Кривые. Локальные свойства и глобальные инварианты.

Классификация замкнутых кривых с точностью до регулярной гомотопии

Напоминание основных определений (которые уже обсуждались раньше).

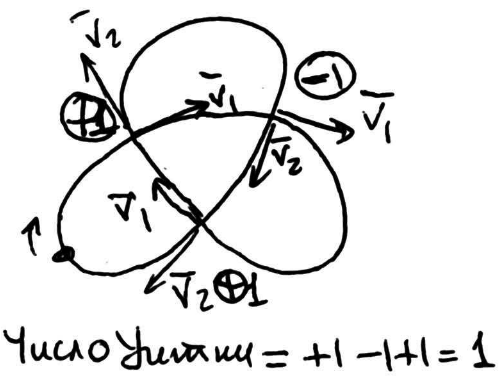
Определение 1. Пусть $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — замкнутые регулярные кривые на плоскости (т.е. $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$ и $\gamma_i'(t) \neq 0$ при всех t). Они называются *регулярно гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, что
1) $F(0,t) = \gamma_0(t)$ и $F(1,t) = \gamma_1(t)$ при всех t.
2) $F(s,0) = F(s,1)$ при всех s.
3) $F_t'(s,t) \neq 0$ при всех s и t.

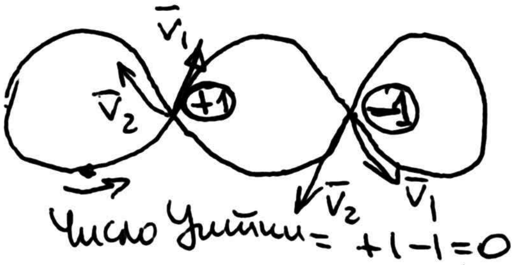
Неформально говоря, F — это семейство кривых, "начинающееся" в γ_1 и "заканчивающееся" в γ_2, в котором все кривые замкнутые и регулярные (при этом F непрерывна как функция двух переменных — параметра гомотопии s и параметра на кривой t).

Замечание. В определениях регулярной кривой и регулярной гомотопии плоскость $\mathbb{R}^2$ можно заменить на двумерную поверхность. При этом условия регулярности должны быть выполнены к некоторых (а тогда и в любых) локальных координатах.

Определение 2. Число вращения $K(\gamma)$ замкнутой регулярной кривой $\gamma(t)$ — это число оборотов, которое делает вектор скорости кривой при движении точки вдоль кривой. Более точно: вектор скорости кривой (на плоскости с декартовыми координатами) имеет координаты $(\rho(t)\cos\varphi(t), \rho(t)\sin\varphi(t))$, где $a \leq t \leq b$, $\rho(t) > 0$, а $\varphi(t)$ — непрерывная функция; так как кривая замкнута, то $\varphi(b) = \varphi(a) \mod 2\pi$; тогда число вращения $K(\gamma)$ определяется как $\frac{1}{2\pi}|\varphi(b) - \varphi(a)|$.

Определение 3. Число Уитни $W(\gamma)$ — .... (см. картинку).





Задача 1. *Для регулярной кривой γ на плоскости:* $\Big|$ *Число вращения* $K(\gamma)$ $\Big| - \Big|$ *Число Уитни* $W(\gamma)$ $\Big| = \pm 1$

Теорема 1 (Теорема Уитни на плоскости). *Две замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения равны.*

Теорема 2 (Теорема Уитни на сфере). *Любая замкнутая регулярная кривая на сфере регулярно гомотопна окружности или "восьмерке".*

Кривые. Локальные свойства и глобальные инварианты. (продолжение)

Замкнутые регулярные кривые на простейших двумерных поверхностях

Для замкнутых регулярных кривых на плоскости единственным инвариантом (при регулярной гомотопии) является число вращения. Это теорема Уитни (см. предыдущий листок).

Как изменится теорема Уитни, если рассматривать ту же задачