ \varphi$  получаются друг из друга *заменой параметра*. Если  $t$  — координата на  $I$ , а  $s$  — координата на  $J$ , то, в соответствии с традицией, вместо  $\delta(s)$  пишут  $\gamma(s)$ , тем самым, отождествляя  $\gamma(s)$  с  $(\gamma \circ \varphi)(s)$ . Понять это соглашение можно из следующих соображений.

Легко видеть, что отношение на множестве всех параметрических кривых в  $X$ , в котором кривые находятся в отношении, если и только если они получаются друг из друга заменой параметра, является эквивалентностью, поэтому множество всех параметрических кривых на  $X$  разбивается на классы этой эквивалентности. Под *непараметрической кривой* или просто *кривой* будем понимать каждый из этих классов. Тем самым, говоря

про кривую  $\gamma$ , можно считать, что  $\gamma$  обозначает некоторый класс, а  $\gamma(s)$  — это уже конкретный элемент этого класса (конкретная параметрическая кривая).

Если все параметрические кривые из класса эквивалентности  $\gamma$  обладают некоторым свойством  $P$ , то говорим, что и сама кривая  $\gamma$  удовлетворяет этому свойству. Так, все параметрические кривые из класса эквивалентности  $\gamma$  имеют один и тот же образ, а также замкнуты или не замкнуты одновременно. Первое позволяет корректно определить множество  $\text{im } \gamma$ , являющееся образом произвольной параметрической кривой из этого класса. Будем говорить, что точка  $x \in X$  *лежит на кривой*  $\gamma$ , если  $x \in \text{im } \gamma$ . Второе дает возможность говорить о *замкнутой* или *незамкнутой* кривой  $\gamma$ .

Если среди кривых класса  $\gamma$  имеется параметрическая кривая  $\gamma(s)$ , удовлетворяющая некоторому свойству  $P$ , то будем говорить, что  $\gamma$  *может быть параметризована так, чтобы выполнялось свойство  $P$* . Кроме того, мы будем неформально говорить то же самое не только про класс  $\gamma$ , но и про конкретную параметризацию  $\gamma(s)$ , а именно, “параметрическая кривая  $\gamma(s)$  может быть параметризована так, чтобы выполнялось  $P$ ”. Ниже мы введем понятие натурального параметра и опишем те кривые, которые могут быть натурально параметризованы.

Если пространство  $X$  — метрическое, то естественным образом определяется длина кривой, функционал длины и спрямляемые кривые. Приведем соответствующие построения.

## 1.2 Длина кривой

В данном разделе  $X$  будет метрическим пространством. По аналогии с тем, как это делается в  $\mathbb{R}^n$ , конечную последовательность  $L = (A_0, \dots, A_n)$  точек пространства  $X$  назовем *ломаной в  $X$* ; при этом пары  $(A_{i-1}, A_i)$  будем называть *ребрами ломаной  $L$* , а числа  $|A_{i-1}A_i|$  — *длинами* этих ребер. Сумма длин всех ребер ломаной  $L$  называется *длиной ломаной  $L$*  и обозначается  $|L|$ . Длину  $L$  одноточечной ломаной  $L = (A_0)$  положим равной нулю.

Пусть  $I$  — некоторый промежуток. Множество всевозможных конечных строго монотонных последовательностей  $(t_0 < t_1 < \dots < t_m) \subset I$  обозначим  $\Theta(I)$ . Пусть  $\gamma: I \rightarrow X$  — произвольная параметрическая кривая. Для каждой монотонной последовательности  $\xi = (t_0 < t_1 < \dots < t_m) \in \Theta(I)$  рассмотрим соответствующую ей ломаную  $L_\gamma(\xi) = (\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m))$  (такие ломаные будем называть *вписанными в  $\gamma$* ), тогда величина

$$|\gamma| = \sup_{\xi \in \Theta(I)} |L_\gamma(\xi)|$$

называется *длиной параметрической кривой  $\gamma$* .

**Замечание 1.1.** Так как множество всех ломаных, вписанных в кривую, не зависит от параметризации, то длина параметрической кривой не меняется при замене параметра. Тем самым, длина  $|\gamma|$  корректно определена для всего класса эквивалентности  $\gamma$  параметрических кривых.

Параметрическая кривая  $\gamma: I \rightarrow X$  называется *спрямляемой*, если для каждого отрезка  $J = [a, b] \subset I$  параметрическая кривая  $\gamma|_J$  имеет конечную длину:  $|\gamma|_J < \infty$ .

**Замечание 1.2.** Так как непрерывные отображения сохраняют связность и компактность, а отрезки — это в точности все компактные промежутки, то свойство параметрической кривой быть или не быть спрямляемой не зависит от параметризации. Таким образом, спрямляемость определена для кривых (классов эквивалентности).

Приведем примеры спрямляемых кривых.

Напомним, что отображением  $f: X \rightarrow Y$  из метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  называется *липшицевым*, если существует такое  $C > 0$ , что для любых  $x, x' \in X$  выполняется  $|f(x)f(x')| \leq C|xx'|$ . Каждое такое  $C$  называется *константой Липшица*, а точная нижняя грань  $\text{dil } f$  констант Липшица — *растяжением отображения  $f$*  (обозначение происходит от английского слова dilatation). Иногда, для краткости, липшицево отображение с константой Липшица  $C$  называют  *$C$ -липшицевым*.

**Пример 1.3.** Каждая  $C$ -липшицева параметрическая кривая  $\gamma: I \rightarrow X$  спрямляемая. Действительно, пусть  $J \subset I$  — произвольный отрезок. Положим  $\delta = \gamma|_J$ . Тогда для любой монотонной последовательности  $\xi = (t_0 < t_1 < \dots < t_m) \in \Theta(J)$  имеем

$$|L_\delta(\xi)| \leq \sum_{i=1}^m |\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)| \leq \sum_{i=1}^m C(t_i - t_{i-1}) \leq C|J|.$$

Таким образом,  $|\gamma|_J \leq C|J| < \infty$  для каждого отрезка  $J \subset I$ , поэтому кривая  $\gamma$  — спрямляема.

Следующее утверждение тривиально вытекает из неравенства треугольника.

**Предложение 1.4** (Обобщенное неравенство треугольника). Пусть точки  $x, y \in X$  лежат на кривой  $\gamma$ , тогда  $|\gamma| \geq |xy|$ .

Пусть  $\Omega(X)$  — семейство всех параметрических кривых в метрическом пространстве  $X$ .

**Определение 1.5.** Обозначим  $\mathcal{L}: \Omega(X) \rightarrow [0, \infty]$  отображение, определенное правилом  $\mathcal{L}: \gamma \mapsto |\gamma|$ , и назовем его *функционалом длины*.

Отметим, что на  $\Omega(X)$  естественно определены следующие операции:

- (1) *ограничение* каждой параметрической кривой  $\gamma: I \rightarrow X$  на каждый подпромежуток  $J \subset I$ ;
- (2) *склейка*  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  тех пар параметрических кривых  $\gamma_1: I \rightarrow X$ ,  $\gamma_2: J \rightarrow X$ , для которых  $I \cap J = \{b\}$  и  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , а именно,  $(\gamma_1 \cdot \gamma_2): I \cup J \rightarrow X$  — параметрическая кривая, ограничения которой на  $I$  и  $J$  совпадают соответственно с  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;
- (3) *замена параметра и эквивалентность*, отождествляющая кривые, отличающиеся на замену параметра.

Следующий результат описывает свойства функционала длины.

**Теорема 1.6.** Пусть  $\mathcal{L}: \Omega(X) \rightarrow [0, \infty]$  — функционал длины, определенный на параметрических кривых метрического пространства  $X$ . Тогда  $\mathcal{L}$  обладает следующими свойствами:

- (1) **аддитивность:** если  $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$  — склейка кривых  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$ , то  $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$ ;
- (2) **непрерывность:** для любой спрямляемой  $\gamma: I \rightarrow X$  функция  $f(t) = \mathcal{L}(\gamma|_{I_t})$ , где  $I_t = \{s \in I : s \leq t\}$ , — непрерывна;
- (3) **независимость от параметра:** для каждой кривой  $\gamma: I \rightarrow X$  и замены параметра  $\varphi: J \rightarrow I$  выполняется  $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma \circ \varphi)$ ;
- (4) **согласованность с топологией:** для каждого  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in X \setminus U_\varepsilon(x)$  и кривой  $\gamma \in \Omega(X)$ , соединяющей  $x$  и  $y$ , выполняется  $\mathcal{L}(\gamma) \geq \varepsilon$ .

*Доказательство.* Нетривиальным является лишь пункт (2), докажем его. Выберем произвольное  $t \in I$  и покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , для которого при всех  $s \in I \cap (t - \delta, t + \delta)$  выполняется  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ . Положим  $\ell = |\gamma|$ . По определению, существует монотонная последовательность  $\xi \in \Theta(I)$  такая, что  $\ell - \varepsilon/2 < |L_\gamma(\xi)| \leq \ell$ . Если  $t \notin \xi$ , добавим его к  $\xi$  (полученную последовательность обозначим той же буквой). Ясно, что для полученной последовательности по-прежнему выполняется  $\ell - \varepsilon/2 < |L_\gamma(\xi)| \leq \ell$ .

В качестве  $\delta_1$  возьмем расстояние от  $t$  до ближайшего отличного от  $t$  элемента последовательности  $\xi$ . Так как расширениями последовательности  $\xi$  мы можем менять длину ломаной  $L_\gamma(\xi)$  лишь в пределах  $(\ell - \varepsilon/2, \ell]$ , то для каждого  $s \in I \cap (t - \delta_1, t + \delta_1)$  длина  $\ell_{ts} = |f(t) - f(s)|$  фрагмента кривой  $\gamma$  между точками  $\gamma(t)$  и  $\gamma(s)$  отличается от  $|\gamma(t)\gamma(s)|$  менее чем на  $\varepsilon/2$ : длина этого фрагмента равна супремуму длин вписанных ломаных, а каждая такая ломаная, добавленная к  $L_\gamma(\xi)$ , может увеличить длину  $L_\gamma(\xi)$  меньше чем на  $\varepsilon/2$ . С другой стороны, в силу непрерывности отображения  $\gamma$ , существует такое  $\delta_2 > 0$ , что при всех  $s \in I \cap (t - \delta_2, t + \delta_2)$  имеем  $|\gamma(t)\gamma(s)| < \varepsilon/2$ . Осталось положить  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .  $\square$

**Дополнительный материал.** Приведем еще одно важное свойство функционала длины  $\mathcal{L}$ .

**Предложение 1.7** (Полунепрерывность снизу). Функционал  $\mathcal{L}$  полунепрерывен снизу, т.е. для любой последовательности  $\gamma_n: I \rightarrow X$  спрямляемых параметрических кривых, поточечно сходящейся к спрямляемой параметрической кривой  $\gamma: I \rightarrow X$ , имеем

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n).$$

*Доказательство.* Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что при достаточно больших  $n$  выполняется  $\mathcal{L}(\gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$ , а раз так, то  $\mathcal{L}(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon$  и, в силу произвольности  $\varepsilon$ , получим требуемое.

Итак, пусть фиксировано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такую монотонную последовательность  $\xi = (t_0 < t_1 < \dots < t_m) \in I$ , что  $\mathcal{L}(\gamma) - |L_\gamma(\xi)| < \varepsilon/2$ . Существует  $N$  такое, что для любого  $n > N$  и всех  $i$  выполняется  $|\gamma(t_i)\gamma_n(t_i)| < \frac{\varepsilon}{4m}$ . Отсюда мгновенно вытекает, что

$$|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)| < |\gamma_n(t_{i-1})\gamma_n(t_i)| + \frac{\varepsilon}{2m},$$

поэтому  $|L_\gamma(\xi)| < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2$ . Таким образом,

$$\mathcal{L}(\gamma) < |L_\gamma(\xi)| + \varepsilon/2 < |L_{\gamma_n}(\xi)| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \mathcal{L}(\gamma_n) + \varepsilon,$$

что и требовалось.  $\square$

### 1.3 Натуральная и равномерная параметризации кривых

Пусть, как и выше,  $X$  — метрическое пространство.

**Определение 1.8.** Параметрическая кривая  $\gamma: I \rightarrow X$  называется *натурально параметризованной*, а параметр  $s$  промежутка  $I$  — *натуральным*, если для любого конечного подпромежутка  $J \subset I$  выполняется  $|\gamma|_J| = |J|$ . Параметр  $t$  параметрической кривой  $\gamma(t)$  называется *равномерным*, а  $\gamma(t)$  — *равномерно параметризованной*, если для некоторого  $\lambda \geq 0$  и каждого конечного подпромежутка  $J \subset I$  выполняется  $|\gamma|_J| = \lambda|J|$ . При этом число  $\lambda$  называется *скоростью равномерно параметризованной*  $\gamma$ .

**Замечание 1.9.** Если параметрическая кривая  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , параметризована равномерно и  $\lambda$  — ее скорость, то отображение  $\gamma$  является  $\lambda$ -липшицевым и, в силу примера 1.3,  $\gamma$  — спрямляемая кривая. Действительно, для любых  $s_1, s_2 \in I$ ,  $s_1 \leq s_2$ , промежуток  $J = [s_1, s_2]$  содержится в  $I$  и  $|J| = s_2 - s_1$ , поэтому

$$|\gamma(s_1)\gamma(s_2)| \leq |\gamma|_{[s_1, s_2]}| = \lambda|J| = \lambda(s_2 - s_1),$$

что и требовалось.

**Замечание 1.10.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow X$  — равномерно параметризованная параметрическая кривая.

- Если промежуток  $I$  невырожденный, т.е. состоит более чем из одной точки и, значит,  $|I| > 0$ , то в нем можно выбрать ограниченный невырожденный подпромежуток  $J$ , и тогда скорость  $\lambda$  однозначно определяется из условия  $|\gamma|_J| = \lambda|J|$ . В частности, если некоторый невырожденный промежуток отображается в точку ( $\gamma$  “останавливается” на невырожденном промежутке), то  $\lambda = 0$  и, поэтому  $\gamma$  отображает и весь промежуток  $I$  в эту же точку.
- Если промежуток  $I$  вырожденный, то, формально говоря,  $\lambda$  может быть любым. Однако этот случай можно представить как предельный для последовательности отображений невырожденных промежутков в точку, а для этих отображений соответствующие  $\lambda$  равны нулю. Поэтому естественно принять следующее соглашение: **если промежуток  $I$  вырожденный, то положим  $\lambda = 0$ .**

Итак, в соответствии со сделанными наблюдениями и соглашением, равномерная параметрическая кривая имеет нулевую скорость, если и только если она — отображение в точку. Такие параметрические кривые будем называть *вырожденными*, а все остальные — *невырожденными*. Невырожденная кривая не имеет “остановок”, т.е. для каждого невырожденного подпромежутка  $J \subset I$  отображение  $\gamma|_J$  не постоянно (не является отображением в точку). Тем самым, для кривых, имеющих остановки, не существует равномерной (в частности, натуральной), параметризации.

Параметрическую кривую  $\gamma: I \rightarrow X$  назовем *безостановочной*, если для каждого невырожденного подпромежутка  $J \subset I$  отображение  $\gamma|_J$  не постоянно. Отметим, что если промежуток  $I$  — вырожденный, то в нем нет невырожденных подпромежутков, так что условие, гарантирующее безостановочность, выполнено. Таким образом, для вырожденного  $I$  кривая  $\gamma$  тоже безостановочна.

В примере 1.9 мы показали, что каждая равномерно параметризованная параметрическая кривая спрямляема. Приведем обратное утверждение.

**Теорема 1.11.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow X$  — безостановочная спрямляемая кривая. Тогда  $\gamma$  может быть равномерно параметризована. Если промежуток  $I$  невырожден, то  $\gamma$  может быть параметризована даже натурально.

*Доказательство.* Случай вырожденного  $I$  очевиден, поэтому будем сразу предполагать, что промежуток  $I$  невырожден.

Выберем произвольную внутреннюю точку  $b \in I$  и разобьем промежуток на два подпромежутка  $I_1$  и  $I_2$ , первый состоит из всех  $t \in I$ , не превосходящих  $b$ , а второй — из не меньших  $b$ . Таким образом,  $I_1 \cap I_2 = \{b\}$  и для кривых  $\gamma_k = \gamma|_{I_k}$  определена склейка. Если  $s_k \in J_k$  — натуральный параметр для  $\gamma_k$ , то с помощью сдвигов  $s_k - c_k$  на постоянные  $c_k$ , не меняющих свойства параметра быть натуральным (проверьте), добьемся того, чтобы  $J_1$  и  $J_2$  пересекались по точке, так что для параметрических кривых  $\gamma_k(s_k)$  снова определена склейка. Ясно, что на склейке этих кривых параметры  $s_k$  склеиваются в натуральный. Более того, отображение  $s_k \mapsto -s_k$  также сохраняет свойства параметра быть натуральным. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда промежуток  $I$  ограничен слева и содержит левый конец. Обозначим этот конец через  $a$ .

Далее, рассмотрим функцию  $\psi(t) = |\gamma|_{[a,t]}$ . По теореме 1.6, функция  $\psi$  непрерывна и монотонно возрастает. Более того, это монотонное возрастание строгое, так как  $\gamma$  — безостановочна. Следовательно,  $\psi$  — гомеоморфизм с образом  $J = \psi(I)$ . Положим  $\varphi = \psi^{-1}$ , тогда  $\varphi$  — замена параметра. Пусть  $s$  — параметр на промежутке  $J$ . Выбираем любые  $s_1, s_2 \in J$ ,  $s_1 \leq s_2$ , полагаем  $t_k = \varphi(s_k)$ , тогда

$$|\gamma(s_1)\gamma(s_2)| \leq |(\gamma \circ \varphi)|_{[s_1, s_2]}| = |\gamma|_{[t_1, t_2]}| = \psi(t_2) - \psi(t_1) = s_2 - s_1,$$

поэтому  $s$  — натуральный параметр на  $\gamma$ , что и требовалось.  $\square$

### Дополнительный материал.

**Определение 1.12.** Скажем, что параметрические кривые  $\gamma: I \rightarrow X$  и  $\tilde{\gamma}: J \rightarrow X$  получены друг из друга *монотонной заменой параметра*, если или существует монотонное сюръективное отображение  $\varphi: J \rightarrow I$  такое, что  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , или же существует монотонное сюръективное отображение  $\varphi: I \rightarrow J$  такое, что  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ .

**Задача 1.13.** Докажите, что для произвольной спрямляемой параметрической кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  в метрическом пространстве  $X$  существует натурально параметризованная параметрическая кривая  $[0, |\gamma|] \rightarrow X$  и равномерно параметризованная кривая  $[0, 1] \rightarrow X$  со скоростью  $|\gamma|$ , причем обе эти кривые получены из  $\gamma$  некоторыми монотонными заменами параметра.

## 1.4 Кривые в арифметическом пространстве, разные способы их задания

Рассмотрим теперь кривые в арифметическом пространстве  $X = \mathbb{R}^n$ . Пусть сначала  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — параметрическая кривая,  $t$  — стандартная координата на промежутке  $I$ , а  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\gamma$  записывается в этих координатах в виде упорядоченного набора  $(x^1(t), \dots, x^n(t))$  функций, причем непрерывность (гладкость) этих функций равносильна непрерывности (гладкости) отображения  $\gamma$ . В дальнейшем, представление кривой  $\gamma$  в виде  $n$  таких функций  $x^i(t)$  будем называть *координатной записью кривой*  $\gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — гладкое отображение,  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — ее координатная запись, тогда в каждой точке  $\gamma(t)$  определен *вектор скорости*  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$ . Точка гладкой параметрической кривой называется *особой*, если в ней вектор скорости равен нулю. Точка, не являющаяся особой, называется *регулярной*. Гладкая кривая, состоящая из одних регулярных точек, также называется *регулярной*. У регулярных кривых уже не может быть изломов.

Напомним, что под *кривыми* мы условились понимать классы эквивалентности параметрических кривых. Рассмотрим кривую в  $\mathbb{R}^n$  и произвольного ее представителя — параметрическую кривую  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Предположим, что отображение  $\gamma$  — гладкое, т.е.  $\gamma$  — гладкая параметрическая кривая.

**Задача 1.14.** Покажите, что

- (1) гладкость отображения  $\gamma$  еще не гарантирует отсутствие “изломов”: так, каждый угол на плоскости можно представить как образ гладкой параметрической кривой (приведите пример параметризации прямого угла, воспользовавшись, например, функциями вида  $e^{-1/t^2}$ , продолженными нулем в точку  $t = 0$ );
- (2) гладкую параметрическую кривую можно сделать негладкой некоторой заменой координат (например, ввести на гладкой кривой, образ которой — угол, натуральную параметризацию, при этом, переход от натурального параметра к исходному можно задать гладкой функцией).

Чтобы не портить гладкость кривой, нам придется ограничить возможные замены параметра. Под *регулярной заменой параметра* будем понимать замену, гладкую вместе со своей обратной. В силу теоремы 56 об обратной функции (см. также замечание 57 из Введения), последнее равносильно неравенству нулю производной функции замены параметра. Две параметрических кривых назовем *регулярно эквивалентными*, если они отличаются друг от друга на регулярную замену параметра. Под *гладкой кривой* будем понимать класс регулярной эквивалентности гладкой параметрической кривой.

**Замечание 1.15.** Отметим, что при регулярной замене тип точки кривой (регулярная или особая) остается неизменным (см. теорему 54 о производной сложной функции). Таким образом, *регулярные замены оставляют регулярные кривые регулярными*.

Регулярные кривые можно задавать не только как классы регулярной эквивалентности, но и другим образом. Приведем еще два способа задания регулярных кривых.

### 1.4.1 Задание кривой в виде графика отображения

Рассмотрим непрерывное отображение  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  и его график

$$\Gamma_f = \left\{ (t, f(t)) : t \in I \right\} \subset I \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

Если  $x^1, \dots, x^{n-1}$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , и отображение  $f$  задается набором непрерывных функций  $(x^1(t), \dots, x^{n-1}(t))$ , то  $\Gamma_f$  можно представить как образ параметрической кривой  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\gamma(t) = (t, x^1(t), \dots, x^{n-1}(t)).$$

График  $\Gamma_f$  будем называть *кривой-графиком*. Отметим, что если отображение  $f$  — гладкое, то соответствующая кривая  $\gamma$  — регулярная, так как  $\dot{\gamma} = (1, \dots)$ .

**Соглашение 1.16.** Так как интересующие нас геометрические свойства не зависят от того, на какое место в правой части предыдущего равенства поставить  $t$ , мы будем также называться *графиком отображения  $f$*  и образ каждого отображения

$$t \mapsto (x^1(t), \dots, x^{i-1}(t), t, x^{i+1}(t), \dots, x^{n-1}(t)).$$

Учитывая соглашение 1.16, мы покажем, что для регулярных кривых в достаточно малых окрестностях их точек верно и обратное.

**Предложение 1.17.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — регулярная кривая и  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — ее координатная запись. Тогда для каждой точки  $t_0 \in I$  существует  $\delta > 0$  такое, что ограничение  $\gamma$  на промежуток  $I' = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$  задается в виде графика некоторого гладкого отображения.

*Доказательство.* Так как  $\dot{\gamma} \neq 0$ , то для некоторого  $i$  имеем  $\dot{x}^i(t_0) \neq 0$ . Так как производная функции  $x^i(t)$  непрерывна, существует  $\delta > 0$  такое, что при всех  $t \in I'$  также выполняется  $\dot{x}^i(t) \neq 0$ . Таким образом, на промежутке  $I'$  функция  $s = x^i(t)$  задает регулярную замену параметра на параметрической кривой  $\gamma: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  (тут формально надо писать  $\gamma|_{I'}$ ). Обозначим обратную функцию через  $t(s)$ , тогда на промежутке  $I'$  рассматриваемая кривая записывается в виде

$$\left( x^1(t(s)), \dots, x^{i-1}(t(s)), s, x^{i+1}(t(s)), \dots, x^n(t(s)) \right),$$

так что является графиком соответствующего гладкого отображения. □

### 1.4.2 Задание кривой в виде неявного отображения

Еще один способ задания кривых использует неявные отображения. Рассмотрим на  $\mathbb{R}^n$  или некотором его открытом подмножестве  $(n-1)$ -у гладкую функцию  $F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^{n-1}(x^1, \dots, x^n)$ , вектор  $c$  из вещественных констант,  $c = (c^1, \dots, c^{n-1})$ , и пусть

$$M = \{ (x^1, \dots, x^n) : F^1(x^1, \dots, x^n) = c^1, \dots, F^{n-1}(x^1, \dots, x^n) = c^{n-1} \}$$

— решение системы уравнений  $\{F^1 = c^1, \dots, F^{n-1} = c^{n-1}\}$ . Предположим, что  $M \neq \emptyset$  и в некоторой точке  $P = (P^1, \dots, P^n)$  выполняются условия теоремы 59 о неявном отображении (см. также замечание 61 из Введения), т.е. ранг матрицы Якоби  $F_x(P) := (F_{x^j}^i(P))$  максимален, и, значит, равен  $n-1$ . Последнее означает, что строки матрицы  $F_x(P)$  линейно независимы, а среди столбцов имеется  $(n-1)$  линейно независимый. Выберем эти столбцы, и пусть остался невыбранным  $j$ -ый столбец,

**Обозначения 1.18.** Для дальнейшего нам будет полезно ввести обозначения, также популярные в тензорном исчислении. Если в последовательности  $(a_1, a_2, \dots)$ , например, в координатной записи вектора, пропущен некоторый элемент, скажем  $a_i$ , то этот факт будем обозначать с помощью “крышки” над этим символом, например,  $(a_1, a_2, \dots, \widehat{a_i}, \dots)$  означает, что  $a_i$  пропущен. Кроме того, для удобства записи координатных подпространств в  $\mathbb{R}^n$ , мы будем рассматривать возрастающие последовательности  $J = (j_1, \dots, j_k)$  индексов  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  и обозначать  $\mathbb{R}_J^n$  координатное подпространство, натянутое на векторы  $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$  стандартного базиса  $\mathbb{R}^n$ .

Положим  $I = (1, \dots, \widehat{j}, \dots, n)$ , и пусть  $\mathbb{R}_I^n$  обозначает соответствующее координатное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , см. обозначения 1.18. По теореме 59 и замечанию 61, существуют  $\delta > 0$  и окрестность  $U^P \subset \mathbb{R}^n$  такие, что  $U^P \cap M$  является графиком отображения  $f: (P^j - \delta, P^j + \delta) \rightarrow \mathbb{R}_I^n$ ,  $f(t) = (x^1(t), \dots, \widehat{x^j(t)}, \dots, x^n(t))$ , и имеет вид

$$U^P \cap M = \left\{ (x^1(t), \dots, x^{j-1}(t), t, x^{j+1}(t), \dots, x^n(t)) : t \in (P^j - \delta, P^j + \delta) \right\}.$$

Как было отмечено выше, множество  $U^P \cap M$  также является образом соответствующей регулярной параметрической кривой

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^{j-1}(t), t, x^{j+1}(t), \dots, x^n(t)).$$

Множество  $U^P \cap M$  будем называть *неявной кривой*.

Отметим, что если ограничить отображения  $F^i$  на окрестность  $U^P$ , то определенная только что неявная кривая  $U^P \cap M$  будет совпадать с полным решением системы  $\{F^1|_{U^P} = c^1, \dots, F^{n-1}|_{U^P} = c^{n-1}\}$ . Это соображение приводит к следующему естественному обобщению. А именно, под *неявной кривой* мы будем понимать полное решение  $M$  системы  $\{F^1 = c^1, \dots, F^{n-1} = c^{n-1}\}$ , где гладкие функции  $F^i$  определены на некотором открытом подмножестве  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , причем во всех точках из  $M$  выполняются условия теоремы о неявном отображении.

Покажем теперь, что кривая-график является также неявной кривой. Пусть кривая задана в виде графика отображения  $f(t) = (f^1(t), \dots, f^{n-1}(t))$ . Положим  $F^i(x^1, \dots, x^n) = x^i - f^i(x^n)$ ,  $c = (0, \dots, 0)$ , тогда график отображения  $f$  совпадает с  $M$  для этих функций  $F^i$  (напомним, что в соответствии с соглашением 1.16, нам не важно, на какое место при определении графика ставится параметр кривой). Более того, первые  $(n-1)$ -ин столбцов матрицы Якоби  $F_x$  формируют единичную матрицу, поэтому ранг матрицы  $F_x$  максимален.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.19.** *Каждая регулярная кривая в достаточно малой окрестности любой из своих точек является вложенной и может быть представлена в каждом из трех видов: параметрически, графиком отображения, неявным отображением.*

**Пример 1.20.** Рассмотрим стандартную (единичную с центром в нуле) окружность на плоскости с координатами  $x, y$ . Эта окружность может быть задана

- параметрически:  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  (локально и глобально);
- неявно:  $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$  (глобально);
- локально в виде графика гладкой функции  $f(t)$ , скажем, при  $t \in (0, \pi)$  положим  $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ , а при  $t \in (\pi, 2\pi)$  возьмем  $f(t) = -\sqrt{1-t^2}$ .

**Задача 1.21.** Выясните, какие из трех представлений кривых могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

**Соглашение 1.22.** В дальнейшем, если не возникает путаницы, мы не будем каждый раз уточнять, какой тип кривой рассматривается: параметрический, график или неявный, и будем говорить просто про кривую. Конкретный выбор представления кривой будет ясен из контекста.

## 1.5 Интегральная формула длины регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим теперь кривые в арифметическом пространстве  $X = \mathbb{R}^n$ . До конца следующих трех разделов мы будем иметь дело исключительно с невырожденными промежутками и невырожденными кривыми, что не станем обговаривать каждый раз.

Выше мы ввели понятие натурального параметра и доказали, что на безостановочной спрямляемой кривой всегда можно ввести натуральный параметр (теорема 1.11).

**Задача 1.23.** Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

Для регулярных кривых натуральный параметр может быть введен более явно, с использованием интегральной формулы длины гладкой кривой.

**Теорема 1.24.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, тогда

$$|\gamma| = \int_I \|\dot{\gamma}\| dt.$$

*Доказательство.* Положим  $\Theta = \Theta(I)$  и разобьем  $\Theta$  на подсемейства  $\Theta(a, b)$ , составленные из всех последовательностей вида  $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ . Ясно, что  $|\gamma|_{[a,b]} = \sup_{\xi \in \Theta(a,b)} L_\gamma(\xi)$ . Таким образом, с учетом аддитивности функционала длины и интеграла, достаточно доказать, что

$$|\gamma|_{[a,b]} = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Итак, будем сразу предполагать, что  $I = [a, b]$ , а  $\Theta$  состоит из всех последовательностей  $\xi = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ . Такие последовательности в матанализе принято называть *разбиениями отрезка*  $[a, b]$ , что мы в дальнейшем и будем делать. Напомним, что для разбиения  $\xi$  определен его *диаметр*:  $\delta(\xi) = \max_k (t_k - t_{k-1})$ . Так как подразбиения не уменьшают величину  $L_\gamma(\xi)$ , имеем  $|\gamma| = \lim_{\delta(\xi) \rightarrow 0} L_\gamma(\xi)$ .

Оценим  $L_\gamma(\xi)$ . По теореме Лагранжа о среднем значении,  $x^i(t_k) - x^i(t_{k-1}) = \dot{x}^i(\eta_k^i)(t_k - t_{k-1})$ , где  $t_{k-1} < \eta_k^i < t_k$ . Таким образом,

$$L_\gamma(\xi) = \sum_{k=1}^m |\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)| = \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n [\dot{x}^i(\eta_k^i)]^2} (t_k - t_{k-1}),$$

и, значит,

$$|\gamma| = \lim_{\delta(\xi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n [\dot{x}^i(\eta_k^i)]^2} (t_k - t_{k-1}).$$

С другой стороны,

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \lim_{\delta(\xi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n [\dot{x}^i(\eta_k)]^2} (t_k - t_{k-1}),$$

где  $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$ . Заметим, что

$$\dot{x}^i(\eta_k^i) - \dot{x}^i(\eta_k) = o(1) \text{ при } \delta(\xi) \rightarrow 0.$$

Стандартными приемами матанализа показываем (проделайте это), что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n [\dot{x}^i(\eta_k^i)]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n [\dot{x}^i(\eta_k)]^2} = o(1) \text{ при } \delta(\xi) \rightarrow 0$$

равномерно по  $k$ , откуда и вытекает требуемое.  $\square$

**Задача 1.25.** Постройте пример неспрямляемой параметрической кривой  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  такой, что ограничение  $\gamma$  на  $(0, 1]$  является гладкой спрямляемой параметрической кривой.

**Задача 1.26.** Пусть параметрическая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая. Покажите, что отображение  $\gamma$  — липшицево и, значит,  $\gamma$  — спрямляемая кривая. Постройте пример гладкой параметрической кривой, не являющейся липшицевой. Может ли гладкая спрямляемая параметрическая кривая не быть липшицевой?

Из теоремы 1.24 теперь легко доказывается существование натурального параметра на регулярной кривой. А именно, если  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — параметрическая кривая,  $s$  координата на промежутке  $I$ , то условие того, что параметр  $s$  натуральный, выглядит так: для любых  $s_1, s_2 \in I$ ,  $s_1 \leq s_2$ , выполняется

$$\int_{s_1}^{s_2} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = s_2 - s_1.$$

Дифференцируя предыдущее равенство по  $s_2$ , получаем  $\|\dot{\gamma}(s_2)\| = 1$ . Таким образом, из натуральности параметра вытекает, что длина вектора скорости кривой равна 1. Легко видеть, что и обратное утверждение тоже имеет место. Таким образом, мы доказали следующий результат.

**Предложение 1.27.** *Параметр  $s$  на регулярной кривой  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^n$  натуральный, если и только если  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$  при всех  $s$ .*

Предложение 1.27 мгновенно приводит к уравнению, позволяющему найти натуральный параметр.

Пусть  $t$  — произвольный параметр на регулярной кривой, а  $s$  — натуральный. Тогда, по теореме о дифференцировании сложной функции,  $1 = \|\dot{\gamma}_s\| = \|\dot{\gamma}_t\| |t_s|$ . По теореме о производной обратной функции, имеем  $t_s = 1/s_t$ , откуда  $s_t = \|\dot{\gamma}_t\|$ , так что  $s = \pm \int \|\dot{\gamma}_t(\tau)\| d\tau$ .

**Предложение 1.28.** *Пусть  $\gamma(t)$  — регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , тогда все натуральные параметры  $s$  находятся из формулы  $s = \pm \int \|\dot{\gamma}_t(\tau)\| d\tau$ , в частности, они отличаются друг от друга на замену вида  $s \mapsto \pm s + c$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .*

## Упражнения к главе 1

**Упражнение 1.1.** Постройте непрерывную кривую, проходящую через все точки квадрата.

**Упражнение 1.2.** Постройте на плоскости гладкую параметрическую кривую, образ которой — прямой угол.

**Упражнение 1.3.** Постройте пример неодноточечного линейно связного метрического пространства, в котором нет ни одной невырожденной спрямляемой кривой.

**Упражнение 1.4.** Выясните, какие из трех представлений кривых (параметрическое, графиком отображения, неявным отображением) могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

**Упражнение 1.5.** Покажите, что каждая регулярная кривая является безостановочной, в частности, на ней всегда можно ввести натуральную параметризацию.

**Упражнение 1.6.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $\gamma$  — кривая в  $X$ , и точки  $x, y \in X$  лежат на  $\gamma$ . Покажите, что  $|\gamma| \geq |xy|$ .

**Упражнение 1.7.** Докажите пункты (1), (3) и (4) теоремы 1.6.

**Упражнение 1.8.** Пусть параметрическая кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая. Покажите, что отображение  $\gamma$  — липшицево и, значит,  $\gamma$  — спрямляемая кривая. Постройте пример гладкой параметрической кривой, не являющейся липшицевой. Может ли гладкая спрямляемая параметрическая кривая не быть липшицевой?

**Упражнение 1.9.** Постройте пример неспрямляемой параметрической кривой  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  такой, что ограничение  $\gamma$  на  $(0, 1]$  является гладкой спрямляемой параметрической кривой.

**Упражнение 1.10.** Введите натуральный параметр на следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами  $x, y$  или в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x, y, z$ :

(1) на отрезке прямой  $ax + by + c = 0$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ ;

(2) на дуге окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r > 0$ ;

(3) на графике функции  $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ ,  $a > 0$ , задающей кривую, по которой прогибается тяжелая цепь (кривая называется *цепной линией*);

(4) на винтовой линии  $(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$ .

**Упражнение 1.11.** Круг  $K$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  “катится без проскальзывания”

(1) по прямой;

(2) по окружности снаружи круга, ограниченного этой окружностью;

(3) по окружности внутри круга, ограниченного этой окружностью.

Точка  $M$  жестко связана с кругом  $K$  (она может лежать вне круга). Задайте траекторию движения точки  $M$  параметрически. Изобразите соответствующие кривые. Напишите компьютерную программу (например, в пакете Математика), которая рисует эти кривые в зависимости от параметров задачи.

## Лекция 2

# Кривизны кривых

**План.**  $p$ -регулярные кривые, бирегулярные кривые, базис Френе для  $(n-1)$ -регулярной кривой в  $\mathbb{R}^n$ , формулы Френе, явный вид кривизн кривой в  $\mathbb{R}^n$ , кривизны кривой в  $\mathbb{R}^n$  в произвольной параметризации, сохранение кривизн при аффинных преобразованиях, выражение кривизн через коэффициенты ортогонализации, кривые на плоскости: кривизна и ориентированная кривизна, главная нормаль, ориентированные и неориентированные формулы Френе; кривые в трехмерном пространстве: главная нормаль и бинормаль, кривизна и кручение, формулы Френе; вывод стандартных формул кривизны и ориентированной кривизны плоских кривых, а также кривизны и кручения кривых в трехмерном пространстве из общих формул Френе.

Чтобы охарактеризовать изменение формы кривой, мы введем в рассмотрение конечный набор функций и приведем условия, гарантирующие, что эти функции определяют форму кривой однозначно.

### 2.1 Формулы Френе и кривизны

Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , и  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая, где  $I$  — некоторый промежуток. Мы начнем с доказательства технических результатов.

**Предложение 2.1.** Пусть  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкие отображения, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает стандартное скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle \xi(t), \eta(t) \rangle' = \langle \dot{\xi}(t), \eta(t) \rangle + \langle \xi(t), \dot{\eta}(t) \rangle.$$

*Доказательство.* Распишите это скалярное произведение в координатах и продифференцируйте по правилу Лейбница.  $\square$

**Предложение 2.2.** Пусть  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение, причем величина  $\|\xi(t)\|$  постоянна. Тогда при каждом  $t$  векторы  $\xi(t)$  и  $\dot{\xi}(t)$  ортогональны.

*Доказательство.* Используя предложение 2.1, продифференцируем уравнение  $\langle \xi(t), \xi(t) \rangle = \text{const}$  и получим

$$2\langle \dot{\xi}(t), \xi(t) \rangle = 0,$$

что и требовалось.  $\square$

Далее, для гладкой кривой  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $1 \leq p \leq n$ , будем говорить, что  $\gamma$  является  $p$ -регулярной в точке  $t$ , если векторы

$$\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(p)}(t)$$

линейно независимы.

**Задача 2.3.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая кривая.

- (1) Покажите, что свойство кривой  $\gamma$  быть  $p$ -регулярной не зависит от параметризации (напомним, что для гладких кривых мы рассматриваем только регулярные замены параметра).
- (2) Докажите, что если кривая  $\gamma$  является  $p$ -регулярной в точке  $t$ , то она также  $p$ -регулярна в достаточно малой окрестности точки  $t$ .

Отметим, что при  $p = 1$  кривая просто регулярна, а при  $p = 2$  кривая также называется *бирегулярной*.

Если кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, то применим ортогонализацию Грама–Шмидта к линейно независимым векторам  $\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  и построим ортонормальную систему векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ . Дополним эту систему вектором  $\nu_n$  до положительно ориентированного ортонормального базиса пространства  $\mathbb{R}^n$ . Полученный базис называется *базисом Френе*.

**Задача 2.4.** Проверьте, что базис Френе не меняется при замене параметризации, сохраняющей направление движения.

Выясним, как раскладываются скорости  $\dot{\nu}_p$  изменения векторов  $\nu_p$  базиса Френе по этому базису. Положим  $\Gamma_{i_1 \dots i_p} = (\gamma^{(i_1)}, \dots, \gamma^{(i_p)})$ , так что если кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, все  $i_q$  различны и не превосходят  $n - 1$ , то  $\Gamma_{i_1 \dots i_p}$  — невырожденный  $p$ -параллелепипед, и для него определен объем  $\text{vol}(\Gamma_{i_1 \dots i_p})$ , см. раздел 6 введения. Напомним, что в разделе 7 введения мы определили  $\text{vol}$  также для “пустого параллелепипеда”, положив  $\text{vol}(\emptyset) = 1$ . Кроме того, мы выберем стандартную ориентацию  $\mathbb{R}^n$  в качестве положительной, тогда также определен ориентированный объем  $\text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})$ . Отметим, что  $n$ -параллелепипед  $\Gamma_{1 \dots n}$  может быть вырожденным, так как мы не предполагаем, что кривая  $\gamma$  является  $n$ -регулярной, ограничиваясь  $(n - 1)$ -регулярностью. Таким образом,  $\text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})$  может принимать как нулевое, так и отрицательные значения.

**Теорема 2.5** (Формулы Френе). Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольная  $(n - 1)$ -регулярная кривая, тогда

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2, \\ \dot{\nu}_2 = -k_1 \nu_1 + k_2 \nu_3, \\ \dots \dots \dots \\ \dot{\nu}_{n-1} = -k_{n-2} \nu_{n-2} + k_{n-1} \nu_n, \\ \dot{\nu}_n = -k_{n-1} \nu_{n-1}, \end{cases}$$

где

$$(2.2) \quad k_p = \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Gamma_{1 \dots p-1}) \text{vol}(\Gamma_{1 \dots p+1})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1 \dots p})} & \text{при } 1 \leq p \leq n - 2, \\ \frac{\text{vol}(\Gamma_{1 \dots n-2}) \text{vol}_0(\Gamma_{1 \dots n})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1 \dots n-1})} & \text{при } p = n - 1, \end{cases}$$

в частности, все  $k_1, \dots, k_{n-2}$  — положительные функции, а  $k_{n-1}$  может принимать как отрицательные значения, так и быть равной нулю.

*Доказательство.* По определению ортогонализации,  $\nu_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$  и, значит,  $\dot{\nu}_1$  является линейной комбинацией  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ , а, поэтому, также является линейной комбинацией  $\nu_1$  и  $\nu_2$  (вспомните определение ортогонализации Грама–Шмидта). Так как  $\|\nu_1\| = 1$ , то, по предложению 2.2, имеем  $\dot{\nu}_1 \perp \nu_1$ , так что  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , где  $k_1$  — некоторый коэффициент (функция параметра кривой  $\gamma$ ).

Пусть теперь  $1 < p < n - 1$ . По определению процесса ортогонализации, вектор  $\nu_p$  является линейной комбинацией векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$  с коэффициентами — функциями параметра кривой  $\gamma$ , поэтому  $\dot{\nu}_p$  — это аналогичная линейная комбинация векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p+1)}$ . Так как линейная оболочка векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p+1)}$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{p+1}$ , то, тем самым,  $\dot{\nu}_p$  — линейная комбинация векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{p+1}$ .

Далее, так как  $\langle \nu_p, \nu_i \rangle = 0$  при  $i < p$ , то

$$0 = \langle \nu_p, \nu_i \rangle' = \langle \dot{\nu}_p, \nu_i \rangle + \langle \nu_p, \dot{\nu}_i \rangle.$$

Так как  $\dot{\nu}_i$  является линейной комбинацией векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{i+1}$ , а векторы  $\nu_j$  ортогональны, то при  $i \leq p - 2$  выполняется  $\langle \nu_p, \dot{\nu}_i \rangle = 0$ , откуда, при таких  $i$ , имеем  $\langle \dot{\nu}_p, \nu_i \rangle = 0$ , т.е.  $\dot{\nu}_p$  ортогонален всем  $\nu_i$  при  $i \leq p - 2$ . Добавим сюда, что, в силу  $\|\nu_p\| = 1$  и предложения 2.2, векторы  $\dot{\nu}_p$  и  $\nu_p$  ортогональны. Итак, при  $1 < p < n$  вектор  $\dot{\nu}_p$  является линейной комбинацией  $\nu_{p-1}$  и  $\nu_{p+1}$ . Положим  $\dot{\nu}_p = a_p \nu_{p-1} + k_p \nu_{p+1}$ . Отметим, что это выражение превращается в полученное выше равенство  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , если положить  $a_1 = 0$  и  $\nu_0 = 0$ , что мы и сделаем.

Продифференцируем теперь равенство  $\langle \nu_{p-1}, \nu_p \rangle = 0$  и воспользуемся предыдущими результатами. Имеем

$$0 = \langle \dot{\nu}_{p-1}, \nu_p \rangle + \langle \nu_{p-1}, \dot{\nu}_p \rangle = \langle a_{p-1} \nu_{p-2} + k_{p-1} \nu_p, \nu_p \rangle + \langle \nu_{p-1}, a_p \nu_{p-1} + k_p \nu_{p+1} \rangle = k_{p-1} + a_p = 0,$$

откуда  $a_p = -k_p$ .

Пусть  $p = n - 1$ . Разложим  $\dot{\nu}_{n-1}$  по базису  $\nu_1, \dots, \nu_n$ . Как и выше, доказываем, что  $\dot{\nu}_{n-1} = -k_{n-2}\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n$ . Вычислим теперь  $\dot{\nu}_n$ . Снова  $\dot{\nu}_n = a_n\nu_{n-1}$ , откуда

$$0 = \langle \nu_n, \nu_{n-1} \rangle' = \langle \dot{\nu}_n, \nu_{n-1} \rangle + \langle \nu_n, \dot{\nu}_{n-1} \rangle = a_n + \langle \nu_n, -k_{n-2}\nu_{n-2} + k_{n-1}\nu_n \rangle = a_n + k_{n-1},$$

поэтому  $a_n = -k_{n-1}$ , и мы опять получаем формулы (2.1).

Найдем теперь все  $k_p$ . Предположим сначала, что все векторы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n)}$  линейно независимы. Заметим, что вектор  $\nu_n$  совпадает с последним вектором ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n)}$ , если эта система положительно ориентирована. В противном случае, направление вектора  $\nu_n$  противоположно последнему вектору ортогонализации. Отсюда и из замечания 16 вытекает, что при всех  $1 \leq p \leq n$  выполняется

$$(2.3) \quad \gamma^{(p)} = \alpha_p \nu_p + \dots, \quad \text{где } \alpha_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1})}, \quad \text{при } p < n, \text{ и } \alpha_n = \frac{\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-1})},$$

$$(2.4) \quad \nu_p = \beta_p \gamma^{(p)} + \dots, \quad \text{где } \beta_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1})}{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p})} \quad \text{при } p < n, \text{ и } \beta_p = \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-1})}{\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})};$$

в первой формуле “...” обозначает линейную комбинацию  $\nu_q$  с  $q < p$ , а, во второй — линейную комбинация  $\gamma^{(q)}$  с  $q < p$ .

Дифференцируя равенство (2.4) и подставляя в правую часть выражения для всех  $\gamma^{(q)}$  из равенства (2.3), получаем

$$\dot{\nu}_p = \beta_p \gamma^{(p+1)} + \dots = \beta_p \alpha_{p+1} \nu_{p+1} + \dots,$$

где последнее ... обозначает линейную комбинацию  $\nu_q$  с  $q < p + 1$ . Следовательно,

$$k_p = \langle \dot{\nu}_p, \nu_{p+1} \rangle = \beta_p \alpha_{p+1},$$

откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь вектор  $\gamma^{(n)}$  линейно зависим с  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$ . Тогда  $\dot{\nu}_{n-1}$  лежит в линейной оболочке векторов  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ , поэтому  $k_{n-1} = 0$ , и этот  $k_{n-1}$  удовлетворяет формуле (2.2), так как в этом случае  $n$ -параллелепипед  $\Gamma_{1\dots n}$  вырожден и, по определению,  $\text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n}) = 0$ . Все остальные  $k_p$  вычисляются точно так же.  $\square$

В полученных формулах (2.1) и (2.2) коэффициенты  $k_p$  зависят от параметризации. Чтобы получить характеристики кривой, из всех параметризаций выбирают некоторый подкласс, для которого все  $k_p$  одни и те же. Традиционно в качестве такого подкласса берут семейство натуральных параметризаций, сохраняющих направление движения. По предложению 1.28, все такие параметризации отличаются сдвигом на константу, а такие замены не меняют производные, поэтому все  $k_p$  сохраняются. Более того, все  $k_p$  при  $p < n$  также сохраняют свои значения при замене на натуральную параметризацию, обращающую направление движения.

**Задача 2.6.** Выясните, что происходит с  $k_{n-1}$  при изменении направления движения на противоположное.

**Определение 2.7.** Величина  $k_p$ , вычисленная для натурально параметризованной  $(n - 1)$ -регулярной кривой  $\gamma$ , называется  $p$ -ой кривизной кривой  $\gamma$ .

Отметим, что в теореме 2.5 мы провели вычисления для произвольной параметризации и для коэффициентов  $k_p$  получили формулы одного и того же вида. По задаче 2.4, базис Френе не зависит от выбора параметризации, сохраняющей направление движения. А что происходит с производными векторов базиса Френе? Пусть  $s$  — натуральный параметр,  $t$  — произвольный, причем  $s_t > 0$ , тогда  $\frac{d\nu_p}{dt} = \frac{d\nu_p}{ds} s_t$ , откуда выражение для  $\frac{d\nu_p}{dt}$  получается из формулы Френе для  $\frac{d\nu_p}{ds}$  делением всех коэффициентов на  $s_t = \|\dot{\gamma}_t\|$ . Итак, мы приходим к следующему результату.

**Следствие 2.8** (Формула кривизн кривой в произвольной параметризации). Пусть  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , — произвольная  $(n - 1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$  и  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — ее кривизны (коэффициенты в формулах Френе кривой  $\gamma$ , параметризованной натурально с сохранением направления). Пусть  $\Gamma_{1\dots p}$  обозначает  $p$ -параллелепипед  $(\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)})$ , где производные берутся относительно исходного параметра  $t$ . Тогда

$$(2.5) \quad k_p = \begin{cases} \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots p-1}) \text{vol}(\Gamma_{1\dots p+1})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1\dots p}) \|\dot{\gamma}\|} & \text{при } 1 \leq p \leq n - 2, \\ \frac{\text{vol}(\Gamma_{1\dots n-2}) \text{vol}_0(\Gamma_{1\dots n})}{\text{vol}^2(\Gamma_{1\dots n-1}) \|\dot{\gamma}\|} & \text{при } p = n - 1, \end{cases}$$

**Следствие 2.9.** Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — аффинное преобразование, равное композиции сохраняющего ориентацию ортогонального преобразования  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и некоторого сдвига  $x \mapsto x + \tau$ , где  $x, \tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $A$  не меняет кривизны каждой  $(n-1)$ -регулярной кривой в  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть  $\gamma(s)$  — натурально параметризованная  $(n-1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ . Так как  $F$  — аффинное отображение, то  $(F\gamma)^{(k)} = A\gamma^{(k)}$ . С другой стороны, ортогональное преобразование не меняет как длины векторов, так и объемы  $p$ -параллелепипедов, что легко доказать индукцией по  $p$  (сделайте это). Кроме того, если преобразование  $A$  сохраняет ориентацию, то оно также не меняет и ориентированные объемы  $n$ -параллелепипедов. Осталось заметить, что формулы (2.5) выражают кривизны исключительно через объемы  $p$ -параллелепипедов и ориентированные объемы  $n$ -параллелепипедов от производных  $\gamma^{(k)}$ .  $\square$

Отметим, что на практике вычисление кривизн кривой  $\gamma$  проще проводить во время ортогонализации системы векторов из производных  $\gamma^{(i)}$ . Следующий результат вытекает из вычислений, сделанных в доказательстве теоремы 2.5.

**Следствие 2.10.** Пусть  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольная  $(n-1)$ -регулярная кривая,  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — ее базис Френе, а  $k_1, \dots, k_{n-1}$  — кривизны. Пусть, как и в доказательстве теоремы,  $\gamma^{(p)} = \alpha_p \nu_p + \dots$ , или, другими словами,  $\alpha_p = \langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle$ , тогда

$$k_p = \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p \alpha_1} = \frac{\langle \gamma^{(p+1)}, \nu_{p+1} \rangle}{\langle \gamma^{(p)}, \nu_p \rangle \|\dot{\gamma}\|}.$$

Обсудим, как выглядят некоторые кривизны и векторы базиса Френе, а заодно приведем формулы для кривых на плоскости и в трехмерном пространстве. Так как для натурального параметра имеем  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ , то  $\nu_1 = \dot{\gamma}$ . Выбор вектора  $\nu_2$  отличается для случаев  $n = 2$  и  $n > 2$ . Если  $n > 2$ , то, в силу  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ , имеем  $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ , поэтому  $\nu_2 = \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$  и, таким образом,  $k_1 = \|\ddot{\gamma}\|$ .

Если же  $n = 2$ , то, в соответствии с нашей договоренностью о выборе вектора  $\nu_n$ , вектор  $\nu_2$  выбирается так, чтобы пара  $\nu_1, \nu_2$  была положительно ориентированным ортонормальным базисом. Таким образом, для определения вектора  $\nu_2$  не требуется выполнение условия  $k_1 \neq 0$ , равносильное 2-регулярности кривой. Если  $k_1 \neq 0$ , то, в зависимости от ориентации ортогонального базиса  $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ , имеем  $\nu_2 = \pm \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$ . В этом случае, вектор  $\nu := \ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\|$  традиционно называется *главной нормалью*, а величина  $k = \|\ddot{\gamma}\|$  — кривизной кривой, в отличие от величины  $k_1$ , которая называется *ориентированной кривизной*. Формулы Френе из теоремы 2.5 выглядят так:  $\dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ ,  $\dot{\nu}_2 = -k_1 \nu_1$  и называются *ориентированными формулами Френе*. В отличие от них, (неориентированные) формулы Френе связывают кривизну  $k$ , главную нормаль  $\nu$  и скорость  $\tau = \dot{\gamma}$ . Они выглядят абсолютно аналогично ориентированным формулам Френе:  $\dot{\tau} = k\nu$ ,  $\dot{\nu} = -k\tau$ , однако они имеют место только для бигулярных кривых (ориентированные формулы Френе обслуживают более широкий класс регулярных кривых).

Выпишем теперь, как выглядит ориентированная кривизна  $k_1$  и обычная кривизна  $k$  для плоской кривой. Имеем

$$(2.6) \quad k_1 = \frac{\text{vol}_0(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \text{vol}(\emptyset)}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad k = \frac{\text{vol}(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \text{vol}(\emptyset)}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]|}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где через  $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$  мы обозначили площадь ориентированного параллелограмма, натянутого на векторы  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ , т.е. определитель матрицы, столбцы которой — координаты этих векторов. В явном виде, если  $x, y$  — координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , то

$$(2.7) \quad k_1 = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Для трехмерного случая имеем две  $k_i$ : первая из них,  $k_1 = k = \|\ddot{\gamma}\|$ , называется *кривизной* (теперь тут нет двух типов кривизны), а вторая,  $k_2$ , обозначается  $\varkappa$  и называется *кручением*. Как и в двумерном случае,  $\tau := \nu_1 = \dot{\gamma}$  — скорость;  $\nu := \nu_2 = \ddot{\gamma}/k$  — главная нормаль; третий вектор  $\nu_3$ , который обозначается  $\beta$  и называется *бинормалью*, дополняет  $\tau$  и  $\nu$  до положительно ориентированного ортонормированного базиса, поэтому  $\beta = [\tau, \nu]$ , где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Формулы Френе в трехмерном случае даются теоремой 2.5 и имеют вид:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dot{\tau} = k\nu, \\ \dot{\nu} = -k\tau + \varkappa\beta, \\ \dot{\beta} = -\varkappa\nu. \end{cases}$$

Таким образом, кручение можно вычислить по формуле  $\varkappa = -\langle \dot{\beta}, \nu \rangle$ .

Снова воспользуемся следствием 2.8 и запишем, как выглядят кривизна и кручение произвольно параметризованной бигулярной кривой в трехмерном пространстве. Кривизна записывается почти такой же формулой

$$(2.9) \quad k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где  $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]$  теперь — векторное произведение векторов  $\dot{\gamma}$  и  $\ddot{\gamma}$ . Выпишем кручение:

$$(2.10) \quad \varkappa = \frac{\text{vol}_0(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}') \text{vol}(\dot{\gamma})}{\text{vol}^2(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) \|\dot{\gamma}\|} = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}' \rangle}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|^2},$$

где через  $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}' \rangle$  обозначено смешанное произведение векторов, т.е. определитель матрицы, столбцами которой являются координаты этих векторов.

## Упражнения к главе 2

**Упражнение 2.1.** Вычислите кривизну, ориентированную кривизну и базис Френе для плоских регулярных кривых, заданных

- (1) графиком функции  $y = f(x)$ ;
- (2) неявной функцией  $F(x, y) = c$ .

**Упражнение 2.2.** Для следующих кривых, заданных на плоскости с декартовыми координатами  $x, y$ , вычислите кривизну, ориентированную кривизну и найдите базис Френе:

- (1) для отрезка прямой  $ax + by + c = 0$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ ;
- (2) для дуги окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r > 0$ ;
- (3) для графика функции  $y = \operatorname{ch}(x)$ ;
- (4) для эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

**Упражнение 2.3.** Для следующих кривых, заданных в трехмерном пространстве с декартовыми координатами  $x, y, z$ , вычислите кривизну, кручение, и найдите базис Френе:

- (1) для отрезка прямой;
- (2) для винтовой линии  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0$ ;
- (3) для кривой  $\gamma(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$ .

**Упражнение 2.4.** Рассмотрим следующую кривую в четырехмерном пространстве:

$$\gamma(t) = \left( \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right).$$

Вычислите базис Френе и кривизны кривой  $\gamma$ .

**Упражнение 2.5.** Для кривых в трехмерном пространстве, докажите, что

- (1) регулярная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю;
- (2) бирегулярная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Выясните, верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой  $\gamma$  выполняется  $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$ , то  $\gamma$  лежит в некоторой плоскости?

**Упражнение 2.6.** Покажите, что  $(n-1)$ -регулярная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , у которой  $k_{n-1} = 0$ , лежит в  $(n-1)$ -мерном аффинном пространстве.

**Упражнение 2.7.** Покажите, что натурально параметризованная кривая в  $\mathbb{R}^n$ , у которой тождественно равна нулю некоторая производная порядка  $k > 1$ , является отрезком прямой.

**Упражнение 2.8.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^3$  имеет постоянную кривизну  $k > 0$ , если и только если существует натурально параметризованная кривая  $\tau(\sigma)$  на единичной сфере и точка  $A \in \mathbb{R}^3$ , для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{k} \int_{ka}^{ks} \tau d\sigma.$$

**Упражнение 2.9.** Докажите, что бирегулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^3$  имеет постоянное кручение  $\varkappa \neq 0$ , если и только если на единичной сфере существует натурально параметризованная кривая  $\beta(\sigma)$  ненулевой геодезической кривизны (проекция вектора ускорения  $\beta_{\sigma\sigma}$  на касательную плоскость к сфере всюду отлична от нуля), а в пространстве — точка  $A \in \mathbb{R}^3$ , для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{\varkappa} \int_{\varkappa a}^{\varkappa s} [\beta, \beta_\sigma] d\sigma.$$

**Упражнение 2.10.** Докажите, что кривизна биегулярной кривой в  $\mathbb{R}^3$  пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор  $u$  такой, что  $\langle u, \tau \rangle = \text{const} \neq 0$ .

**Упражнение 2.11.** Докажите, что натурально параметризованная биегулярная кривая в  $\mathbb{R}^3$  с кривизной  $k$ , для которой  $\dot{k} \neq 0$ , и с ненулевым кручением  $\varkappa$  лежит на сфере радиуса  $R$  тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{\dot{k}^2}{(\varkappa k)^2} \right).$$

Приведите пример биегулярной натурально параметризованной кривой, не лежащей на сфере, для которой выполнены все условия задачи, кроме  $\dot{k} \neq 0$ .

## Лекция 3

# Восстановление кривых по кривизнам. Геометрия плоских кривых

**План.** Восстановление кривой по кривизнам, натуральные уравнения, восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне, классификация плоских кривых постоянной кривизны, геометрия плоских кривых: радиус кривизны, ориентированный радиус кривизны, центр кривизны, эволюта или каустика, особенности эволюты, эвольвента, восстановление исходной кривой из ее эволюты; порядок касания кривых, окружность кривизны или соприкасающаяся окружность, порядок касания кривой и окружности кривизны, огибающая семейства плоских кривых, задание огибающей системой уравнений.

### 3.1 Восстановление кривой по кривизнам

Оказывается, кривизны кривой позволяют однозначно, с точностью до движения, сохраняющего ориентацию, восстановить кривую. Более того, нет никаких дополнительных ограничений на возможные кривизны кривых. Эти утверждения сформулированы в следующей теореме.

**Теорема 3.1.** Пусть  $f_1(s), \dots, f_{n-1}(s)$  — гладкие функции, определенные на промежутке  $I$ , и все из них, кроме, возможно,  $f_{n-1}(s)$  — положительны. Тогда существует и единственна, с точностью до движения пространства, сохраняющего ориентацию,  $(n-1)$ -регулярная кривая  $\gamma(s)$  в  $\mathbb{R}^n$ , для которой  $s$  — натуральный параметр, а функция  $f_p(s)$  равна  $p$ -ой кривизне при всех  $p$ .

*Доказательство.* Подставим в уравнения Френе (2.1) функции  $f_p$  вместо кривизн  $k_p$ . Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на координаты векторов  $\nu_p$  (всего  $n^2$  уравнений). По теореме 63 (существования и единственности), эта система имеет единственное решение  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  (в смысле цитируемой теоремы) для каждого начального условия, в качестве которого мы возьмем произвольный положительно ориентированный ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$ , т.е.  $\nu_p(s_0) = e_p$  для некоторого  $s_0 \in I$  и каждого  $p = 1, \dots, n$ . Кроме того, рассматриваемая система уравнений линейна с коэффициентами, зависящими от “времени”  $s$ , и на каждом отрезке  $J \subset I$ , содержащем  $s_0$ , все функции  $f_p(s)$  ограничены, так что и линейные операторы, задающие эту систему, также ограничены в совокупности на каждом  $J$ , поэтому применима теорема 66 (о продолжении решений), гарантирующая, что каждое решение продолжается на каждый отрезок  $J$ . Тем самым, мы можем продолжить решение до любого  $s' \in I$ , и все эти продолжения совпадают на общей части. Тем самым, мы показали, что решение можно продолжить на весь промежуток  $I$ .

Для упрощения дальнейших вычислений, нам будет полезно привести уравнения системы (2.1) к одному и тому же виду, положив  $f_0(s) = f_n(s) = 0$  и  $\nu_0 = \nu_{n+1} = 0$ , тогда все уравнения из этой системы будут выглядеть так:  $\dot{\nu}_p = -f_{p-1}\nu_{p-1} + f_p\nu_{p+1}$ .

**Лемма 3.2.** При каждом  $s \in I$  векторы  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  образуют положительно ориентированный ортонормальный базис.

*Доказательство.* Определим функции  $a_{ij}(s) = \langle \nu_i(s), \nu_j(s) \rangle$ , тогда  $\dot{a}_{ij}$  выражается через функции  $f_k$  и другие  $a_{pq}$  так:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{a}_{ij} &= \langle \dot{\nu}_i, \nu_j \rangle + \langle \nu_i, \dot{\nu}_j \rangle = \langle -f_{i-1}\nu_{i-1} + f_i\nu_{i+1}, \nu_j \rangle + \langle \nu_i, -f_{j-1}\nu_{j-1} + f_j\nu_{j+1} \rangle = \\ &= -f_{i-1}a_{(i-1)j} + f_i a_{(i+1)j} - f_{j-1}a_{i(j-1)} + f_j a_{i(j+1)}. \end{aligned}$$

Тем самым, мы приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на  $a_{ij}$  при  $1 \leq i, j \leq n$  (если одно из  $i, j$  или равно нулю, или равно  $n + 1$ , то соответствующие  $a_{ij}$  равны нулю, и мы не рассматриваем их как переменные). По теореме существования и единственности, а также по теореме о продолжении решений, эти уравнения имеют на всем  $I$  единственное решение с данными начальными условиями. В качестве таких условий возьмем  $a_{ij}(s_0) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Заметим, что функции  $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$  удовлетворяют системе (3.1). Действительно, левая часть уравнений (3.1) всегда равна нулю. Что касается правой части, если  $i$  отлично от  $j - 1$  или  $j + 1$ , то все элементы правой части также равны нулю. Если  $i - 1 = j$  или  $i + 1 = j$ , то правая часть равна соответственно  $-f_{i-1} + f_j = 0$  или  $f_i - f_{j-1} = 0$ . Таким образом,  $a_{ij}(s) = \delta_{ij}$  является единственным решением с данными начальными условиями, поэтому векторы  $\nu_1(s), \dots, \nu_n(s)$  ортонормальны при каждом  $s$ . Положительная ориентированность этих векторов вытекает из их непрерывной зависимости от параметра  $s$  и того, что  $\nu_1(s_0), \dots, \nu_n(s_0)$  — это положительно ориентированный базис  $e_1, \dots, e_n$ .  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Построим кривую  $\gamma(s)$ , выбрав произвольную точку  $P \in \mathbb{R}^n$  и положив  $\gamma(s) = P + \int_{s_0}^s \nu_1(t) dt$  (т.е. решим систему дифференциальных уравнений  $\dot{\gamma} = \nu_1$  с начальным условием  $\gamma(s_0) = P$ ). Так как  $\dot{\gamma} = \nu_1$  — единичный вектор при каждом  $s$ , то параметр  $s$  — натуральный в силу предложения 1.27. Покажем, что  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной,  $f_p$  — кривизны кривой  $\gamma$ , а  $\nu_p$  — векторы базиса Френе кривой  $\gamma$ .

В силу натуральности параметра  $s$ , вектор  $\nu_1$  — первый вектор ортогонализации любой системы векторов, начинающейся с  $\dot{\gamma}$ .

Предположим, что для всех  $q$ ,  $q < p < n$ , мы показали, что векторы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(q)}$  линейно независимы, а  $\nu_1, \dots, \nu_q$  — это векторы ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(q)}$ , в частности,  $\gamma^{(p-1)} = \alpha_{p-1}\nu_{p-1} + \dots$ , где  $\alpha_{p-1} > 0$ . Дифференцируя последнее равенство, получаем  $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1}\dot{\nu}_{p-1} + \dots = \alpha_{p-1}f_{p-1}\nu_p + \dots$ .

Так как  $p < n$ , то  $f_{p-1} > 0$ , поэтому  $\gamma^{(p)}$  линейно независим с  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p-1)}$  и, значит, вся система  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$  линейна независима, причем начальные  $p - 1$  векторов ортогонализации этой системы — это  $\nu_1, \dots, \nu_{p-1}$ . Так как  $\nu_p$  ортогонален всем предыдущим  $\nu_q$ , и  $\gamma^{(p)} = \alpha_{p-1}f_{p-1}\nu_p + \dots$ , где “...” означает линейную комбинацию предыдущих  $\nu_q$ , а коэффициент  $\alpha_{p-1}f_{p-1}$  при  $\nu_p$  — положительный, вектор  $\nu_p$  является  $p$ -ым вектором ортогонализации системы  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(p)}$ .

Пока  $p < n$ , продолжаем эти же рассуждения. В результате мы покажем, что кривая  $(n - 1)$ -регулярна, и векторы  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$  являются результатом ортогонализации системы векторов  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$ . Но тогда  $\nu_n$  автоматически будет последним вектором базиса Френе для кривой  $\gamma$ .

Итак, мы показали, что кривая  $\gamma$  является  $(n - 1)$ -регулярной, и что  $\nu_1, \dots, \nu_n$  — векторы базиса Френе кривой  $\gamma$ . Так как для базиса Френе имеются те же самые разложения производных  $\dot{\nu}_p$  по остальным линейно независимым векторам  $\nu_q$ , то коэффициенты  $f_q$  этого разложения — это кривизны кривой  $\gamma$ .

Докажем единственность решения. Рассмотрим два разных начальных условия, состоящих из начальной точки  $P_i$  и положительно ориентированного ортонормального базиса  $e_{i1}, \dots, e_{in}$ ,  $i = 1, 2$ . В силу сказанного выше, эти начальные условия однозначно задают соответствующие натурально параметризованные кривые  $\gamma_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  с одними и теми же кривизнами, причем  $P_i = \gamma_i(s_0)$  для некоторого  $s_0 \in I$ , а  $e_{i1}, \dots, e_{in}$  — базис Френе кривой  $\gamma_i$  в точке  $s_0$ . Пусть  $F$  — аффинное преобразование с линейной частью  $A$  такое, что  $P_2 = F(P_1)$  и  $Ae_{1j} = e_{2j}$  для всех  $j = 1, \dots, n$ , тогда  $A$  — ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию. По следствию 2.9, отображение  $F$  переводит кривую  $\gamma_1$  в кривую  $F \circ \gamma_1$  с теми же кривизнами, что и  $\gamma_1$ , причем  $(F \circ \gamma_1)(s_0) = P_2$ , а  $e_{21}, \dots, e_{2n}$  — базис Френе кривой  $F \circ \gamma_1$  в точке  $s_0$ . Таким образом, кривые  $\gamma_2$  и  $F \circ \gamma_1$  имеют одни и те же начальные условия и одни и те же кривизны, поэтому, в силу теоремы 63, эти кривые совпадают.  $\square$

*Натуральными уравнениями кривой в пространстве  $\mathbb{R}^n$*  называется система уравнений

$$(3.2) \quad k_1(s) = f_1(s), \dots, k_{n-1}(s) = f_{n-1}(s),$$

где  $f_1, \dots, f_{n-1}$  — гладкие функции, определенные на некотором промежутке  $I$ , причем первые  $(n - 2)$  из них — положительные. *Решением* этой натуральной системы уравнений является  $(n - 1)$ -регулярная натурально параметризованная кривая  $\gamma(s)$ , для которой  $k_i(s)$  — функция  $i$ -ой кривизны. Отметим, что, в силу теоремы 3.1, такая кривая всегда существует и единственна с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.1.1 Восстановление плоской кривой по ориентированной кривизне

Рассмотрим альтернативный способ восстановления плоской регулярной кривой  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , по ориентированной кривизне  $k_1(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр, а  $I$  — промежуток.

Пусть  $\nu_1, \nu_2$  — базис Френе кривой  $\gamma$ , тогда  $\nu_1 = \dot{\gamma}$  — единичный вектор, поэтому  $\nu_1(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ , а  $\nu_2(s) = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$ , так как  $\nu_1, \nu_2$  — положительно ориентированный ортонормированный базис. Отметим, что угол  $\varphi(s)$  определен с точностью до  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 3.3.** Покажите, что функцию  $\varphi(s)$  можно выбрать непрерывно и, значит, гладко зависящей от параметра  $s$ .

По формулам Френе,  $\ddot{\gamma} = \dot{\nu}_1 = k_1 \nu_2$ , откуда

$$(-\sin \varphi, \cos \varphi) \dot{\varphi} = k_1 (-\sin \varphi, \cos \varphi) \Rightarrow \dot{\varphi}(s) = k_1(s) \Rightarrow \varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{s_0}^s k_1(t) dt, \quad s_0 \in I.$$

Пусть  $(x, y)$  — декартовы координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ , тогда

$$\dot{\gamma} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\cos \varphi, \sin \varphi) \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \\ y(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt. \end{cases}$$

В дальнейшем, для краткости, начальные данные  $\varphi(s_0), x(s_0), y(s_0)$  будем обозначать  $\varphi_0, x_0, y_0$  соответственно.

**Задача 3.4.** Покажите, что все решения при фиксированной функции  $k_1(s)$  отличаются на сдвиг, заданный начальными условиями  $(x_0, y_0)$ , и поворот, заданный начальным условием  $\varphi_0$ .

**Пример 3.5.** Опишем все плоские кривые постоянной ориентированной кривизны  $k_1$ . Если  $k_1 = 0$ , то, во введенных выше обозначениях,

$$\varphi(s) = \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + (s - s_0) \cos \varphi_0, \\ y(s) = y_0 + (s - s_0) \sin \varphi_0, \end{cases}$$

так что получаем естественно параметризованную прямую. Напомним, что кривизна, по определению, не зависит от выбора параметризации, так что за одно мы получили и все прямые, получающиеся из приведенных выше заменами параметра. Обратное, у каждой прямой векторы скорости и ускорения коллинеарны, поэтому кривизна равна нулю. Итак, кривые нулевой кривизны — это, в точности, все прямые.

Пусть теперь  $k_1(s) = c \neq 0$ , тогда

$$\varphi(s) = \varphi_0 + c(s - s_0) \Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + \frac{1}{c} \sin(\varphi_0 + c(s - s_0)), \\ y(s) = y_0 - \frac{1}{c} \cos(\varphi_0 + c(s - s_0)). \end{cases}$$

Тем самым, мы получили естественно параметризованную окружность с центром в  $(x_0, y_0)$  и радиусом  $r = 1/|c|$ . При  $c > 0$  движение происходит в положительном направлении, а при  $c < 0$  — в отрицательном. Обратное, каждая окружность имеет постоянную ненулевую ориентированную кривизну (проверьте). Таким образом, кривые постоянной ненулевой ориентированной кривизны — это, в точности, все окружности.

*Обобщенной окружностью* назовем или окружность (возможно, нулевого радиуса), или прямую (окружность бесконечного радиуса). Обобщенную окружность ненулевого радиуса назовем *невырожденной*. В этих терминах, *кривые постоянной (ориентированной) кривизны* — это в точности все невырожденные обобщенные окружности.

**Замечание 3.6.** Описание кривых постоянной (ориентированной) кривизны можно извлечь из теоремы 3.1. Действительно, легко видеть, что кривизна прямой равна нулю, а кривизна окружности радиуса  $r$  равна  $1/r$ , и, в зависимости от направления движения по окружности радиуса  $r$ , ориентированная кривизна будет равна  $1/r$  или  $-1/r$ . Таким образом, все возможные значения постоянной ориентированной кривизны реализуются обобщенными окружностями. Осталось воспользоваться теоремой единственности.

## 3.2 Геометрия плоских кривых

Приведем ряд примеров изучения геометрии кривых на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.2.1 Эволюты и эвольвенты

Напомним, что под *кривизной*  $k$  кривой  $\gamma$  мы понимаем  $|k_1|$ . Точка  $\gamma(t)$  кривой  $\gamma$  называется *точкой спрямления*, если  $k_1(t) = 0$  (равносильно,  $k(t) = 0$ ). Если же  $k_1(t) \neq 0$  (соответственно,  $k(t) \neq 0$ ), то  $\gamma(t)$  назовем *точкой бирегулярности*.

В точке бирегулярности  $\gamma(t)$  определим *радиус кривизны*  $R(t)$ , положив  $R(t) = 1/k(t)$ , и *ориентированный радиус кривизны*  $R_1(t)$  по формуле  $R_1(t) = 1/k_1(t)$ . Если  $\nu_1, \nu_2$  — базис Френе регулярной кривой  $\gamma$ , а  $\nu$  — главная нормаль в точке бирегулярности  $\gamma(t)$ , то имеет место равенство  $k_1\nu_2 = k\nu$  и, как следствие,  $R_1\nu_2 = R\nu$ . *Центром кривизны* регулярной кривой  $\gamma$  в точке бирегулярности  $\gamma(t)$  называется точка  $C(t) = \gamma(t) + R(t)\nu(t) = \gamma(t) + R_1(t)\nu_2(t)$ . Множество всех центров кривизны во всех точках бирегулярности называется *каустикой* или *эволютой* кривой  $\gamma$ .

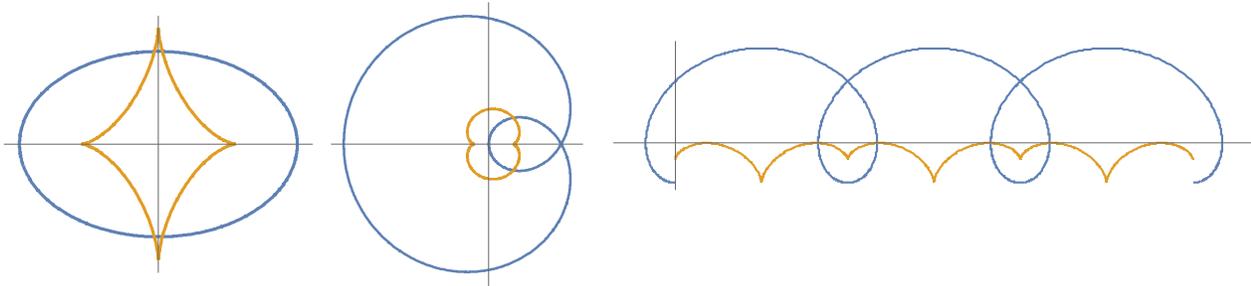


Рис. 3.1: Эволюты (желтые) эллипса, улитки Паскаля и циклоиды (синие).

**Задача 3.7.** Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую эволюты кривых, и постройте эволюты для основных классических кривых.

Пусть  $\gamma$  — регулярная кривая, и  $\nu_1, \nu_2$  — ее базис Френе. *Эквидистантой* или *волновым фронтом* называется кривая  $\gamma(t) + h\nu_2(t)$ , где  $h \in \mathbb{R}$ .

**Задача 3.8.** Покажите, что множество всех особых точек всех волновых фронтов — это, в точности, эволюта кривой.

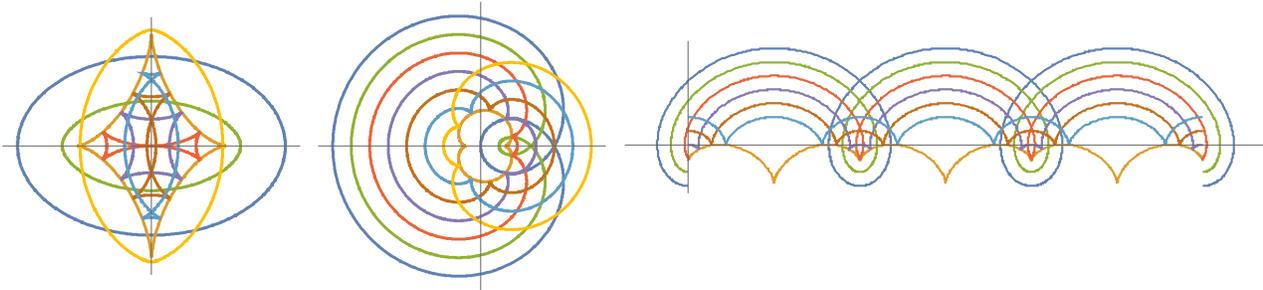


Рис. 3.2: Волновые фронты и эволюты.

**Задача 3.9.** Используя пакет Wolfram Mathematica или любой другой пакет программ, удобный для геометрических исследований, напишите программу, рисующую волновые фронты. Создайте анимацию волновых фронтов на той же картинке, где изображены кривая и эволюта. Наблюдайте, как особенности волнового фронта скользят по эволюте.

Как восстановить исходную кривую по ее эволюте? Для этого определим однопараметрическое семейство кривых, которые строятся по данной кривой  $\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  и называются ее *эвольвентами*. В дальнейшем в

качестве  $\Gamma$  мы возьмем эволюту, которая, вообще говоря, регулярна не везде. Для таких кривых эвольвенты строятся отдельно по каждому фрагменту, который является регулярным во всех своих внутренних точках, и у которого в граничных точках существуют пределы нормированной скорости. Поэтому сразу будем предполагать, что  $\Gamma$  удовлетворяет перечисленным выше условиям на такие фрагменты.

Для наглядности, представим, что на  $\Gamma$  намотана нить, которую мы сматываем с  $\Gamma$ , постоянно держа нить натянутой. Последнее означает, что в каждый момент времени конец нити лежит на касательной в той точке кривой  $\Gamma$ , до которой мы добрались, сматывая нить. Кроме того, то, что мы нить сматываем, означает, что разница расстояний между концами смотанной части нити в два разных промежутка времени равна длине кривой  $\Gamma$  между точками, соответствующими этим временам. Параметром семейства является длина части нити, не намотанной на кривую. Двигаясь по эвольвенте в обратную сторону, мы, наоборот, будем наматывать нить.

Итак, запишем эвольвенты параметрически. Пусть  $h$  — длина ненамотанной нити,  $\tau$  — нормированный вектор скорости кривой  $\Gamma$ , и  $\ell$  — длина кривой  $\Gamma$  от начального положения до текущего, тогда при сматывании нити эвольвента имеет вид  $\delta^h = \Gamma - (h + \ell)\tau$ .

**Задача 3.10.** Покажите, что при наматывании нити эвольвента выглядит так:  $\delta^h = \Gamma + (h - \ell)\tau$ , где  $h$  — начальный запас ненамотанной нити.

Проверим, что часть исходной кривой  $\gamma$  между последовательными критическими точками ориентированной кривизны является эвольвентой соответствующего фрагмента эволюты  $C = \gamma + R_1\nu_2$ . Для начала отметим, что

$$\dot{C} = \dot{\gamma} + \dot{R}_1\nu_2 + R_1\dot{\nu}_2 = \nu_1 + \dot{R}_1\nu_2 - \nu_1 = \dot{R}_1\nu_2.$$

Из приведенной формулы вытекает следующий результат.

**Предложение 3.11.** Точка  $C(s)$  эволюты кривой  $\gamma$  является особой, если и только если в точке  $\gamma(s)$  ориентированная кривизна  $k_1(s)$ , а вместе с ней и ориентированный радиус  $R_1(s)$ , экстремальны, т.е.  $k_1(s) = 0$  и  $\dot{R}_1(s) = 0$ .

Из предложения 3.11 вытекает, что внутри рассматриваемого фрагмента эволюты производная  $\dot{R}_1$  имеет один и тот же знак  $\text{sign } \dot{R}_1$ . Кроме того, из той же формулы видно, что нормированный вектор скорости рассматриваемого фрагмента кривой  $C$  имеет вид  $\tau = (\text{sign } \dot{R}_1)\nu_2$ .

Далее, длина  $\ell$  кривой  $C$  между точками  $C(a)$  и  $C(s)$  равна

$$\int_a^s \|\dot{C}(t)\| dt = \int_a^s |\dot{R}_1(t)| dt = (R_1(s) - R_1(a)) \text{sign } \dot{R}_1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta^h(s) &= C(s) - (h + \ell(s))\tau(s) = \\ &= \gamma(s) + R_1(s)\nu_2(s) - \left( h + (R_1(s) - R_1(a)) \text{sign } \dot{R}_1 \right) (\text{sign } \dot{R}_1)\nu_2 = \\ &= \gamma(s) - (h - R_1(a) \text{sign } \dot{R}_1) (\text{sign } \dot{R}_1). \end{aligned}$$

Осталось положить  $h = R_1(a) \text{sign } \dot{R}_1$ , что и требовалось.

**Задача 3.12.** Подберите  $h$  для наматывания нити на регулярный фрагмент эволюты так, чтобы эвольвента совпала с фрагментом исходной кривой.

Отметим, что, например, восстановление эллипса происходит с чередованием сматывания и наматывания, см. рис. 3.3.

### 3.2.2 Порядок касания кривых

Пусть  $\gamma$  и  $\delta$  — две регулярные кривые в  $\mathbb{R}^n$ , проходящие через одну точку  $P$ . Если при произвольной параметризации векторы скоростей этих кривых не коллинеарны, то говорим, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  лишь с нулевым порядком. Если же скорости коллинеарны, то параметризуем кривые некоторым параметром  $t$  так, чтобы  $P = \gamma(0) = \delta(0)$  и  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\delta}(0)$ . В этом случае будем говорить, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  с первым порядком. Более обще, если для некоторого  $k$  кривые можно параметризовать так, что все производные

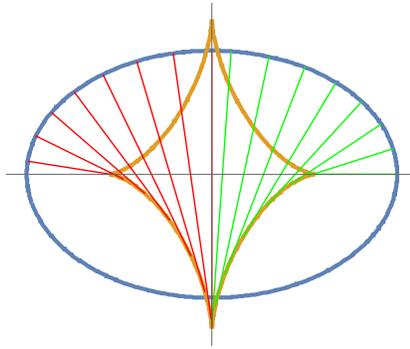


Рис. 3.3: Зеленые отрезки — сматывание, а красные — наматывание.

$\gamma^{(i)}(0)$  и  $\delta^{(i)}(0)$  совпадают при каждом  $i < k$ , то говорим, что кривые  $\gamma$  и  $\delta$  касаются в точке  $P$  с порядком  $k$ . Отметим, что если кривые касаются с  $k$ -ым порядком, то они также касаются и с  $i$ -ым порядком при всех  $i \leq k$ .

Пусть  $\gamma$  — плоская регулярная кривая, проходящая через точку  $P$ , в которой кривизна  $k$  отлична от нуля. Пусть  $R = 1/k$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$  в точке  $P$ , и  $\nu$  — главная нормаль в этой точке, тогда  $C = P + R\nu$  — центр кривизны. Окружность с центром в  $C$  и радиусом  $R$  назовем *окружностью кривизны* или *соприкасающейся окружностью*. Если кривизна регулярной кривой  $\gamma$  в точке  $P$  равна нулю, то *окружностью кривизны* назовем касательную прямую, рассматриваемую как окружность бесконечного радиуса.

**Предложение 3.13.** В каждой точке регулярной кривой окружность кривизны касается кривой со вторым порядком.

*Доказательство.* Пусть сначала кривизна равна нулю. Параметризуем кривую и касательную прямую натуральным параметром так, чтобы совпали векторы скоростей. При этом у натурально параметризованной прямой все производные порядка выше 1 равны нулю. Так как кривизна кривой равна нулю, то ее ускорение (в натуральной параметризации) тоже равно нулю, так что имеем касание второго порядка.

Пусть теперь кривизна в рассматриваемой точке отлична от нуля. Аналогичные рассуждения показывают, что при натуральной параметризации кривой и окружности кривизны и соответствующем выборе направления движения можно добиться касания первого порядка. Чтобы показать наличие касания второго порядка, проделаем следующие вычисления. Обозначим  $\gamma$  рассматриваемую натурально параметризованную кривую,  $\nu$  — главная нормаль,  $R$  — радиус кривизны, и  $C = \gamma + R\nu$  — центр кривизны. Тогда, при выбранных параметризациях, вектор ускорения при движении по окружности будет совпадать с  $(1/R)\nu$  (проделайте соответствующие вычисления), но  $(1/R)\nu = k\nu = \ddot{\gamma}$ , что и требовалось.  $\square$

**Задача 3.14.** Покажите, что любая окружность, проходящая через точку  $P$  регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой  $\gamma$  с меньшим чем 2 порядком.

**Задача 3.15.** Будем приближать плоскую регулярную кривую квадратикой. Докажите, что теперь можно достичь четвертого порядка касания, причем квадратика, касающаяся с четвертым порядком, определена однозначно (будем называть ее *приближающей квадратикой*). Таким образом, точки кривой можно разделить на четыре класса: вырожденные (кривизна равна нулю), а также эллиптические, гиперболические и параболические, в зависимости от того, чем является приближающая квадратика.

### 3.2.3 Огибающие семейства кривых на плоскости

В данном разделе мы будем рассматривать неявные кривые в некотором открытом подмножестве  $U$  евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $x = (x^1, x^2)$  — декартовы координаты в  $U$ . По определению, каждая такая кривая задается гладкой функцией  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , являясь полным решением  $M$  уравнения  $f(x^1, x^2) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , причем в каждой точке этого решения функция  $f$  удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, т.е. в таких точках одна из производных  $f_{x^1}$ ,  $f_{x^2}$  отлична от нуля. Напомним, что, по теореме о неявном отображении, множество  $M$  в подходящей окрестности каждой своей точки является образом вложенной регулярной параметрической кривой.

Далее, мы будем рассматривать *однопараметрические семейства* неявных кривых, заданные функцией  $F: U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $J$  — невырожденный промежуток с координатой  $\alpha$ , называемой *параметром семейства*, а каждое множество  $M^\alpha \subset U$ , являющееся решением уравнения  $F(x^1, x^2, \alpha) = c$  при каждом фиксированном  $\alpha$ , представляет собой неявную кривую. *Огибающей* этого семейства называется каждая регулярная параметрическая кривая  $\gamma(s)$ , которая для каждого значения параметра  $s$  касается некоторой неявной кривой  $M^\alpha$ . Последнее означает, что для каждого  $s$  выполняются следующие условия: (1) точка  $\gamma(s)$  содержится в некотором  $M^\alpha$ , т.е.  $F(\gamma(s), \alpha) = c$  при всех  $s$ , и (2) если  $\gamma^\alpha(t)$  — регулярная параметрическая кривая, параметризующая часть неявной кривой  $M^\alpha$  в окрестности точки  $\gamma(s)$ , то векторы  $\dot{\gamma}(s)$  и  $\dot{\gamma}^\alpha(t)$  коллинеарны. Таким образом, у нас возникает функция  $\alpha = \alpha(s)$ .

Мы будем решать задачу в предположении, что функция  $\alpha(s)$  — гладкая и ее производная всюду отлична от нуля. Тогда определена обратная функция, которую можно рассматривать как регулярную замену параметра  $s$  и, тем самым, сразу считать, что кривая  $\gamma$  параметризована  $\alpha$ , что мы и будем делать. Отметим, что  $\alpha$ , как параметр кривой  $\gamma$ , может быть определен не на всем промежутке  $J$ .

Для дальнейшего нам понадобится следующее предложение.

**Предложение 3.16.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты на  $\mathbb{R}^n$ ,  $k \leq n$ ,  $F = (F^1, \dots, F^k): U \rightarrow \mathbb{R}^k$  — гладкое отображение, и  $\gamma: I \rightarrow U$  — гладкая кривая такая, что  $F \circ \gamma = c$  для некоторого вектора  $c = (c^1, \dots, c^k)$ . Тогда при каждом  $t$  векторы  $\dot{\gamma}(t)$  и  $F_x^i = (F_{x^1}^i, \dots, F_{x^n}^i)$ , вычисленные в точке  $\gamma(t)$ , ортогональны.

*Доказательство.* Действительно, если  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  — координатная запись кривой  $\gamma$ , то при каждом  $i$  выполняется  $F^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = c^i$ . Осталось продифференцировать последнее уравнение по  $t$  по теореме 54 о дифференцировании сложной функции.  $\square$

Пусть  $\gamma(\alpha) = (x^1(\alpha), x^2(\alpha))$  — координатная запись огибающей  $\gamma$ . Тогда, в силу предложения 3.16, условие касания  $\gamma$  и неявных кривых  $M^\alpha$  равносильно тому, что  $\dot{\gamma}(\alpha)$  перпендикулярен  $F_x(x^1(\alpha), x^2(\alpha), \alpha)$ , т.е.  $F_{x^1} \dot{x}^1 + F_{x^2} \dot{x}^2 = 0$ . Но, так как  $F(x^1(\alpha), x^2(\alpha), \alpha) = c$ , имеем

$$F_{x^1} \dot{x}^1 + F_{x^2} \dot{x}^2 + F_\alpha = F_\alpha = 0,$$

поэтому условие перпендикулярности равносильно  $F_\alpha(x^1(\alpha), x^2(\alpha), \alpha) = 0$ . Итак, искомая кривая  $\gamma(\alpha)$  является решением системы уравнений  $\{F(x, \alpha) = c, F_\alpha(x, \alpha) = 0\}$ . Эта система называется *уравнениями огибающей*.

При каких условиях решение этой системы можно представить в виде регулярной кривой  $\gamma(\alpha)$ , хотя бы локально? Теория огибающих рассматривает много разных случаев, однако нам, для первого знакомства, вполне будет достаточно следующего локального условия существования огибающей, мгновенно вытекающего из теоремы о неявном отображении.

**Теорема 3.17.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  — открытое множество,  $J \subset \mathbb{R}$  — невырожденный промежуток,  $F: U \times J \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция,  $F(x^1, x^2, \alpha)$  — ее координатное представление, и  $c \in \mathbb{R}$ . Предположим, что для некоторого фиксированного  $\alpha$  множество  $M^\alpha = \{(x^1, x^2) \in U : F(x^1, x^2, \alpha) = c\}$  непусто, и для некоторого  $p \in M^\alpha$  матрица  $\begin{pmatrix} F_{x^1} & F_{x^2} \\ F_{\alpha x^1} & F_{\alpha x^2} \end{pmatrix}$ , вычисленная в точке  $(p, \alpha)$ , невырождена. Тогда в некоторой окрестности  $V$  этой точки уравнение  $F(x^1, x^2, \alpha) = c$  задает однопараметрическое семейство неявных кривых  $M^\alpha \cap V$ , а система уравнений  $\{F(x^1, x^2, \alpha) = c, F_\alpha(x^1, x^2, \alpha) = 0\}$ , рассматриваемая на  $V \times J$ , — огибающую этого семейства.

**Задача 3.18.** Докажите, что эволюта бирегулярной плоской кривой, у которой производная кривизны по натуральному параметру не обращается в ноль, является огибающей семейства прямых, проходящих через точки кривой в направлении ее нормалей.

## Упражнения к главе 3

**Упражнение 3.1.** Решите на плоскости натуральное уравнение  $k_1(s) = 1/s$ ,  $I = \{s \in \mathbb{R} : s > 0\}$ .

**Упражнение 3.2.** Докажите, что бигулярные кривые в  $\mathbb{R}^3$  с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

**Упражнение 3.3.** Покажите, что любая окружность, проходящая через точку  $P$  регулярной плоской кривой и отличная от окружности кривизны, касается кривой  $\gamma$  с меньшим чем 2 порядком.

**Упражнение 3.4.** Постройте две плоских кривых, совпадающих лишь в одной точке  $P$  и имеющих бесконечный порядок касания.

**Упражнение 3.5.** Для эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ , заданного на плоскости с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ , напишите уравнение эволюты.

**Упражнение 3.6.** Покажите, что эволюта плоской кривой  $\gamma$  совпадает с множеством особых точек всех волновых фронтов, выпущенных с  $\gamma$ .

**Упражнение 3.7.** Найдите огибающую для следующих семейств кривых на плоскости с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ :

- (1) семейства окружностей  $\gamma_\alpha$ , заданных уравнениями  $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 1$ ;
- (2) семейства отрезков данной длины, концы которых расположены на взаимно перпендикулярных прямых;
- (3) для семейства серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющих данную точку с точками данной прямой.

**Упражнение 3.8** (Формула Крофтона). Рассмотрим на плоскости всевозможные ориентированные прямые (для каждой прямой можно выбрать одну из двух ориентаций, т.е. единичный вектор, параллельный прямой). Это направление для ориентированной прямой  $\ell$  обозначим  $\nu(\ell)$ . Также через  $\varphi = \varphi(\ell)$  обозначим аргумент вектора  $\nu = \nu(\ell)$ , т.е.  $\nu = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Далее, определим *ориентированное расстояние*  $p = p(\ell)$  от ориентированной прямой  $\ell$  до начала координат  $O$  следующим образом: если прямая  $\ell$  проходит через  $O$ , то положим  $p = 0$ ; если не проходит, то пусть  $A$  — ближайшая к  $O$  точка прямой; тогда  $p = |OA|$ , если базис  $OA, \nu$  положительно ориентирован, и  $p = -|OA|$  в противном случае.

Пусть  $\gamma$  — спрямляемая плоская кривая и  $\ell$  — ориентированная прямая. Через  $n_\gamma(\ell) = n_\gamma(\varphi, p)$  обозначим количество точек множества  $\ell \cap \text{im } \gamma$  (это количество может быть бесконечным). Тогда длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  может быть вычислена по следующей формуле:

$$|\gamma| = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} n_\gamma(\varphi, p) dp \right] d\varphi.$$

Непрерывную параметрическую кривую назовем *кусочно-регулярной*, если она склеена из конечного числа регулярных кривых. Докажите эту формулу для кусочно-регулярных кривых таких, что количество пересечений с прямыми ограничены: для каждой кривой существует число  $N$  такое, что количество пересечений с каждой прямой не превосходит  $N$ .

**Упражнение 3.9** (Кривые постоянной ширины). В этом упражнении все кривые — плоские. Спроецируем замкнутую кривую на прямую, тогда образ — отрезок. Прообраз этого отрезка при рассматриваемой проекции назовем *полосой, ограничивающей кривую*, а каждое из двух направлений прямых, ограничивающих полосу, — *направлением полосы*. Расстояние между граничными прямыми полосы назовем *шириной кривой в направлении полосы*. Замкнутую кривую назовем *выпуклой*, если она ограничивает выпуклую область. Выпуклую кривую, ширина которой не зависит от направления ограничивающей ее полосы, назовем *кривой постоянной ширины*, при этом ширину любой полосы, ограничивающей такую кривую, назовем *шириной этой кривой*. Кривую постоянной ширины, отличную от окружности, будем называть *нетривиальной*.

- (1) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного нечетного числа  $n \geq 3$  регулярных кривых.
- (2) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из произвольного четного числа  $n \geq 6$  регулярных кривых.

- (3) Постройте пример нетривиальной кривой постоянной ширины, склеенной из четырех регулярных кривых.
- (4) Докажите, что длина кривой постоянной ширины  $w$  равна  $\pi w$  (теорема Барбье).
- (5) Покажите, что каждая граничная прямая полосы, ограничивающей кривую постоянной ширины, пересекает кривую ровно в одной точке. Эти точки, для данной полосы, называются *противоположными точками кривой*, а соединяющий их отрезок — *диаметром кривой*, соответствующим данной полосе. Покажите, что диаметр кривой постоянной ширины перпендикулярен соответствующей ему полосе.
- (6) Точку кривой  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , назовем *внутренней точкой регулярности*, если  $t$  — внутренняя точка промежутка  $I$ , а  $\gamma$  регулярна в  $t$ . Предположим, что концы диаметра кривой постоянной ширины являются внутренними точками регулярности. Докажите, что центры кривизны этих точек совпадают и, значит, сумма радиусов кривизны в таких точках равна ширине кривой.

**Упражнение 3.10.** *Овалом* на плоскости  $\mathbb{R}^2$  называется замкнутая кривая положительной кривизны, ограничивающая строго выпуклую область (для любых двух точек этой области внутренность соединяющего их отрезка лежит внутри области). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

## Лекция 4

# Поверхности в евклидовом пространстве.

**План.** Непрерывная параметрическая поверхность, координатная запись отображения, гладкая, регулярная, вложенная параметрическая поверхность, инвариантность области при регулярном отображении, замена координат в области, криволинейные координаты в области, координатные линии и координатные поверхности, примеры криволинейных координат (полярные, цилиндрические, сферические), непараметрические поверхности, задание поверхности графиком отображения и неявным отображением, локальная эквивалентность трех представлений поверхности, примеры, формализация понятия поверхности: множество точек поверхности, параметризация или введение координат, атлас, объемлющее пространство, погружение, координатная запись погружения, задание топологии на множестве точек поверхности, упрощение формализации для вложенной поверхности, расширение понятия поверхности в одномерном случае.

### 4.1 Общие определения

В предыдущих лекциях мы изучали кривые, параметризованные промежутками. Теперь мы увеличим размерность, но не станем пока обобщать понятие промежутка в полной мере, а именно, мы запретим наличие граничных точек, так что обобщение будет относиться к промежуткам, являющимся открытыми подмножествами прямой  $\mathbb{R}$ . Связное открытое подмножество  $k$ -мерного арифметического пространства  $\mathbb{R}^k$  называется *областью* в  $\mathbb{R}^k$ .

**Замечание 4.1.** В соответствии с задачей 41 из Введения, связность открытого подмножества  $\mathbb{R}^n$  равносильна его линейной связности.

Итак, пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  — некоторая область,  $n \geq k$ . Непрерывное отображение  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  будем называть (непрерывной) *параметрической поверхностью*, а  $k$  — размерностью этой поверхности. Как и в случае с кривыми, такие отображения могут быть устроены совсем не похожими на интуитивное представление о поверхности (например, мы может отобразить всю  $\Omega$  в одну точку). Следующий шаг — потребовать, чтобы отображение  $\rho$  было гладким. Точнее, пусть  $u^1, \dots, u^k$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^k \supset \Omega$ , а  $y^1, \dots, y^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , тогда отображение  $\rho$  записывается в этих координатах в виде  $n$  функций  $y^i = y^i(u^1, \dots, u^k)$ . Этот набор функций называется *координатной записью отображения*  $\rho$ . Для непрерывной параметрической поверхности все эти функции непрерывны. Параметрическая поверхность называется *гладкой*, если все функции ее координатной записи — гладкие.

Отметим, что отображение в точку является примером не только непрерывной, но и гладкой параметрической поверхности. Также гладкие параметрические поверхности, даже в случае взаимно однозначного с образом отображения, могут иметь изломы (постройте соответствующий пример с помощью задачи 1.14). Чтобы избавиться от таких эффектов, нужно потребовать нечто аналогичное регулярности кривой. Неравенство нулю всех частных производных не спасает ситуацию (приведите пример). Адекватное требование — максимальность ранга матрицы Якоби отображения  $\rho$ .

**Определение 4.2.** Параметрическая поверхность  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  с координатной записью  $\{y^i = y^i(u^1, \dots, u^k)\}_{i=1}^n$  называется *регулярной*, если она — гладкая, и в каждой точке области  $\Omega$  матрица Якоби  $(y^i_{u^j})$  имеет максимальный ранг, равный  $k$ .

**Определение 4.3.** Непрерывная параметрическая поверхность  $\rho$  называется *вложенной*, если  $\rho$  — гомеоморфизм с образом.

**Предложение 4.4.** Если  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вложенная регулярная параметрическая поверхность размерности  $n$ , то  $\rho(\Omega)$  является областью.

*Доказательство.* Действительно, по теореме 56 об обратном отображении, у каждой точки  $p \in \Omega$  есть такая окрестность  $U^p$ , что ее образ  $\rho(U^p)$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$ . В частности, каждая точка  $\rho(p)$  является внутренней для множества  $\rho(\Omega)$ , так что  $\rho(\Omega)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ . Линейная связность  $\rho(\Omega)$  вытекает из задачи 40.  $\square$

**Замечание 4.5.** Аналогичный результат также верен и без предположения регулярности. Однако теперь это — следствие сложной теоремы Брауэра об инвариантности области. А именно, имеет место следующий результат.

**Теорема 4.6** (Об инвариантности области, Брауэр [1]). *Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое подмножество и  $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное инъективное отображение. Тогда  $V = \rho(U)$  также открыто и  $\rho$  — гомеоморфизм между  $U$  и  $V$ .*

**Определение 4.7.** Вложенная регулярная параметрическая поверхность  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  размерности  $n$  называется *заменой координат  $u^i$*  в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  на координаты  $y^i$  в области  $\rho(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ . Также  $y^i$  называются *криволинейными координатами в области  $\Omega$* .

**Замечание 4.8.** По теореме 56 об обратном отображении, для замены координат  $\rho$  обратное отображение  $\rho^{-1}$  тоже регулярно.

Если в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $x^1, \dots, x^n$  заданы криволинейные координаты  $y^1, \dots, y^n$ , то определены *координатные кривые*, которые получаются фиксированием всех координат  $y^i$ , кроме любой одной (через каждую точку области  $\Omega$  проходит ровно  $n$  координатных кривых). Более общо, определены *координатные поверхности размерности  $k$*  для каждого  $1 \leq k \leq n-1$ , которые получаются фиксированием любых  $n-k$  координат  $y^i$ . Таким образом, координатные кривые — это одномерные координатные поверхности. Также особый интерес представляют *координатные гиперповерхности*, т.е. координатные поверхности размерности  $n-1$ . В случае  $\mathbb{R}^3$  координатные гиперповерхности традиционно называют просто поверхностями.

**Пример 4.9.** Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  декартовы координаты  $x, y$ , и пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — область, которая получается выбрасыванием из  $\mathbb{R}^2$  неположительной части оси абсцисс:  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ . Определим на  $\Omega$  две функции  $r$  и  $\varphi$ , а именно, пусть  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от точки  $(x, y)$  до начала координат, а  $-\pi < \varphi < \pi$  — аргумент этой точки, т.е. точка имеет вид  $r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Таким образом, если  $y \geq 0$ , то  $\varphi = \arccos(x/r)$ , а если  $y \leq 0$ , то  $\varphi = -\arccos(x/r)$ . Отметим, что при  $y = 0$ , т.е. на оси абсцисс, эти функции непрерывно «склеиваются», так как обе равны 0. В результате мы определили непрерывное отображение  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\rho(x, y) = (r, \varphi)$ . Легко видеть, что  $\rho$  взаимно однозначно с образом, а координатная запись обратного отображения — это  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ , поэтому и обратное отображение непрерывно. Обратное отображение  $\rho^{-1}$  является гладким, так как обе координатные функции гладкие при выбранных ограничениях на  $r$  и  $\varphi$ . Кроме того, матрица Якоби этого отображения имеет вид  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ , а ее определитель равен  $r > 0$ , поэтому матрица невырождена и, значит,  $\rho$  — также гладкое отображение по теореме об обратном отображении. Итак, мы доказали, что отображение  $\rho$  является заменой координат  $x, y$  на координаты  $r, \varphi$ , которые называются *полярными*.

Координатными кривыми в полярных координатах являются открытые являются лучи, выходящие из начала координат (эти лучи называются *r-кривыми*, так как вдоль них меняется координата  $r$ ), а также окружности с центром в начале координат и выброшенной точкой пересечения с отрицательной частью абсциссы (это  $\varphi$ -кривые).

Аналогично можно определить и другие системы координат.

**Пример 4.10.** Выкинем из пространства  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x, y, z$  полуплоскость  $\{(x, 0, z) : x \leq 0\}$ , тогда на полученной области  $\Omega$  можно задать функции  $r, \varphi$  и  $z$ , заменив координаты  $x, y$  на полярные координаты  $r, \varphi$ . Полученная система координат называется *цилиндрической*.

**Пример 4.11.** Для той же области  $\Omega$  определим координаты  $r, \varphi, \theta$  следующим образом. Теперь  $r$  обозначает расстояние от точки  $(x, y, z)$  до начала координат, т.е.  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; координата  $\varphi$  определяется для  $x$  и  $y$  так же, как и для полярных координат; координата  $0 < \theta < \pi$  — это угол между радиус-вектором точки  $(x, y, z)$  и направлением оси  $z$ , т.е. вектором  $(0, 0, 1)$ . Таким образом, координатная запись обратного отображения имеет вид:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Полученная система координат называется *сферической*.

**Замечание 4.12.** Отметим, что имеется и другое определение угла  $\theta$  сферических координат: его полагают равным углу между радиус-вектором точки  $(x, y, z)$  и радиус-вектором точки  $(x, y, 0)$ , т.е. проекции первой точки на плоскость  $z = 0$ .

**Задача 4.13.** Опишите координатные кривые и координатные поверхности цилиндрической и сферической систем координат.

Пусть теперь  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  — регулярная параметрическая поверхность размерности  $k$ , и  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  — замена координат. Пусть  $V = \varphi(\Omega)$ , тогда определена регулярная параметрическая поверхность  $\rho \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , про которую будем говорить, что она получается из исходной *заменой параметризации*  $\varphi: \Omega \rightarrow V$  или *заменой координат*. Ясно, что отношение на множестве регулярных параметрических поверхностей, в котором поверхности находятся в отношении, если и только если они получаются друг из друга заменой параметризации, является эквивалентностью. Класс эквивалентности параметрических регулярных поверхностей будем называть *поверхностью*. Чтобы подчеркнуть, о какой поверхности идет речь, иногда такие поверхности называют *непараметрическими*.

Как видно, определение поверхностей вполне аналогично определению кривых, поэтому и оставшиеся рассуждения про свойства поверхностей или про возможность особой параметризации, про образ поверхности, точку на поверхности также имеют место. Мы пока не можем говорить про замкнутые поверхности (аналог замкнутых кривых), так как слишком сузили параметрическую область.

Отметим также, что, используя теорему 4.6 Брауэра об инвариантности области, мы можем определить замену координат и поверхности в непрерывном случае. В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с регулярными поверхностями, так что такое общее определение нам не понадобится.

### 4.1.1 Задание поверхности в виде графика отображения

В предыдущих лекциях мы определили частный случай кривых, заданных в виде графиков отображений. Эта конструкция непосредственно обобщается на поверхности.

Итак, пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  — произвольная область,  $1 \leq k < n$ , и  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  — непрерывное отображение. Рассмотрим график отображения  $g$ , а именно,

$$\Gamma_g = \{(p, g(p)) : p \in \Omega\} \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n.$$

Если  $u^1, \dots, u^k$  — декартовы координаты в области  $\Omega$ , а  $x^1, \dots, x^{n-k}$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^{n-k}$ , то отображение  $g$  задается набором непрерывных функций  $(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^{n-k}(u^1, \dots, u^k))$ , то  $\Gamma_g$  можно представить как образ вложенной параметрической поверхности  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$(4.1) \quad \rho(u^1, \dots, u^k) = (u^1, \dots, u^k, x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^{n-k}(u^1, \dots, u^k)).$$

График  $\Gamma_g$  будем называть *поверхностью-графиком*.

Отметим, что если отображение  $g$  — гладкое, то соответствующая параметрическая поверхность  $\rho$  — регулярная, так как матрица Якоби отображения  $\rho$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_{u^1}^1 & x_{u^2}^1 & \cdots & x_{u^k}^1 \\ x_{u^1}^2 & x_{u^2}^2 & \cdots & x_{u^k}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{u^1}^{n-k} & x_{u^2}^{n-k} & \cdots & x_{u^k}^{n-k} \end{pmatrix},$$

и, значит, ранг матрицы Якоби максимален и равен  $k$ . Таким образом, каждая поверхность-график, заданная гладкой функцией, может быть представлена как образ вложенной регулярной параметрической поверхности.

**Соглашение 4.14.** Так как интересующие нас геометрические свойства не зависят от того, на каких местах в правой части равенства (4.1) расположить координаты  $u^1, \dots, u^k$  (не обязательно последовательно), мы будем также называть *графиком отображения*  $\rho$  и образ каждого отображения

$$(u^1, \dots, u^k) \mapsto (x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, u^1, \dots, x^{i_1}(u^1, \dots, u^k), \dots, u^2, \dots, x^{i_2}(u^1, \dots, u^k), \dots).$$

Следующая задача решается по аналогии с тем, что мы проделывали для кривых в разделе 1.4.1.

**Задача 4.15.** Используя теорему 59 о неявном отображении, покажите, что каждая достаточно малая окрестность каждой точки регулярной параметрической поверхности представима в виде графика некоторого отображения.

### 4.1.2 Задание поверхности в виде неявного отображения

Как и в случае с кривыми, поверхности локально можно задавать и в виде неявных отображений. Рассмотрим на  $\mathbb{R}^n$  или некотором его открытом подмножестве  $m$  гладких функций  $F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^m(x^1, \dots, x^n)$ , вектор  $c$  из вещественных констант,  $c = (c^1, \dots, c^m)$ , и пусть

$$(4.2) \quad M = \{(x^1, \dots, x^n) : F^1(x^1, \dots, x^n) = c^1, \dots, F^m(x^1, \dots, x^n) = c^m\}$$

— решение системы уравнений  $\{F^1 = c^1, \dots, F^m = c^m\}$ . Предположим, что  $M \neq \emptyset$  и в некоторой точке  $P = (P^1, \dots, P^n)$  выполняются условия теоремы 59 о неявном отображении (см. также замечание 61 из Введения), т.е. ранг матрицы Якоби  $F_x(P) := (F_{x_j}^i(P))$  максимален и, значит, равен  $m$ . Последнее означает, что строки матрицы  $F_x(P)$  линейно независимы, а среди столбцов имеется  $m$  линейно независимых. Пусть эти столбцы имеют номера  $i_1, \dots, i_m$ , а оставшиеся  $k = n - m$  столбцов — номера  $j_1, \dots, j_k$ . Будем считать, что как в первом, так и во втором списках номера упорядочены по возрастанию.

Положим  $I = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_k)$ , и пусть  $\mathbb{R}_I^n$  и  $\mathbb{R}_J^n$  — соответствующие координатные подпространства в  $\mathbb{R}^n$  в обозначениях 1.18, а  $P_I$  и  $P_J$  — проекции точки  $P$  на эти подпространства. По теореме 59 и замечанию 61, существуют окрестности  $U^{P_J} \subset \mathbb{R}_J^n$  и  $U^P \subset \mathbb{R}^n$  такие, что  $U^P \cap M$  является графиком гладкого отображения  $g: U^{P_J} \rightarrow \mathbb{R}_I^n$  с координатными функциями  $x^i = x^i(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})$ ,  $i \in I$ . Если  $\rho: U^{P_J} \subset \mathbb{R}^n$  — соответствующая вложенная регулярная параметрическая поверхность, заданная координатными функциями  $x^j = x^j$  для  $j \in J$ , и  $x^i = x^i(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})$  для  $i \in I$ , то  $U^P \cap M$  — ее образ.

Обратно, если поверхность задана в виде графика отображения  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ , и  $x^1, \dots, x^k$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^k$ , то определим функции  $F^i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $F^i = x^{k+i} - g^i(x^1, \dots, x^k)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда график отображения  $g$  совпадает с  $M = \{F^1 = 0, \dots, F^m = 0\}$ . Отметим, что последние  $m$  столбцов матрицы Якоби  $(F_{x_j}^i)$  формируют единичную матрицу, поэтому ранг матрицы  $(F_{x_j}^i)$  максимален.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 4.16.** *Каждая регулярная поверхность в достаточно малой окрестности любой из своих точек является вложенной и может быть представлена в каждом из трех видов: параметрически, графиком отображения, неявным отображением.*

**Пример 4.17.** Рассмотрим стандартную (единичную с центром в нуле) сферу в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $x, y, z$ . Эта сфера может быть задана (локально)

- параметрически:  $\gamma(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$ , где  $(r, \varphi, \theta)$  — сферические координаты;
- неявно:  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
- если, скажем,  $z \neq 0$ , то локально сфера задается графиком функции  $g(x, y)$ , разной в двух следующих случаях: при  $z > 0$  имеем  $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , а при  $z < 0$  имеем  $g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

**Замечание 4.18.** В лекции 3 мы определили неявные кривые. Обобщим это определение на случай поверхностей дословно, изменив лишь количество функций, задающих решение. А именно, выберем произвольное открытое подмножество  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$  и будем считать, что функции  $F^i$  определены именно на этом  $U$ . Тогда *неявной поверхностью* назовем полное решение, заданной формулой (4.2), если в каждой точке  $P \in M$  ранг матрицы Якоби  $F_x(P)$  максимален.

**Задача 4.19.** Выясните, какие из трех представлений поверхностей могут, а какие — не могут быть заменены на другие из этих трех представлений глобально, т.е. на всей области определения. Постройте соответствующие примеры.

**Соглашение 4.20.** В дальнейшем, если не возникает путаницы, мы не будем каждый раз уточнять, какой тип поверхности рассматривается: параметрический, график или неявный, и будем говорить просто про поверхность. Конкретный выбор представления поверхности будет ясен из контекста.

## 4.2 Формализация понятия поверхности

Чтобы было удобно работать с поверхностями, приведем следующую конструкцию. Напомним, что при задании поверхности мы начинали с параметрической поверхности, а затем рассматривали всевозможные замены параметризации. На каждую параметризацию можно смотреть как на “оцифровку” множества, т.е. как на приписывание каждому элементу множества некоторых координат (точек арифметического пространства). Чтобы не делать различия между исходной параметрической поверхностью и остальными, получающимися из нее заменами параметризации, мы будем считать, что изначально у нас было дано некоторое множество  $M$  (без какой бы то ни было структуры) — *множество точек поверхности*, и для этого множества мы задали

- семейство биекций  $\mathcal{P} = \{\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , называемых *параметризациями поверхности* или *картами*, где  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^k$  — области, причем для любых  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  биекция  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \Omega_\alpha \rightarrow \Omega_\beta$  является заменой координат, и любая замена координат в каждой области  $\Omega_\alpha$  реализуется таким образом;
- отображение  $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такое, что для некоторой (и, значит, любой) биекции  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  отображение  $\rho \circ \varphi_\alpha^{-1}: \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  является регулярной параметрической поверхностью.

Под *поверхностью* мы будем понимать тройку  $(M, \mathcal{P}, \rho)$ . *Размерностью поверхности* называется размерность  $k$  областей  $\Omega_\alpha$ , а сама поверхность называется *k-мерной*. Семейство  $\mathcal{P}$  будем называть *атласом* (атлас состоит из карт). Выбор параметризации  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  будем также называть *введением координат*, где в качестве координат выступают декартовы координаты  $u = (u^1, \dots, u^k)$  в  $\mathbb{R}^k \supset \Omega_\alpha$ . Иногда, говоря про введение координат, мы будем опускать упоминание об области  $\Omega_\alpha$ , а, вместо этого, будем сразу говорить, что на поверхности  $M$  мы вводим координаты  $u = (u^1, \dots, u^k)$ . Пространство  $\mathbb{R}^n$  назовем *объемлющим пространством*, а отображение  $\rho$  — *погружением* в пространство  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x = (x^1, \dots, x^n)$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , а  $u = (u^1, \dots, u^k)$  — координаты на поверхности, то погружение  $\rho$  задается набором из  $n$  гладких функций  $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$ . Такое представление погружения  $\rho$  будем называть его *координатной записью* и писать так:  $\rho: \{x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)\}_{i=1}^n$  или, для краткости,  $\rho: x(u)$ . Также будем говорить, что мы *рассматриваем поверхность в  $\mathbb{R}^n$* , или что рассматриваемая поверхность *находится или лежит в  $\mathbb{R}^n$* .

В дальнейшем похожая конструкция приведет нас к одному из центральных понятий дифференциальной геометрии — многообразию.

**Замечание 4.21.** Множество  $M$  мы могли бы получить из исходного определения поверхности как класса эквивалентности параметрической поверхности  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Для этого нужно было рассмотреть все замены координат  $\{\varphi_\alpha: \Omega \rightarrow \Omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , отождествить тождественную замену с  $\Omega$ , взять несвязное объединение  $\sqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \Omega_\alpha$  и ввести на нем отношение эквивалентности:  $p_\alpha \in \Omega_\alpha$  эквивалентно  $p_\beta \in \Omega_\beta$ , если  $p_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p_\alpha)$ . Тогда  $M$  — это множество классов только что определенной эквивалентности.

**Замечание 4.22.** Для вложенной регулярной поверхности с представителем  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , под  $M$  можно понимать образ отображения  $\rho$ . Тогда  $\rho$  из тройки  $(M, \mathcal{P}, \rho)$  будет тождественным отображением.

**Замечание 4.23.** В случае одномерных поверхностей, т.е. кривых, мы расширим определение, разрешив в качестве  $\Omega_\alpha$  брать не только интервалы, но и произвольные промежутки. В остальном конструкция ничем не отличается.

**Замечание 4.24.** Каждая биекция  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  определяет на  $M$  единственную топологию, в которой открытые множества — прообразы открытых множеств в  $\Omega_\alpha$ . Так как все замены координат  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  — гомеоморфизмы, то все  $\varphi_\alpha \in \mathcal{P}$  определяют одну и ту же топологию, и именно ее мы будем всегда иметь в виду, говоря про топологические свойства поверхности.

**Соглашение 4.25.** В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем поступать с поверхностями так же, как поступают с метрическим или топологическим пространством. А именно, под топологическим пространством можно понимать пару  $(X, \tau)$ , где  $X$  — множество, а  $\tau$  — топология на  $X$ , а можно понимать множество  $X$ , для которого задана некоторая топология  $\tau$ . Таким образом, вместо того, чтобы говорить “пусть  $(M, \mathcal{P}, F)$  — поверхность”, мы скажем “пусть  $M$  — поверхность”, имея в виду, что когда понадобится, мы сообщим про атлас, координаты на  $M$ , области  $\Omega_\alpha$ , объемлющее пространство  $\mathbb{R}^n$  и т.д.

Также иногда мы будем задавать поверхность своим параметрическим представителем, что однозначно определяет  $\mathcal{P}$ . В этом случае, если нам все-таки важно погружение  $\rho$ , поверхность будем сокращенно обозначать парой  $(M, \rho)$ .

Наш дальнейший план таков: сначала мы определим понятие (гладкого) отображения поверхностей, в частности, это даст нам понятие гладкой кривой на поверхности; используя гладкие кривые, мы определим касательное пространство поверхности. Каждая параметризация будет задавать на касательном пространстве свой базис, так что разные структуры, которые мы будем определять на касательных пространствах, будут менять свой вид при замене параметризации, даже если эта структура пришла из не зависящей от параметризации структуры объемлющего пространства. Для (гладкого) отображения поверхностей мы определим понятие дифференциала этого отображения, которое будет линейным отображением между соответствующими касательными пространствами.

Далее мы определим первую и вторую фундаментальные формы поверхности, позволяющие алгебраически описывать форму поверхности. Напишем дериационные формулы — аналог формул Френе для кривых. Сформулируем аналог теоремы о восстановлении кривой по кривизнам в случае двумерных поверхностей в трехмерном пространстве (оказывается, для этого достаточно знания первой и второй фундаментальных форм). Также мы определим аналог параллельного переноса, введя в рассмотрение ковариантное дифференцирование и заметив, что в случае евклидова пространства семейство векторов параллельно, если и только если его производная вдоль любой кривой равна нулю. Кривые, у которых поле скоростей параллельно, играют в геометрии важную роль и называются геодезическими. Эти кривые, как оказывается, являются кратчайшими между любой парой достаточно близких своих точек. Мы приведем ряд результатов из теории параллельных полей и геодезических.

## Литература к главе 4

- [1] Brouwer L.E.J. *Beweis der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen, 1912, v. 71, pp. 305–315; а также Mathematische Annalen, 1912, v. 72, pp. 55–56.

## Упражнения к главе 4

**Упражнение 4.1.** Опишите координатные кривые и координатные поверхности цилиндрической и сферической систем координат.

**Упражнение 4.2.** Составьте параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной регулярной кривой  $\gamma = \gamma(u)$ . Такая поверхность называется *развертывающейся*. Исследуйте развертывающуюся поверхность на регулярность.

**Упражнение 4.3.** Пусть в  $\mathbb{R}^3$  введены стандартные координаты  $x, y, z$ . В плоскости  $y = 0$  рассмотрим регулярную кривую  $\gamma$ , не пересекающую ось  $z$ , и будем вращать эту кривую вокруг оси  $z$ . Покажите, что полученное множество  $M$  можно представить как образ регулярной параметрической поверхности. В случаях, когда  $\gamma$  — это или окружность, для определенности, с центром на оси  $x$ , или график положительной гладкой функции  $x = f(z)$ , задайте  $M$  неявной функцией, т.е. как решение уравнения  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F$  — гладкая функция, определенная на некоторой области и удовлетворяющая теореме о неявной функции во всех точках из  $M$ .

**Упражнение 4.4.** *Эллиптические координаты*  $\lambda, \mu, z$  в  $\mathbb{R}^3$  определяются с помощью формул

$$x = \lambda \mu, \quad y = \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z.$$

- (1) Приведите одну из максимальных областей определения эллиптических координат.
- (2) Найдите и изобразите координатные кривые и координатные поверхности эллиптических координат.
- (3) Вычислите якобианы перехода между эллиптическими и евклидовыми координатами.

**Упражнение 4.5.** *Эллипсоидальные координаты* в  $\mathbb{R}^3$  вводятся с помощью уравнений ( $a > b > c$ ):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} &= 1 & (\lambda > -c^2), \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} &= 1 & (-c^2 > \mu > -b^2), \\ \frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} &= 1 & (-b^2 > \nu > -a^2). \end{aligned}$$

Докажите, что каждой точке  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  соответствует не более одной системы значений  $\lambda, \mu, \nu$ . Выясните, каким точкам  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  соответствует одна система значений  $\lambda, \mu, \nu$ .

Параметры  $\lambda, \mu, \nu$  называются *эллипсоидальными координатами*.

Выразите декартовы координаты  $x, y, z$  через эллипсоидальные координаты  $\lambda, \mu, \nu$ .

**Упражнение 4.6.** Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , сфера  $S^{n-1}$  задается неявно уравнением  $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1$ ,  $N = (0, 0, \dots, 1) \in S^{n-1}$  — “северный полюс”, и  $\Pi$  — гиперплоскость  $x^n = 0$ . Рассмотрим отображение  $\nu: S^{n-1} \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$ , сопоставляющее каждой точке  $P \in S^{n-1} \setminus \{N\}$  единственную точку пересечения луча  $NP$  с плоскостью  $\Pi$ .

- (1) Выпишите, как связаны координаты  $(x^1, \dots, x^n)$  точки  $P$  и координаты  $(u^1, \dots, u^{n-1})$  ее образа  $\nu(P) \in \Pi$  (в  $\Pi$  рассматриваются декартовы координаты, индуцированные из  $\mathbb{R}^n$ ). Проверьте, что  $\nu^{-1}: \Pi \rightarrow S^{n-1} \setminus \{N\}$  — регулярная параметрическая поверхность. Координаты  $(u^1, \dots, u^{n-1})$  на  $S^{n-1} \setminus \{N\}$  называются *стереографическими*. Отметим, что имеются и другие варианты определения этих координат, получающиеся заменой точки  $N$  на другую точку сферы, например, на “южный полюс”  $S = (0, 0, \dots, -1) \in S^{n-1}$ , а также заменой плоскости  $\Pi$ .
- (2) *Инверсией* относительно сферы в  $\mathbb{R}^k$  с центром в  $C \in \mathbb{R}^k$  и радиусом  $R$  называется отображение из  $\mathbb{R}^k \setminus \{C\}$  в себя, переводящее каждую точку  $P$  в такую точку  $Q$ , что  $P$  и  $Q$  лежат на одном луче, выпущенном из  $C$ , причем  $|CP| \cdot |CQ| = R^2$ . Покажите, что замена координат на  $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$  при замене  $N$  на  $S$  (при той же гиперплоскости  $\Pi$ ) является инверсией в  $\Pi$  относительно единичной сферы с центром в начале координат.

- (3) Покажите, что отражение сферы  $S^{n-1}$  относительно гиперплоскости  $\Pi$  в стереографических координатах представляет собой инверсию в  $\Pi$  относительно единичной сферы с центром в начале координат.
- (4) Рассмотрите частный случай двумерной сферы в  $\mathbb{R}^3$ , введите на  $\Pi$  вместо координат  $u^1, u^2$  комплексную координату  $z = u^1 + i u^2$ , и запишите замену координат при замене  $N$  на  $S$  в комплексной форме.

**Упражнение 4.7.** *Ортогональная группа*  $O(3)$  состоит из матриц размера  $3 \times 3$ , сохраняющих стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ , иными словами,  $A \in O(3)$ , если и только если  $A^T A = E$ . Записывая три строки каждой ортогональной матрицы последовательно в строку, получим вектор из  $\mathbb{R}^9$ . Таким образом,  $O(3)$  можно рассматривать как подмножество  $\mathbb{R}^9$ . Докажите, что в окрестности каждой точки  $A \in O(3) \subset \mathbb{R}^9$  ортогональная группа представляет собой регулярную трехмерную поверхность. Можно ли то же самое сказать про специальную ортогональную группу  $SO(3) \subset O(3)$ , составленную из ортогональных матриц с определителем 1?

**Упражнение 4.8.** *Специальная линейная группа*  $SL(n)$  состоит из матриц размера  $n \times n$ , имеющих единичный определитель. Также рассмотрим  $SL(n)$  как подмножество  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Покажите, что в окрестности каждой точки  $A \in SL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  специальная линейная группа представляет собой регулярную поверхность коразмерности 1, т.е. размерности  $n^2 - 1$ . Постройте локальное представление  $SL(n)$  в виде графика функции.

## Лекция 5

# Дифференциальные свойства поверхностей

**План.** Дифференциал гладкого отображения поверхностей, его координатная запись, линейность дифференциала, изменение координатного представления дифференциала при замене параметризаций поверхностей, дифференциал гладкой функции на поверхности как ковектор, отличие отображения в поверхность (или из нее) и в промежуток или область (или из них), дифференциалы координатных функций как двойственный базис касательного пространства, запись дифференциала функции — разложение по двойственному базису, первая фундаментальная форма поверхности или индуцированная на поверхности метрика, примеры вычисления, вычисления с помощью первой фундаментальной формы (длины кривых и углы между кривыми), изометричное отображение метрических пространств, изометрия и локальная изометрия метрических пространств, изометричность линейных отображений нормированных пространств, кусочно гладкие кривые и внутренняя метрика поверхности, дифференциал гладкого изометричного отображения поверхностей, пример неизометричного гладкого отображения поверхностей с изометричным дифференциалом, биективное отображение с изометричным дифференциалом, пример изометричного биективного отображения.

### 5.1 Поверхности и отображения

Пусть  $M$  и  $N$  — поверхности размерностей  $r$  и  $s$  в  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно. Рассмотрим произвольное отображение  $F: M \rightarrow N$  множества  $M$  во множество  $N$ . Параметризуем  $M$  и  $N$ , выбрав некоторые биекции  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^r$  и  $\psi_\beta: N \rightarrow \Theta_\beta \subset \mathbb{R}^s$ . Тогда *координатной записью отображения*  $F$  называется отображение  $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}: \Omega_\alpha \rightarrow \Theta_\beta$ . На другом языке, то же самое можно сказать так. Введем на  $M$  и  $N$  координаты  $u = (u^1, \dots, u^r)$  и  $v = (v^1, \dots, v^s)$  соответственно и запишем  $F$  в этих координатах, тогда *координатная запись*  $F$  представляет собой набор из  $s$  *координатных функций*  $v^i = v^i(u^1, \dots, u^r)$ . Такое координатное представление будем записывать так:  $F: \{v^i = v^i(u^1, \dots, u^r)\}_{i=1}^s$  или  $F: v(u)$ . Отображение  $F: M \rightarrow N$  назовем *отображением поверхностей*, если координатная запись  $F$  — гладкое отображение (все координатные функции — гладкие). Так как все замены координат — регулярные, то гладкость координатной записи не зависит от выбора параметризаций.

Гладкое отображение  $F$  из области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  в область  $\Theta \subset \mathbb{R}^n$  называется *регулярным*, если в каждой точке  $P \in \Omega$  ранг матрицы Якоби отображения  $F$  максимальный, т.е. равен  $\max\{m, n\}$ . Отображение поверхностей  $F: M \rightarrow N$  называется *регулярным*, если некоторая а, значит, и любая координатная запись этого отображения — регулярна. Взаимно однозначное отображение поверхностей  $F: M \rightarrow N$  такое, что  $F$  и  $F^{-1}$  регулярны, называется *диффеоморфизмом*.

Пусть  $M$  — поверхность размерности  $s$ , а  $X$  — топологическое пространство. Рассмотрим отображение  $F: X \rightarrow M$  или  $F: M \rightarrow X$ . Так как на  $M$ , в соответствии с замечанием 4.24, определена естественная топология, можно говорить про непрерывность отображения  $F$ , не прибегая ни к какой параметризации  $M$ . Тем не менее, как и в случае отображений в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , непрерывность бывает проще проверить, введя в рассмотрение координатную запись. А именно, параметризуем поверхность  $M$  с помощью  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$ , тогда отображения  $\varphi_\alpha \circ F$  в первом случае и  $F \circ \varphi_\alpha^{-1}$  во втором будем называть *координатными записями отображения*  $F$ . Отметим, что, как и в случае с  $\mathbb{R}^n$ , отображение  $F$  — *непрерывно*, если и только если непрерывна некоторая (а, значит, и любая) его координатная запись. Если  $u^1, \dots, u^s$  — координаты на  $M$ , заданные параметризацией  $\varphi_\alpha$ , то, в случае отображения  $\varphi_\alpha \circ F$ , координатная запись представляет собой  $s$  функций  $u^i: X \rightarrow \mathbb{R}$ , а непрерывность  $F$  равносильна непрерывности всех этих функций. Если в качестве  $X$  взять промежуток или область, то можно говорить не только о непрерывности, но и о *гладкости, регулярности, диффеоморфности отображения*.

**Замечание 5.1.** Разница между поверхностью и промежутком или областью состоит лишь в том, что на поверхности мы не фиксируем какие-то заранее заданные координаты, а на промежутке или области координаты считаем фиксированными, а именно, являющимися декартовыми координатами пространства, в котором лежит промежуток или область. Также для промежутка или области отсутствует явно заданное погружение в объемлющее пространство, которое, тем не менее, можно определить, считая его тождественным вложением. В этом смысле, дальнейшие построения, например, определение касательного вектора, касательного пространства или дифференциала отображения поверхностей (см. ниже), по сути остаются теми же при замене поверхностей на промежуток или область. Поэтому мы не будем каждый раз отдельно рассматривать подобные модификации.

*Параметрической кривой на поверхности  $M$*  называется произвольное гладкое отображение из промежутка  $I$  в поверхность  $M$ . Если перейти к классу эквивалентности параметрических кривых, то получим определение (*непараметрической*) *кривой на поверхности*.

*Функцией на поверхности  $M$*  называется каждое гладкое отображение  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Замечание 5.2.** В дальнейшем, все отображения поверхностей, областей и промежутков, если не оговорено противное, будут предполагаться гладкими, а слово “гладкий”, для краткости, мы будем опускать.

### 5.1.1 Касательные векторы и касательное пространство

Пусть  $P \in M$  — точка на  $k$ -мерной поверхности  $(M, \rho)$ , и  $\gamma$  — кривая на  $M$ , проходящая через точку  $P = \gamma(t_0)$ . Кривую  $\gamma$  можно записывать двояко: или *во внешних координатах*, т.е. как отображение  $\rho \circ \gamma$  в объемлющее пространство  $\mathbb{R}^n$ , или *во внутренних координатах*, задав параметризацию  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  и рассмотрев отображение  $\varphi_\alpha \circ \gamma$ . *Касательным вектором к поверхности  $M$  в точке  $P$*  называется вектор скорости  $\xi = (\rho \circ \gamma)'(t_0)$  для каждой такой кривой  $\gamma$ . Отметим, что этот вектор не зависит от выбора параметризации поверхности. Действительно, кривая — это отображение сразу в  $M$  (минуя выбор координат), а отображение  $\rho$  определено на  $M$ . С другой стороны, *записью касательного вектора  $\xi$  в координатах поверхности  $M$* , заданных параметризацией  $\varphi_\alpha$ , называется вектор скорости  $(\varphi_\alpha \circ \gamma)'(t_0)$ . Этот вектор уже зависит от выбора параметризации. Множество всех касательных векторов в точке  $P$  называется *касательным пространством* в этой точке и обозначается  $T_P M$ .

**Предложение 5.3.** *Касательное пространство  $T_P M$  для  $k$ -мерной поверхности  $(M, \rho)$  является линейным подпространством размерности  $k$  в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^n$ .*

*Доказательство.* Введем на  $M$  координаты  $u = (u^1, \dots, u^k)$  и пусть  $\rho: \{x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)\}_{i=1}^n$  — координатная запись погружения  $\rho$ . Так как мы рассматриваем только регулярные поверхности, матрица Якоби  $J = (x_{u^j}^i)$  в каждой точке поверхности имеет максимальный ранг, равный  $k$ .

Пусть в этих координатах  $P = (P^1, \dots, P^k)$ . Рассмотрим проходящие через  $P$  координатные кривые  $\gamma_j(t) = (P^1, \dots, P^j + t, \dots, P^k)$ , тогда соответствующие касательные векторы  $(\rho \circ \gamma_j)'(0)$  будут частными производными  $\rho_{u^j} := (x_{u^j}^1, \dots, x_{u^j}^n)$ , вычисленными в точке  $P$ . Эти векторы являются столбцами матрицы  $J(P)$ , поэтому они линейно независимы (так как ранг  $J(P)$  равен  $k$ ).

Пусть теперь  $\xi$  — произвольный касательный вектор. По определению, на поверхности  $M$  существует кривая  $\gamma$ , проходящая через  $P = \gamma(t_0)$ , и  $\xi = (\rho \circ \gamma)'(t_0)$ . Кривая  $\gamma$  записывается в координатах  $u^j$  в виде  $(u^1(t), \dots, u^k(t))$ , поэтому  $\rho \circ \gamma$  задается  $n$  гладкими функциями  $x^i = x^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$ . По теореме о дифференцировании сложной функции, имеем

$$\xi = (\rho \circ \gamma)' = (x_{u^j}^1 \dot{u}^j, \dots, x_{u^j}^n \dot{u}^j) = \rho_{u^j} \dot{u}^j$$

(мы используем соглашение, в соответствии с которым по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Тем самым, мы разложили вектор  $\xi$  по векторам  $\rho_{u^j}$ .

Кроме того, каждая линейная комбинация  $\rho_{u^j} a^j$  с вещественными коэффициентами является касательным вектором, порожденным кривой  $P + at$ , где  $a = (a^1, \dots, a^k)$ . Таким образом,  $T_P M$  состоит из всевозможных линейных комбинаций линейно независимых  $k$  векторов  $\rho_{u^j}(P)$ , поэтому  $T_P M$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$  размерности  $k$ , а  $\rho_{u^j}(P)$  — базис этого пространства.  $\square$

**Определение 5.4.** Базис  $\rho_{u^j}(P)$  касательного пространства  $T_P M$  называется *каноническим базисом*, соответствующим координатам  $u^j$ .

Теорема о дифференцировании сложной функции показывает, как меняется канонический базис при изменении координат.

**Предложение 5.5.** При переходе от координат  $u^j$  к координатам  $u^{j'}$  векторы канонического базиса меняются так:  $\rho_{u^{j'}} = \rho_{u^j} u_{u^{j'}}^j$ ,  $\rho_{u^j} = \rho_{u^{j'}} u_{u^j}^{j'}$ . При этом, касательный вектор  $\xi^j \rho_{u^j}$ , имевший координаты  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ , в новом базисе запишется как  $\xi^j u_{u^{j'}}^j \rho_{u^{j'}}$ , поэтому его координаты  $\xi' = (\xi'^1, \dots, \xi'^k)$  в базисе  $\rho_{u^{j'}}$  будут равны  $(u_{u^j}^{j'} \xi^j, \dots, u_{u^j}^{k'} \xi^j)$ , или, более компактно,  $\xi' = u'_u \xi$ , где  $u'_u$  — матрица Якоби замены координат, а  $\xi'$  и  $\xi$  обозначают здесь также соответствующие вектор-столбцы.

**Замечание 5.6.** Обратите внимание, что штрих ' играет в наших записях двойную роль: и как символ дифференцирования, и как указатель на замену координат. Пожалуйста, не смешивайте эти функции штриха.

**Замечание 5.7.** В соответствии с замечанием 5.1, касательное пространство естественно определяется и в точках объемлющего пространства  $\mathbb{R}^n$ , и в точках вообще любой области. Это определение можно свести к уже данному для поверхностей, если положить  $M = \mathbb{R}^n$ , параметризовать  $M$  тождественным отображением  $\mathbb{R}^n$  на себя, и погрузить  $M$  в объемлющее пространство  $\mathbb{R}^n$  тем же тождественным отображением. Более прямой путь — определить касательный вектор в точке  $Q \in \mathbb{R}^n$  как вектор скорости проходящей через  $Q$  гладкой кривой, вычисленный в точке  $Q$ . Пусть, как и выше,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , тогда векторы канонического базиса — это  $x_{x^i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , где 1 стоит на  $i$ -ом месте. Таким образом, во всех касательных пространствах  $T_Q \mathbb{R}^n$  канонический базис один и тот же и совпадает со стандартным базисом в  $\mathbb{R}^n$ .

Аналогичным образом определяется касательное пространство и для любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , если положить  $M = \Omega$ , параметризовать  $\Omega$  тождественным отображением из той же области  $\Omega$ , и погрузить  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  отображением включения (тождественным на  $\Omega$ ); или же просто рассмотреть векторы скоростей кривых в  $\Omega$ . Канонический базис также одинаков во всех точках и совпадает со стандартным базисом в  $\mathbb{R}^n$ .

Замечание 5.7 позволяет уточнить предложение 5.3.

**Предложение 5.8.** Касательное пространство  $T_P M$  для  $k$ -мерной поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$  является линейным подпространством размерности  $k$  в касательном пространстве  $T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$  к точке  $\rho(P)$  объемлющего пространства  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.1.2 Дифференциал отображения поверхностей

Пусть  $(M, \rho)$  и  $(N, \sigma)$  — соответственно  $r$ -мерная и  $s$ -мерная поверхности,  $F: M \rightarrow N$  — отображение поверхностей,  $P \in M$  и  $Q = F(P)$ . Рассмотрим произвольный касательный вектор  $\xi \in T_P M$ , и пусть  $\gamma$  — кривая на поверхности  $M$ , задающая  $\xi$ , т.е.  $\gamma(t_0) = P$  и  $(\rho \circ \gamma)'(t_0) = \xi$ . Так как и координатная запись кривой, и координатная запись отображения поверхностей задаются гладкими функциями,  $F \circ \gamma$  — гладкое отображение, и, значит, является кривой на поверхности  $N$ , проходящей через  $Q = F(\gamma(t_0))$ . Обозначим  $\eta$  порожденный этой кривой касательный вектор в точке  $Q$ , т.е.  $\eta = (\sigma \circ F \circ \gamma)'(t_0)$ . Дифференциалом  $dF$  отображения  $F$  называется сопоставление каждому касательному вектору  $\xi$  соответствующего касательного вектора  $\eta$ . Ограничение дифференциала  $dF$  на касательное пространство  $T_P M$  обозначается  $dF|_P$ .

**Предложение 5.9.** Если на поверхности  $(M, \rho)$  заданы координаты  $u = (u^1, \dots, u^r)$ , а на поверхности  $(N, \sigma)$  — координаты  $v = (v^1, \dots, v^s)$ , то в соответствующих канонических базисах отображение  $dF|_P$  является линейным, и его матрица в этих базисах — матрица Якоби  $v_u = (v_{u^i}^j)$ , вычисленная в точке  $(P^1, \dots, P^r)$ , являющейся координатами точки  $P$ . В частности, так как и касательное пространство, и дифференциал не зависят от выбора координат, дифференциал является линейным отображением касательных пространств.

*Доказательство.* Выберем произвольный касательный вектор  $\xi \in T_P M$ , и пусть  $\gamma$  — задающая его кривая. Запишем всё во введенных координатах:  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$ ,  $\eta = dF(\xi) = (\eta^1, \dots, \eta^s)$ ,  $\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ ,  $F: \{v^j = v^j(u^1, \dots, u^r)\}_{j=1}^s$ . Тогда

$$\eta = dF(\xi) = (\sigma \circ F \circ \gamma)' = \sigma_{v^j} v_{u^i}^j \dot{u}^i = \sigma_{v^j} v_{u^i}^j \xi^i,$$

откуда  $\eta^j = v_{u^i}^j \xi^i$  или, в матричном виде,  $\eta = v_u \xi$ , что и доказывает как линейность отображения  $dF|_P$  в выбранных координатах, так и равенство его координатного представления матрице Якоби  $v_u$ .  $\square$

Так как дифференциал — линейное отображение касательных пространств, то, при замене базиса, матрица Якоби, задающая этот дифференциал, должна меняться по известному из линейной алгебры закону. Тот же самый закон изменения непосредственно выводится и из теоремы о дифференцировании сложной функции.

**Предложение 5.10.** Пусть, как и выше,  $F: M \rightarrow N$  — отображение поверхностей, а  $v_u$  — матрица Якоби координатной записи дифференциала отображения  $F$ , где  $u = (u^1, \dots, u^r)$  и  $v = (v^1, \dots, v^s)$  — координаты на  $M$  и  $N$  соответственно. Рассмотрим на этих поверхностях новые координаты  $u' = (u'^1, \dots, u'^r)$  и  $v' = (v'^1, \dots, v'^s)$  соответственно. Тогда  $v'_{u'} = v'_v v_u u_u = v'_v v_u (u'_u)^{-1}$ , или, в координатных функциях,  $v'^i_{u'^j} = v^i_v v^j_u u^j_{u'^j}$ . Иными словами, матрица Якоби дифференциала  $dF|_P$  ведет себя так, как и должна вести матрица линейного оператора  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_P N$  при замене базисов  $\rho_{u^i}$  и  $\sigma_{v^j}$  на соответственно базисы  $\rho_{u'^i}$  и  $\sigma_{v'^j}$ , а именно, умножается на прямую и обратную матрицы замены базисов.

**Замечание 5.11.** Еще раз отметим, что приведенные выше формулы пишутся автоматически, если следить за “высотой” индексов. При этом, индексы, входящие в координаты, по которым мы дифференцируем, считаются нижними, а у координат, которые мы дифференцируем — верхними. Например, в выражении  $v^i_{u^j}$  индекс  $i$  — верхний, а индекс  $j$  — нижний. Также написанные формулы — не что иное, как реализация “цепного правила” дифференцирования сложной функции.

В соответствии с замечанием 5.1, аналогичное утверждение имеет место и для гладкого отображения поверхности  $M$  в вещественную прямую. Таким образом, имеет место следующий результат.

**Следствие 5.12.** Пусть  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая функция, тогда для каждой точки  $P \in M$  дифференциал  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$  является линейным функционалом на  $T_P M$ , т.е. элементом двойственного пространства. Если на  $M$  заданы координаты  $u = (u^1, \dots, u^r)$ , а на  $\mathbb{R}$  — стандартная (декартова) координата  $x$ , то координатная запись дифференциала имеет вид  $F_u := (x_{u^1}, \dots, x_{u^r})$ .

**Определение 5.13.** Двойственное пространство к касательному пространству  $T_P M$  обозначается  $T_P^* M$  и называется *кокасательным пространством*.

Таким образом, дифференциалы функций, заданных на поверхности и рассматриваемые в фиксированной точке, — это элементы кокасательного пространства.

**Замечание 5.14.** Когда мы рассматриваем отображение из поверхности в прямую, промежуток или область, или из них, координаты могут меняться только на поверхности, поэтому возникают уже не линейные операторы, а объекты другого типа. Например, если  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  — функция на поверхности, то нас интересует изменение дифференциала  $dF$  только при заменах координат на поверхности. Пусть мы переходим от координат  $u = (u^1, \dots, u^r)$  к координатам  $u' = (u'^1, \dots, u'^r)$ , а стандартная (декартова) координата  $\mathbb{R}$  обозначена  $x$ . Тогда, в соответствии с предложениями 5.12 и 5.10, координатная запись дифференциала  $F_u = (x_{u^1}, \dots, x_{u^r})$  заменится на  $F_{u'} = (x_{u'^1}, \dots, x_{u'^r}) = F_u u_{u'}$ , а это, как и было естественно ожидать, закон изменения координат ковекторов.

Рассмотрим частный случай функций на поверхности  $(M, \rho)$ , являющихся координатными функциями некоторой параметризации. Пусть  $u = (u^1, \dots, u^k)$  — координаты на поверхности  $M$ , и в качестве  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  возьмем функцию  $u^i: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Выясним, как действует дифференциал  $du^i$  на касательные векторы, записанные в каноническом базисе  $\rho_{u^j}$ . Для этого зададим базисный вектор  $\rho_{u^j}$  координатной кривой  $\gamma(t) = (P^1, \dots, P^j + t, \dots, P^k)$ , тогда  $u^i \circ \gamma$  или равно  $P^i$  при  $i \neq j$ , или, иначе,  $P^j + t$ , поэтому  $du^i(\rho_{u^j}) = (u^i \circ \gamma)'(t_0) = \delta^i_j$ .

Тем самым, мы доказали следующий результат.

**Предложение 5.15.** Дифференциалы  $du^i$  координатных функций поверхности  $M$  образуют базис кокасательного пространства  $T_P^* M$ , двойственный к каноническому базису  $\rho_{u^i}$ . Дифференциалы  $dx^i$  координатных функций  $x^i$  объемлющего пространства  $\mathbb{R}^n$  образуют базис кокасательного пространства  $T_Q^* \mathbb{R}^n$ , двойственный к каноническому базису  $x_{x^i}$ .

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ . По следствию 5.12, ее дифференциал, вычисленный в точке  $P \in M$ , является элементом кокасательного пространства  $T_P^* M$ , поэтому, в силу предложения 5.15,  $dF$  раскладывается по базису  $du^j$  этого пространства:  $dF = a_j du^j$ . С другой стороны,  $dF(\rho_{u^i}) = F_{u^i} = (a_j du^j)(\rho_{u^i}) = a_i$ , т.е.  $dF = F_{u^i} du^i$ . Тем самым, мы приходим к следующему выводу.

**Предложение 5.16.** Известная из матанализа формула  $dF = F_{u^j} du^j$  есть ни что иное, как разложение дифференциала — элемента кокасательного пространства — по базису этого пространства. В частности, если  $\rho: \{x^i(u^1, \dots, u^r)\}_{i=1}^n$  — координатное представление погружения  $\rho$  поверхности, то  $dx^i = x^i_{u^j} du^j$  — разложение по базису  $du^j$  дифференциалов координатных функций этого погружения.

## 5.2 Первая фундаментальная форма поверхности

Как мы уже говорили, в арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется стандартное евклидово скалярное произведение: если  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$  и  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$  — элементы  $\mathbb{R}^n$ , то их скалярное произведение — это

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_i \xi^i \eta^i = \delta_{ij} \xi^i \eta^j$$

(правая часть верхнего равенства — тензорная запись скалярного произведения, допускающая не использование знака суммирования). Это скалярное произведение порождает скалярное произведение в каждом касательном пространстве  $T_P \mathbb{R}^n$ . Напомним, что, в силу замечания 5.7, канонические базисы всех касательных пространств одинаковы и совпадают со стандартным базисом  $\mathbb{R}^n$ , поэтому рассмотренные выше векторы  $\xi$  и  $\eta$  можно рассматривать как принадлежащие любому  $T_P \mathbb{R}^n$ , и их скалярное произведение будет таким же. Это семейство скалярных произведений на всех касательных пространствах  $T_P \mathbb{R}^n$  назовем *евклидовой метрикой на  $\mathbb{R}^n$* .

Также мы говорили, что каждое касательное пространство  $T_P M$  поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$  определяется независимо от параметризации поверхности и является линейным подпространством в  $T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$ , поэтому на нем также определено скалярное произведение — ограничение скалярного произведения, заданного на  $T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$ . Итак, заданное таким образом на каждом касательном пространстве скалярное произведение (билинейная форма), а также соответствующая ему квадратичная форма, называются *первой фундаментальной формой поверхности  $M$*  или *метрикой, индуцированной на поверхности  $M$*  (не путайте с метрикой как функцией расстояния).

Выбирая различные параметризации, мы будем порождать различные базисы в касательных пространствах к поверхности и, записывая в этих базисах первую фундаментальную форму, будем получать различные матрицы — матрицы Грама этих базисов. Каждая такая матрица называется *матрицей первой фундаментальной формой* в выбранных координатах. Запишем ее в явном виде. Если  $u^1, \dots, u^k$  — координаты на поверхности  $M$ , и  $\rho_{u^j} = (x_{u^j}^1, \dots, x_{u^j}^n)$  — векторы канонического базиса, то элементы  $g_{pq}$  этой матрицы имеют вид

$$(5.1) \quad g_{pq} = \langle \rho_{u^p}, \rho_{u^q} \rangle = \sum_i x_{u^p}^i x_{u^q}^i = \delta_{ij} x_{u^p}^i x_{u^q}^j.$$

Приведем примеры.

**Пример 5.17.** (1) Зададим  $(n-1)$ -мерную поверхность в  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $(x^1, \dots, x^n)$  в виде графика функции  $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$  и запишем матрицу первой фундаментальной формы в координатах  $(x^1, \dots, x^{n-1})$ . Для этого рассмотрим соответствующую параметризацию поверхности  $(x^1, \dots, x^{n-1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})) =: \rho$ , тогда векторы канонического базиса — это  $\rho_{x^i} = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{x^i})$ , где 1 стоит на  $i$ -ом месте. Таким образом, матрица Грама  $G$  этих векторов имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_{x^1}^2 & f_{x^1} f_{x^2} & \cdots & f_{x^1} f_{x^{n-1}} \\ f_{x^2} f_{x^1} & 1 + f_{x^2}^2 & \cdots & f_{x^2} f_{x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^{n-1}} f_{x^1} & f_{x^{n-1}} f_{x^2} & \cdots & 1 + f_{x^{n-1}}^2 \end{pmatrix}.$$

(2) Зададим  $(n-1)$ -мерную поверхность в  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $x^1, \dots, x^n$  в неявном виде  $F(x^1, \dots, x^n) = c$ . Будем предполагать, что в рассматриваемой точке  $F_{x^n} \neq 0$ , тогда, по теореме о неявной функции, в окрестности этой точки поверхность задается графиком функции  $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ . Вычислим матрицу первой фундаментальной формы в координатах  $x^1, \dots, x^{n-1}$  через функцию  $F$  и ее производные. Так как  $F(x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})) = c$ , то  $F_{x^i} + F_{x^n} f_{x^i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , откуда  $f_{x^i} = -F_{x^i} / F_{x^n}$ . Подставляя эти выражения в предыдущий пример и вынося из матрицы  $1/F_{x^n}^2$ , получаем

$$G = \frac{1}{F_{x^n}^2} \begin{pmatrix} F_{x^n}^2 + F_{x^1}^2 & F_{x^1} F_{x^2} & \cdots & F_{x^1} F_{x^{n-1}} \\ F_{x^2} F_{x^1} & F_{x^n}^2 + F_{x^2}^2 & \cdots & F_{x^2} F_{x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x^{n-1}} F_{x^1} & F_{x^{n-1}} F_{x^2} & \cdots & F_{x^n}^2 + F_{x^{n-1}}^2 \end{pmatrix}.$$

(3) В предыдущем примере, вычислим индуцированную метрику на стандартной сфере  $F(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1$  в окрестности точки, в которой  $F_{x^n} \neq 0$ . Имеем  $F_{x^i} = 2x^i$ , так что условие  $F_{x^n} \neq 0$  равносильно

$x^n \neq 0$ . В результате,

$$G = \frac{1}{(x^n)^2} \begin{pmatrix} (x^n)^2 + (x^1)^2 & x^1 x^2 & \dots & x^1 x^{n-1} \\ x^2 x^1 & (x^n)^2 + (x^2)^2 & \dots & x^2 x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} x^1 & x^{n-1} x^2 & \dots & (x^n)^2 + (x^{n-1})^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2} \begin{pmatrix} 1 - \widehat{(x^1)^2} - (x^2)^2 - \dots - (x^{n-1})^2 & x^1 x^2 & \dots & x^1 x^{n-1} \\ x^2 x^1 & 1 - (x^1)^2 - \widehat{(x^2)^2} - \dots - (x^{n-1})^2 & \dots & x^2 x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} x^1 & x^{n-1} x^2 & \dots & 1 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - \widehat{(x^{n-1})^2} \end{pmatrix}.$$

(4) Рассмотрим стандартную двумерную сферу в трехмерном пространстве, параметризованную сферическими координатами  $\varphi$  и  $\theta$ , и вычислим первую фундаментальную форму в точке сферы, где эти координаты определены. Имеем  $\rho := (x, y, z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,

$$\rho_\varphi = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0), \quad \rho_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \Rightarrow G = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как вычислить эту матрицу  $G$  без проделанных выкладок? Для этого нужно вспомнить, что канонический базис состоит из векторов скоростей координатных линий, в нашем случае,  $\varphi$ -линий и  $\theta$ -линий. Эти линии, очевидно, ортогональны, поэтому вне диагонали стоят нули. Далее,  $\varphi$ -линия представляет собой окружность радиуса  $\sin \theta$ , а  $\theta$ -линия является окружностью единичного радиуса, причем обе эти окружности параметризованы стандартно — углом поворота. Соответствующие элементы матрицы  $G$  — квадраты длин векторов скоростей движения по координатным линиям. Осталось проделать тривиальные вычисления и заметить, что при движении по окружности радиуса  $r$ , параметризованной углом, длина вектора скорости равна  $r$ .

(5) Рассмотрим в четырехмерном пространстве  $\mathbb{R}^4$ , представленном в виде  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , тор  $T^2$ , который получается декартовым произведением двух окружностей  $S^1$ , каждая из которых лежит в своей  $\mathbb{R}^2$ : первая окружность задается в виде  $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0)$ , а вторая — в виде  $(0, 0, \cos \psi, \sin \psi)$ , таким образом, тор  $T^2$  параметризован так:  $\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi)$ . Тогда

$$\rho_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0), \quad \rho_\psi = (0, 0, -\sin \psi, \cos \psi) \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица индуцированной метрики совпадает с единичной матрицей в некоторых координатах, то такая метрика называется *евклидовой*, и соответствующие координаты тоже называются *евклидовыми*. Отметим, что не каждая метрика является евклидовой, например, на сфере невозможно ни в одной сколь угодно малой окрестности ввести евклидову метрику. Это будет показано ниже как следствие из “Блистательной теоремы Гаусса”. Впрочем, для сферы этот факт можно доказать и более непосредственно.

**Замечание 5.18.** Индуцированная метрика позволяет вычислять разные метрические характеристики касательного пространства, например, длины касательных векторов и углы между векторами. Эти выкладки можно проделывать *во внешних координатах*, т.е. рассматривая векторы как элементы объемлющего пространства, или *во внутренних координатах*, записывая векторы в каком-нибудь каноническом базисе и используя матрицу первой фундаментальной формы. В качестве следующего шага, мы можем вычислять геометрические характеристики поверхности и разнообразных объектов, лежащих на поверхности, как в объемлющем пространстве, так и не переходя в него, а производя все выкладки исключительно в выбранных координатах. Последнее может оказаться предпочтительней. Приведем пример.

**Пример 5.19.** Рассмотрим разобранный выше случай тора  $T^2$  в  $\mathbb{R}^4$ , и выберем на этом торе кривую, имеющую во введенных координатах параметризацию  $(\varphi, \psi) = (3t, 4t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Конечно, мы можем рассмотреть эту кривую в четырехмерном пространстве, вычислить длину ее вектора скорости и проинтегрировать. Однако, раз мы знаем индуцированную метрику, причем она такая же, как на евклидовой плоскости, а кривая — обычный отрезок, соединяющий точки с координатами  $(0, 0)$  и  $(3, 4)$ , то длина этой кривой находится мгновенно: она равна 5.

Также мы можем вычислять углы между пересекающимися кривыми, т.е. углы между векторами скоростей этих кривых в точке пересечения кривых. В случае с тем же тором, рассмотрим кривые  $\gamma_1(t) = (2t, 2t)$  и

$\gamma_2(t) = (-3t, 3t)$ , выходящие из точки, соответствующей  $t = 0$ , и вычислим угол между ними. В терминах объемлющего пространства, мы должны найти векторы скоростей кривых, посчитать скалярное произведение этих векторов, поделить на длины векторов и взять  $\arccos$ . Однако, во внутренних координатах, мы сразу видим, что угол между этими кривыми равен  $\pi/2$ .

**Пример 5.20.** Покажем, как проводить вычисления с более сложной матрицей индуцированной метрики. Например, рассмотрим поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , заданную графиком функции  $z = x^2 - y^2$ , тогда матрица  $G$  индуцированной метрики имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим кривую  $\gamma(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , тогда в точке  $\gamma(t)$  матрица  $G(t)$  равна  $\begin{pmatrix} 1 + 4t^2 & -4t^2 \\ -4t^2 & 1 + 4t^2 \end{pmatrix}$ , поэтому квадрат длины вектора скорости  $\dot{\gamma}(t) = (1, 1)$  равен

$$(1, 1) \begin{pmatrix} 1 + 4t^2 & -4t^2 \\ -4t^2 & 1 + 4t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

так что  $|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$ .

Рассмотрим координатные кривые, проходящие через точку  $P = (1, 2)$ , тогда в этой точке  $G = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$ . Найдем угол между этими кривыми. Пусть  $\gamma_1(x)$  и  $\gamma_2(y)$  — это  $x$ - и  $y$ -кривая соответственно, тогда  $\dot{\gamma}_1 = (1, 0)$ ,  $\dot{\gamma}_2 = (0, 1)$ ,  $|\dot{\gamma}_1| = \sqrt{5}$ ,  $|\dot{\gamma}_2| = \sqrt{17}$ ,  $\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = -8$ , поэтому угол между этими кривыми равен  $\arccos \frac{-8}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$ .

### 5.2.1 Изометричные отображения поверхностей

Отображение  $F: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется *изометричным*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых  $x, x' \in X$  выполняется  $|F(x)F(x')| = |xx'|$ . Биективное изометричное отображение называется *изометрией*. Отображение  $F: X \rightarrow Y$  метрических пространств называется *локально изометричным*, если у каждой точки  $P \in X$  есть такая окрестность, что ограничение  $F$  на эту окрестность — изометрия с образом. Если при этом отображение  $F$  является локальным гомеоморфизмом, то оно называется *локальной изометрией*.

В случае, когда  $F$  — линейное отображение линейных нормированных пространств, а функция расстояния порождается нормой, скажем,  $|xx'| = \|x - x'\|$ , то изометричность равносильна сохранению нормы (проверьте):  $\|F(x)\| = \|x\|$  для любого  $x \in X$ . Если же нормы порождаются скалярными произведениями, то изометричность равносильна сохранению скалярного произведения:  $\langle F(x), F(x') \rangle = \langle x, x' \rangle$  для любых  $x, x' \in X$  (докажите). В последнем случае, для доказательства изометричности достаточно проверить, что  $F$  сохраняет длины и скалярные произведения базисных векторов произвольно взятого базиса (убедитесь в этом).

Понятие изометричного отображения и изометрии естественно обобщается на отображения поверхностей. А именно, каждую поверхность  $M$  можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние между точками  $P, Q \in M$  как точную нижнюю грань длин всех кусочно-гладких кривых на  $M$ , соединяющих  $P$  и  $Q$  (кривая называется *кусочно-гладкой*, если она является склейкой конечного числа гладких кривых). Несложно показать, что эта функция расстояния в действительности является метрикой (проделайте это). Тем самым, изометричность отображения поверхностей означает сохранение этой внутренней метрики.<sup>1</sup>

**Задача 5.21.** Пусть  $F: M \rightarrow N$  — изометричное отображение поверхностей. Покажите, что тогда для каждой точки  $P \in M$  отображение  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$  также изометрично, где расстояния на касательных пространствах задаются первыми фундаментальными формами.

Отметим, что изометричность дифференциала не влечет сохранение внутренней метрики.

**Пример 5.22.** Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x, y$  кольцо  $(N, \sigma)$ , заданное неравенствами  $1 < x^2 + y^2 < 4$ , где погружение  $\sigma$  — вложение. В качестве  $(M, \rho)$  возьмем то же самое кольцо, но с выкинутым

<sup>1</sup>Если при определении внутренней метрики вместо кусочно-гладких кривых брать гладкие кривые, мы получим то же самое расстояние. Действительно, каждую кусочно-гладкую кривую можно так параметризовать в окрестности точки негладкости, чтобы она превратилась в гладкую кривую (по аналогии с тем, как гладким образом параметризуется угол). Если бы мы ограничились гладкими кривыми, то подобные проблемы у нас возникали бы при склейке гладких кривых. Чтобы каждый раз не оговаривать, почему склейка также может быть превращена в гладкую кривую, мы и ввели в рассмотрение кусочно-гладкие кривые. В дальнейшем мы часто будем опускать термин *кусочно-гладкий*, считая, что это условие выполнено по умолчанию.

интервалом  $I$ , соединяющим точки  $(1, 0)$  и  $(2, 0)$ ; погружение  $\rho$  — ограничение  $\sigma$  на  $M$ . В качестве  $F: M \rightarrow N$  возьмем отображение, оставляющее точки на месте. Тогда  $dF$  будет тождественным отображением на каждом касательном пространстве и, значит, изометрией. Однако, точки из  $M$ , “близкие” к интервалу  $I$ , находятся на “большом” расстоянии в  $M$  (в смысле внутренней метрики), но на “маленьком” расстоянии в  $N$ , так что  $F$  — не изометрия (придайте точный смысл всем словам в кавычках).

Тем не менее, если дифференциал отображения  $F$  — изометрия в каждой точке, то  $F$  сохраняет длины кривых, поэтому если  $F$  взаимно однозначно с образом, а внутреннюю метрику вводить не на всем  $N$ , а на  $F(M)$ , то отображение  $F: M \rightarrow F(M)$  будет сохранять внутреннюю метрику и, значит, будет изометрией. Итак, имеет место следующее предложение.

**Предложение 5.23.** Пусть  $F: M \rightarrow N$  — биективное отображение поверхностей, для которого дифференциал  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$  является изометрией в каждой точке  $P \in M$ . Тогда  $F$  — изометрия метрических пространств  $M$  и  $N$ , где в качестве функций расстояния выбираются внутренние метрики.

Из предложения 5.23 вытекает эквивалентное определение изометрии поверхностей. А именно, *отображение поверхностей*  $F: M \rightarrow N$  назовем *изометрией*, если оно взаимно однозначно и в каждой точке  $P \in M$  дифференциал  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$  — изометрия.

Приведем пример.

**Пример 5.24.** Пусть в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  заданы две поверхности  $M$  и  $N$ , см. рис. 5.1:

- поверхность  $M$  задается отображением из плоскости с координатами  $(\varphi, z)$  так:  $\rho := (\operatorname{ch} z \cos \varphi, \operatorname{ch} z \sin \varphi, z)$  (она называется *бесконечнолистной намоткой катеноида*);
- поверхность  $N$  задается отображением из плоскости с координатами  $(\varphi, t)$  так:  $\sigma := (t \cos \varphi, t \sin \varphi, \varphi)$  (она называется *геликоидом*).

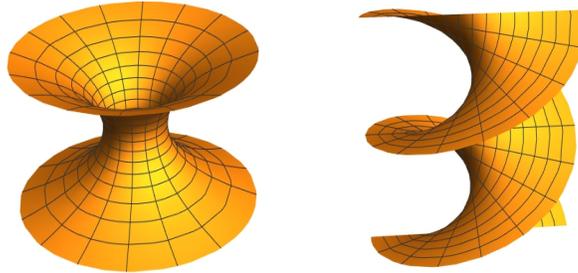


Рис. 5.1: Катеноид и геликоид.

Покажем, что эти поверхности изометричны. Вычислим матрицы  $G_\rho$  и  $G_\sigma$  индуцированных метрик для этих поверхностей во введенных координатах. Для катеноида:

$$\rho_\varphi = (-\operatorname{ch} z \sin \varphi, \operatorname{ch} z \cos \varphi, 0), \quad \rho_z = (\operatorname{sh} z \cos \varphi, \operatorname{sh} z \sin \varphi, 1) \Rightarrow G_\rho = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 z & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 z \end{pmatrix};$$

для геликоида:

$$\sigma_\varphi = (-t \sin \varphi, t \cos \varphi, 1), \quad \sigma_t = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \Rightarrow G_\sigma = \begin{pmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение  $F: M \rightarrow N$ , координатная запись которого равна  $\{\varphi = \varphi, t = \operatorname{sh} z\}$ , тогда  $dF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} z \end{pmatrix}$ . Векторы  $\rho_\varphi$  и  $\rho_z$  имеют в этом же базисе координаты  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  соответственно, поэтому их образы при действии  $dF$  имеют вид  $dF(\rho_\varphi) = (1, 0)$  и  $dF(\rho_z) = (0, \operatorname{ch} z)$ , откуда

$$\begin{aligned} \langle dF(\rho_\varphi), dF(\rho_\varphi) \rangle &= t^2 + 1 = 1 + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch}^2 z = \langle \rho_\varphi, \rho_\varphi \rangle, \\ \langle dF(\rho_\varphi), dF(\rho_z) \rangle &= 0 = \langle \rho_\varphi, \rho_z \rangle, \\ \langle dF(\rho_z), dF(\rho_z) \rangle &= \operatorname{ch}^2 z = \langle \rho_z, \rho_z \rangle, \end{aligned}$$

так что бесконечнолистная намотка катеноида и геликоид изометричны, хотя на первый взгляд это совсем не очевидно.

## Упражнения к главе 5

**Упражнение 5.1.** Вычислите первую фундаментальную форму следующих двумерных поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ :

- (1) поверхности вращения

$$\rho(\varphi, t) = (f(t) \cos \varphi, f(t) \sin \varphi, g(t)),$$

где  $f(t), g(t)$  — гладкие функции, причем функция  $f$  всюду положительна;

- (2) эллипсоида, заданного параметрически в виде

$$\rho(\varphi, \theta) = (a \cos \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \cos \theta, c \sin \theta).$$

**Упражнение 5.2.** Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

- (1) Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2} av^2, \quad v = 1.$$

- (2) Найдите углы этого криволинейного треугольника.

**Упражнение 5.3.** Найдите на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающие каждую кривую  $v = \text{const}$  под постоянным углом  $\theta$  (**локсодромии**).

**Упражнение 5.4.** Покажите, что ни в одном открытом подмножестве стандартной двумерной сферы нельзя ввести евклидовых координат (для этого можно использовать вид кратчайших кривых на евклидовой плоскости и сфере, а также формулы для суммы углов треугольников).

**Упражнение 5.5.** В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  рассмотрим тор  $T^2$ , заданный неявно функцией  $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ , где  $0 < b < a$ , и стандартную сферу  $S^2$ , заданную  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Пусть  $F: T^2 \rightarrow S^2$  — *гауссово отображение*, сопоставляющее каждой точке  $P \in T^2$  единичную нормаль к касательной плоскости  $T_P T^2$ , направленную наружу области, ограниченной тором  $T^2$ . Введите на торе и сфере координаты, найдите соответствующую координатную запись отображения  $F$ , и запишите в этих координатах дифференциал гауссова отображения.

**Упражнение 5.6.** Пусть  $O(3) \subset \mathbb{R}^9$  — группа ортогональных матриц, и  $E \in O(3)$  — единичная матрица. Рассмотрим матрицу

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9.$$

Докажите, что  $\xi$  — касательный вектор к  $O(3)$  в точке  $E$ , и найдите образ  $\xi$  при действии дифференциала отображения  $F: O(3) \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , которое ставит в соответствие каждой матрице из  $O(3)$  векторное произведение ее первого и второго столбцов.

**Упражнение 5.7.** Стереографические координаты на стандартной сфере  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  определены в упражнении 4.6. Следующие задания относятся к двумерной сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  и стереографической проекции из “северного полюса”.

- (1) Запишите индуцированную метрику в стереографических координатах.
- (2) Покажите, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми.
- (3) Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в обобщенные окружности. Выведите отсюда, что инверсия переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняет углы между кривыми.

**Упражнение 5.8.** Проверьте, что

- (1) изометричность линейного отображения нормированных пространств эквивалентна сохранению нормы;
- (2) изометричность линейного отображения пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению скалярного произведения;
- (3) изометричность линейного отображения пространств со скалярным произведением эквивалентна сохранению длин и скалярных произведений векторов какого-нибудь базиса.

**Упражнение 5.9.** Пусть  $M$  — поверхность. Для каждой пары точек  $P, Q \in M$  определим расстояние  $|PQ|$  как точную нижнюю грань длин всех кусочно-гладких кривых на  $M$ , соединяющих  $P$  и  $Q$ . Покажите, что построенная функция является метрикой.

**Упражнение 5.10.** Пусть отображение поверхностей  $F: M \rightarrow N$  сохраняет внутренние метрики. Покажите, что тогда для каждой точки  $P \in M$  отображение  $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$  изометрично, где расстояния на касательных пространствах задаются первыми фундаментальными формами.

**Упражнение 5.11.** Рассмотрим две параметрические поверхности в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\rho(r, v) = (r \cos v, r \sin v, r + v), \quad (r, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{коноид}),$$

$$\sigma(z, \varphi) = (\sqrt{1+z^2} \cos \varphi, \sqrt{1+z^2} \sin \varphi, z), \quad (z, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{бесконечнолистная намотка на гиперboloид вращения}).$$

Докажите, что отображение  $F: \{z = r, \varphi = v + \operatorname{arctg} r\}$  задает изометрию этих поверхностей.

## Лекция 6

# Тензорное исчисление на поверхностях

**План.** Тензорное произведение, билинейность тензорного произведения, тензорная запись билинейной формы, тензорная запись евклидовой метрики в  $\mathbb{R}^n$  и первой фундаментальной формы поверхности, несимметричность тензорного произведения, определение операции симметричного тензорного произведения (на ковекторах), его билинейность, запись симметричной билинейной формы через симметричное тензорное произведение, запись евклидовой метрики и первой фундаментальной формы через симметричное тензорное произведение, вычисление первой фундаментальной формы поверхности через тензорную запись: координатная запись ограничения ковектора на подпространство и ее применение к вычислению первой фундаментальной формы, примеры, бесконечно малая длина дуги или элемент дуги (обоснование терминологии), алгебра (гладких) функций на поверхности, эквивалентное представление этой алгебры в виде кольца, дифференцирование функций на поверхности вдоль кривой и касательного вектора, свойства операции дифференцирования, модуль векторных полей вдоль поверхности над кольцом гладких функций, линейная комбинация и функциональная линейная комбинация векторных полей, скалярное произведение векторных полей, ограничение векторного поля на кривую, производная векторного поля вдоль кривой и вдоль касательного вектора, свойства производной векторного поля вдоль касательного вектора, нормальное пространство к поверхности в данной точке, подмодули нормальных и касательных полей вдоль поверхности, ковариантные производные касательного и нормального векторных полей, ковариантная производная функции, свойства ковариантной производной, доказательство правила Лейбница для ковариантной производной от скалярного произведения касательных (нормальных) полей, локальные векторные поля, продолжение касательного вектора до касательного векторного поля, продолжение нормального вектора до нормального локального векторного поля.

### 6.1 Тензорная запись первой фундаментальной формы

Выше мы выяснили, что дифференциалы функций порождают на касательных пространствах  $T_P M$  и  $T_Q \mathbb{R}^n$  линейные функционалы — элементы двойственного пространств  $T_P^* M$  и  $T_Q^* \mathbb{R}^n$  соответственно, т.е. тензоры типа  $(0, 1)$  в терминах раздела 2 введения. Более того, дифференциалы координатных функций некоторой параметризации образуют двойственный базис к каноническому, см. предложение 5.15. С другой стороны, евклидова метрика на  $\mathbb{R}^n$  и первая фундаментальная форма поверхности  $(M, \rho)$  — это соответственно скалярное произведение на каждом  $T_Q \mathbb{R}^n$  и индуцированное им скалярное произведение на каждом касательном пространстве  $T_P M \subset T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$ . Опять же, апеллируя к разделу 2, напомним, что такая билинейная форма является тензором типа  $(0, 2)$ . Можно ли из тензоров типа  $(0, 1)$  получить тензоры типа  $(0, 2)$  и, тем самым, например, записать первую фундаментальную форму через дифференциалы координатных функций? Ответ на этот вопрос положительный, а искомое выражение как раз и называется тензорной записью индуцированной метрики.

Чтобы выполнить соответствующие построения, напомним определение тензорного произведения, см. задачу 10 из введения. Пусть на векторном пространстве  $V$  задан тензор  $S$  типа  $(p, q)$  и тензор  $T$  типа  $(r, s)$ . Напомним, что, по определению, эти тензоры представляют собой полилинейные отображения на соответствующих декартовых произведениях пространств  $V^*$  и  $V$ , см. детали в разделе 2 введения. *Тензорное произведение*  $S \otimes T$  определяется как тензор типа  $(p+r, q+s)$ , который на каждом наборе из  $p+r$  ковекторов  $\xi^1, \dots$  и  $q+s$  векторов  $v_1, \dots$  равен произведению значения  $S$  на первых  $p$  ковекторах и первых  $q$  векторах и значения  $T$  на последних  $r$  ковекторах и последних  $s$  векторах:

$$(S \otimes T)(\xi^1, \dots, \xi^{p+r}, v_1, \dots, v_{q+s}) = S(\xi^1, \dots, \xi^p, v_1, \dots, v_q) T(\xi^{p+1}, \dots, \xi^{p+r}, v_{q+1}, \dots, v_{q+s}).$$

Так как обычное умножение билинейно, отображение  $S \otimes T$  — полилинейно, т.е. является тензором. Также из определения тензорного произведения мгновенно вытекает ассоциативность и билинейность операции  $\otimes$ :

$$(R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T), \\ (a_1 S_1 + a_2 S_2) \otimes T = a_1 (S_1 \otimes T) + a_2 (S_2 \otimes T), \quad S \otimes (a_1 T_1 + a_2 T_2) = a_1 (S \otimes T_1) + a_2 (S \otimes T_2),$$

где  $R, S, S_1, S_2, T$  — произвольные тензоры на  $V$  и  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

Пусть теперь  $B$  — билинейная форма на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$ . Выберем произвольный базис  $e_1, \dots, e_n$ , тогда  $B_{ij} = B(e_i, e_j)$  — координаты формы  $B$  в этом базисе, и если  $v = v^i e_i$ ,  $w = w^j e_j$  — векторы из  $V$ , то  $B(v, w) = B_{ij} v^i w^j$ . Пусть  $e^1, \dots, e^n$  — двойственный базис, т.е.  $e^i$  — элементы пространства  $V^*$ . Каждый  $e^i$  является линейным отображением  $e^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. тензором типа  $(0, 1)$ , поэтому для них определено тензорное произведение  $e^i \otimes e^j$ , являющееся тензором типа  $(0, 2)$ , т.е. билинейной формой. По определению,  $(e^i \otimes e^j)(v, w) = e^i(v) e^j(w) = v^i w^j$ , поэтому

$$(B_{ij} e^i \otimes e^j)(v, w) = B_{ij} v^i w^j = B(v, w).$$

Итак, мы приходим к следующему результату.

**Предложение 6.1.** Пусть  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — билинейная форма на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$ . Выберем в  $V$  произвольный базис  $e_1, \dots, e_n$ , и пусть  $e^1, \dots, e^n$  — двойственный базис пространства  $V^*$ . Положим  $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ , тогда  $B = B_{ij} e^i \otimes e^j$ .

**Задача 6.2.** Сформулируйте и докажите аналог предложения 6.1 для произвольного тензора.

Вернемся к поверхностям.

**Следствие 6.3.** Пусть  $M$  — произвольная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ ,  $u^1, \dots, u^k$  — координаты на ней,  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , и  $G = (g_{pq})$  — матрица первой фундаментальной формы поверхности  $M$  в координатах  $u^p$ . Тогда евклидова метрика в  $\mathbb{R}^n$  равна  $\sum_i dx^i \otimes dx^i = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , а первая фундаментальная форма поверхности  $M$  в координатах  $u^p$  равна  $g_{pq} du^p \otimes du^q$ .

Отметим, что евклидова метрика и первая фундаментальная форма симметричны, т.е.  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  и  $g_{pq} = g_{qp}$  в обозначениях предыдущего следствия. Само же тензорное произведение  $du^p \otimes du^q$  — не симметрично. Например, если  $p \neq q$ , то

$$(du^p \otimes du^q)(\rho_{u^p}, \rho_{u^q}) = du^p(\rho_{u^p}) du^q(\rho_{u^q}) = 1, \quad \text{но} \quad (du^q \otimes du^p)(\rho_{u^p}, \rho_{u^q}) = du^q(\rho_{u^p}) du^p(\rho_{u^q}) = 0.$$

Для более комфортной работы с симметричными формами вводится *симметричное тензорное произведение*, которое мы определим только на ковекторах. Пусть снова  $V$  — векторное пространство, и  $\varphi, \psi \in V^*$ , тогда положим  $\varphi \cdot \psi = (\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi)/2$ . Теперь  $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ , и, кроме того, симметричное тензорное произведение снова билинейно:

$$\begin{aligned} (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) \cdot \psi &= \frac{1}{2} ((a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) \otimes \psi + \psi \otimes (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2)) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1 \varphi_1 \otimes \psi + a_2 \varphi_2 \otimes \psi + a_1 \psi \otimes \varphi_1 + a_2 \psi \otimes \varphi_2) = a_1 \varphi_1 \cdot \psi + a_2 \varphi_2 \cdot \psi, \end{aligned}$$

(аналогично имеет место линейность по второму сомножителю).

Заметим, что  $\varphi \otimes \varphi = (\varphi \otimes \varphi + \varphi \otimes \varphi)/2 = \varphi \cdot \varphi$ , а также что

$$a \varphi \otimes \psi + a \psi \otimes \varphi = 2a(\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi)/2 = a \varphi \cdot \psi + a \psi \cdot \varphi,$$

поэтому симметричная билинейная форма  $B = B_{ij} e^i \otimes e^j$  запишется так:  $B = B_{ij} e^i \cdot e^j$ .

**Замечание 6.4.** Из сказанного выше вытекает, что с симметричным тензорным произведением можно работать как с обычными многочленами: вычисляя симметричное тензорное произведение ковекторов, равных линейным комбинациям других ковекторов, мы можем “раскрывать скобки и приводить подобные” будто мы имеем дело с многочленом (в силу симметричности произведения). Более того, как и в случае с обычным умножением, символ “ $\cdot$ ” принято опускать, а также  $\omega \cdot \omega$  записывать как  $\omega^2$ .

В случае поверхностей, получаем следующий результат.

**Следствие 6.5.** Пусть  $M$  — произвольная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ ,  $u^1, \dots, u^k$  — координаты на ней,  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , и  $G = (g_{pq})$  — матрица первой фундаментальной формы поверхности  $M$  в координатах  $u^p$ . Тогда евклидова метрика в  $\mathbb{R}^n$  равна  $\sum_i (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ , а первая фундаментальная форма поверхности  $M$  в этих координатах  $u^p$  равна  $g_{pq} du^p du^q$ .

Покажем, как можно использовать тензорную запись для вычисления первой фундаментальной формы поверхности. По определению, чтобы получить метрику, индуцированную на  $k$ -мерной поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$ , мы должны ограничить евклидову метрику, заданную на касательном пространстве  $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$  к объемлющему пространству  $\mathbb{R}^n$ , на содержащееся в  $T_{\rho(P)}\mathbb{R}^n$  касательное пространство  $T_P M$  к поверхности  $M$ . Наша задача — записать это ограничение в терминах билинейных форм  $\delta_{ij}dx^i dx^j$  и  $g_{pq}du^p du^q$ . Собственно говоря, билинейная форма  $g_{pq}du^p du^q$  получается ограничением билинейной формы  $\delta_{ij}dx^i dx^j$  на  $T_P M$ : мы просто применяем последнюю форму только к векторам из  $T_P M$ . При этом,  $du^p$  — базисные ковекторы в  $T_P^* M$ , образующие двойственный базис к каноническому базису  $\rho_{u^p}$ . Дифференциалы  $dx^i$  — элементы пространства  $T_{\rho(P)}^*\mathbb{R}^n$ . Тем самым, нам нужно ограничить  $dx^i$  на  $T_P M$ , т.е. получить элемент из  $T_P^* M$ , и затем выразить эти ограничения через базис  $du^p$ .

Проделаем соответствующее построение для произвольного векторного пространства  $V$  и его конечномерного подпространства  $W$ , а затем применим результат к поверхностям. Итак, пусть задан произвольный ковектор  $\xi \in V^*$ , а в пространстве  $W$  выбран базис  $e_1, \dots, e_k$ . Для каждого вектора  $w = w^p e_p$  имеем  $\xi(w) = w^p \xi(e_p)$ , поэтому если это ограничение обозначить той же буквой и разложить его по двойственному базису:  $\xi = \xi_p e^p$ , то получим

$$\xi(w) = \xi_p w^p = w^p \xi(e_p),$$

откуда, в силу произвольности выбора  $w^p$ , имеем  $\xi_p = \xi(e_p)$  (проверьте). Итак, мы доказали следующий результат.

**Предложение 6.6.** Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\xi \in V^*$  — ковектор,  $W \subset V$  — конечномерное подпространство,  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $W$ , и  $e^1, \dots, e^k$  — двойственный базис. Тогда ограничение ковектора  $\xi$  на  $W$  имеет вид  $\xi(e_p)e^p$ .

Вернемся к поверхностям (будем использовать введенные выше обозначения). Из предложения 6.6 вытекает, что ограничение ковектора  $dx^i$  на  $T_P M$  равно  $dx^i(\rho_{u^p}) du^p = x_{u^p}^i du^p$ . Если, как мы сделали выше, обозначить тем же символом  $dx^i$  его ограничение на  $T_P M$ , то в результате получим формулу:

$$dx^i = x_{u^p}^i du^p.$$

Еще раз подчеркнем, что, традиционно, символ  $dx^i$  использует в разных смыслах: и как ковектор в объемлющем пространстве, и как его ограничение на подпространство.

Вычислим теперь первую фундаментальную форму  $g_{pq}du^p du^q$  через евклидову метрику  $\delta_{ij}dx^i dx^j$ . Воспользовавшись замечанием 6.4, будем проводить вычисления будто мы имеем дело с многочленами. Тогда

$$g_{pq}du^p du^q = (\delta_{ij}dx^i dx^j)|_{T_P M} = \delta_{ij}(x_{u^p}^i du^p)(x_{u^q}^j du^q) = (\delta_{ij}x_{u^p}^i x_{u^q}^j)du^p du^q,$$

откуда  $g_{pq} = \delta_{ij}x_{u^p}^i x_{u^q}^j$ , как и в формуле (5.1). Отметим, что традиционно символ ограничения  $|_{T_P M}$  опускают и пишут просто  $\delta_{ij}dx^i dx^j = g_{pq}du^p du^q$ .

Приведем примеры.

**Пример 6.7.** (1) Зададим двумерную поверхность в  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  в виде графика функции  $z = f(x, y)$ , введем на этой поверхности координаты  $(x, y)$ , и вычислим первую фундаментальную форму через тензорную запись. Для этого мы должны выразить дифференциалы  $dx, dy, dz$  функций  $x = x, y = y$  и  $z = f(x, y)$  через  $dx, dy$  и подставить в тензорную запись евклидовой метрики  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Имеем  $dx = dx, dy = dy, dz = f_x dx + f_y dy$ , поэтому

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx^2 + dy^2 + (f_x dx + f_y dy)^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2 = \\ &= (1 + f_x^2)dx^2 + f_x f_y dx dy + f_x f_y dy dx + (1 + f_y^2)dy^2, \end{aligned}$$

где последнее выражение мы написали для того, чтобы было видно, как получается матрица  $G = (g_{ij})$ : в силу симметричности первой фундаментальной формы, при вычислениях элементы  $g_{ij}$  и  $g_{ji}$  суммируются и приводятся к виду  $2g_{ij}$ .

(2) Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  поверхность Эннепера:

$$(x, y, z) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v, u^2 - v^2 \right).$$

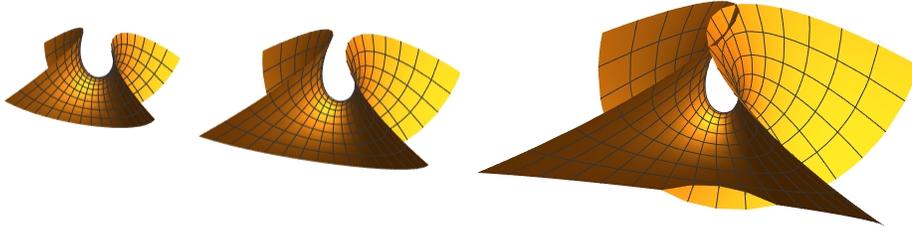


Рис. 6.1: Поверхность Эннепера.

Тогда

$$dx = (1 - u^2 + v^2)du + 2uv dv, \quad dy = -2uv du + (-1 + v^2 - u^2) dv, \quad dz = 2u du - 2v dv,$$

откуда

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= [(1 - u^2 + v^2)du + 2uv dv]^2 + [-2uv du + (-1 + v^2 - u^2)dv]^2 + [2u du - 2v dv]^2 = \\ &= (1 + u^2 + v^2)^2(du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

**Замечание 6.8.** Традиционно, тензорная запись как евклидовой метрики, так и индуцированной метрики, обозначает  $ds^2$  и говорится, что это — “бесконечно малая длина дуги” или “элемент дуги”. Поясним, что это означает на тензорном языке.

Рассмотрим в качестве поверхности  $M$  одномерную поверхность, т.е. кривую  $(M, \gamma)$ . Тогда касательная плоскость  $T_P M$  — это касательная прямая, и ограничение евклидовой метрики, точнее, соответствующая квадратичная форма, — это квадрат евклидовой длины касательных векторов. Если  $t$  — координата на кривой  $\gamma$ , то канонический базис состоит из одного вектора  $\gamma_t$  — вектора скорости кривой, поэтому  $ds^2(\gamma_t) = \|\gamma_t\|^2$  и, значит,  $ds(\gamma_t) = \|\gamma_t\|$  — длина вектора скорости. По теореме 1.24, длина кривой  $\gamma$  равна  $\int_I \|\dot{\gamma}\| dt$ , где  $I$  — интервал изменения параметра  $t$ . Иными словами, длина кривой равна  $\int_I ds(\gamma_t)$ , т.е. “бесконечной сумме длин бесконечно малых дуг”, составляющих кривую, или, если такие бесконечно малые дуги представлять “элементами” кривой, то — бесконечной сумме этих элементов.

## 6.2 Векторные поля и ковариантные дифференцирования

В лекциях, посвященных кривым, мы видели на примере формул Френе, что для геометрического описания кривых оказывается полезным дифференцировать векторы, гладко зависящие от точки кривой. Такие семейства векторов называются векторными полями. Продолжим изучение дифференцирований векторных полей в более общем случае поверхностей.

Начнем же мы с дифференцирования гладких функций. Пусть  $(M, \rho)$  — поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , и  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое отображение, называемое *функцией на  $M$* . Отметим, что функции можно поточечно, т.е. в каждой точке, складывать, умножать на числа и перемножать: в результате этих операций вновь получается функция. Таким образом, семейство  $\mathcal{F}(M)$  всех функций на поверхности  $M$  образует векторное пространство, на котором задана еще и билинейная операция умножения. Такая структура называется *алгеброй* на поле  $\mathbb{R}$  вещественных чисел. Отметим, что умножение функций на числа можно реализовать как умножение функций на постоянные функции, поэтому вместо алгебры можно пользоваться другим термином, а именно, рассматривать  $\mathcal{F}(M)$  как *кольцо*, где имеются лишь две операции: поточечные сложения и умножения функций.

Выберем произвольный касательный вектор  $\xi \in T_P M$ , параметрическую кривую  $\gamma$  на  $M$ , задающую  $\xi$ , т.е.  $\gamma(0) = P$  и  $(\rho \circ \gamma)'(0) = \xi$ , и назовем *производной функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$  в точке  $P$*  число  $\partial_\gamma f := (f \circ \gamma)'(0)$ . Пусть  $\delta$  — другая параметрическая кривая на поверхности  $M$ , задающая тот же  $\xi$ . Введем на поверхности  $M$  координаты  $u^1, \dots, u^k$ , и пусть  $(\xi^1, \dots, \xi^k)$  — координаты вектора  $\xi$  в каноническом базисе  $\rho_{u^i}$ , а  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^k(t))$  и  $\delta(t) = (\delta^1(t), \dots, \delta^k(t))$  — координатные записи кривых  $\gamma$  и  $\delta$  в координатах  $u^i$ . Тогда

$$\partial_\gamma f = f_{u^i} \dot{\gamma}^i(0) = f_{u^i} \xi^i = f_{u^i} \dot{\delta}^i(0) = \partial_\delta f.$$

Таким образом, мы видим, что  $\partial_\gamma f$  не зависит от выбора кривой, задающей  $\xi$ , поэтому производную  $\partial_\gamma f$  будем обозначать  $\partial_\xi f$  и называть *производной функции  $f$  вдоль вектора  $\xi$* . Отметим, что дифференцирование  $\partial_\xi: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  — линейное отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница: для любых  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  выполняется  $\partial_\xi(fg) = \partial_\xi f \cdot g(P) + f(P) \cdot \partial_\xi(f)$ . Также при фиксированном  $f$  отображение  $\xi \mapsto \partial_\xi f$  — линейное отображение из  $T_P M$  в  $\mathbb{R}$ , совпадающее с дифференциалом функции  $f$ .

Далее, каждое (гладкое) отображение  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *векторным полем вдоль  $M$* . Векторное поле называется *невыврожденным*, если оно всюду отлично от нуля.

Отметим, что, как и функции, поля можно поточечно складывать и умножать как на числа, так и на гладкие функции, определенные на  $M$ : в результате этих операций вновь получается поле. Таким образом, векторные поля образуют линейное пространство, для которого еще и определено умножение на элементы кольца функций. Снова можно считать, что умножение на числа реализовано как умножение на постоянные функции, т.е. ограничиться лишь операциями сложения полей и умножением на функции. В алгебре такой объект называется *модулем* над кольцом функций. Модуль векторных полей на  $M$  обозначим  $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ .

Если  $X, Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  — векторные поля вдоль  $M$ , и  $a, b \in \mathbb{R}$ , то поле  $aX + bY \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  называется *линейной комбинацией*  $X$  и  $Y$ ; если же  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  — гладкие функции на  $M$ , то  $fX + gY \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  называется *функциональной линейной комбинацией* этих полей.

Пусть  $\xi \in T_P M$  — касательный вектор, и  $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  — векторное поле вдоль  $M$ . Пусть  $\gamma$  — параметрическая кривая на  $M$ , задающая  $\xi$ , т.е.  $\gamma(0) = P$  и  $(\rho \circ \gamma)'(0) = \xi$ . *Ограничением поля  $X$  на кривую  $\gamma$*  называется гладкое отображение  $X \circ \gamma$ . *Производной  $\partial_\gamma X$  поля  $X$  вдоль  $\gamma$  в точке  $P$*  назовем вектор  $(X \circ \gamma)'(0) \in T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\delta$  — другая параметрическая кривая, задающая тот же  $\xi$ . Введем на  $M$  произвольные координаты  $u^1, \dots, u^k$ , и пусть  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$  — координаты вектора  $\xi$  по отношению к  $u^i$ , а  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^k(t))$  и  $\delta(t) = (\delta^1(t), \dots, \delta^k(t))$  — координатные записи этих кривых также в координатах  $u^i$ . Тогда

$$\partial_\gamma X = X_{u^i} \dot{\gamma}^i(0) = X_{u^i} \xi^i = X_{u^i} \dot{\delta}^i(0) = \partial_\delta X.$$

Таким образом, мы видим, что  $\partial_\gamma X$  не зависит от выбора кривой, задающей  $\xi$ , поэтому производную  $\partial_\gamma X$  будем обозначать  $\partial_\xi X$  и называть *производной поля  $X$  вдоль вектора  $\xi$  в точке  $P$* . Из явного вида производной мгновенно вытекает, что  $\partial_\xi$  сохраняет линейные комбинации векторных полей, т.е. является линейным отображением  $\partial_\xi: \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , а если  $f \in \mathcal{F}(M)$  — функция на  $M$ , и  $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  — векторное поле, то  $\partial_\xi(fX) = (\partial_\xi f)X + f(\partial_\xi X)$  (правило Лейбница для произведения  $fX$  функции  $f$  и векторного поля  $X$ ). Также при фиксированном  $X$  отображение  $\xi \mapsto \partial_\xi X$  линейно отображает  $T_P M$  в  $\mathbb{R}^n$  и совпадает с дифференциалом отображения  $X$ .

Если  $X, Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  — векторные поля вдоль  $M$ , то для них определена функция  $\langle X, Y \rangle$ , равная в каждой точке  $P \in M$  скалярному произведению векторов  $\langle X(P), Y(P) \rangle$ . Из явной формулы для скалярного произведения в  $\mathbb{R}^n$  и дифференцирования мгновенно вытекает правило Лейбница:  $\partial_\xi \langle X, Y \rangle = \langle \partial_\xi X, Y \rangle + \langle X, \partial_\xi Y \rangle$ .

Для каждой точки  $P \in M$  будем обозначать  $N_P M$  ортогональное дополнение к  $T_P M$  и называть *нормальным пространством к  $M$  в точке  $P$* . Так как  $T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n = T_P M \oplus N_P M$ , определены ортогональные проекции пространства  $T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$  на слагаемые  $T_P M$  и  $N_P M$ . Для произвольного вектора  $v \in T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$  обозначим  $v^T \in T_P M$  и  $v^\perp \in N_P M$  образы этих ортогональных проекций, тогда  $v = v^T + v^\perp$ . В частности, для любого векторного поля  $X$  вдоль поверхности  $M$  и любого касательного вектора  $\xi \in T_P M$  имеем  $\partial_\xi X = (\partial_\xi X)^T + (\partial_\xi X)^\perp$ .

Если в каждой точке  $P \in M$  выполняется  $X(P) \in T_P M$ , то поле  $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  называется *касательным*, а если для каждой точки  $P \in M$  выполняется  $X(P) \in N_P M$ , то поле  $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  называется *нормальным*. Отметим, что семейства всех касательных (всех нормальных) векторных полей замкнуты относительно линейных комбинаций и умножений на функции, т.е. эти семейства образуют подмодули в модуле  $\bar{\mathfrak{X}}(M)$  всех векторных полей. Модуль касательных полей на  $M$  обозначим  $\mathfrak{X}(M)$ , а модуль нормальных будем обозначать  $\mathcal{N}(M)$ .

**Важное наблюдение:** Если  $X$  — касательное или нормальное векторное поле, то вектор  $\partial_\xi X$  не обязан быть касательным или нормальным (приведите примеры). *Ковариантной производной касательного поля  $X \in \mathfrak{X}(M)$  вдоль  $\xi \in T_P M$*  назовем касательное поле  $(\partial_\xi X)^T \in \mathfrak{X}(M)$  и обозначим его  $\nabla_\xi X$ . *Ковариантной производной нормального поля  $X \in \mathcal{N}(M)$  вдоль  $\xi \in T_P M$*  назовем нормальное поле  $(\partial_\xi X)^\perp \in \mathcal{N}(M)$  и обозначим его также  $\nabla_\xi X$ . Определим еще *ковариантную производную  $\nabla_\xi f$  функции  $f$* , положив ее равной производной  $\partial_\xi f$ .

Из свойств производной  $\partial_\xi$  и линейности ортогональных проекций мгновенно получаем, что ковариантная производная  $\nabla$  также является линейным отображением, линейна по  $\xi$  и удовлетворяет правилу Лейбница при дифференцировании произведения поля на функцию. Что касается правила Лейбница для скалярного произведения полей, то его доказательство чуть менее очевидно, поэтому мы это свойство докажем.

**Предложение 6.9.** Пусть  $X, Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  — одновременно или касательные, или нормальные векторные поля вдоль поверхности  $M$ , определенные в окрестности точки  $P \in M$ , и  $\xi \in T_P M$ . Тогда ковариантная производ-

ная, примененная к скалярному произведению  $\langle X, Y \rangle$  этих полей, удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\nabla_\xi \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_\xi X, Y \rangle + \langle X, \nabla_\xi Y \rangle.$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $X$  и  $Y$  — касательные векторные поля, тогда

$$\langle \partial_\xi X, Y \rangle = \langle (\partial_\xi X)^T + (\partial_\xi X)^\perp, Y \rangle = \langle (\partial_\xi X)^T, Y \rangle = \langle \nabla_\xi X, Y \rangle.$$

Аналогично,  $\langle X, \partial_\xi Y \rangle = \langle X, \nabla_\xi Y \rangle$ . Осталось воспользоваться правилом Лейбница для  $\partial_\xi$ :

$$\nabla_\xi \langle X, Y \rangle = \partial_\xi \langle X, Y \rangle = \langle \partial_\xi X, Y \rangle + \langle X, \partial_\xi Y \rangle = \langle \nabla_\xi X, Y \rangle + \langle X, \nabla_\xi Y \rangle.$$

Доказательство для нормальных полей — такое же.  $\square$

**Замечание 6.10.** Все введенные производные вдоль касательного вектора  $\xi \in T_P M$  зависят только от значений дифференцируемых полей в (любой) окрестности точки  $P$ . Напомним, что, в силу замечания 4.24, на множестве  $M$  задана естественная топология. Векторное поле, определенное не на всем  $M$ , а только на окрестности  $U^P$  точки  $P$ , называется *локальным векторным полем*. Для дальнейшего нам понадобится следующее техническое утверждение.

**Предложение 6.11.** Пусть  $P$  — точка  $k$ -мерной поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$  и  $\eta \in T_{\rho(P)} \mathbb{R}^n$  — произвольный вектор. Тогда

- (1) если  $\eta \in T_P M$ , то существует касательное векторное поле  $X \in \mathfrak{X}(M)$  такое, что  $X(P) = \eta$ ;
- (2) если  $\eta \in N_P M$ , то существует окрестность  $U^P \subset M$  и в ней локальное нормальное векторное поле  $X \in \mathcal{N}(U^P)$  такое, что  $X(P) = \eta$ ;
- (3) если вектор  $\eta$  отличен от нуля, то поле  $X$  можно выбрать нигде не нулевым, т.е. невырожденным.

*Доказательство.* Если  $\eta = 0$ , то продолжим  $\eta$  до нулевого векторного поля  $X$ , которое является одновременно и касательным, и нормальным.

Пусть теперь  $\eta \neq 0$ . Будем сразу строить невырожденное поле  $X$ . В случае  $\eta \in T_P M$  введем на  $M$  произвольные координаты  $(u^1, \dots, u^k)$ , разложим  $\eta$  по каноническому базису  $\rho_{u^i}$  пространства  $T_P M$ , получим  $\eta = \eta^i \rho_{u^i}$ , где, в силу условия  $\eta \neq 0$ , не все числа  $\eta^i$  равны нулю. Продолжим это разложение до такого же во все точки поверхности  $M$ . Полученное векторное поле будет невырожденным касательным.

В случае  $\eta \in N_P M$ , пусть  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  — параметризация поверхности  $M$  и  $P_\alpha = \varphi_\alpha(P)$ . Воспользуемся теоремой 4.16 и представим в некоторой окрестности  $U^{P_\alpha} \subset \Omega_\alpha$  точки  $P_\alpha$  параметрическую поверхность  $\rho \circ \varphi_\alpha^{-1}: U^{P_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$  в неявном виде, т.е. как решение системы уравнений  $\{F^i(x^1, \dots, x^n) = 0\}_{i=1}^{n-k}$ . Положим  $U^P = \varphi_\alpha^{-1}(U^{P_\alpha})$ . Тогда для каждой точке  $Q \in U^P$  векторы  $(F_{x^1}^i, \dots, F_{x^n}^i)|_{\rho(Q)}$  линейно независимы и ортогональны  $T_Q M$ , т.е. образуют базис нормального пространства  $N_Q M$ . Теперь поступим аналогично предыдущему решению: разложим  $\eta$  по этому базису в точке  $\rho(P)$  и продолжим тем же образом разложение на все  $N_Q M$ ,  $Q \in U^P$ . Доказательство закончено.  $\square$

## Упражнения к главе 6

**Упражнение 6.1.** Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — базис трехмерного векторного пространства  $V$ , а  $e^1, e^2, e^3$  — двойственный базис.

- (1) Вычислите значение тензора  $T = e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes e^2$  на паре  $(e^1 + e^2 + e^3, e_1 + 5e_2 + 4e_3)$ .
- (2) Вычислите значение тензора  $T = e^2 \otimes e^1 + (e^1 + 2e^2 + 3e^3) \cdot e^2$  на паре  $(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 5e_2 + 4e_3)$ .

**Упражнение 6.2.** Используя тензорную запись, вычислите первую фундаментальную форму катеноида, заданного параметрически так:

$$\rho(z, \varphi) = \left( a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos \varphi, a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin \varphi, z \right).$$

**Упражнение 6.3.** Пусть  $M$  — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в  $\mathbb{R}^3$ , заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, \theta) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta), \quad 0 < b < a, \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим векторные поля  $X$  и  $Y$  вдоль тора  $M$ : поле  $X$  — касательное, имеющее в координатах  $\varphi, \theta$  координаты  $(1, 0)$ , а поле  $Y$  составлено из единичных внешних нормалей. Найдите ковариантные производные этих полей во всех точках тора и вдоль всех касательных векторов.

**Упражнение 6.4.** Пусть  $M(n)$  — векторное пространство всех матриц размера  $n \times n$ . Для  $A = (a_{ij}) \in M(n)$  обозначим  $\operatorname{tr} A$  след матрицы  $A$ , т.е.  $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

- (1) Для  $A, B \in M(n)$  покажите, что  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ .
- (2) Записывая последовательные строки матрицы в одну строку, получим изоморфизм между  $M(n)$  и  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Убедитесь, что стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{n^2}$  в матричном виде запишется так: для  $A, B \in M(n)$  имеем
 
$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t) = \operatorname{tr}(A^t B) = \operatorname{tr}(B^t A) = \operatorname{tr}(B A^t).$$
- (3) Пусть  $C \in O(n)$  — ортогональная матрица, и  $A, B \in M(n)$ . Покажите, что  $X \mapsto CX$  является ортогональным преобразованием в  $M(n)$ , т.е. для любых  $A, B \in M(n)$  выполняется  $\langle CA, CB \rangle = \langle A, B \rangle$ .
- (4) Покажите, что  $O(n)$  лежит в сфере с центром в 0 и радиусом  $\sqrt{n}$ .

**Упражнение 6.5.** Пусть  $M = O(n)$  — неявная поверхность в  $\mathbb{R}^{n^2} = M(n)$ , состоящая из всех ортогональных матриц размера  $n \times n$ .

- (1) Покажите, что касательное пространство в единице  $E \in M$  совпадает с подпространством всех кососимметричных матриц.
- (2) Покажите, что нормальное пространство в единице  $E \in M$  совпадает с подпространством всех симметричных матриц.
- (3) Покажите, что касательное пространство в  $C \in M$  совпадает с  $C(T_E M)$ .
- (4) Покажите, что нормальное пространство в  $C \in M$  совпадает с  $C(N_E M)$ .
- (5) Пусть  $A \in T_E M(n)$  — произвольная матрица, и  $X$  — векторное поле на  $M$ , заданное так:  $X(C) = CA$ ,  $C \in M$ . Вычислите  $\partial_\xi X$ , где  $\xi \in T_C M$ .
- (6) Пусть  $A \in T_E M$  — произвольная кососимметричная матрица, и  $X(C) = CA$ ,  $C \in M$ , — векторное поле на  $M$ . Убедитесь, что  $X$  — касательное поле к  $M$  и найдите  $\nabla_\xi X$  при каждом  $\xi \in T_C M$ .
- (7) Пусть  $B \in N_E M$  — произвольная симметричная матрица, и  $X(C) = CB$ ,  $C \in M$ , — векторное поле на  $M$ . Убедитесь, что  $X$  — нормальное поле к  $M$  и найдите  $\nabla_\xi X$  при каждом  $\xi \in T_C M$ .

# Лекция 7

## Параллельный перенос

**План.** Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму, символы Кристоффеля, симметричность символов Кристоффеля по нижним индексам, пример вычисления символов Кристоффеля, векторные поля вдоль кривых, ковариантные производные полей вдоль кривых, запись ковариантной производной векторного поля вдоль кривой через символы Кристоффеля, параллельные векторные поля, параллельный перенос, уравнения параллельного переноса, теорема существования и единственности параллельного переноса данного вектора вдоль данной кривой, пример вычисления параллельного переноса, сохранение скалярного произведения при параллельном переносе, изометричность параллельного переноса, евклидовы координаты и евклидова метрика, параллельный перенос в евклидовых координатах, примеры цилиндра и конуса, касающиеся поверхности, параллельный перенос вдоль кривой касания поверхностей, вычисление параллельного переноса вдоль параллелей на стандартной двумерной сфере, определение геодезических, уравнение геодезических, постоянство длины вектора скорости, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки с данным вектором скорости, сохранение геодезических при аффинных заменах параметра.

В этой лекции мы выразим ковариантные производные касательных векторных полей на поверхности через первую фундаментальную форму поверхности и применим полученные формулы для изучения аналога параллельного переноса. А именно, мы определим параллельный перенос касательного вектора вдоль кривой на поверхности. В дальнейшем мы введем в рассмотрение кривые, у которых поле скоростей параллельно. Такие кривые, являющиеся аналогами прямых, называются геодезическими.

### 7.1 Выражение ковариантной производной касательных полей через первую фундаментальную форму

Пусть на поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$  введены координаты  $u^1, \dots, u^m$ , в которых матрица первой фундаментальной формы имеет компоненты  $g_{ij}$ . Через  $g^{ij}$  будем обозначать компоненты матрицы, обратной к  $(g_{ij})$ .

Пусть  $X$  — касательное векторное поле к поверхности  $M$ , а  $(X^1, \dots, X^m)$  — координатное представление  $X$ . Выберем произвольную точку  $P \in M$  и произвольный касательный вектор  $\xi \in T_P M$  с координатным представлением  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ . Мы хотим записать координаты поля  $\nabla_\xi X$  через координаты  $X^i$ ,  $\xi^i$  и первую фундаментальную форму поверхности  $M$ .

Рассмотрим гладкую параметрическую кривую  $\gamma(t)$  на  $M$ , задающую  $\xi$ , а именно, пусть  $P = \gamma(0)$  и  $\xi = (\rho \circ \gamma)'(0)$ . Если  $(u^1(t), \dots, u^m(t))$  — координатное представление кривой  $\gamma$ , то  $\xi^i = \dot{u}^i(0) =: \dot{u}^i$ . Тогда

$$\partial_\xi X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ X^i(u^1(t), \dots, u^m(t)) \rho_{u^i}(u^1(t), \dots, u^m(t)) \right] = X^i_{u^j} \dot{u}^j \rho_{u^i} + X^i \rho_{u^i u^j} \dot{u}^j.$$

Так как  $\nabla_\xi X = (\partial_\xi X)^T$ , то, чтобы получить координаты поля  $\nabla_\xi X$ , нам остается разложить вектор  $(\rho_{u^i u^j})^T$  по каноническому базису  $\rho_{u^k}$ . Пусть  $(\rho_{u^i u^j})^T = \Gamma^k_{ij} \rho_{u^k}$ . Умножим скалярно последнее равенство на  $\rho_{u^p}$  и заметим, что левая часть полученной формулы равна

$$\langle (\rho_{u^i u^j})^T, \rho_{u^p} \rangle = \langle \rho_{u^i u^j}, \rho_{u^p} \rangle = \langle \rho_{u^i}, \rho_{u^p} \rangle_{u^j} - \langle \rho_{u^i}, \rho_{u^p u^j} \rangle = (g_{ip})_{u^j} - \langle \rho_{u^i}, \rho_{u^p u^j} \rangle,$$

а правая имеет вид

$$\langle \Gamma^k_{ij} \rho_{u^k}, \rho_{u^p} \rangle = \Gamma^k_{ij} g_{kp}.$$

Вычислим  $\langle \rho_{u^i u^j}, \rho_{u^p} \rangle$  через производные коэффициентов первой фундаментальной формы. Для этого запишем три уравнения

$$\begin{aligned}(g_{ip})_{u^j} &= \langle \rho_{u^i u^j}, \rho_{u^p} \rangle + \langle \rho_{u^p u^j}, \rho_{u^i} \rangle, \\ (g_{jp})_{u^i} &= \langle \rho_{u^j u^i}, \rho_{u^p} \rangle + \langle \rho_{u^p u^i}, \rho_{u^j} \rangle, \\ (g_{ij})_{u^p} &= \langle \rho_{u^i u^p}, \rho_{u^j} \rangle + \langle \rho_{u^j u^p}, \rho_{u^i} \rangle,\end{aligned}$$

сложим первые два, и вычтем из них третье, в результате получим

$$(g_{ip})_{u^j} + (g_{jp})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p} = 2\langle \rho_{u^i u^j}, \rho_{u^p} \rangle = 2\Gamma_{ij}^k g_{kp}.$$

Поделим полученное равенство на 2, умножим на  $g^{pq}$  и просуммируем по  $p$ . Так как  $g_{kp}g^{pq} = \delta_k^q$ , то

$$\Gamma_{ij}^q = \frac{1}{2}g^{qp}[(g_{ip})_{u^j} + (g_{pj})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p}]$$

(эту формулу мы записали в более запоминающейся форме, воспользовавшись симметричностью  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$ ).

Функции  $\Gamma_{ij}^q$  называются *символами Кристоффеля*. Таким образом,

$$\nabla_\xi X = X_{u^j}^i \dot{u}^j \rho_{u^i} + \Gamma_{ij}^k X^i \dot{u}^j \rho_{u^k} = (X_{u^j}^k + \Gamma_{ij}^k X^i) \dot{u}^j \rho_{u^k} = (X_{u^j}^k + \Gamma_{ij}^k X^i) \xi^j \rho_{u^k}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 7.1.** Пусть на поверхности  $(M, \rho)$  заданы координаты  $u^1, \dots, u^m$ , а  $X$  — касательное поле,  $X = X^i \rho_{u^i}$ . Выберем произвольные  $P \in M$  и  $\xi = \xi^i \rho_{u^i} \in T_P M$ . Тогда ковариантная производная поля  $X$  по направлению вектора  $\xi$  вычисляется так:

$$\nabla_\xi X = (X_{u^j}^k + \Gamma_{ij}^k X^i) \xi^j \rho_{u^k},$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля, которые выражаются через коэффициенты  $g_{ij}$  первой фундаментальной формы и компоненты  $g^{ij}$  матрицы, обратной к  $(g_{ij})$ , по формулам

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kp}[(g_{ip})_{u^j} + (g_{pj})_{u^i} - (g_{ij})_{u^p}].$$

**Замечание 7.2.** Обратите внимание, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, т.е.  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . В следующем семестре мы будем иметь дело с более общей конструкцией ковариантного дифференцирования, в которой символы Кристоффеля могут быть не связанными с метрикой, а также не обязаны быть симметричными.

**Замечание 7.3.** Для удобства вычислений, полагают

$$\nabla_j X^k = X_{u^j}^k + \Gamma_{ij}^k X^i \quad \text{и} \quad \nabla_\xi X^k = \xi^j \nabla_j X^k,$$

тогда  $\nabla_\xi X = (\nabla_\xi X^k) \rho_{u^k}$ .

Обратите внимание, что ковариантная производная совпадает с соответствующей частной производной, если все  $\Gamma_{ij}^k$  равны нулю.

**Пример 7.4.** Предположим, что на поверхности  $M$  заданы координаты  $u^1, \dots, u^m$ , в которых матрица первой фундаментальной формы скалярна, т.е. диагональна, и все диагональные элементы равны между собой и равны функции  $\lambda(u^1, \dots, u^m)$ . Вычислим символы Кристоффеля.

Имеем  $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ ,  $g^{ij} = \delta^{ij} / \lambda$ , поэтому

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2\lambda} \delta^{kp} (\lambda_{u^j} \delta_{ip} + \lambda_{u^i} \delta_{pj} - \lambda_{u^p} \delta_{ij}) = \frac{1}{2\lambda} (\lambda_{u^j} \delta_{ik} + \lambda_{u^i} \delta_{kj} - \lambda_{u^k} \delta_{ij}).$$

Таким образом, если все три индекса  $i, j, k$  попарно различны, то  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Вот полный список символов Кристоффеля, которые могут быть ненулевыми (если встречаются два разных индекса, мы считаем их не совпадающими):

$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{\lambda_{u^k}}{2\lambda}, \quad \Gamma_{ik}^k = \Gamma_{ki}^k = \frac{\lambda_{u^i}}{2\lambda}, \quad \Gamma_{kk}^k = \frac{\lambda_{u^k}}{2\lambda}.$$

Рассмотрим частный случай, а именно, когда двумерная поверхность параметризована верхней полуплоскостью со стандартными координатами  $x, y$ , а метрика скалярна и  $\lambda = 1/y^2$  (метрика плоскости Лобачевского).

В этом случае символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

**Задача 7.5.** Выясните, как меняются символы Кристоффеля при переходе в другие координаты.

## 7.2 Векторные поля вдоль кривых, параллельный перенос

Пусть  $\gamma: I \rightarrow M$  — гладкая параметрическая кривая на поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$ . По определению,  $\rho \circ \gamma$  — гладкое отображение из  $I$  в  $\mathbb{R}^n$ . Векторным полем вдоль  $\gamma$  назовем произвольное гладкое отображение  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . При этом, пользуясь отождествлением касательных пространств к  $\mathbb{R}^n$  с помощью параллельного переноса, будем считать, что  $X(t)$  содержится в касательном пространстве  $T_{(\rho \circ \gamma)(t)}\mathbb{R}^n$ . Так как мы не предполагаем, что кривая  $\gamma$  не имеет самопересечений, в одной и той же точке поверхности может быть задано несколько векторов поля  $X$ , соответствующих разным параметрам  $t$ .

**Замечание 7.6.** В традиционных курсах кривую  $\gamma$  на многообразии  $M$  принято отождествлять с ее координатной записью, что существенно упрощает формулы. В нашем случае, когда  $(M, \rho)$  — поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , имеется две координатных записи: внутренняя, т.е. в координатах на поверхности (фактически, запись отображения  $\varphi_\alpha \circ \gamma$ , где  $\varphi_\alpha$  задает координаты) и внешняя, т.е. запись в декартовых координатах объемлющего пространства  $\mathbb{R}^n$  отображения  $\rho \circ \gamma$ . **Начиная с этого места, мы будем отождествлять  $\gamma$  с отображением  $\rho \circ \gamma$ , в частности, мы будем писать  $\dot{\gamma}$  вместо  $(\rho \circ \gamma)'$ .**

**Замечание 7.7.** Пусть, как и выше,  $X$  — векторное поле вдоль гладкой кривой  $\gamma$ , лежащей на поверхности  $M$ , и  $\xi \in T_{\gamma(t)}M$ . Тогда, вообще говоря, производная  $\partial_\xi X$  не определена. Однако, если  $\xi$  — вектор скорости кривой  $\gamma$  (или коллинеарный ему вектор), то производную уже определить можно, так как  $\partial_{\dot{\gamma}} X = \dot{X}$ . В частности, для касательного и нормального полей определены ковариантные производные  $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ . Важным частным случаем является поле  $X = \dot{\gamma}$  скоростей кривой  $\gamma$ : ковариантная производная  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  будет в дальнейшем играть важную роль.

Отметим, что при выводе теоремы 7.1 мы на самом первом шаге могли не дифференцировать векторное поле  $X$  по  $u^j$ , а сразу продифференцировать по  $t$ , получив

$$\nabla_\xi X = \left( \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^i \xi^j \right) \rho_{u^k}.$$

Эта формула уже зависит лишь от значений поля  $X$  вдоль кривой  $\gamma$ , задающей касательный вектор  $\xi$ . Тем самым, мы приходим к следующему результату.

**Следствие 7.8.** Пусть на поверхности  $(M, \rho)$  введены координаты  $u^1, \dots, u^m$ . Рассмотрим на поверхности  $M$  произвольную гладкую параметрическую кривую  $\gamma$  с координатным представлением  $(u^1(t), \dots, u^m(t))$  и определенное вдоль  $\gamma$  касательное векторное поле  $X(t)$  с координатным представлением  $(X^1(t), \dots, X^m(t))$ . Тогда ковариантная производная поля  $X$  по вдоль вектора  $\dot{\gamma}$  корректно определена и вычисляется так:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \left( \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^i \dot{u}^j \right) \rho_{u^k},$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля.

### 7.2.1 Параллельные векторные поля и параллельный перенос вдоль кривых

Обобщим понятие параллельного векторного поля в пространстве  $\mathbb{R}^n$  на случай поверхностей. Для этого заменим, что в  $\mathbb{R}^n$  параллельность эквивалентна тому, что поле не меняется вдоль любой кривой, т.е. производная этого поля по направлению кривой равна нулю. На поверхности вместо обычных производных естественно рассматривать ковариантные.

**Определение 7.9.** Касательное векторное поле  $X$  вдоль гладкой параметрической кривой  $\gamma$  называется *параллельным*, если  $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ . Также говорят, что векторы параллельного поля получаются из произвольного одного *параллельным переносом*.

Следствие 7.8 позволяет мгновенно написать систему уравнений, решения которой — параллельные векторные поля.

**Следствие 7.10.** Пусть  $M$  — поверхность с координатами  $u^1, \dots, u^m$ , на которой заданы гладкая параметрическая кривая  $\gamma$  с координатным представлением  $(u^1(t), \dots, u^m(t))$  и касательное векторное поле  $X$  с координатным представлением  $(X^1(t), \dots, X^m(t))$ . Тогда поле  $X$  параллельно, если и только если оно удовлетворяет уравнению

$$(7.1) \quad \frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^i \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Система (7.1) называется *уравнениями параллельного переноса*. Заметим, что уравнения (7.1) образуют систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому к ним применима теорема существования, единственности и продолжения.

**Теорема 7.11.** Пусть  $M$  — поверхность, а  $\gamma: I \rightarrow M$  — гладкая параметрическая кривая на  $M$ . Тогда для каждого  $t_0 \in I$  и касательного вектора  $\xi \in T_{\gamma(t_0)}M$  существует и единственно параллельное векторное поле  $X$  вдоль всей кривой  $\gamma$ , удовлетворяющее начальному условию  $X(t_0) = \xi$ .

**Пример 7.12.** В примере 7.4 мы вычислили символы Кристоффеля на двумерной поверхности, параметризованной верхней полуплоскостью с координатами  $x, y$ , в которой метрика скалярна и диагональный элемент равен  $\lambda = 1/y^2$ . Запишем теперь уравнение параллельного переноса:

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{y}X^1\dot{y} - \frac{1}{y}X^2\dot{x} = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{y}X^1\dot{x} - \frac{1}{y}X^2\dot{y} = 0. \end{cases}$$

Опишем, как выглядит параллельный перенос вдоль кривой  $y = \text{const} =: c$ , параметризованной так:  $x = t$ ,  $y = c$ . Напишем уравнения переноса вдоль этой кривой:

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{c}X^2 = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{c}X^1 = 0. \end{cases}$$

Подставляя выражение  $X^2$  из первого уравнения во второе уравнение, получаем  $\ddot{X}^1 + \frac{1}{c^2}X^1 = 0$ , откуда  $X^1 = a \cos \frac{t}{c} + b \sin \frac{t}{c}$ , и, из первого уравнения,  $X^2 = -a \sin \frac{t}{c} + b \cos \frac{t}{c}$ . Запишем решение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{c} & \sin \frac{t}{c} \\ -\sin \frac{t}{c} & \cos \frac{t}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при движении вдоль кривой  $y = c$  в сторону возрастания  $x$  параллельное поле получается равномерным вращением вектора  $(a, b)$  в отрицательном направлении с частотой  $1/c$ .

Пусть теперь промежуток  $I = [a, b]$  — отрезок, тогда каждому начальному условию  $\xi \in T_{\gamma(a)}M$  можно поставить в соответствие касательный вектор  $T_\gamma(\xi) \in T_{\gamma(b)}M$ , который получается так: рассмотрим единственное параллельное векторное поле  $X$  вдоль  $\gamma$  с начальным условием  $X(a) = \xi$ , тогда  $T_\gamma(\xi) := X(b)$ . Полученное отображение  $T_\gamma: T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$  называется *параллельным переносом из  $\gamma(a)$  в  $\gamma(b)$  вдоль кривой  $\gamma$* . Из линейности уравнений параллельного переноса вытекает, что линейные комбинации решений также являются решениями, поэтому параллельный перенос — линейное отображение.

**Предложение 7.13.** Пусть  $X$  и  $Y$  — параллельные векторные поля вдоль кривой  $\gamma$ , тогда скалярное произведение векторов таких полей постоянно вдоль кривой. В частности, параллельное поле состоит из векторов одной и той же длины, а угол между векторами параллельных полей один и тот же.

*Доказательство.* Имеем

$$\langle X, Y \rangle' = \partial_\gamma \langle X, Y \rangle = \langle \partial_\gamma X, Y \rangle + \langle X, \partial_\gamma Y \rangle = \langle \nabla_\gamma X, Y \rangle + \langle X, \nabla_\gamma Y \rangle = 0,$$

что и требовалось.  $\square$

**Следствие 7.14.** Параллельный перенос является линейной изометрией касательных пространств.

**Пример 7.15.** Предположим, что в некоторых координатах  $u^1, \dots, u^m$  на поверхности  $M$  все символы Кристоффеля равны нулю. Тогда уравнение параллельного переноса имеет вид  $dX/dt = 0$ , т.е. при параллельном переносе вдоль любой кривой координаты параллельного поля  $X$  не меняются.

**Задача 7.16.** Покажите, что если символы Кристоффеля тождественно равны нулю, то индуцированная метрика — евклидова.

Таким образом, в соответствии с задачей 7.16, координаты  $u^i$  — евклидовы. Частным случаем поверхностей в  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой являются цилиндры. В частности, если на цилиндре осуществить параллельный перенос вдоль замкнутой кривой, то угол между векторами поля и направляющими изменяться не будет. Другим примером поверхности с евклидовой метрикой являются стандартные конусы: при разрезании вдоль направляющей каждый такой конус разворачивается в сектор круга, и на этой развертке координаты параллельного поля уже постоянны (введите соответствующие координаты). Последнее позволяет вычислить, на сколько повернется вектор при параллельном переносе на стандартном конусе вдоль основания конуса.

Пусть  $(M, \rho)$  и  $(N, \sigma)$  — поверхности одной размерности в  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что эти поверхности *пересекаются в точке*  $x \in \mathbb{R}^n$ , если для некоторых  $P \in M$  и  $Q \in N$  выполняется  $\rho(P) = \sigma(Q) = x$ . Эти поверхности назовем *касающимися в точке*  $x$ , если  $T_Q M = T_P N \subset T_x \mathbb{R}^n$ . Если  $\gamma$  — кривая в  $\mathbb{R}^n$ , лежащая в пересечении поверхностей, то будем говорить, что эти поверхности *пересекаются вдоль кривой*  $\gamma$ . Если при это во всех точках кривой  $\gamma$  поверхности касаются друг друга, то говорит, что эти поверхности *касаются вдоль кривой*  $\gamma$ .

Напомним, что ковариантная производная векторного поля вдоль вектора скорости кривой равна производной поля по параметру кривой, ортогонально спроецированной на касательную плоскость к поверхности, поэтому ковариантная производная поля, определенного вдоль кривой, по которой поверхность касаются, вычисленная по направлению векторов скоростей этой кривой, одна и та же, если считать ее вдоль каждой из поверхностей. Отсюда мгновенно вытекает следующий результат.

**Следствие 7.17.** *Если поверхности одной размерности касаются вдоль кривой, то общее касательное векторное поле вдоль этой кривой одновременно параллельно или не параллельно по отношению к каждой из поверхностей.*

**Пример 7.18.** Рассмотрим стандартную двумерную сферу  $S^2$  в  $\mathbb{R}^3$  и вычислим, на сколько повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль параллели. Если параллель является экватором, то рассмотрим цилиндр, касающийся сферы вдоль этого экватора. Если же параллель отлична от экватора, рассмотрим конус, касающийся сферы вдоль этой параллели. Так как параллельные переносы вдоль касающихся поверхностей одинаковы, и мы знаем, как устроены параллельные переносы вдоль цилиндров и конусов, мы, тем самым, знаем и как устроен параллельный перенос вдоль параллели на сфере.

## Упражнения к главе 7

**Упражнение 7.1.** Пусть  $m$ -мерная поверхность  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  задана в виде графика отображения  $(x^{m+1}, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^m)$ , причем в точке  $P = (0, \dots, 0)$  координатное подпространство, натянутое на первые  $m$  базисных векторов  $\mathbb{R}^n$ , касается  $M$ . Вычислите, чему равны символы Кристоффеля в координатах  $x^1, \dots, x^m$  в точке  $P$ .

**Упражнение 7.2.** Пусть  $M$  — бесконечнолистная намотка на двумерный тор в  $\mathbb{R}^3$ , заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, \theta) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta), \quad 0 < b < a, \quad (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ .

**Упражнение 7.3.** Пусть  $M$  — бесконечнолистная намотка на поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$ , заданная параметрически так:

$$\rho(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z),$$

где  $f$  — гладкая положительная функция. Вычислите символы Кристоффеля, запишите уравнения параллельного переноса и выясните, на какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль кривой  $z = z_0$ , где  $z_0$  — критическая точка функции  $f$ .

**Упражнение 7.4.** Пусть в  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  задана регулярная кривая

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0), \quad t \in (a, b).$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность  $\rho(t, z) = (x(t), y(t), z)$ . Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

**Упражнение 7.5.** Пусть  $\gamma(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , — регулярная кривая на стандартной сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим коническую поверхность  $\rho(u, t) = u\gamma(t)$ ,  $u > 0$ . Выясните, как устроен параллельный перенос вдоль кривых этой поверхности.

**Упражнение 7.6.** Пусть в  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  задан конус  $x^2 + y^2 = az^2$ ,  $a > 0$ . Рассмотрим сечение этого конуса плоскостью  $z = 1$ . Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль этого сечения.

**Упражнение 7.7.** Пусть  $S^2$  — стандартная двумерная сфера в  $\mathbb{R}^3$ . Вычислите, на какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль параллели сферы  $S^2$ .

**Упражнение 7.8.** Покажите, что если символы Кристоффеля тождественно равны нулю, то индуцированная метрика — евклидова.

**Упражнение 7.9.** Выясните, как меняются символы Кристоффеля при переходе в другие координаты.

**Упражнение 7.10.** Пусть  $g_{ij}$  — компоненты первой фундаментальной формы поверхности  $M$ , а  $(X^1, \dots, X^m)$  — координатная запись касательного векторного поля  $X$  в некоторых координатах  $u^1, \dots, u^m$ . Положим  $g = \det(g_{ij})$ . Докажите следующие формулы:

$$(1) \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2}(\ln g)_{uj} = (\ln \sqrt{g})_{uj};$$

$$(2) \nabla_i X^i = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g} X^j)_{uj}.$$

# Лекция 8

## Геодезические

**План.** Определение геодезических, уравнение геодезических, постоянство длины вектора скорости, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки с данным вектором скорости, сохранение геодезических при аффинных заменах параметра, существование и однозначная определенность геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении, сохранение геодезических при изометрии, сохранение угла между вектором скорости геодезической и вектором параллельного поля, операции над поверхностями, переход к подобласти, произведение поверхностей, касательное расслоение, касательный вектор касательного расслоения, теорема о зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начального условия, ее применение к случаю отображения касательного расслоения поверхности на саму поверхность, заданного с помощью геодезических, экспоненциальное отображение, локальная диффеоморфность экспоненциального отображения, нормальные окрестности, радиальные геодезические, “конструкция” однопараметрического семейства радиальных геодезических и ее свойства, лемма Гаусса о перпендикулярности геодезической соответствующей геодезической сфере, лемма об оценке длины кривой, лежащей в нормальной окрестности, следствие про радиальную геодезическую,  $\varepsilon$ -вполне нормальные окрестности, теорема существования таких окрестностей, существование и единственность кратчайших геодезических в  $\varepsilon$ -вполне нормальной окрестности, определение выпуклой окрестности, теорема Хопфа–Ринова.

В этой лекции мы будем изучать кривые, у которых поле скоростей параллельно. Такие кривые, являющиеся аналогами прямых, называются геодезическими.

### 8.1 Геодезические

Определим теперь кривые на поверхностях, являющиеся аналогами прямых. С физической точки зрения, прямая — траектории равномерного движения, т.е. движения с нулевым ускорением. Для кривых на поверхности аналогом ускорения является “ковариантное ускорение”, т.е. ортогональная проекция ускорения на пространство, касательное к поверхности. Иными словами, искомые кривые представляют собой траектории движения по поверхности, при котором тангенциальная составляющая ускорения равна нулю. Последнее равносильно тому, что ускорение (посчитанное в  $\mathbb{R}^n$ ) перпендикулярно поверхности. Заметим, что отсутствие тангенциальной составляющей ускорения приводит также к тому, что длина вектора скорости не меняется, т.е. искомые кривые должны быть параметризованы равномерно (ниже мы формально докажем этот факт).

Итак, кривая  $\gamma$  на поверхности  $(M, \rho)$  называется *геодезической*, если в каждой точке кривой  $\gamma$  выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

- ускорение  $\ddot{\gamma}(s)$  перпендикулярно  $T_{\gamma(s)}M$ ;
- $(\partial_i \dot{\gamma})^T = 0$ ;
- $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ ;
- поле скоростей  $\dot{\gamma}$  кривой  $\gamma$  параллельно вдоль  $\gamma$

(напомним, что мы договорились отождествлять кривую  $\gamma$  с ее внешним представлением  $\rho \circ \gamma$ ).

Напишем уравнения, задающие геодезические. Приводимый ниже результат мгновенно вытекает из следствия 7.8.

**Теорема 8.1.** Пусть  $\gamma(t)$  — кривая, лежащая на поверхности  $M$ . Введем на  $M$  координаты  $u^1, \dots, u^m$  и пусть  $(u^1(t), \dots, u^m(t))$  — координатная запись кривой  $\gamma(t)$ . Тогда  $\gamma$  — геодезическая, если и только если  $\gamma$  удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенной относительно вторых производных:

$$(8.1) \quad \ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Система (8.1) называется *уравнениями геодезических*.

Предложение 7.13, примененное к параллельному полю скоростей геодезической, мгновенно приводит к следующему результату.

**Предложение 8.2.** Пусть  $\gamma(t)$  — геодезическая. Тогда длина ее вектора скорости постоянна, т.е.  $\gamma(t)$  — равномерно параметризованная кривая.

Воспользуемся теперь теоремой существования и единственности решений дифференциальных уравнений, см. теорему 63 из введения и обсуждение после нее. Отметим, что начальные условия в рассматриваемом случае — это пара, состоящая из точки, через которую проходит кривая, и вектора скорости этой кривой в этой точке.

**Теорема 8.3.** Для любой точки  $P$  поверхности  $(M, \rho)$  и любого касательного вектора  $\xi \in T_P M$  существует геодезическая  $\gamma(s)$  на поверхности  $M$  такая, что  $\gamma(s_0) = P$  и  $\gamma'(s_0) = \xi$ . Если  $\delta$  — другая геодезическая на  $M$  с такими же начальными условиями, то  $\gamma$  и  $\delta$  совпадают на пересечении областей определения.

Отметим, что постоянные отображения тоже являются геодезическими, которые мы будем называть *тривиальными*.

**Предложение 8.4.** Пусть  $\gamma(s)$  — нетривиальная геодезическая и кривая  $\delta(t) = \gamma(s(t))$  получается из  $\gamma$  регулярной заменой параметра. Тогда  $\delta$  — геодезическая, если и только если  $s(t) = at + b$ , где  $a \neq 0$  и  $b$  — вещественные числа.

*Доказательство.* Заметим сначала, что кривая  $\gamma(at + b)$  также удовлетворяет системе (8.1), поэтому является геодезической. Обратно, предположим, что кривая  $\delta(t)$ , получающаяся из  $\gamma$  регулярной заменой параметра, является геодезической, тогда  $\dot{\delta} = s_t \dot{\gamma}$ , причем  $s_t \neq 0$ . По предложению 8.2, длины векторов скоростей кривых  $\gamma$  и  $\delta$  постоянны, откуда  $s_t = \text{const}$  и, значит,  $s = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  (последнее — в силу регулярности замены).  $\square$

Предложение 8.4 иногда формулируют так: *через данную точку в данном направлении проходит единственная геодезическая*.

**Замечание 8.5.** Так как символы Кристоффеля выражаются исключительно через первую фундаментальную форму (теорема 7.1), то при изометрии геодезические переходят в геодезические. Теорема 8.3, вместе с обсуждениями после нее, приводит к следующему результату: если для какой-нибудь поверхности удалось описать все геодезические, проходящие через данную точку, то также описываются и все геодезические, проходящие через точку, являющуюся образом при изометрии. Например, на сфере достаточно описать геодезические, проходящие через любую точку. Но на сфере все совсем просто: ускорение каждой равномерно параметризованной большой окружности (сечения сферы двумерной плоскостью, проходящей через центр сферы) перпендикулярно сфере, поэтому все такие кривые и их фрагменты — это полный список геодезических (так как через любую точку в любом направлении можно провести большую окружность).

**Задача 8.6.** Опишите геодезические на ортогональной группе  $O(n)$  (воспользуйтесь понятием экспоненты матрицы и покажите, что кривые  $\gamma(t) = e^{tA}$ , где  $A$  — кососимметричная матрица, являются геодезическими, проходящими через  $E$ ).

Из предложения 7.13 мгновенно получаем следующий результат.

**Следствие 8.7.** Пусть на поверхности  $M$  заданы геодезическая  $\gamma$  и параллельное вдоль нее векторное поле  $X$ . Тогда скалярное произведение  $\langle \dot{\gamma}, X \rangle$  постоянно, в частности, величина угла между полем  $X$  и вектором скорости  $\dot{\gamma}$  кривой  $\gamma$  постоянна.

Для дальнейшего нам понадобится некоторое уточнение теоремы 8.3, описывающее зависимость геодезических от начальных условий. Чтобы его сформулировать, мы превратим семейство всех касательных пространств к поверхности в некоторую поверхность, которая называется касательным расслоением.

## 8.2 Операции над поверхностями. Касательное расслоение к поверхности

Приведем некоторые операции над поверхностями, которые нам пригодятся в дальнейшем.

### 8.2.1 Ограничение поверхности на область

Пусть  $(M, \mathcal{P}, \rho)$  — поверхность, где, напомним, атлас  $\mathcal{P}$  состоит из параметризаций  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  — биективных отображений в некоторые области  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ , причем каждая замена параметризации  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  — гладкое регулярное отображение. Напомним также, что на  $M$  определена естественная топология, а областью называется каждое связное открытое подмножество топологического пространства. Так как  $M$  гомеоморфно области  $\Omega_\alpha$ , то пространство  $M$  тоже является областью.

Пусть  $U \subset M$  — некоторая область. Определим поверхность  $(U, \mathcal{P}^U, \rho^U)$ , выбрав в качестве параметризаций  $\varphi_\alpha^U \in \mathcal{P}^U$  ограничения на  $U$  параметризаций  $\varphi_\alpha \in \mathcal{P}$ , а в качестве  $\rho^U$  — ограничение погружения  $\rho$  на  $U$ . Именно таким образом каждую область на поверхности мы будем рассматривать как поверхность.

### 8.2.2 Произведение поверхностей

Пусть  $(M, \mathcal{P}^M, \rho^M)$  и  $(N, \mathcal{P}^N, \rho^N)$  — две поверхности. Определим поверхность  $(M \times N, \mathcal{P}, \rho)$  следующим образом: положим  $\rho(P, Q) = \rho^M(P) \times \rho^N(Q)$ , а по каждой паре параметризаций  $\varphi_\alpha^M: M \rightarrow \Omega_\alpha^M$  и  $\varphi_\beta^N: N \rightarrow \Omega_\beta^N$  построим параметризацию  $\varphi_{\alpha,\beta}: M \times N \rightarrow \Omega_\alpha^M \times \Omega_\beta^N$  аналогичным образом:  $\varphi_{\alpha,\beta}(P, Q) = \varphi_\alpha^M(P) \times \varphi_\beta^N(Q)$  для всех  $P \in M$  и  $Q \in N$ . Все полученные параметризации  $\varphi_{\alpha,\beta}$  отнесем к  $\mathcal{P}$  и будем называть *каноническими*. Напомним, что в атлас должны входить все отображения, получающиеся также и заменами координат в областях  $\Omega_\alpha^M \times \Omega_\beta^N$ . Добавим их, и все добавленные координаты будем называть *неканоническими*. Полученная поверхность называется *произведением поверхностей  $M$  и  $N$* .

### 8.2.3 Касательное расслоение

Пусть  $(M, \mathcal{P}, \rho)$  — поверхность размерности  $m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим множество  $TM := \cup_{P \in M} \{P\} \times T_P M$ , фактически представляющее собой дизъюнктивное объединение касательных пространств к поверхности.

Построим поверхность  $(TM, T\mathcal{P}, T\rho)$  размерности  $2m$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  следующим образом. Для каждого  $\varphi_\alpha: M \rightarrow \Omega_\alpha$  из  $\mathcal{P}$  определим биективное отображение  $T\varphi_\alpha: TM \rightarrow \Omega_\alpha \times \mathbb{R}^m$  так. Точка из  $TM$  — это пара  $(P, \xi)$ , где  $P \in M$  и  $\xi \in T_P M$ . Если  $u^1, \dots, u^m$  — координаты на  $M$ , определенные параметризацией  $\varphi_\alpha$ ,  $P = (u^1, \dots, u^m)$  и  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$  — координатные записи точки  $P$  и вектора  $\xi$  в координатах  $u^i$ , то положим

$$T\varphi_\alpha(P, \xi) = (u^1, \dots, u^m, \xi^1, \dots, \xi^m).$$

Координаты, заданные отображением  $T\varphi_\alpha$ , будем называть *линейными*.

Если  $v^1, \dots, v^m$  — координаты на  $M$ , заданные другой параметризацией  $\varphi_\beta \in \mathcal{P}$ , то

$$T\varphi_\beta \circ (T\varphi_\alpha)^{-1}(u^1, \dots, u^m, \xi^1, \dots, \xi^m) = (v^1(u^1, \dots, u^m), \dots, v^m(u^1, \dots, u^m), v_{u^i}^1 \xi^i, \dots, v_{u^i}^m \xi^i),$$

или, в более компактном виде,  $T\varphi_\beta \circ (T\varphi_\alpha)^{-1} = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}))$ . Заметим, что эти замены параметризации — гладкие регулярные отображения. Отнесем все отображения  $T\varphi_\alpha$  ко множеству  $T\mathcal{P}$ . Так как в атлас должны входить также все отображения, получающиеся заменами координат в областях  $\Omega_\alpha \times \mathbb{R}^m$ , добавим их, и все добавленные координаты будем называть *нелинейными*.

Наконец, определим погружение  $T\rho: TM \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , положив  $T\rho(P, \xi) = \rho(P) \times \xi$  (напомним, что  $\xi \in T_P M$  является вектором в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^n$ ).

**Определение 8.8.** Поверхность  $(TM, T\mathcal{P}, T\rho)$  называется *касательным расслоением поверхности  $(M, \mathcal{P}, \rho)$* .

**Замечание 8.9.** Как выглядит топология на  $TM$ , порожденная атласом  $T\mathcal{P}$ ? В качестве базы этой топологии можно взять прообразы при отображении  $T\varphi_\alpha$  декартовых произведений вида  $U \times V$ , где  $U \subset \Omega_\alpha$  — открытый шар в координатах  $u^1, \dots, u^m$ , а  $V$  — открытый шар в  $\mathbb{R}^m$  в декартовых координатах  $\xi^1, \dots, \xi^m$ . Такой прообраз будет состоять из объединений множеств  $\{P\} \times V_P \subset M \times \mathbb{R}^n$ , состоящих из пар  $(P, \xi)$ ,  $P = \varphi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^m)$ ,  $\xi = \xi^i \rho_{u^i}(u^1, \dots, u^m)$ , где  $(u^1, \dots, u^m)$  пробегает шар  $U$ , а  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$  — шар  $V$ .

**Замечание 8.10.** Выясним, как выглядит касательное пространство к касательному расслоению. Возьмем произвольную точку  $(P, \xi) \in TM$  и рассмотрим в  $TM$  кривую  $\delta(t) = (P(t), \xi(t))$ , проходящую через  $(P, \xi)$ :  $P(0) = P$  и  $\xi(0) = \xi$ . Пусть  $u^1, \dots, u^m$  — координаты на  $M$ , тогда

$$P(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \quad \text{и} \quad \xi(t) = \xi^i(t) \rho_{u^i}(u^1(t), \dots, u^m(t)).$$

Положим  $\xi^i = \xi^i(0)$ ,  $\zeta^i = \dot{u}^i(0)$ ,  $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^m)$ ,  $\eta^i = \xi^i(0)$ ,  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^m)$ , тогда (все производные рассматриваются при  $t = 0$ )

$$\dot{\delta} = (\dot{P}, \dot{\xi}^i \rho_{u^i} + \xi^i \dot{u}^j \rho_{u^i u^j}) = (\zeta, \eta^i \rho_{u^i} + \xi^i \zeta^j \rho_{u^i u^j}),$$

в частности, для  $\xi = 0$  имеем  $\dot{\delta}(0) = (\zeta, \eta) \in T_P M \times T_P M$ .

Для касательного расслоения определено естественное гладкое отображение  $\pi: TM \rightarrow M$ , сопоставляющее паре  $(P, \xi)$  точку  $P$ . Это отображение называется (*естественной*) *проекцией*. Кроме того, каждое касательное векторное поле  $X$  на  $M$  можно рассматривать как гладкое отображение  $X: M \rightarrow TM$ , для которого  $\pi \circ X: M \rightarrow M$  — тождественное отображение. Такие отображения называют еще *сечениями касательного расслоения*.

### 8.3 Экспоненциальное отображение и нормальные координаты

Приведем теперь уточнение теоремы 8.3, которое вытекает из соответствующего уточнения теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения. А именно, в нем рассматривается зависимость решения ОДУ от начального условия и утверждается, что у каждого начального условия есть окрестность, в которой каждое решение определено на некотором интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  не зависит от выбора начального условия. При этом, решение гладким образом зависит от начального условия, см. подробности например в [1] или в [2].

**Следствие 8.11.** Пусть  $(M, \rho)$  — поверхность,  $P \in M$  и  $\xi \in T_P M$ . Тогда существует такая окрестность  $V \subset TM$  точки  $(P, \xi)$  и такое  $\varepsilon > 0$ , что для каждой точки  $Q \in M$  и касательного вектора  $\zeta \in T_Q M$ , удовлетворяющих  $(Q, \zeta) \in V$ , существует геодезическая  $\gamma_{Q, \zeta}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , для которой  $\gamma_{Q, \zeta}(0) = Q$  и  $\dot{\gamma}_{Q, \zeta}(0) = \zeta$ . Тем самым, определено отображение поверхностей  $\gamma: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $\gamma(Q, \zeta, t) = \gamma_{Q, \zeta}(t)$ , и это отображение — гладкое. Так как линейная замена параметра оставляет геодезические геодезическими, то можно так подобрать  $V$  и  $\varepsilon$ , чтобы  $\varepsilon$  было больше 1.

Воспользуемся следствием 8.11 в случае, когда  $\xi = 0$  и  $\varepsilon > 1$ . Пусть  $U = V \cap T_P M$ , тогда определено отображение  $\text{exp}_P: U \rightarrow M$ , заданное так:  $\text{exp}_P(\zeta) = \gamma(P, \zeta, 1)$ .

**Теорема 8.12.** Для каждой точки  $P$  поверхности  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ , существует открытый шар  $U_r(0) \subset T_P M$  (относительно расстояния, индуцированного из  $\mathbb{R}^n$ , т.е. относительно первой фундаментальной формы) такой, что  $U_r(0)$  входит в область определения отображения  $\text{exp}_P$ , и ограничение  $\text{exp}_P$  на  $U_r(0)$  является диффеоморфизмом с образом.

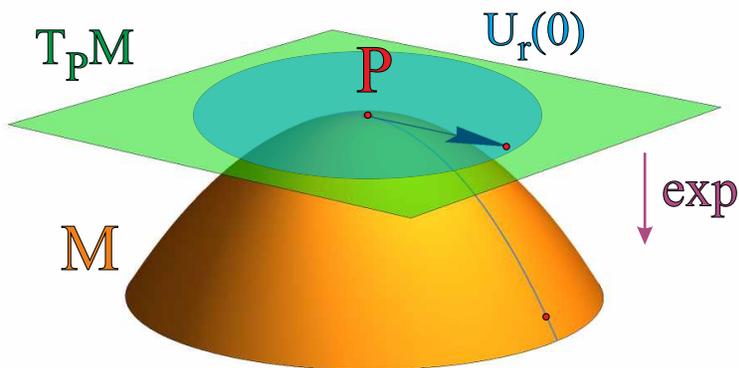


Рис. 8.1: Экспоненциальное отображение.

*Доказательство.* Будем пользоваться обозначениями, введенными в обсуждении перед теоремой. Ясно, что отображение  $\exp_P$  — гладкое, так как получается из гладкого отображения  $\gamma$  фиксированием двух “координат”. Так как  $U$  — открытое подмножество  $T_P M$ , содержащее  $0$ , в  $T_P M$  существует открытый шар  $U_a(0)$  с центром в  $0$  радиуса  $a > 0$ , содержащийся в  $U$ .

Вычислим дифференциал этого отображения в точке  $0 \in T_P M$ . Для этого выберем произвольное ненулевое  $\zeta \in U_a(0)$ , тогда при всех  $t \in [0, 1]$  векторы  $t\zeta$  содержатся в  $U_a(0)$  и, значит, для них определено отображение  $\exp_P$ . Рассмотрим кривую  $\delta(t) = t\zeta$ , тогда  $\delta(0) = 0$ ,  $\dot{\delta}(0) = \zeta$  и определена композиция  $(\exp_P \circ \delta)(t) = \exp_P(t\zeta)$ . Выясним, что представляет собой эта композиция.

Напомним, что через  $\gamma_{P,t\zeta}(s)$  мы обозначили геодезическую, для которой  $\gamma_{P,t\zeta}(0) = P$  и  $\dot{\gamma}_{P,t\zeta}(0) = t\zeta$ .

**Лемма 8.13.** *При каждом  $t \in [0, 1]$  имеет место равенство  $\gamma_{P,t\zeta}(t) = \gamma_{P,t\zeta}(1)$ .*

*Доказательство.* При  $t = 0$  геодезическая  $\gamma_{P,t\zeta}$  вырождается в точку  $P = \gamma_{P,\zeta}(0)$ . При  $t > 0$  у всех геодезических  $\gamma_{P,t\zeta}(s)$  вектор скорости в точке  $s = 0$  сонаправлен с  $\zeta$ , поэтому все они получаются из одной и той же геодезической  $\gamma_{P,\zeta}(\tau)$  линейными заменами параметра  $\tau$ . Так как параметризация каждой геодезической равномерная, а скорость параметризации геодезической  $\gamma_{P,t\zeta}$  равна длине ее вектора скорости, т.е.  $t\|\zeta\|$ , то длина участка геодезической  $\gamma_{P,t\zeta}(s)$  между  $s = 0$  и  $s = 1$  равна  $t\|\zeta\|$ , поэтому на геодезической  $\gamma_{P,\zeta}(\tau)$  точка  $\gamma_{P,t\zeta}(1)$  соответствует  $\tau = t$ , т.е.  $\gamma_{P,t\zeta}(t) = \gamma_{P,t\zeta}(1)$ , что и требовалось.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. По лемме 8.13,

$$(\exp_P \circ \delta)(t) = \exp_P(t\zeta) = \gamma_{P,t\zeta}(1) = \gamma_{P,\zeta}(t),$$

следовательно, образ кривой  $\delta$  при отображении  $\exp_P$ , т.е. кривая  $\exp_P \circ \delta$ , совпадает с начальным отрезком геодезической  $\gamma_{P,\zeta}$ , поэтому  $(d\exp_P)_0$  переводит вектор  $\xi$  в себя (мы отождествляем касательное пространство к  $T_P M$  в точке  $0$  с самим пространством  $T_P M$ ). Но последнее, по теореме об обратном отображении, означает, что ограничение отображения  $\exp_P$  на некоторую окрестность  $U^0 \subset T_P M$  точки  $0 \in T_P M$  является диффеоморфизмом с некоторой окрестностью точки  $P$ . По определению открытого множества, в  $U^0$  существует открытый шар  $U_r(0)$ .  $\square$

Так как отображение  $\exp_P$  является диффеоморфизмом между открытым шаром  $U_r(0)$  и его образом  $U^P$  — окрестностью точки  $P \in M$ , — с помощью него можно задать в  $U^P$  координаты: выбираем в  $T_P M$  произвольный ортонормальный базис и соответствующие ему координаты, тогда  $\exp_P$  переносит эти координаты на  $U^P$ . Определенные только что координаты называются *нормальными с центром в точке  $P$* . Окрестности  $U_r(0)$  и  $U^P$  называются *нормальными*, а  $r$  — *радиусом* обеих этих окрестностей (ниже мы обоснуем применение термина радиус к окрестности  $U^P$ ). Также нетривиальную геодезическую вида  $\exp_P(t\xi)$ , где  $\xi \neq 0$  содержится в  $T_P M$  и может лежать вне  $U_r(0)$ , а  $t$  меняется в пределах от  $0$  до некоторого  $0 < a < r/\|\xi\|$  (геодезическая начинается в центре нормальной окрестности  $U^P \subset M$  и не выходит из нее), будем называть *радиальной*.

**Задача 8.14.** Выясните, как выглядят в нормальных координатах с центром в точке  $P$

- (1) матрица первой фундаментальной формы в точке  $0 \in T_P M$ ;
- (2) геодезические, проходящие через точку  $P$ ;
- (3) символы Кристоффеля в точке  $0 \in T_P M$ .

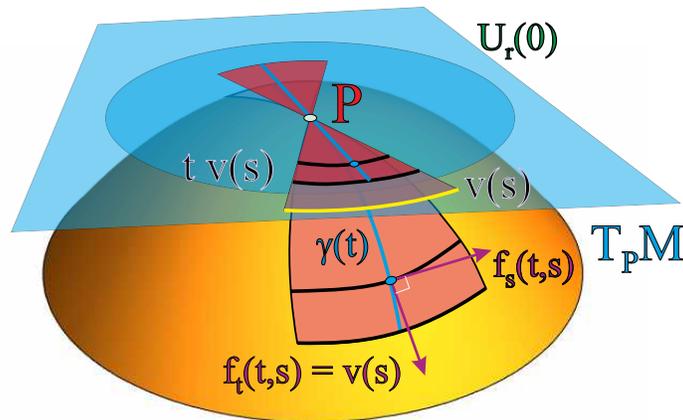
## 8.4 Минимизационные свойства геодезических

Продолжим изучать свойства нормальных координат.

**Конструкция 8.15.** Пусть  $U_r(0) \subset T_P M$  — нормальная окрестность. Рассмотрим произвольную гладкую кривую  $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_P M$ , для которой норма  $\|v(s)\|$  постоянна и равна некоторому числу  $a > 0$ , в частности, кривая  $v$  не проходит через  $0$ . Положим  $b = r/a$ , тогда при всех  $t \in (-b, b)$  и всех  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  точка  $t v(s)$  лежит в  $U_r(0)$ . Зададим отображение  $f: (-b, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  так:

$$f(t, s) = \exp_P(t v(s)).$$

**Лемма 8.16.** *Отображение  $f$  из конструкции 8.15 — гладкое и обладает следующими свойствами.*

Рис. 8.2: Построение отображения  $f(t, s) = \exp_P(t v(s))$ .

- (1) При каждом фиксированном  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  кривая  $\gamma(t) = f(t, s)$  — геодезическая на  $M$ , проходящая через  $P = \gamma(0)$  и имеющая в  $P$  скорость  $\dot{\gamma}(0) = v(s)$ . В частности, норма  $\|f_t\| = \|v(s)\| = a$  не зависит от  $t$ , а вектор  $f_{tt}$  перпендикулярен  $M$ .
- (2) Векторы  $f_t$  и  $f_s$  взаимно перпендикулярны в каждой точке  $(t, s)$ .

*Доказательство.* Отображение  $f$  — гладкое как композиция гладкого отображения  $(t, s) \mapsto t v(s)$  и  $\exp_P$ .

Пункт (1) вытекает из определения экспоненты.

Докажем теперь пункт (2). Положим  $g(t, s) = \langle f_t, f_s \rangle$ . Мы должны показать, что  $g(t, s) \equiv 0$ . Продифференцируем  $g$  по  $t$ :

$$g_t = \langle f_t, f_s \rangle_t = \langle f_{tt}, f_s \rangle + \langle f_t, f_{st} \rangle.$$

По пункту (1), вектор  $f_{tt}$  перпендикулярен поверхности  $M$ , поэтому его скалярное произведение с касательным вектором  $f_s$  равно нулю. Таким образом,  $\langle f_{tt}, f_s \rangle = 0$ .

Далее,  $\langle f_t, f_{st} \rangle = \frac{1}{2} \langle f_t, f_t \rangle_s$ , но, снова по пункту (1), величина  $\langle f_t, f_t \rangle = a^2$  постоянна, поэтому  $\langle f_t, f_{st} \rangle = 0$ .

Итак, мы показали, что  $g_t = 0$  и, значит, функция  $g(t, s)$  не зависит от  $t$ . В частности,  $g(t, s) = g(0, s)$ , однако  $f(0, s) = \exp_P(0) = P$ , поэтому  $f_s(0, s) = 0$  и, значит,

$$g(t, s) = g(0, s) = \langle f_t(0, s), f_s(0, s) \rangle = 0,$$

что и требовалось.  $\square$

Во введенных выше обозначениях, пусть теперь  $0 < a < r$ . Положим  $\Sigma_a = \{\xi \in T_P M : \|\xi\| = a\}$ . Тогда  $\Sigma_a$  — сфера в  $T_P M$  и, значит, — регулярная неявная поверхность. Обозначим  $S_a$  образ сферы  $\Sigma_a$  при отображении  $\exp_P$ . Так как отображение  $\exp_P$ , ограниченное на  $U_r(0)$ , — диффеоморфизм с образом,  $S_a$  — регулярная неявная поверхность. Она называется *геодезической сферой*.

**Лемма 8.17** (Гаусс). Для каждого  $\xi \in \Sigma_a \subset T_P M$  геодезическая  $\gamma(t) = \exp_P(t\xi)$  перпендикулярна  $S_a$  в точке пересечения  $Q = \gamma(1)$ .

*Доказательство.* Мы должны показать, что вектор  $\dot{\gamma}(1)$  перпендикулярен каждому касательному вектору  $\eta \in T_Q S_a$ . Выберем произвольную гладкую кривую  $w: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_a$ , для которой  $w(0) = Q$  и  $\dot{w}(0) = \eta$ . Так как  $\exp_P$  — диффеоморфизм, определена гладкая кривая  $v(s) = \exp_P^{-1}(w(s))$  на  $\Sigma_a$ , причем  $w(s) = \exp_P(v(s))$ . Рассмотрим гладкое отображение  $f(t, s)$  из конструкции 8.15, примененной к кривой  $v(s)$ , тогда, в обозначениях этой конструкции,  $b = r/a > 1$ ,  $\gamma(t) = f(t, 0)$ ,  $\dot{\gamma}(t) = f_t(t, 0)$ ,  $f(1, s) = w(s)$  и, поэтому,  $f_s(1, 0) = \dot{w}(0) = \eta$ . Но, по лемме 8.16, векторы  $f_t$  и  $f_s$  ортогональны, что и завершает доказательство.  $\square$

**Лемма 8.18.** Пусть  $U^P$  — нормальная окрестность точки  $P \in M$  поверхности  $M$ , и  $\gamma: [a, b] \rightarrow U^P$  — гладкая параметрическая кривая, не проходящая через  $P$ . Рассмотрим гладкую кривую  $\delta = \exp_P^{-1} \circ \gamma$  в касательном пространстве  $T_P M$ . Тогда длина  $|\gamma|$  кривой  $\gamma$  оценивается так:

$$(8.2) \quad |\gamma| \geq \left| \|\delta(b)\| - \|\delta(a)\| \right|,$$

где норма в  $T_P M$ , как всегда, порождена первой фундаментальной формой поверхности  $M$ . Более того, в формуле (8.2) имеет место равенство, если и только если кривая  $\gamma$  монотонно параметризует отрезок радиальной геодезической, выпущенной из  $P$ .

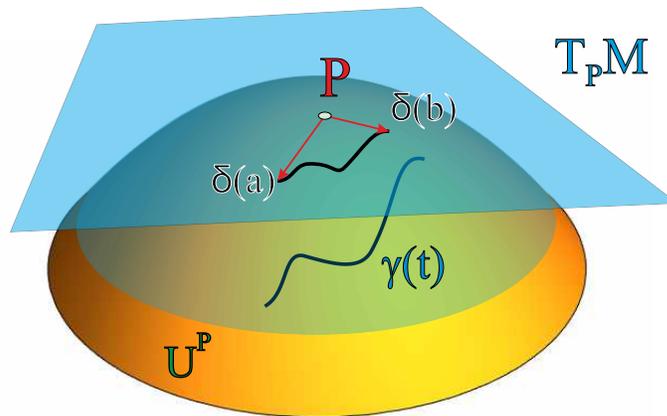


Рис. 8.3: Оценка длины кривой  $\gamma$ .

*Доказательство.* Положим  $r(s) = \|\delta(s)\|$  и  $v(s) = \delta(s)/\|\delta(s)\|$ , тогда  $\delta(s) = r(s)v(s)$ , причем  $\|v(s)\| \equiv 1$  и  $\gamma(s) = \exp_P(r(s)v(s))$ . Применим к кривой  $v(s)$  конструкцию 8.15, построим соответствующую функцию  $f(t, s)$  и заметим, что  $\gamma(s) = f(r(s), s)$ . Так как, в силу леммы 8.16, векторы  $f_t$  и  $f_s$  ортогональны, а  $\|f_t\| = \|v(s)\| = 1$ , имеем

$$\dot{\gamma} = f_t \dot{r} + f_s \Rightarrow \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\|f_t\|^2 |\dot{r}|^2 + \|f_s\|^2} \geq \|f_t\| |\dot{r}| = |\dot{r}|,$$

и, значит,

$$(8.3) \quad |\gamma| = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds \geq \int_a^b |\dot{r}(s)| ds \geq \left| \int_a^b \dot{r}(s) ds \right| = |r(b) - r(a)| = \left| \|\delta(b)\| - \|\delta(a)\| \right|.$$

Заметим, что первое неравенство в формуле (8.3) обращается в равенство, если и только если  $f_s \equiv 0$ . Так как  $\exp_P$  — диффеоморфизм с образом, последнее равносильно тому, что вектор скорости кривой  $s \mapsto t v(s)$  в касательном пространстве  $T_P M$  тождественно обращается в 0. Напомним, что  $f(t, s) = \exp_P(t v(s))$ . Так как мы рассматриваем кривые, не проходящие через  $P$ , то нас интересует этот результат при  $t \neq 0$ , а в таких точках он равносильно  $\dot{v} \equiv 0$ , т.е.  $v(s) = v_0$ , а это означает, что образ кривой  $\gamma$  лежит на геодезической  $\exp_P(t v_0)$ .

Далее, второе неравенство из формулы (8.3) превращается в равенство, если и только если  $\dot{r}$  не меняет знак, т.е. кривая  $\gamma$  монотонно параметризует соответствующий отрезок геодезической  $\exp_P(t v_0)$ . Доказательство закончено.  $\square$

**Следствие 8.19.** Пусть  $U^P$  — нормальная окрестность точки  $P \in M$  поверхности  $M$ , и  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  — гладкая параметрическая кривая, соединяющая точку  $P = \gamma(0)$  с отличной от нее точкой  $Q = \gamma(1) \in U^P$ . Пусть  $\delta(t) = \exp_P(t \xi)$  — радиальная геодезическая, также соединяющая  $P = \delta(0)$  и  $Q = \delta(1)$ . Тогда  $|\gamma| \geq |\delta|$ , причем равенство достигается, если и только если кривая  $\gamma$  монотонно параметризует образ кривой  $\delta$ .

*Доказательство.* Пусть сначала кривая  $\gamma$  лежит в окрестности  $U^P$ . Рассмотрим замкнутый шар  $B_d(0) \subset T_P M$ , где  $d$  столь мало, что точка  $Q$  лежит вне окрестности  $B = \exp_P(B_d(0))$ , и пусть  $\gamma(t')$  — последняя точка выхода кривой  $\gamma$  из окрестности  $B$ . Тогда для кривой  $\gamma|_{[t',1]}$  применима лемма 8.18, в соответствии с которой

$$|\gamma| \geq |\gamma|_{[t',1]} \geq \|\exp_P^{-1}(Q)\| - d = |\delta| - d,$$

причем равенство достигается, если и только если  $\gamma|_{[t',1]}$  монотонно параметризует соответствующую часть кривой  $\delta$ . Осталось устремить  $d$  к 0.

Если же образ кривой  $\gamma$  не лежит в  $U^P$ , то эта кривая пересекает геодезическую сферу  $S_a \subset U$  некоторого радиуса  $a$ , большего, чем  $|\delta|$ . Но тогда, в силу доказанного выше,  $|\gamma| \geq a > |\delta|$ .  $\square$

**Задача 8.20.** Пусть  $U^P$  — нормальная окрестность радиуса  $r$  точки  $P \in M$  поверхности  $M$  и  $0 < a < r$ . Покажите, что

- (1) множества  $\exp_P(U_a(0)) \subset M$  и  $\exp_P(B_a(0)) \subset M$  — соответственно открытый и замкнутый шары радиуса  $a$  с центром в точке  $P$  относительно внутренней метрики поверхности  $M$ ;
- (2) геодезическая сфера  $S_a$  с центром в точке  $P$  поверхности  $M$  является сферой в смысле внутренней метрики:  $S_a$  состоит из всех точек, расположенных от  $P$  на внутреннем расстоянии  $a$ ;
- (3) топология, заданная на  $M$  с помощью внутренней метрики, совпадает с исходной топологией.

При построении отображения  $\exp_P$  мы фиксировали две составляющие отображения  $\gamma(Q, \zeta, t)$ , а именно,  $Q = P$  и  $t = 1$ . Если фиксировать только  $t$ , то можно получить более интересный результат, который мы приведем без доказательства.

**Теорема 8.21.** Для каждой точки  $P$  поверхности  $M$  существует такая нормальная окрестность  $U$  и такое  $\varepsilon > 0$ , что у каждой точки  $Q \in U$  имеется нормальная окрестность радиуса  $\varepsilon$ , содержащая  $U$ .

**Определение 8.22.** Окрестность  $U$  из теоремы 8.21 назовем  $\varepsilon$ -*вполне нормальной*. Если рассуждения не используют  $\varepsilon$  или вводят его самостоятельно, то такую окрестность называют просто *вполне нормальной*.

**Задача 8.23.** Приведите пример нормальной окрестности, не являющейся вполне нормальной.

**Следствие 8.24.** Пусть  $U$  — произвольная  $\varepsilon$ -вполне нормальная окрестность точки  $P$  поверхности  $M$ , тогда каждая пара точек  $Q_1, Q_2 \in U$  соединяется единственной геодезической в  $M$ , длина которой меньше  $\varepsilon$ , причем эта геодезическая — кратчайшая кривая в  $M$ .

*Доказательство.* Действительно, так как  $U$  содержится в нормальной окрестности  $U^{Q_1}$  радиуса  $\varepsilon$ , точка  $Q_2$  соединяется в  $M$  с точкой  $Q_1$  геодезической  $\gamma(t) = \exp_{Q_1}(t\xi)$  для некоторого  $\xi \in U_\varepsilon(0) \subset T_{Q_1}M$ :  $Q_1 = \gamma(0)$ ,  $Q_2 = \gamma(1)$ ,  $|\gamma| = \|\xi\| < \varepsilon$ . В силу биективности отображения  $\exp_{Q_1}$ , ограниченного на  $U_\varepsilon(0)$ , и теоремы единственности для геодезических, никакие другие радиальные геодезические, выходящие из  $Q_1$  и имеющие длину меньше  $\varepsilon$ , не соединяют точки  $Q_1$  и  $Q_2$ . Все остальные геодезические, соединяющие  $Q_1$  и  $Q_2$ , т.е. выходящие из окрестности  $U^{Q_1}$ , в силу следствия 8.19 будут не короче  $\varepsilon$  (убедитесь в этом). Таким образом, мы показали, что  $Q_1$  и  $Q_2$  соединяются единственной геодезической  $\gamma$  длины меньше  $\varepsilon$ . Снова по следствию 8.19, геодезическая  $\gamma$  не длиннее всех остальных кривых, соединяющих  $Q_1$  и  $Q_2$ , т.е.  $\gamma$  — кратчайшая кривая.  $\square$

**Замечание 8.25.** Отметим, что геодезическая, построенная в следствии 8.24, не обязана содержаться в окрестности  $U$ . Если же каждая кратчайшая геодезическая, соединяющая точки  $\varepsilon$ -вполне нормальной окрестности  $U$ , содержится в  $U$ , то такая окрестность  $U$  называется *выпуклой*. Можно показать, что у каждой точки поверхности существует выпуклая окрестность.

**Задача 8.26.** Докажите, что на поверхности  $M$  каждая нетривиальная геодезическая  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  — локально кратчайшая, т.е. для любой точки  $t \in [a, b]$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что ограничение  $\gamma$  на  $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих ее концы. Приведите пример геодезической, которая не является кратчайшей среди кривых, соединяющих ее концы.

**Задача 8.27.** Покажите, что каждая кратчайшая кривая на поверхности является геодезической.

### 8.4.1 Теорема Хопфа–Ринова

В данном разделе мы поговорим о связи свойств экспоненциального отображения с геометрией поверхности.

**Теорема 8.28** (Хопф–Ринов). Пусть  $(M, \rho)$  — поверхность, тогда следующие утверждения (1)–(4) попарно эквивалентны, и каждое из них влечет (5):

- (1) существует точка  $P \in M$  такая, что отображение  $\exp_P$  определено на всем  $T_P M$ ;
- (2) замкнутые и ограниченные (относительно внутренней метрики) подмножества  $M$  компактны;
- (3) внутренняя метрика поверхности  $M$  — полная;
- (4) для каждой точки  $Q \in M$  отображение  $\exp_Q$  определено на всем  $T_Q M$  (такие поверхности называются **геодезически полными**);
- (5) каждая пара точек  $P, Q \in M$  соединяется геодезической длины  $|PQ|$ .

*Доказательство.* Мы докажем, что из (1) вытекает (5'), где (5') отличается от (5) лишь тем, что в нем точка  $P$  не любая, а удовлетворяет условию (1). Затем мы покажем, что имеет место следующая последовательность импликаций: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1). Тем самым, установив равносильность (1) и (4), мы докажем импликацию (1)  $\Rightarrow$  (5) и, значит, что каждое утверждение (1)–(4) само влечет (5).

Прежде чем приступить к доказательству конкретных импликаций, приведем ряд полезных для дальнейшего лемм.

**Лемма 8.29.** Каждая геодезическая сфера является компактом.

*Доказательство.* Действительно, каждая геодезическая сфера является образом экспоненциального отображения, примененного к соответствующей сфере в касательном пространстве, которая, как хорошо известно, — компакт. Остается вспомнить, что экспоненциальное отображение непрерывно, а непрерывный образ компакта — компакт.  $\square$

**Лемма 8.30.** Пусть  $P, Q$  — точки поверхности  $M$ , находящиеся на расстоянии  $d$  во внутренней метрике. Пусть  $S_a$  — геодезическая сфера с центром в  $P$  и радиусом  $0 < a < d$ . Тогда функция расстояния от  $Q$  до точек сферы  $S_a$  достигает своего минимума в некоторой точке  $X \in S_a$ , причем  $a + |XQ| = d$ .

*Доказательство.* Так как, в силу задачи 8.20, топология, индуцированная внутренней метрикой, совпадает с исходной топологией, функция расстояния непрерывна (в исходной топологии) и, в силу компактности геодезической сферы  $S_a$  (лемма 8.29), эта функция расстояния от  $Q$  до точек из  $S_a$  достигает своего минимума в некоторой точке  $X \in S_a$ .

Пусть  $\Gamma(s)$  — произвольная кривая, соединяющая  $P = \Gamma(0)$  и  $Q = \Gamma(1)$ . Так как функция  $|\Gamma(s)|$  непрерывна,  $|\Gamma(0)| = 0$  и  $|\Gamma(1)| = |PQ| = d > a$ , существует  $s_0 \in (0, 1)$  такое, что  $|\Gamma(s_0)| = a$ . Так как, в силу задачи 8.20, геодезическая сфера  $S_a$  является сферой с центром в  $P$  и радиусом  $a$  относительно внутренней метрики, то точка  $\Gamma(s_0) =: Y$  принадлежит  $S_a$ . Таким образом, мы показали, что кривая  $\Gamma$  пересекает геодезическую сферу  $S_a$ .

По следствию 8.19,  $|\Gamma_{[0, s_0]}| \geq a$ . Так как в точке  $X$  достигается минимум расстояний от  $Q$  до точек из  $S_a$ , получаем  $|\Gamma_{[s_0, 1]}| \geq |YQ| \geq |XQ|$ . Таким образом,  $|\Gamma| \geq a + |XQ|$ , откуда  $|PQ| \geq a + |XQ|$ .

С другой стороны, по определению внутренней метрики, для любого  $\varepsilon > 0$  существует кривая  $\gamma_2$ , соединяющая  $X$  и  $Q$ , для которой  $|\gamma_2| < |XQ| + \varepsilon$ . Взяв в качестве  $\gamma_1$  радиальную геодезическую, соединяющую  $P$  и  $X$ , получим  $|\gamma_1| = a$ . Рассмотрев, после необходимых замен параметра, склейку кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , получим кривую  $\Gamma$ , соединяющую  $P$  и  $Q$ , для которой  $|\Gamma| < a + |XQ| + \varepsilon$ , откуда  $|PQ| < a + |XQ| + \varepsilon$ . Таким образом, неравенства  $a + |XQ| \leq |PQ| < a + |XQ| + \varepsilon$  имеют место при каждом  $\varepsilon > 0$ , следовательно,  $|PQ| = a + |XQ|$ .  $\square$

Перейдем теперь к доказательству импликаций.

(1)  $\Rightarrow$  (5'). Выберем произвольную точку  $Q \in M$  и пусть  $d = |PQ|$ . Если  $U_r(0) \subset T_P M$  — нормальная окрестность точки  $P$ , то при  $d < r$  утверждение вытекает из следствия 8.19, поэтому предположим, что  $d \geq r$ .

Выберем произвольное  $0 < a < r$  и пусть  $S_a \subset M$  — геодезическая сфера радиуса  $a$  с центром в  $P$ . По лемме 8.30, расстояние от  $Q$  до точек сферы  $S_a$  достигает своего минимального значения в некоторой точке  $x_0 \in S_a$ , причем  $a + |x_0 Q| = d$ .

Так как ограничение  $\exp_P$  на  $U_r(0) \subset T_P M$  является диффеоморфизмом с образом, то существует единственное  $v \in T_P M$ ,  $\|v\| = 1$ , для которого  $x_0 = \exp_P(av)$ . Рассмотрим натурально параметризованную геодезическую

$\gamma(s) = \exp_P(s v)$ , определенную, в силу предположения, при всех  $s \geq 0$ . Отметим, что  $\gamma(a) = x_0$ . Мы покажем, что  $\gamma(d) = Q$  и длина геодезической  $\gamma|_{[0,d]}$  равна  $|PQ|$ .

Рассмотрим следующее множество:

$$A := \left\{ s \in [0, d] : |\gamma(s)Q| = d - s \right\}.$$

Как было отмечено выше,  $a + |x_0Q| = d$  и  $x_0 = \gamma(a)$ , так что  $|\gamma(a)Q| = d - a$ , поэтому  $a \in A$  и, значит,  $A \neq \emptyset$ .

Далее, заметим, что условие, задающее  $A$ , имеет вид  $f(s) = |\gamma(s)Q| - (d - s) = 0$ , а функция  $f$ , в силу сказанного выше, непрерывно зависит от  $s$ , поэтому  $A$  — замкнутое подмножество отрезка  $[0, d]$ .

Пусть  $s_1 = \sup A$ . Мы покажем, что  $s_1 = d$ , откуда, в силу замкнутости  $A$ , имеем  $d \in A$ , поэтому  $|\gamma(d)Q| = d - d = 0$  и, значит,  $\gamma(d) = Q$ .

Предположим противное, т.е. что  $s_1 < d$ . Положим  $x_1 = \gamma(s_1)$ . Так как  $A$  — замкнуто, то  $s_1 \in A$ , откуда  $|x_1Q| = d - s_1$ .

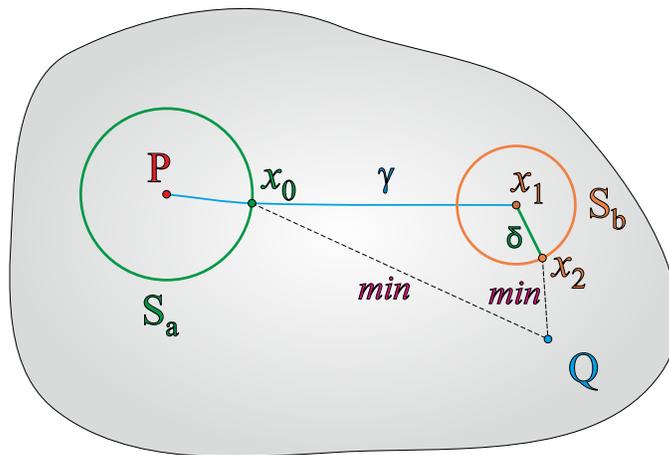


Рис. 8.4: К доказательству (1)  $\Rightarrow$  (5').

Так как  $s_1 < d$ , существует  $0 < b < d - s_1$ , для которого определена геодезическая сфера  $S_b \subset M$  с центром в  $x_1$ . Снова, по лемме 8.30, расстояние от  $Q$  до точек сферы  $S_b$  достигает своего минимального значения в некоторой точке  $x_2 \in S_b$ , причем  $b + |x_2Q| = |x_1Q| = d - s_1$ . Отсюда, и из неравенств треугольника, получаем

$$|Px_2| \geq |PQ| - |x_2Q| = d - |x_2Q| = s_1 + b \quad \text{и} \quad |Px_2| \leq |Px_1| + |x_1x_2| \leq s_1 + b,$$

поэтому  $|Px_2| = s_1 + b$ . Но точки  $P$  и  $x_2$  соединяются кривой, являющейся склейкой двух геодезических: кривой  $\gamma|_{[0,s_1]}$  и радиальной геодезической  $\delta$ , соединяющей  $x_1$  и  $x_2$ . Длина первой из этих кривых равна  $s_1$ , а второй равна  $b$ . Таким образом, эта склейка имеет длину, равную расстоянию между концами склейки, т.е. является кратчайшей кривой. По задаче 8.27, эта склейка — геодезическая, поэтому радиальная геодезическая  $\delta$  продолжает  $\gamma$  и, значит,  $x_2 = \gamma(s_1 + b) = \gamma(s_2)$ , где  $s_2 := s_1 + b > s_1$ . Но

$$|\gamma(s_2)Q| = |x_2Q| = d - s_1 - b = d - s_2,$$

поэтому  $s_2 \in A$ , противоречие.

Итак, мы показали, что  $\sup A = d$ , откуда  $Q = \gamma(d)$ , но длина натурально параметризованной геодезической  $\gamma|_{[0,d]}$  равна  $d = |PQ|$ , т.е. расстоянию между ее концами.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $A \subset M$  — произвольное замкнутое ограниченное множество. Последнее означает, что существует такой шар  $B_a(P)$  по отношению к внутренней метрике, для которого  $A \subset B_a(P)$ . Так как (1)  $\Rightarrow$  (5'), для каждой точки  $Q \in B_r(P)$  существует геодезическая, соединяющая  $P$  с  $Q$  и имеющая длину  $|PQ|$ . По условию, отображение  $\exp_P$  определено на замкнутом шаре  $B_r(0) \subset T_P M$  и для каждого  $r > a$ . Из сказанного выше вытекает, что  $B_a(P) \subset \exp_P(B_r(0))$ . Так как шар  $B_r(0)$  — компакт, а отображение  $\exp_P$  непрерывно, то  $\exp_P(B_r(0))$  — компакт, поэтому  $A$  — замкнутое подмножество этого компакта и, значит, тоже компактно.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Каждая фундаментальная последовательность ограничена, поэтому ее замыкание также ограничено. По условию, это замыкание является компактом, поэтому фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность и, значит, сама сходится, что влечет полноту.

(3)  $\Rightarrow$  (4) Предположим, что  $M$  не является геодезически полным. Это означает, что для некоторой точки  $P \in M$  выходящая из  $P$  естественно параметризованная геодезическая  $\gamma(s)$ ,  $P = \gamma(0)$ , определена при  $s < s_0$  и не продолжается в  $s_0$  (если бы геодезическая продолжалась вплоть до  $s_0$ , то мы смогли бы ее продолжить, воспользовавшись теоремой 8.3). Рассмотрим последовательность  $0 < s_n < s_0$ , стремящуюся к  $s_0$ . Так как  $|\gamma(s_m)\gamma(s_n)| \leq |s_m - s_n|$ , то последовательность  $\gamma(s_n)$  фундаментальна. Так как  $M$ , по предположению, полно, эта последовательность сходится к некоторой точке  $Q \in M$ .

По теореме 8.21, для некоторого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -вполне нормальная окрестность  $U$  точки  $Q$ . Выберем  $N$  столь большим, чтобы при  $m, n \geq N$  точки  $\gamma(s_m)$  и  $\gamma(s_n)$  принадлежали  $U$  и выполнялось  $|s_m - s_n| < \varepsilon/2$ . По определению  $\varepsilon$ -вполне нормальной окрестности, у точки  $x := \gamma(s_n)$  существует нормальная окрестность радиуса  $\varepsilon$ . Положим  $v = \dot{\gamma}(s_n)$  и рассмотрим естественно параметризованную геодезическую  $\delta(t) = \exp_x(t v)$ , которая определена по крайней мере при  $t \in [0, \varepsilon)$  (так как у  $x$  есть нормальная окрестность радиуса  $\varepsilon$ ). Сделав линейную замену параметра  $t$ , вновь получим геодезическую  $\delta(s - s_n)$ , определенную на  $[s_n, s_n + \varepsilon)$  и, по теореме единственности для геодезических, совпадающую с  $\gamma|_{[s_n, s_0)}$  на начальном отрезке. Но, так как  $s_n + \varepsilon > s_0$ , то геодезическая  $\delta(s - s_n)$  задает продолжение геодезической  $\gamma$  за точку  $s_0$ , противоречие.

(4)  $\Rightarrow$  (1) Геодезическая полнота означает выполнение пункта (1) не только в некоторой точке, но и во всех, а, значит, и в некоторой.  $\square$

## Литература к главе 8

- [1] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т.1, Приложение 1.
- [2] Do Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, p.63, Theorem 2.2.

## Упражнения к главе 8

**Упражнение 8.1.** Пусть на  $m$ -мерной поверхности  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  заданы координаты  $u^1, \dots, u^m$ , в которых матрица первой фундаментальной формы скалярна: в каждой точке она диагональна, а диагональный элемент равен  $\lambda = \lambda(u^1, \dots, u^m)$ . Напишите уравнения геодезических. В случае, когда  $M$  — двумерная поверхность с координатами  $(x, y)$ ,  $y > 0$ , для которой матрица первой фундаментальной формы скалярна, а  $\lambda = 1/y^2$ , покажите, что геодезическими являются равномерно параметризованные лучи, перпендикулярные оси абсцисс, а также равномерно параметризованные дуги окружностей, центры которых лежат на оси абсцисс. Убедитесь, что это — полный список геодезических.

**Упражнение 8.2.** Пусть  $ds^2 = x(dx^2 + dy^2)$ ,  $x > 0$ . Докажите, что геодезические для этой метрики являются параболами.

**Упражнение 8.3.** Пусть  $ds^2 = g(r)dr^2 + r^2d\varphi^2$ ,  $g(r) > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Докажите, что кривые  $\varphi = \varphi_0$  являются геодезическими.

**Упражнение 8.4.** Пусть  $M$  — двумерная поверхность вращения, заданная в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  в виде  $r = f(z)$ , где  $f$  — гладкая положительная функция. Рассмотрим произвольную геодезическую  $\gamma(t) = (\varphi(t), z(t))$  на  $M$ , и пусть  $r(t)$  — расстояние от  $\gamma(t)$  до оси  $z$ , а  $\psi(t)$  — угол между вектором скорости  $\dot{\gamma}(t)$  и параллелью  $z = z(t)$ . Докажите теорему Клеро: величина  $r(t) \cos(\psi(t))$  не зависит от  $t$ .

**Упражнение 8.5.** Опишите все поверхности вращения, заданные в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  в виде  $r = f(z)$ , где  $f$  — гладкая положительная функция, на которых существуют замкнутые геодезические (нетривиальная геодезическая  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , называется *замкнутой*, если  $\gamma(a) = \gamma(b)$  и ее продолжение на  $[b, b + \varepsilon]$ :  $\gamma(b + s) = \gamma(a + s)$ ,  $s \in [b, b + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , — регулярная кривая).

**Упражнение 8.6.** Опишите геодезические на ортогональной группе  $O(n)$  (воспользуйтесь понятием экспоненты матрицы и покажите, что  $e^{tA}$ , где  $A$  — кососимметричная матрица, являются геодезическими, проходящими через  $E$ ).

**Упражнение 8.7.** Выясните, как выглядят в нормальных координатах с центром в точке  $P$

- (1) матрица первой фундаментальной формы в точке  $0 \in T_P M$ ;
- (2) геодезические, проходящие через точку  $P$ ;
- (3) символы Кристоффеля в точке  $0 \in T_P M$ .

**Упражнение 8.8.** Пусть  $U^P$  — нормальная окрестность радиуса  $r$  точки  $P \in M$  поверхности  $M$  и  $0 < a < r$ . Покажите, что

- (1) множество  $\exp_P(U_a(0)) \subset M$  — открытый шар радиуса  $a$  с центром в точке  $P$  относительно внутренней метрики поверхности  $M$ ;
- (2) геодезическая сфера  $S_a$  с центром в точке  $P$  поверхности  $M$  является сферой в смысле внутренней метрики:  $S_a$  состоит из всех точек, расположенных от  $P$  на внутреннем расстоянии  $a$ ;
- (3) топология, заданная на  $M$  с помощью внутренней метрики, совпадает с исходной топологией.

**Упражнение 8.9.** Приведите пример нормальной окрестности, не являющейся  $\varepsilon$ -вполне нормальной ни для какого  $\varepsilon > 0$ .

**Упражнение 8.10.** Докажите, что на поверхности  $M$  каждая нетривиальная геодезическая  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  является локально кратчайшей, т.е. для любой точки  $t \in [a, b]$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что ограничение  $\gamma$  на  $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих ее концы. Приведите пример геодезической, которая не является кратчайшей среди кривых, соединяющих ее концы.

**Упражнение 8.11.** Покажите, что каждая кратчайшая кусочно-гладкая равномерно параметризованная кривая на поверхности является геодезической.

**Упражнение 8.12.** Используя теорему Хопфа–Ринова, покажите, что на верхней полуплоскости с координатами  $(x, y)$  и метрикой  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$  описанные в упражнении 8.1 геодезические являются кратчайшими между любыми двумя своими точками. Запишите расстояние во внутренней метрике для точек на вертикальном луче и для точек на дуге стандартной окружности.

# Лекция 9

## Вторая фундаментальная форма

**План.** Коммутатор векторных полей, коммутатор касательных векторных полей, свойства коммутатора, вторая фундаментальная форма, ее симметричность, вторая фундаментальная форма относительно нормального вектора, оператор Вейнгартена, связь оператора Вейнгартена со второй фундаментальной формой, формулы Гаусса и Вейнгартена, вычисление в координатах второй фундаментальной формы и оператора Вейнгартена, пример: вторая фундаментальная форма и оператор Вейнгартена для гиперповерхности, заданной графиком функции, теорема о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду, главные направления и главные кривизны для второй фундаментальной формы относительно нормального вектора, пример вычисления, сечение поверхности аффинными подпространствами, нормальные сечения, обоснование перехода к гиперповерхностям, одномерные сечения гиперповерхностей, направление сечения, нормаль к сечению, оснащенное сечение, угол наклона сечения, касающиеся сечения, ориентированная кривизна сечения и ориентированная кривизна касающегося нормального сечения, теорема Менье, теорема об отношении пары форм, формула Эйлера, главные направления, главные кривизны, инварианты пары форм, средняя и гауссовы кривизны гиперповерхности, вычисление собственных чисел симметричного оператора через минимакс, экстремальность наименьшего и наибольшего собственных чисел, применение предыдущего результата для определения без вычислений главных направлений двумерной поверхности вращения, пример такого вычисления главных направлений и главных кривизн для двумерной поверхности вращения в трехмерном пространстве, минимальные поверхности, катеноид как пример минимальной поверхности, уравнение Лагранжа двумерной минимальной поверхности, заданной графиком функции, средняя кривизна поверхности произвольной коразмерности, вектор средней кривизны и функция средней кривизны, минимальные поверхности и поверхности постоянной средней кривизны произвольной коразмерности, тор Клиффорда как пример поверхности постоянной кривизны.

Для дальнейшего нам понадобится еще одна операция над векторными полями.

### 9.1 Коммутатор векторных полей

Пусть на поверхности  $(M, \rho)$  заданы два касательных векторных поля  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Тогда  $\partial_X Y$  и  $\partial_Y X$  — векторные поля вдоль поверхности  $M$ , не обязательно касательные. Определим векторное поле  $[X, Y] = \partial_X Y - \partial_Y X$ .

**Предложение 9.1.** Векторное поле  $[X, Y]$  касается поверхности  $M$ , так что  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ . Если  $u^1, \dots, u^m$  — координаты на  $M$ , то по отношению к ним координаты поля  $[X, Y]$  вычисляются через координаты  $(X^1, \dots, X^m)$  поля  $X$  и координаты  $(Y^1, \dots, Y^m)$  поля  $Y$  так:

$$[X, Y]^j = X^i Y_{u^i}^j - Y^i X_{u^i}^j.$$

*Доказательство.* Так как  $X = X^i \rho_{u^i}$ ,  $Y = Y^i \rho_{u^i}$ , то

$$[X, Y] = \partial_X Y - \partial_Y X = X^i (Y^j \rho_{u^i u^j})_{u^i} - Y^i (X^j \rho_{u^i u^j})_{u^i} = (X^i Y_{u^i}^j - Y^i X_{u^i}^j) \rho_{u^j} + X^i Y^j \rho_{u^i u^j} - Y^i X^j \rho_{u^i u^j}.$$

Так как  $\rho_{u^i u^j} = \rho_{u^j u^i}$ , последние два слагаемых равны, поэтому  $[X, Y] = (X^i Y_{u^i}^j - Y^i X_{u^i}^j) \rho_{u^j}$ , то есть  $[X, Y]$  — касательное поле, а его координаты вычисляются по декларируемой формуле.  $\square$

**Определение 9.2.** Поле  $[X, Y]$  называется *коммутатором векторных полей*  $X$  и  $Y$ .

**Задача 9.3.** Пусть  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  — касательные поля, а  $f \in \mathcal{F}(M)$  — функция на поверхности  $M$ . Докажите следующие свойства коммутатора:

- (1) коммутатор  $[X, Y]$  является билинейным кососимметричным отображением из  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  в  $\mathfrak{X}(M)$ ;
- (2)  $[fX, Y] = f[X, Y] - (\partial_Y f)X = f[X, Y] - (\nabla_Y f)X$ ;
- (3)  $[X, fY] = f[X, Y] + (\partial_X f)Y = f[X, Y] + (\nabla_X f)Y$ ;
- (4)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (тождество Якоби).

## 9.2 Вторая фундаментальная форма поверхности и оператор Вейнгартена

Если выше мы дифференцировали касательное (или нормальное) поле и проецировали на то же самое пространство, то теперь будем поступать по-другому: продифференцируем касательное поле и спроецируем на нормальное пространство; аналогично, производную нормального поля спроецируем на касательное пространство. Замечательный факт: в этом случае производная будет зависеть только от значения поля в точке, поэтому эти две операции приведут нас в двум билинейным отображениям, играющим важную роль в дифференциальной геометрии.

**Предложение 9.4.** Пусть на поверхности  $M$  заданы векторные поля: касательные  $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$  и нормальные  $N, N' \in \mathcal{N}(M)$ , причем в некоторой точке  $P \in M$  выполняется  $X(P) = X'(P)$  (соответственно,  $N(P) = N'(P)$ ). Пусть  $\xi \in T_P M$ , тогда  $(\partial_\xi X)^\perp = (\partial_\xi X')^\perp$  (соответственно,  $(\partial_\xi N)^T = (\partial_\xi N')^T$ ).

*Доказательство.* Докажем первое утверждение (второе доказывается абсолютно так же). В силу линейности дифференцирования и операций проецирования, достаточно проверить, что если  $X(P) = 0$ , то  $(\partial_\xi X)^\perp = 0$ . Это равенство эквивалентно тому, что вектор  $(\partial_\xi X)^\perp \in N_P M$  ортогонален  $N_P M$ , т.е. каждому вектору нормального пространства  $N_P M$ .

Пусть  $\eta \in N_P M$  — произвольный вектор. Воспользуемся предложением 6.11 и продолжим вектор  $\eta$  в некоторую окрестность  $U^P$  точки  $P$  до локального нормального векторного поля, которое мы обозначим тем же символом  $\eta$ . Тогда  $\langle X, \eta \rangle = 0$  во всей окрестности  $U^P$ . Имеем

$$0 = \partial_\xi \langle X, \eta \rangle = \langle \partial_\xi X, \eta \rangle + \langle X, \partial_\xi \eta \rangle = \langle (\partial_\xi X)^\perp, \eta \rangle + 0,$$

поэтому, так как  $\eta$  — произвольный вектор из нормального пространства, заключаем, что  $(\partial_\xi X)^\perp = 0$ .  $\square$

В силу предложения 9.4, определены отображения  $B: T_P M \times T_P M \rightarrow N_P M$  и  $W: T_P M \times N_P M \rightarrow T_P M$ , заданные так:  $B(\xi, \zeta) = (\partial_\xi Y)^\perp = \partial_\xi Y - \nabla_\xi Y$ , где  $Y$  — произвольное продолжение вектора  $\zeta$  до касательного векторного поля, а  $W_\eta \xi := W(\xi, \eta) = -(\partial_\xi N)^T$ , где  $N$  — продолжение вектора  $\eta$  до нормального поля, определенного в некоторой окрестности точки  $P$ . Отметим, что эти отображения линейны по каждому аргументу, поэтому их также будем называть *билинейными отображениями*.

**Предложение 9.5.** Определенное только что билинейное отображение  $B$  симметрично.

*Доказательство.* Мы должны показать, что для любых  $\xi, \zeta \in T_P M$  выполняется  $B(\xi, \zeta) = B(\zeta, \xi)$ . Если  $X$  и  $Y$  — произвольные продолжения векторов  $\xi$  и  $\zeta$  до касательных векторных полей, то симметричность отображения  $B$  равносильна тому, что  $(\partial_X Y - \partial_Y X)^\perp(P) = 0$ , но это непосредственно вытекает из предложения 9.1, в соответствии с которым векторное поле  $\partial_X Y - \partial_Y X = [X, Y]$  является касательным.  $\square$

**Определение 9.6.** Определенное выше билинейное отображение  $B: T_P M \times T_P M \rightarrow N_P M$  называется *второй фундаментальной формой поверхности  $M$* . Если  $\eta \in N_P M$  — произвольный вектор, то билинейная форма  $B_\eta: T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ , равная

$$B_\eta(\xi, \zeta) = \langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle = \langle \partial_\xi Y, \eta \rangle,$$

где  $Y$  — продолжение вектора  $\zeta$  до касательного поля, называется *второй фундаментальной формой по отношению к вектору  $\eta$* . Важным частным случаем являются поверхности коразмерности 1, т.е. когда размерность поверхности на единицу меньше размерности объемлющего пространства  $\mathbb{R}^n$ . В этом случае нормальное пространство  $N_P M$  одномерно, и в нем в качестве  $\eta$  как правило выбирается любой из двух единичных векторов. Тогда *второй фундаментальной формой поверхности коразмерности 1* называется именно  $B_\eta$  (эта форма зависит от выбора  $\eta$ ).

Каждое линейное отображение  $W_\eta: T_P M \rightarrow T_P M$ ,  $W_\eta(\xi) = W(\xi, \eta)$ , называется *оператором Вейнгартена, заданным вектором  $\eta$* . В случае гиперповерхностей оператор Вейнгартена, так же, как и вторая фундаментальная форма, традиционно определяется одним из двух единичных векторов  $\eta$  и тоже зависит от выбора этого вектора.

**Предложение 9.7.** Вторая фундаментальная форма  $B$  поверхности  $M$  связана с оператором Вейнгартена этой поверхности так:

$$\langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle = \langle W_\eta \xi, \zeta \rangle.$$

Более того, эта формула однозначно задает оператор Вейнгартена.

*Доказательство.* Продолжим векторы  $\zeta$  и  $\eta$  соответственно до касательного поля  $Y$  и локального нормального поля  $N$ . Тогда, в силу ортогональности  $Y$  и  $N$ , имеем  $0 = \partial_\xi \langle Y, N \rangle = \langle \partial_\xi Y, N \rangle + \langle Y, \partial_\xi N \rangle$ , откуда

$$\langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle = \langle \partial_\xi Y, N \rangle = -\langle Y, \partial_\xi N \rangle = -\langle \zeta, (\partial_\xi N)^T \rangle = \langle \zeta, W_\eta \xi \rangle.$$

То, что оператор Вейнгартена однозначно задается формулой из этого предложения, вытекает из невырожденности скалярного произведения.  $\square$

Следующие две формулы мгновенно вытекают из определений. Первая из них называется *формулой Гаусса*, а вторая — *формулой Вейнгартена*.

**Следствие 9.8.** Пусть  $M$  — поверхность,  $P \in M$ ,  $\xi, \zeta \in T_P M$ ,  $\eta \in N_P M$ ,  $Y$  — касательное векторное поле, продолжающее  $\zeta$ ,  $N$  — локальное нормальное поле, продолжающее  $\eta$ . Тогда

$$\partial_\xi Y = \nabla_\xi Y + B(\xi, \zeta), \quad \partial_\xi N = -W_\eta \xi + \nabla_\xi N.$$

Так как каждое полилинейное отображение  $T: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow W$ , где  $V_i$  и  $W$  — конечномерные линейные пространства, задается своими значениями на элементах базисов пространств  $V_i$ , то координаты этих значений в  $W$  естественно называть *координатами полилинейного отображения  $T$* . Применим эти соображения в билинейном отображении  $B$  и  $W$ .

Пусть  $u^1, \dots, u^m$  — координаты на  $(M, \rho)$ ,  $P \in M$  и  $\eta_{m+1}, \dots, \eta_n$  — базис пространства  $N_P M$ . Для удобства записи, введем два типа индексов: латинские и греческие. Латинские будут меняться в пределах от 1 до  $m$ , а греческие — в пределах от  $m+1$  до  $n$ . При этом также будем пользоваться тензорной записью, опуская значки суммирования, помня лишь, в каких пределах меняются участвующие в формулах индексы. Во введенных соглашениях, координаты отображения  $B: T_P M \times T_P M \rightarrow N_P M$  будут иметь вид  $b_{ij}^\alpha$  и, значит,

$$B(\rho_{u^i}, \rho_{u^j}) = (\partial_{\rho_{u^i}} \rho_{u^j})^\perp = (\rho_{u^i u^j})^\perp = b_{ij}^\alpha \eta_\alpha.$$

Умножая эти уравнения на  $\eta_\beta$ , получим систему

$$\langle (\rho_{u^i u^j})^\perp, \eta_\beta \rangle = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_\beta \rangle = b_{ij}^\alpha \langle \eta_\alpha, \eta_\beta \rangle = b_{ij}^\alpha h_{\alpha\beta},$$

где  $(h_{\alpha\beta})$  — матрица Грама базиса  $\eta_{m+1}, \dots, \eta_n$ . Обозначим  $(h^{\alpha\beta})$  матрицу, обратную к  $(h_{\alpha\beta})$ , тогда

$$b_{ij}^\alpha = h^{\alpha\beta} \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_\beta \rangle.$$

Если в качестве  $\eta_\alpha$  выбрать ортонормальный базис, то будем иметь  $b_{ij}^\alpha = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_\alpha \rangle$ .

Если фиксировать единичный вектор  $\eta \in N_P M$ , то числа  $(b_\eta)_{ij} = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta \rangle$  будут координатами билинейной формы  $B_\eta$ . В частности, если  $M$  — гиперповерхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$ , и в качестве базиса одномерного нормального пространства выбран единичный вектор  $\eta$ , то в координатах  $u^1, \dots, u^m$  вторая фундаментальная форма будет задаваться матрицей с компонентами  $b_{ij} := (b_\eta)_{ij} = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta \rangle$  (традиционно опускают значок  $\eta$ , помня, тем не менее, какая из двух единичных нормалей была выбрана).

Вычислим, как выглядит в координатах оператор Вейнгартена. Напомним, что этот оператор однозначно определяется формулой  $\langle B(\xi, \zeta), \nu \rangle = \langle W_\nu \xi, \zeta \rangle$ . Пусть  $(q_\nu)_j^i$  — компоненты матрицы оператора  $W_\nu$  в координатах  $u^1, \dots, u^m$ , т.е.  $W_\nu(\rho_{u^j}) = (q_\nu)_j^i \rho_{u^i}$ , и  $\nu = \nu^\alpha \eta_\alpha$ . Тогда

$$\langle W_\nu(\rho_{u^j}), \rho_{u^k} \rangle = \langle (q_\nu)_j^i \rho_{u^i}, \rho_{u^k} \rangle = (q_\nu)_j^i g_{ik} = \langle B(\rho_{u^j}, \rho_{u^k}), \nu \rangle = \langle b_{jk}^\alpha \eta_\alpha, \nu^\beta \eta_\beta \rangle = b_{jk}^\alpha h_{\alpha\beta} \nu^\beta,$$

откуда  $(q_\nu)_j^i = g^{ik} b_{kj}^\alpha h_{\alpha\beta} \nu^\beta$ .

Снова рассмотрим случай гиперповерхности и выберем один из двух единичных векторов  $\eta$  одномерного пространства  $N_P M$ . В этом случае компоненты  $(q_\eta)_j^i$  обозначаются более кратко  $q_j^i$ , и теперь, как легко видеть, выполняется  $q_j^i = g^{ik} b_{kj}$ . В тензорном исчислении эта формула получается операцией *поднятия индекса у второй фундаментальной формы с помощью первой фундаментальной формы*.

**Пример 9.9.** Рассмотрим гиперповерхность  $(M, \rho)$ , заданную графиком  $x^{m+1} = f(x^1, \dots, x^m)$ , и вычислим вторую фундаментальную форму в координатах  $x^1, \dots, x^m$ . Погружение  $\rho$  имеет вид

$$\rho(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, f(x^1, \dots, x^m)),$$

так что  $\rho_{x^i x^j} = (0, \dots, 0, f_{x^i x^j})$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . Единичную нормаль  $\eta$  можно вычислить, представив поверхность в неявном виде  $F(x^1, \dots, x^{m+1}) = x^{m+1} - f(x^1, \dots, x^m) = 0$ , вычислив градиент функции  $F$  и нормировав его:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^m}^2}}(-f_{x^1}, \dots, -f_{x^m}, 1).$$

Теперь несложно вычислить матрицу второй фундаментальной формы:

$$B = (b_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^m}^2}}(f_{x^i x^j}).$$

Вычислим оператор Вейнгартена для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$ . Первая фундаментальная форма имеет вид  $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$ , определитель матрицы метрики равен  $1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2$ , а обратная матрица имеет вид

$$G^{-1} = \frac{1}{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2} \begin{pmatrix} 1 + f_{x^2}^2 & -f_{x^1} f_{x^2} \\ -f_{x^1} f_{x^2} & 1 + f_{x^1}^2 \end{pmatrix},$$

поэтому матрица оператора Вейнгартена равна

$$\begin{aligned} Q = (q_j^i) &= G^{-1}B = \frac{1}{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2} \begin{pmatrix} 1 + f_{x^2}^2 & -f_{x^1} f_{x^2} \\ -f_{x^1} f_{x^2} & 1 + f_{x^1}^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}} \begin{pmatrix} f_{x^1 x^1} & f_{x^1 x^2} \\ f_{x^1 x^2} & f_{x^2 x^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + f_{x^2}^2)f_{x^1 x^1} - f_{x^1} f_{x^2} f_{x^1 x^2} & (1 + f_{x^2}^2)f_{x^1 x^2} - f_{x^1} f_{x^2} f_{x^2 x^2} \\ (1 + f_{x^1}^2)f_{x^1 x^2} - f_{x^1} f_{x^2} f_{x^1 x^1} & (1 + f_{x^1}^2)f_{x^2 x^2} - f_{x^1} f_{x^2} f_{x^1 x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 9.2.1 Главные направления и главные кривизны

Пусть  $(M, \rho)$  — произвольная  $m$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ . Выберем произвольную точку  $P \in M$  и единичный вектор  $\nu \in N_P M$ . Пусть  $B_\nu$  — вторая фундаментальная форма поверхности  $M$  в по отношению к  $\nu$ . По теореме 22 о приведении пары квадратичных форм к каноническому виду, существует такой ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_m$  касательного пространства, в котором матрица  $(B_\nu(e_i, e_j))$  диагональна и равна  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ . Векторы  $e_i$  называются *главными направлениями*, а  $\lambda_i$  — *главными кривизнами* поверхности  $M$  в точке  $P$  для билинейной формы  $B_\nu$ . Алгоритм нахождения главных направлений и главных кривизн обсуждался в разделе 9 введения. Напомним, что для этого надо

- составить матрицы  $G = (\langle \rho_{u^i}, \rho_{u^j} \rangle)$  и  $B = (\langle \rho_{u^i u^j}, \nu \rangle)$ ;
- решить характеристическое уравнение  $f(\lambda) = \det(B - \lambda G) = 0$ : корни  $\lambda_i$  этого многочлена степени  $m$  (вычисленные с учетом кратности) и будут искомыми главными кривизнами;
- найти главные направления из уравнений  $g(\xi) = (B - \lambda_i G)\xi = 0$ : для каждого  $\lambda_i$  мы находим линейное пространство решений  $V_i$  (хорошо известно, что для разных  $\lambda_i$  эти пространства ортогональны и в сумме дают все  $T_P M$ ); затем в каждом  $V_i$  нужно выбрать произвольный ортонормальный базис; объединение выбранных базисов и даст семейство главных направлений.

**Пример 9.10.** Рассмотрим в качестве поверхности  $M$  бесконечнолистную намотку на двумерный тор в  $\mathbb{R}^4$  (тор Клиффорда), заданную так:

$$\rho(u^1, u^2) = \rho(\varphi, \psi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi), \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$$

Матрица первой фундаментальной формы единичная, так что  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Заметим, что нормальное пространство двумерно и векторы  $\eta_3 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0)$  и  $\eta_4 = (0, 0, \cos \psi, \sin \psi)$  образуют ортонормальный базис этого пространства. Вычислим  $b_{ij}^\alpha$ . Заметим, что  $\rho_{\varphi\varphi} = -\eta_3$ ,  $\rho_{\psi\psi} = -\eta_4$ ,  $\rho_{\varphi\psi} = 0$ , поэтому  $b_{ij}^3 = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_3 \rangle = -\delta_{1i} \delta_{1j}$  и  $b_{ij}^4 = \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_4 \rangle = -\delta_{2i} \delta_{2j}$ .

Рассмотрим произвольный единичный нормальный вектор  $\nu = a\eta_3 + b\eta_4$ , тогда

$$(b_\nu)_{ij} = \langle \rho_{u^i u^j}, \nu \rangle = a \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_3 \rangle + b \langle \rho_{u^i u^j}, \eta_4 \rangle = -a \delta_{1i} \delta_{1j} - b \delta_{2i} \delta_{2j}.$$

Выпишем матрицы  $G = (\langle \rho_{u^i}, \rho_{u^j} \rangle)$  и  $B = (\langle \rho_{u^i u^j}, \nu \rangle)$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение  $f(\lambda) = \det(B - \lambda G) = (-a - \lambda)(-b - \lambda) = 0$  и получим  $\lambda_1 = -a$ ,  $\lambda_2 = -b$ , так что  $-a$  и  $-b$  — главные кривизны по отношению к вектору  $\nu$ . Чтобы найти главные направления, нужно решить уравнение  $g(\xi) = (B - \lambda_i G)\xi = 0$ . Для  $\lambda_1$  решение — одномерное подпространство, натянутое на  $(1, 0)$ , а для  $\lambda_2$  — одномерное подпространство, натянутое на  $(0, 1)$ . Так как первая фундаментальная форма задается единичной матрицей  $G$ , эти векторы имеют единичную длину (и ортогональны, как соответствующие разным собственным числам). Таким образом, эти векторы — главные направления. Отметим, что также главными направлениями являются и векторы любой пара вида  $\pm(1, 0)$ ,  $\pm(0, 1)$ .

### 9.2.2 Сечения

Дальнейшее изучение геометрии поверхности в  $\mathbb{R}^n$  будем проводить с помощью сечений этой поверхности разными аффинными подпространствами. Итак, пусть  $(M, \rho)$  — произвольная  $m$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $2 \leq m \leq n - 1$  (мы исключаем из рассмотрения кривые и замены координат). Так как нас будут интересовать лишь свойства поверхности в сколь угодно малых окрестностях некоторой ее точки  $P \in M$ , а в таких окрестностях отображение  $\rho$  взаимно однозначно и это позволяет отождествить окрестность с ее образом в  $\mathbb{R}^n$ , мы, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что  $M \subset \mathbb{R}^n$  и задается глобально каждым из трех способов: графиком, неявно и параметрически.

Рассмотрим неявное задание  $F = c$  поверхности  $M$ , где  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Фиксируем произвольное целое  $1 \leq q < m$  и пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  — аффинное подпространство, проходящее через  $P$  и заданное неявно системой из  $m - q$  линейных уравнений  $G = d$ ,  $d \in \mathbb{R}^{m-q}$ . Будем говорить, что подпространство  $\Pi$  *трансверсально*  $M$  в точке  $P$ , если система уравнений  $\{F = c, G = d\}$  удовлетворяет в точке  $P$  условию теоремы о неявном отображении, т.е. вычисленный в точке  $P$  ранг матрицы Якоби этой системы максимален и, значит, равен  $n - q$ . Тогда, в окрестности точки  $P$ , решение системы  $\{F = c, G = d\}$  представляет  $q$ -мерную поверхность  $S$ , которую мы будем называть *линейным  $q$ -мерным сечением поверхности  $M$  в точке  $P$*  и отождествлять с подмножеством в  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Аффинное подпространство  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  можно также отождествить с линейным подпространством в  $T_P \mathbb{R}^n$ . При таком отождествлении получаем, что  $\Pi \cap T_P M = T_P S$  (проверьте), а нормальное пространство  $N_P M$  может пересекаться с  $\Pi$  по подпространствам разной размерности. Так как размерность подпространства  $\Pi$  равна  $n - m + q$ , т.е. на  $n - m$  больше размерности  $q$  линейного пространства  $T_P S \subset \Pi$ , а  $T_P \mathbb{R}^n = T_P M \oplus N_P M$ , то максимальная размерность пересечения  $\Pi \cap N_P M$  равна  $n - m$ , т.е. совпадает размерностью  $N_P M$ . В случае, когда этот максимум достигается, получаем  $\Pi = T_P S \oplus N_P M$ , и такое линейное сечение  $S$  называется *нормальным*.

Особо нас будут интересовать одномерные нормальные сечения, которые получаются, когда размерность пространства  $\Pi$  на 1 больше размерности  $n - m$  нормального пространства  $N_P M$  и когда  $N_P M \subset \Pi$ . Такое нормальное сечение  $S$  является кривой, лежащей в  $\Pi$ . Если размерность  $\Pi$  больше 2, то одномерное сечение  $S$  характеризуется несколькими кривизнами, старшие из которых, вообще говоря, зависят от производных порядка больше 2. Однако, введенные нами первая и вторая фундаментальные формы поверхности зависят лишь от производных порядка не больше 2, так что этих форм будет не достаточно, чтобы установить “жесткую связь” с геометрией одномерных сечений в таких  $\Pi$ . Таким образом, “содержательная наука” в терминах первой и второй форм получается лишь для двумерных  $\Pi$ , но тогда одномерные сечения получаются только в предположении, что  $M$  — гиперповерхность.

### 9.2.3 Гиперповерхности

Итак, пусть  $M$  — гиперповерхность, тогда каждое нормальное пространство  $N_P M$  одномерно, поэтому в  $N_P M$  существует ровно две единичных нормали. Мы будем выбирать одну из двух таких нормалей, обозначим ее  $\eta$ , и проводить дальнейшие вычисления по отношению к ней.

Пусть  $S$  — одномерное сечение гиперповерхности  $M$  в точке  $P \in M$ . Как было отмечено выше,  $S$  получается пересечением  $M$  с некоторой двумерной плоскостью  $\Pi$ . Каждая такая плоскость  $\Pi$  однозначно задается парой векторов. В качестве одного из них можно выбрать любой ненулевой касательный к кривой  $S$  вектор  $\xi \in T_P S \subset T_P M$ . В качестве второго возьмем один из двух единичных векторов, лежащих в  $\Pi$  и перпендикулярных  $\xi$ , обозначим его  $\nu$  и будем называть *нормалью сечения  $S$* . Отметим, что  $\nu$ , в силу трансверсальности

плоскости  $\Pi$ , не содержится в касательной плоскости  $T_P M$ . Пару  $(S, \nu)$  будем называть *оснащенным сечением*. В дальнейшем все сечения предполагаются оснащенными, а слово *оснащенный* мы будем как правило опускать.

Мы также уточним определение нормального сечения. Напомним, что сечение  $S$  мы назвали нормальным, если и только если его нормаль  $\nu$  содержится в нормальной прямой  $N_P M$ . Однако, оказывается более удобным под *нормальным сечением* понимать то (оснащенное) сечение, у которого нормаль  $\nu$  совпадает с нормалью  $\eta$ , что мы и будем делать.

Мы будем изучать геометрию поверхности  $M$  в терминах ориентированных кривизн сечений  $S$ . Чтобы определить ориентированную кривизну, нужно прежде всего ориентировать плоскость  $\Pi$ . Для этого мы параметризуем кривую  $S$  так, чтобы  $S(0) = P$  и  $\dot{S}(0) \neq 0$ , а плоскость  $\Pi$  ориентируем базисом  $(\dot{S}(0), \nu)$ . Ясно, что при замене параметризации, сохраняющей направление движения по  $S$ , не меняется как ориентация плоскости  $\Pi$ , так и ориентированная кривизна сечения  $S$ . Параметризованные сечения, отличающиеся на параметризацию, сохраняющую направление движения, будем называть *ориентированным сечением*, а отличающиеся на произвольную замену параметризации — *неориентированным сечением* или просто *сечением*. Отметим, что ориентированная кривизна сечения, при фиксированной нормали, не меняется даже если изменить направление движения. Кривизну (ориентированного или нет) сечения  $S$  будем обозначать  $k(S)$ . Если же изменить нормаль  $\nu$  на  $-\nu$ , то у полученного нового оснащенного сечения  $S'$  кривизна  $k(S')$  будет равна  $-k(S)$ .

Для ориентированного сечения  $S$  определено его *направление*  $\xi := \dot{S}(0)/\|\dot{S}(0)\|$ . Заметим, что, при фиксированном направлении  $\xi$ , нормальное ориентированное сечение этого направления определено однозначно, поэтому его кривизну будем также обозначать  $k(\xi)$ . Отметим, что  $k(\xi) = k(-\xi)$ .

Два сечения в точке  $P \in M$  назовем *касающимися*, если они касаются друг друга как кривые, т.е. их направления или совпадают, или противоположно направлены. Найдем, как связаны ориентированные кривизны сечения  $S$  и касающегося его нормального сечения  $S_n$ . Для этого параметризуем  $S$  натуральными параметрами и положим  $\xi = \dot{S}(0)$ , тогда  $\ddot{S} = k(S)\nu$ . Обозначим  $\psi$  *угол наклона сечения  $S$  к нормали  $\eta$* , т.е. угол между нормалью  $\nu$  сечения  $S$  и вектором  $\eta$ . Тогда

$$\langle \ddot{S}, \eta \rangle = \langle k(S)\nu, \eta \rangle = k(S) \cos \psi.$$

Заметим, что нормальное сечение  $S_n$  является частным случаем сечения  $S$ , соответствующим  $\nu = \eta$ , т.е.  $\psi = 0$ .

Далее,

$$\ddot{S} = \partial_{\dot{S}} \dot{S} = (\partial_{\dot{S}} \dot{S})^T + (\partial_{\dot{S}} \dot{S})^\perp = \nabla_{\xi} \dot{S} + B(\xi, \xi),$$

откуда

$$k(S) \cos \psi = \langle \ddot{S}, \eta \rangle = \langle B(\xi, \xi), \eta \rangle,$$

в частности, для  $S = S_n$  получаем  $k(S_n) = \langle B(\xi, \xi), \eta \rangle$ , откуда  $k(S) \cos \psi = k(S_n)$ . Итак, мы доказали следующий результат.

**Теорема 9.11 (Менье).** Пусть  $M$  — гиперповерхность,  $P \in M$ ,  $\eta \in N_P M$  — единичная нормаль к  $M$ , и  $S$  — проходящее через  $P$  одномерное сечение. Пусть  $\psi$  — угол наклона сечения  $S$  к вектору  $\eta$ , тогда ориентированная кривизна  $k(S)$  сечения  $S$  связана с ориентированной кривизной  $k(S_n)$  нормального сечения того же направления по формуле  $k(S) \cos \psi = k(\xi)$ .

**Теорема об отношении пары форм.** Пусть  $u^1, \dots, u^m$  — координаты на  $M$ . Запишем в этих координатах ориентированные кривизны  $k(\xi)$  одномерных нормальных сечений  $S$  в точке  $P \in M$  в направлении  $\xi \in T_P M$ . Пусть  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  — компоненты первой и второй фундаментальных форм. Тогда  $k(S) = k(\xi) = B_\eta(\xi, \xi) = b_{ij} \xi^i \xi^j$ . Положим  $\zeta = \dot{S}(0)$ , тогда  $\xi = \zeta/\|\zeta\|$ , откуда

$$(9.1) \quad k(S) = B_\eta(\zeta/\|\zeta\|, \zeta/\|\zeta\|) = \frac{B_\eta(\zeta, \zeta)}{G(\zeta, \zeta)} = \frac{b_{ij} \zeta^i \zeta^j}{g_{ij} \zeta^i \zeta^j}.$$

Формула (9.1) называется *теоремой об отношении пары форм*.

**Формула Эйлера.** Рассмотрим базис  $e_1, \dots, e_m$  из главных направлений, и пусть  $\lambda_i$  — главная кривизна, соответствующая  $e_i$ , тогда  $b_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ . Если  $S_i$  — ориентированное нормальное сечение в направлении  $e_i$ , то, в силу формулы (9.1), имеем  $\lambda_i = k(S_i)$ . Сечения  $S_i$  называются *главными нормальными сечениями*, а главные кривизны  $\lambda_i$  являются ориентированными кривизнами этих главных нормальных сечений.

Пусть  $S$  — произвольное ориентированное нормальное сечение, проведенное в направлении  $\xi \in T_P M$ , и  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$  — координаты вектора  $\xi$  в базисе  $e_i$ . Обозначим  $\varphi^i$  угол между  $\xi$  и главным направлением  $e_i$ , тогда  $\xi^i = \langle \xi, e_i \rangle = \cos \varphi^i$ , откуда

$$(9.2) \quad k(S) = b_{ij} \xi^i \xi^j = \lambda_i \delta_{ij} \xi^i \xi^j = \lambda_i \cos^2 \varphi^i.$$

Равенство (9.2) называется *формулой Эйлера*.

**Инварианты пары форм.** Заметим, что главные кривизны в действительности являются собственными числами оператора Вейнгартена, так как уравнение  $\det(B - \lambda G) = 0$  равносильно  $\chi(\lambda) = \det(G^{-1}B - \lambda E) = 0$ . Функция  $\chi(\lambda)$  — характеристический многочлен оператора Вейнгартена — является многочленом степени  $m$ , равным  $(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_m - \lambda)$ , поэтому его коэффициенты, с точностью до знака, равны элементарным симметрическим многочленам от главных кривизн  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Свободный член этого многочлена равен произведению  $\lambda_1 \cdots \lambda_m$  главных кривизн и называется *гауссовой кривизной поверхности  $M$  в точке  $P$* , обозначается  $K(P)$  или просто  $K$ , и равен  $\det(G^{-1}B) = \det B / \det G$ . Коэффициент при  $(-\lambda)^{m-1}$  равен сумме  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$  главных кривизн, называется *средней кривизной поверхности  $M$  в точке  $P$* , обозначается  $H(P)$  или просто  $H$ , и равен  $\text{tr}(G^{-1}B)$ .

**Вычисление главных кривизн с помощью минимакса.** Напомним, что линейный оператор  $A: V \rightarrow V$ , заданный на векторном пространстве со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , называется *симметричным*, если  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  для всех  $x, y \in V$ . Если  $V$  конечномерно, в нем выбран базис, и в этом базисе  $G$  и  $A$  — соответственно матрица Грама скалярного произведения и матрица рассматриваемого оператора, то симметричность означает, что  $x^t A^t G y = x^t G A y$  для всех  $x, y \in V$ , а это равносильно  $A^t G = G A$  или  $(GA)^t = GA$ , т.е. условию симметричности матрицы  $GA$ . Это условие не зависит от выбора базиса в силу того, что определение симметричности  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  инвариантно.

Из сказанного вытекает, что  $G^{-1}B$  — симметричный линейный оператор. Из линейной алгебры известна следующая теорема, позволяющая находить собственные числа симметричного оператора с помощью минимакса.

**Теорема 9.12.** Пусть  $A: V \rightarrow V$  — симметричный линейный оператор, заданный на  $m$ -мерном векторном пространстве со скалярным произведением, тогда существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора  $A$  диагональна, причем ее собственные числа  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$ , упорядоченные по возрастанию, могут быть найдены так: обозначим  $\text{Gr}(k, m)$  семейство всех линейных подпространств в  $V$  размерности  $k$ , тогда

$$\lambda_k = \min_{L \in \text{Gr}(k, m)} \max\{\langle Av, v \rangle : v \in L, \|v\| = 1\} = \min_{L \in \text{Gr}(k, m)} \max_{v \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

В частности,  $\lambda_1 = \min\{\langle Av, v \rangle : v \in V, \|v\| = 1\}$  и  $\lambda_m = \max\{\langle Av, v \rangle : v \in V, \|v\| = 1\} = \|A\|$ . Более того, если кратность  $\lambda_1$  или кратность  $\lambda_m$  равна 1, то, с точностью до знака, существует единственный единичный собственный вектор, отвечающий этому собственному значению.

**Определение главных направлений без вычислений.** Опишем один случай, в котором главные направления можно найти без вычислений. А именно, предположим, что  $M$  — двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , на которой имеется два ортогональных нормальных сечения  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $P \in M$  таких, что для каждого нормального сечения  $S$  в  $P$ , отличного от  $S_1$  и  $S_2$ , существует симметричное ему нормальное сечение  $S' \neq S$  в  $P$ . Тогда утверждается, что сечения  $S_1$  и  $S_2$  — главные. Действительно, если главные кривизны в точке  $P$  различны, то, по теореме 9.12, имеется ровно одно нормальное сечение в  $P$ , отвечающее минимальной главной кривизне, и ровно одно для максимальной. Таким образом, сечения в  $P$ , отличные от  $S_i$ , не могут быть главными. Если же главные кривизны в точке  $P$  равны, то они, по формуле Эйлера (9.2), также равны и ориентированным кривизнам всех остальных нормальных сечений в  $P$ , поэтому любую пару взаимно перпендикулярных нормальных сечений в  $P$  можно выбрать в качестве главных. В частности, такой парой является и  $(S_1, S_2)$ .

**Пример 9.13.** Пусть  $\rho(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)$ ,  $f(z) > 0$ , — бесконечнолистная намотка  $M$  на двумерную поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$ . Выберем произвольную точку  $P \in M$  и обозначим  $S_1$  и  $S_2$  соответственно образующую  $\varphi = \text{const}$ , проходящую через  $P$  (являющуюся нормальным сечением в  $P$ ), и перпендикулярное ей нормальное сечение в  $P$ . Так как для каждого нормального сечения  $S$  в  $P$ , не совпадающего с  $S_1$  и  $S_2$ ,

имеется симметричное относительно плоскости, задающей  $S_1$ , нормальное сечение  $S' \neq S$ , то, в соответствии со сказанным выше, сечения  $S_1$  и  $S_2$  можно выбрать в качестве главных.

Вычислим главные кривизны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для простоты будем считать, что точка  $P$  лежит в полуплоскости  $\varphi = 0$ , поэтому образующая  $S_1$  имеет вид  $x = f(z)$ . Выберем внешнюю единичную нормаль  $\eta$  к  $M$  в направлении вне “трубки”, ограниченной поверхностью вращения (и содержащей ось  $z$ ). Тогда  $\lambda_1 = k(S_1) = \ddot{f}/(1 + \dot{f}^2)^{3/2}$ . Для вычисления второй главной кривизны  $\lambda_2$  воспользуемся теоремой Менье. Для этого рассмотрим сечение  $S$  плоскостью, проходящей через  $P$  перпендикулярно оси  $z$ . Это сечение касается  $S_2$  и представляет собой окружность радиуса  $f$ . В качестве нормали  $\nu$  к сечению  $S$  выберем вектор  $(1, 0, 0)$ , тогда  $k(S) = -1/f$ . Остается вычислить угол  $\psi$  наклона этого сечения к  $\eta$ . Вектор скорости образующей равен  $(\dot{f}, 0, 1)$ , поэтому  $\eta = (1, 0, -\dot{f})/\sqrt{1 + \dot{f}^2}$ , откуда  $\cos \psi = 1/\sqrt{1 + \dot{f}^2}$ , так что, по теореме Менье,  $\lambda_2 = k(S_2) = k(S) \cos \psi = -\frac{1}{f\sqrt{1 + \dot{f}^2}}$ . Вычислим среднюю и гауссову кривизны этой поверхности:

$$H = \frac{\ddot{f}}{(1 + \dot{f}^2)^{3/2}} - \frac{1}{f\sqrt{1 + \dot{f}^2}} = \frac{\ddot{f}f - \dot{f}^2 - 1}{f(1 + \dot{f}^2)^{3/2}}, \quad K = -\frac{\ddot{f}}{f(1 + \dot{f}^2)^2}.$$

**Пример 9.14.** Пусть  $f(z)$  — постоянная функция, равная  $r$ , тогда поверхность  $M$  — бесконечнолистная намотка цилиндра. В качестве единичной нормали  $\eta$  к поверхности  $M$  выберем теперь “внутреннюю” нормаль, т.е. направленную в сторону оси вращения. Одно главное нормальное сечение — образующая цилиндра — является прямой, поэтому главная кривизна  $\lambda_1$  равна 0. Второе главное нормальное сечение — окружность  $z = \text{const}$ , поэтому вторая главная кривизна  $\lambda_2$  равна  $1/r$  (мы выбрали внутреннюю нормаль). Таким образом, средняя кривизна  $H$  цилиндра равна  $1/r$ , а гауссова  $K$  равна 0. Как мы уже говорили, цилиндр изометричен евклидовой плоскости, в которой все нормальные сечения — прямые, поэтому все главные кривизны плоскости равны 0. Отсюда вытекает, что и средняя, и гауссова кривизны плоскости равны 0. Итак, мы построили пример двух изометричных поверхностей: плоскость и бесконечнолистная намотка на цилиндр. Обратите внимание, что у этих поверхностей средние кривизны различны, так что средняя кривизна зависит не только от первой фундаментальной формы, но и от второй. Насчет гауссовой кривизны ничего такого мы пока сказать не можем. Более того, как оказывается, гауссова кривизна может быть вычислена исключительно через первую фундаментальную форму (см. ниже).

**Пример 9.15.** Если  $f(z) = a \operatorname{ch}(z/a)$ , то  $M$  — катеноид, и главные кривизны равны

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{ch}(z/a)}{a(1 + \operatorname{sh}^2(z/a))^{3/2}} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2(z/a)}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{a \operatorname{ch}(z/a)\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(z/a)}} = -\frac{1}{a \operatorname{ch}^2(z/a)},$$

поэтому  $H = 0$  и  $K = -\frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^4(z/a)}$ .

Поверхности нулевой средней кривизны называются *минимальными*: они локально минимизируют площадь. Таким образом, катеноид является примером минимальной поверхности.

**Пример 9.16.** Напишем уравнение двумерной минимальной поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , заданной графиком. В примере 9.9 мы вычислили матрицу оператора Вейнгартена. Средняя кривизна — след этого оператора, поэтому

$$H = \frac{(1 + f_{x_2}^2)f_{x_1x_1} - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + (1 + f_{x_1}^2)f_{x_2x_2}}{(1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2)^{3/2}},$$

поэтому поверхность, заданная графиком функции  $f(x^1, x^2)$ , минимальна, если и только если функция  $f$  удовлетворяет уравнению Лагранжа минимальной поверхности

$$(1 + f_{x_2}^2)f_{x_1x_1} - 2f_{x_1}f_{x_2}f_{x_1x_2} + (1 + f_{x_1}^2)f_{x_2x_2} = 0.$$

**Задача 9.17.** Покажите, что функция

$$f(x, y) = \ln \frac{\cos x}{\cos y}, \quad -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$$

задает минимальную поверхность (называемую *поверхностью Шерка*).

### 9.2.4 Средняя кривизна поверхности произвольной коразмерности

Обобщим понятие средней кривизны на поверхности произвольной коразмерности. Пусть  $(M, \rho)$  — поверхность размерности  $m$  в  $\mathbb{R}^n$ , где  $m < n$ . Выберем произвольные координаты  $(u^1, \dots, u^m)$  на  $M$ , и пусть  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  — компоненты первой и второй фундаментальных форм в этих координатах. Отметим, что  $g_{ij} = \langle \rho_{u^i}, \rho_{u^j} \rangle$  — функции от  $u^i$ , а  $b_{ij} = \rho_{u^i u^j}^\perp$  — нормальные векторные поля. Пусть, как всегда,  $(g^{ij})$  — компоненты матрицы, обратной к  $(g_{ij})$ . Положим  $\mathcal{H} = g^{ij} b_{ij}$ , тогда  $\mathcal{H}$  — нормальное векторное поле.

**Предложение 9.18.** *Векторное поле  $\mathcal{H}$  не зависит от выбора координат.*

*Доказательство.* Пусть  $(u^{1'}, \dots, u^{m'})$  — другие координаты на  $M$ , в которых  $g_{i'j'}$  и  $b_{i'j'}$  — компоненты первой и второй фундаментальных форм. Тогда

$$\mathcal{H} = g^{i'j'} b_{i'j'} = u_{u^{i'}}^i u_{u^{j'}}^j g^{i'j'} u_{u^i}^{p'} u_{u^j}^{q'} b_{p'q'} = \delta_{i'}^{p'} \delta_{j'}^{q'} g^{i'j'} b_{p'q'} = g^{i'j'} b_{i'j'},$$

что и требовалось. □

**Определение 9.19.** Поле  $\mathcal{H}$  называется *полем векторов средней кривизны поверхности  $M$* , а его длина  $H$  — *средней кривизной  $M$* . Поверхность  $M$  называется *минимальной*, если  $H = 0$ , и *поверхностью постоянной кривизны*, если  $H = \text{const}$ .

**Пример 9.20.** Вернемся к примеру 9.10. Как было показано, в координатах  $\varphi, \psi$  поле  $b_{ij}$  в ортонормальном базисе  $\eta_3 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0)$ ,  $\eta_4 = (0, 0, \cos \psi, \sin \psi)$  имеет координаты  $(-\delta_{1i} \delta_{1j}, -\delta_{2i} \delta_{2j})$ , при этом матрица первой фундаментальной формы единичная. Следовательно,  $\mathcal{H} = b_{11} + b_{22} = (-1, 0) + (0, -1) = (-1, -1)$ , откуда  $H = \sqrt{2}$ , так что тор Клиффорда — двумерная поверхность постоянной кривизны в  $\mathbb{R}^4$ .

**Пример 9.21.** Для одномерной поверхности, т.е. для кривой в  $\mathbb{R}^n$ , вектор средней кривизны совпадает с ускорением при натуральной параметризации, а средняя кривизна — с кривизной кривой. Одномерная минимальная поверхность — это кривая нулевой кривизны, т.е. часть прямой. Одномерные поверхности постоянной кривизны на плоскости — фрагменты прямых или окружностей. В трехмерном пространстве такие “поверхности” устроены намного сложнее, см. упражнение 2.8.

## Упражнения к главе 9

**Упражнение 9.1.** Пусть  $X, Y, Z$  — касательные поля, а  $f$  — функция на поверхности  $M$ . Докажите следующие свойства коммутатора:

- (1) коммутатор  $[X, Y]$  является билинейным кососимметричным отображением из  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  в  $\mathbb{R}$ ;
- (2)  $[fX, Y] = f[X, Y] - (\partial_Y f)X = f[X, Y] - (\nabla_Y f)X$ ;
- (3)  $[X, fY] = f[X, Y] + (\partial_X f)Y = f[X, Y] + (\nabla_X f)Y$ ;
- (4)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (тождество Якоби).

**Упражнение 9.2.** Пусть  $A$  — произвольная матрица размера  $n \times n$ . Векторное поле  $V_A: x \mapsto Ax$  на  $\mathbb{R}^n$  называется *линейным*. Покажите, что коммутатор линейных полей  $V_A$  и  $V_B$  может быть вычислен так:  $[V_A, V_B] = -V_{[A, B]}$ , где  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор матриц  $A$  и  $B$ .

**Упражнение 9.3.** Вычислите вторую фундаментальную форму и оператор Вейнгартена следующих поверхностей:

- (1) стандартной сферы  $\sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2 = r^2$ ,  $r > 0$ ;
- (2) в  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x, y, z$  двумерного тора  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ ,  $0 < a < b$ .

Найдите главные направления и главные кривизны, а также среднюю и гауссовы кривизны.

**Упражнение 9.4.** Покажите, что функция

$$f(x, y) = \ln \frac{\cos x}{\cos y}, \quad -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$$

задает двумерную минимальную поверхность в  $\mathbb{R}^3$  (называемую *поверхностью Шерка*).

**Упражнение 9.5.** Докажите, что если у двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  тождественно равны нулю средняя и гауссова кривизны, то эта поверхность плоская.

**Упражнение 9.6.** Вычислите вторую фундаментальную форму двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , заданной неявной функцией в виде  $F(x, y, z) = 0$ .

**Упражнение 9.7.** Покажите, что если через каждую точку двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  проходят три различные прямые, лежащие в этой поверхности, то эта поверхность плоская. Приведите пример неплоской двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$ , через каждую точку которой проходят две прямые, лежащие в поверхности.

**Упражнение 9.8.** Покажите, что вдоль каждой гиперповерхности существует (гладкое) поле единичных нормалей.

**Конструкция.** Пусть  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  — регулярная параметрическая гиперповерхность и  $\eta$  — поле единичных нормалей вдоль  $\rho$ . Для  $a \in \mathbb{R}$  рассмотрим гладкую (не обязательно регулярную) параметрическую поверхность  $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ , заданную так:  $\sigma_a = \rho + a\eta$ . Такая поверхность называется *волновым фронтом* или *эквидистантой*. Далее, если  $\lambda_i$  — главные кривизны поверхности  $\rho$  в точке  $P$ , вычисленные по отношению к  $\eta$ , то величина  $R_i = 1/\lambda_i$  называется *радиусом кривизны* (он может быть бесконечным), а, в случае  $\lambda_i \neq 0$ , точка  $C_i = \rho + R_i \eta$  называется *центром кривизны* (в данной точке поверхности центров кривизны столько же, сколько ненулевых главных кривизн). Множество всех центров кривизны поверхности называется *каустикой*.

**Упражнение 9.9.** Пусть  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  — регулярная параметрическая гиперповерхность и  $\sigma_a$  — ее волновой фронт.

- (1) Во всех неособых точках волнового фронта  $\sigma_a$ , выразите коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности  $\sigma_a$  через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности  $\rho$ .
- (2) Докажите, что множество особенностей всех волновых фронтов совпадает с каустикой.
- (3) В случае  $m = 2$  выразите среднюю и гауссову кривизны волнового фронта  $\sigma_a$  через средние и гауссовы кривизны исходной поверхности  $\rho$ .

## Лекция 10

# Формулы Гаусса и Петерсона–Майнарди–Кодацци, блистательная теорема Гаусса, теорема Бонне

**План.** Уравнения Гаусса и уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для гиперповерхностей, тензор Римана и его свойства, существенные компоненты тензора Римана, количество существенных компонент тензора Римана для двумерных гиперповерхностей, уравнения Гаусса для двумерных гиперповерхностей, симметрии уравнений Петерсона–Майнарди–Кодацци, существенные уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци для двумерных гиперповерхностей, блистательная теорема Гаусса, формулировка теоремы Бонне.

Рассмотрим гиперповерхность  $(M, \rho)$  с координатами  $u^1, \dots, u^m$  и фиксированным полем  $\eta$  единичных нормалей, по отношению к которой будем вычислять вторую фундаментальную форму. Наша задача — выразить равную нулю разность  $\rho_{u^i u^j u^k} - \rho_{u^i u^k u^j}$  через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм и получить соответствующие соотношения между этими коэффициентами. Имеем (под многоточием мы понимаем аналогичное выражение, получающееся перестановкой индексов  $j$  и  $k$ )

$$\rho_{u^i u^j u^k} - \rho_{u^i u^k u^j} = (\Gamma_{ij}^p \rho_{u^p} + b_{ij} \eta)_{u^k} - \dots = (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} \rho_{u^p} + \Gamma_{ij}^p (\Gamma_{pk}^l \rho_{u^l} + b_{pk} \eta) + (b_{ij})_{u^k} \eta + b_{ij} \eta_{u^k} - \dots$$

Вычислим  $\eta_{u^k}$ . Так как поле  $\eta$  состоит из единичных векторов, его производная перпендикулярна  $\eta$ , поэтому лежит в касательном пространстве и, значит, раскладывается по каноническому базису:  $\eta_{u^k} = \eta_{u^k}^p \rho_{u^p}$ . Умножим скалярно эти равенства на  $\rho_{u^q}$  и воспользуемся тем, что  $\langle \eta, \rho_{u^q} \rangle = 0$ . Получим

$$\langle \eta_{u^k}, \rho_{u^q} \rangle = -\langle \eta, \rho_{u^q u^k} \rangle = -b_{qk} = \eta_{u^k}^p \langle \rho_{u^p}, \rho_{u^q} \rangle = \eta_{u^k}^p g_{pq},$$

откуда  $\eta_{u^k}^p = -g^{pq} b_{qk}$ , так что  $\eta_{u^k} = -g^{pq} b_{qk} \rho_{u^p}$ . Итак,

$$\rho_{u^i u^j u^k} - \rho_{u^i u^k u^j} = (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} \rho_{u^p} + \Gamma_{ij}^p (\Gamma_{pk}^l \rho_{u^l} + b_{pk} \eta) + (b_{ij})_{u^k} \eta - b_{ij} g^{pq} b_{qk} \rho_{u^p} - \dots$$

Соберем теперь коэффициенты при касательных базисных векторах  $\rho_{u^t}$  и нормальном векторе  $\eta$  и приравняем полученные выражения к нулю. Получим следующие соотношения:

$$(10.1) \quad (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} - (\Gamma_{ik}^p)_{u^j} + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{ik}^q \Gamma_{qj}^p - g^{pq} (b_{ij} b_{qk} - b_{ik} b_{qj}) = 0, \quad p = 1, \dots, m,$$

где в третьем и четвертом слагаемых мы поменяли индекс  $p$  на  $q$ , а индекс  $l$  на  $p$  (эти формулы снова называются *уравнениями Гаусса*);

$$(10.2) \quad (b_{ij})_{u^k} - (b_{ik})_{u^j} + \Gamma_{ij}^p b_{pk} - \Gamma_{ik}^p b_{pj} = 0$$

(эти формулы называются *уравнениями Петерсона–Майнарди–Кодацци*).

**Замечание 10.1.** Выражения

$$-R_{ijk}^p = (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} - (\Gamma_{ik}^p)_{u^j} + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{ik}^q \Gamma_{qj}^p$$

задают компоненты  $R_{ijk}^p$  тензора Римана: при переходе к другим координатам они действительно меняются по закону изменения тензоров типа  $(1, 3)$ . Таким образом, уравнения Гаусса можно переписать так:

$$(10.3) \quad b_{ik}b_{qj} - b_{ij}b_{qk} = g_{qp}R_{ijk}^p =: R_{qijk}.$$

Функции  $R_{qijk}$  также называются *компонентами тензора Римана* (с опущенным индексом). Заметим, что уравнения (10.3) и (10.2) демонстрируют наличие нетривиальной связи между компонентами первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности. Кроме того, так как тензор Римана зависит лишь от первой фундаментальной формы, его можно определить для поверхности любой размерности и коразмерности.

**Задача 10.2.** Докажите, что компоненты тензора Римана для гиперповерхности удовлетворяют следующим свойствам:

- (1)  $R_{ijk}^p = -R_{ikj}^p$  и  $R_{qijk} = -R_{qikj}$ ;
- (2)  $R_{ijk}^p + R_{jki}^p + R_{kij}^p = 0$  и  $R_{pijk} + R_{pjki} + R_{pkij} = 0$  (тождество Бьянки);
- (3)  $R_{pijk} = -R_{ipjk}$ ;
- (4)  $R_{pijk} = R_{jkpi}$ .

В частности, для двумерной поверхности лишь следующие компоненты тензора Римана могут быть отличны от нуля:

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$$

(говорят, что в этом случае у тензора Римана имеется лишь одна существенная компонента). Выведите отсюда, что в двумерном случае уравнения Эйлера (10.3) либо являются тождествами (если  $q = i$  или  $j = k$ ), или же все эквивалентны одному уравнению (скажем, для  $q = j = 1$  и  $i = k = 2$ ).

**Задача 10.3.** Обозначим левую часть уравнений Петерсона–Майнарди–Кодацци (10.2) через  $(ijk)$ . Покажите, что

- (1)  $(ijj) = 0$ ;
- (2)  $(ijk) = -(ikj)$ .

Таким образом, все уравнения получаются из тех  $(ijk)$ , в которых  $j < k$ .

Покажите, что на двумерной поверхности все уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци (10.2) получаются из следующих двух:

$$(b_{11})_{u^2} - (b_{12})_{u^1} + \Gamma_{11}^p b_{p2} - \Gamma_{12}^p b_{p1} = 0, \quad (b_{12})_{u^2} - (b_{22})_{u^1} + \Gamma_{12}^p b_{p2} - \Gamma_{22}^p b_{p1} = 0.$$

**Замечание 10.4.** Упражнения 10.2 и 10.3 показывают, что в случае двумерных поверхностей система, составленная из уравнений Гаусса и Петерсона–Майнарди–Кодацци, эквивалентна системе из трех уравнений.

Рассмотрим частный случай двумерной поверхности в трехмерном пространстве, и в уравнении (10.3) положим  $q = j = 1$  и  $i = k = 2$ , тогда это уравнение переписется в виде  $\det B = R_{1212}$ , где  $B$  — матрица второй фундаментальной формы (относительна  $\eta$ ). Напомним, что гауссова кривизна  $K$  равна  $\det B / \det G$ , где  $G$  — матрица первой фундаментальной формы. Тем самым, мы видим, что гауссова кривизна двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  может быть выражена исключительно через первую фундаментальную форму, в частности, изометрии не меняют гауссову кривизну, так что пример 9.14 становится еще более понятным. Последнее утверждение называется *блистательной теоремой Гаусса*.

**Теорема 10.5** (Theorema Egregium). *Гауссова кривизна двумерной поверхности не меняется при изометриях.*

**Замечание 10.6.** Для  $m$ -мерной поверхности коразмерности 1,  $m > 2$ , можно показать, что гауссова кривизна (произведение всех главных кривизн) при изометриях сохраняется для четных  $m$ , и сохраняется с точностью до знака при нечетных.

Формулы (10.1) и (10.2) дают необходимое и достаточно условие восстановления двумерной поверхности, гомеоморфной открытому кругу, по двум квадратичным формам. Эта теорема является следствием соответствующей теоремы из теории дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих условия, гарантирующие существование и единственность решения при заданных начальных условиях.

**Теорема 10.7** (Бонне). Пусть в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $(u^1, u^2)$ , гомеоморфной открытому кругу, задано две гладких матричных функции  $G = (g_{ij}(u^1, u^2))$  и  $B = (b_{ij}(u^1, u^2))$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , первая из которых в каждой точке  $(u^1, u^2)$  является симметричной и положительно определенной, а вторая — просто симметричной. Тогда существует двумерная параметрическая поверхность  $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  с первой фундаментальной формой  $G$  и второй фундаментальной формой  $B$ , если и только если  $g_{ij}(u^1, u^2)$  и  $b_{ij}(u^1, u^2)$  удовлетворяют уравнениям (10.1) и (10.2). Более того, поверхность  $\rho$  определена однозначно с точностью до движения пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Замечание 10.8.** Аналогичные результаты имеют место и для поверхностей произвольной размерности и коразмерности, см. [1].

**Дополнительный материал.** Выведем теперь уравнения Эйлера и Петерсона–Майнарди–Кодацци для поверхности  $(M, \rho)$  в  $\mathbb{R}^n$  произвольной коразмерности. Для этого, как мы уже делали, будем считать, что  $M \subset \mathbb{R}^n$  и эта поверхность задается каждым из трех способов. Если  $\{F^{m+1}(x) = c^{m+1}, \dots, F^n(x) = c^n\}$  — неявное задание  $M$ , то в каждой точке  $P \in M$  векторы  $\eta_\alpha = F_x^\alpha$  образуют базис нормального пространства. Пусть  $(u^1, \dots, u^m)$  — координаты на  $M$ . Тогда

$$\rho_{u^i u^j u^k} = (\Gamma_{ij}^p \rho_{u^p} + b_{ij}^\alpha \eta_\alpha)_{u^k} = (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} \rho_{u^p} + \Gamma_{ij}^p (\Gamma_{pk}^q \rho_{u^q} + b_{pk}^\beta \eta_\beta) + (b_{ij}^\alpha)_{u^k} \eta_\alpha + b_{ij}^\alpha (\eta_\alpha)_{u^k}.$$

Вычислим  $(\eta_\alpha)_{u^k}$ , для чего разложим этот вектор по базису  $\rho_{u^1}, \dots, \rho_{u^m}, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n$ :

$$(\eta_\alpha)_{u^k} = (\eta_\alpha)_{u^k}^s \rho_{u^s} + (\eta_\alpha)_{u^k}^\gamma \eta_\gamma.$$

Умножим последнее равенство на  $\rho_{u^t}$  и воспользуемся тем, что  $\langle \eta_\alpha, \rho_{u^t} \rangle = 0$  во всех точках поверхности, откуда  $\langle (\eta_\alpha)_{u^k}, \rho_{u^t} \rangle = -\langle \eta_\alpha, \rho_{u^k u^t} \rangle = -\langle \eta_\alpha, b_{kt}^\delta \eta_\delta \rangle = -b_{kt}^\delta h_{\alpha\delta}$ , где  $h_{\alpha\delta} = \langle \eta_\alpha, \eta_\delta \rangle$ . С другой стороны,  $\langle (\eta_\alpha)_{u^k}, \rho_{u^t} \rangle = (\eta_\alpha)_{u^k}^s g_{st}$ , откуда

$$(\eta_\alpha)_{u^k}^s = -g^{st} b_{kt}^\delta h_{\alpha\delta}.$$

Вычислим  $(\eta_\alpha)_{u^k}^\gamma$ . Имеем

$$\langle (\eta_\alpha)_{u^k}, \eta_\delta \rangle = \langle \nabla_{\rho_{u^k}} \eta_\alpha, \eta_\delta \rangle = (\eta_\alpha)_{u^k}^\gamma h_{\gamma\delta},$$

откуда

$$(\eta_\alpha)_{u^k}^\gamma = h^{\gamma\delta} \langle \nabla_{\rho_{u^k}} \eta_\alpha, \eta_\delta \rangle$$

и, в итоге,

$$(\eta_\alpha)_{u^k} = -g^{st} b_{kt}^\delta h_{\alpha\delta} \rho_{u^s} + h^{\gamma\delta} \langle \nabla_{\rho_{u^k}} \eta_\alpha, \eta_\delta \rangle \eta_\gamma.$$

Соберем теперь в выражении  $0 = \rho_{u^i u^j u^k} - \rho_{u^i u^k u^j}$  отдельно касательные, отдельно нормальные составляющие, и приравняем их нулю. Касательная составляющая дает

$$(10.4) \quad (\Gamma_{ij}^p)_{u^k} - (\Gamma_{ik}^p)_{u^j} + \Gamma_{ij}^q \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{ik}^q \Gamma_{qj}^p - g^{pt} h_{\alpha\delta} (b_{ij}^\alpha b_{kt}^\delta - b_{ik}^\alpha b_{jt}^\delta) = 0, \quad p = 1, \dots, m,$$

или, в терминах компонент тензора Римана,

$$R_{pijk} = h_{\alpha\delta} (b_{ik}^\alpha b_{jp}^\delta - b_{ij}^\alpha b_{kp}^\delta).$$

Это и есть общее *уравнение Гаусса*.

Выпишем теперь нормальную составляющую:

$$(10.5) \quad (b_{ij}^\beta)_{u^k} - (b_{ik}^\beta)_{u^j} + \Gamma_{ij}^p b_{pk}^\beta - \Gamma_{ik}^p b_{pj}^\beta + h^{\beta\delta} [\langle b_{ij}^\alpha \nabla_{\rho_{u^k}} \eta_\alpha - b_{ik}^\alpha \nabla_{\rho_{u^j}} \eta_\alpha, \eta_\delta \rangle] = 0, \quad \beta = m+1, \dots, n.$$

Эти формулы суть *уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци* в общем случае.

Так как теперь нормальное пространство не одномерно, существенную роль начинает играть ковариантное дифференцирование в нормальных пространствах (производная нормального поля уже не обязана быть касательным полем). Это приводит к еще одной системе, которая получается из тождества  $(\nu_{u^j u^k} - \nu_{u^k u^j})^\perp = 0$  после записи ее в координатах, где  $\nu$  — нормальное векторное поле. Соответствующая система называется *уравнениями Риччи* [1].

Для описания ковариантного дифференцирования в нормальных пространствах вводится еще один набор функций, построение которого мы сейчас опишем. Так как уравнения достаточно сложные, для упрощения записи пользуются следующим приемом. А именно, применяют ортогонализацию Грама–Шмидта к (локальному)

семейству независимых нормальных полей, образующих в каждой точке базис нормального пространства. Заметим, что процесс ортогонализации сохраняет гладкую зависимость от точки (проверьте), поэтому он приводит к семейству полей  $\eta_{m+1}, \dots, \eta_n$ , образующих в каждой точке поверхности ортонормальный базис нормального пространства.

Эти поля порождают  $n - m$  вторых квадратичных форм  $B_{\eta_\alpha}$ . Кроме того, ковариантная производная  $\nabla_\xi \nu$  полностью характеризуется нормальными полями  $\nabla_\xi \eta_\alpha$ . Разложим эти поля по выбранному базису, а линейно зависящие от  $\xi$  коэффициенты разложения обозначим  $\beta_\alpha^\gamma(\xi)$ . Таким образом, в каждой точке  $P \in M$  мы определили ковектор  $\beta_\alpha^\gamma: T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что

$$\nabla_\xi \eta_\alpha = \beta_\alpha^\gamma(\xi) \eta_\gamma, \quad \beta_\alpha^\gamma(\xi) = \langle \nabla_\xi \eta_\alpha, \eta_\gamma \rangle.$$

Заметим, что в уравнениях Петерсона–Майнарди–Кодацци также появились ковариантные производные  $\nabla_{\rho_{ij}} \eta_\alpha$  нормальных полей, так что в координатной записи и в этих уравнениях будут участвовать формы  $\beta_\alpha^\gamma$ . Также эти ковекторные поля задействованы и в уравнениях Риччи.

Оказывается, коэффициенты первой фундаментальной формы, вторых форм  $B_{\eta_\alpha}$  и ковекторных полей  $\beta_\alpha^\gamma$  полностью определяют поверхность (с точностью до движения объемлющего пространства). Необходимым и достаточным условием существования поверхности с только что описанными функциями является система, составленная из уравнений Гаусса, Петерсона–Майнарди–Кодацци и Риччи. Именно так обобщается теорема Бонне.

**Замечание 10.9.** Теперь задача 10.2 легко решается и для поверхностей произвольной коразмерности.

**Задача 10.10 (\*).** Выведите уравнения Риччи.

# Литература

- [1] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, v.4, Publish or Perish, Berkeley, 1999.

## Упражнения к главе 10

**Упражнение 10.1.** Докажите, что компоненты тензора Римана для гиперповерхности удовлетворяют следующим свойствам:

- (1)  $R_{ijk}^p = -R_{ikj}^p$  и  $R_{qijk} = -R_{qikj}$ ;
- (2)  $R_{ijk}^p + R_{jki}^p + R_{kij}^p = 0$  и  $R_{pijk} + R_{pjki} + R_{pkij} = 0$  (тождество Бьянки);
- (3)  $R_{pijk} = -R_{ipjk}$ ;
- (4)  $R_{pijk} = R_{jkpi}$ .

В частности, для двумерной поверхности лишь следующие компоненты тензора Римана могут быть отличны от нуля:

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}.$$

Выведите отсюда, что в двумерном случае уравнения Эйлера (10.3) либо являются тождествами (если  $q = i$  или  $j = k$ ), или же все эквивалентны одному уравнению (скажем, для  $q = j = 1$  и  $i = k = 2$ ).

**Упражнение 10.2.** Обозначим левую часть уравнений Петерсона–Майнарди–Кодацци (10.2) через  $(ijk)$ . Покажите, что

- (1)  $(ijj) = 0$ ;
- (2)  $(ijk) = -(ikj)$ .

Таким образом, все уравнения получаются из тех  $(ijk)$ , в которых  $j < k$ .

Покажите, что на двумерной поверхности все уравнения Петерсона–Майнарди–Кодацци (10.2) получаются из следующих двух:

$$(b_{11})_{u^2} - (b_{12})_{u^1} + \Gamma_{11}^p b_{p2} - \Gamma_{12}^p b_{p1} = 0, \quad (b_{12})_{u^2} - (b_{22})_{u^1} + \Gamma_{12}^p b_{p2} - \Gamma_{22}^p b_{p1} = 0.$$

**Упражнение 10.3.** Покажите, что ни в одной окрестности на двумерном торе в  $\mathbb{R}^3$  нельзя ввести евклидовы координаты.

**Упражнение 10.4.** Для произвольной, не обязательно двумерной, поверхности  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  положим

$$R_{ik} = R_{ipk}^p, \quad R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} R_{ipk}^p = g^{ik} g^{pq} R_{qipk}.$$

Билинейная форма  $R_{ik}$  называется *тензором Риччи*, а функция  $R$  — *скалярной кривизной поверхности  $M$* .

- (1) Докажите, что тензор Риччи симметричен, т.е.  $R_{ik} = R_{ki}$ .
- (2) Докажите, что гауссова кривизна  $K$  двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  связана со скалярной кривизной  $R$  так:  $R = 2K$ .
- (3) Найдите скалярную кривизну евклидовой плоскости и двумерной сферы радиуса  $r$  в трехмерном евклидовом пространстве.
- (4) Найдите скалярную кривизну поверхности, параметризованной верхней полуплоскостью с координатами  $(x, y)$  и метрикой  $ds^2 = r^2(dx^2 + dy^2)/y^2$ , где  $r \in \mathbb{R}$  — положительная константа.

Точка поверхности называется *омбилической*, если в ней все главные кривизны равны между собой.

**Упражнение 10.5.** Покажите, что двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , все точки которой — омбилические, является или частью плоскости, или частью сферы.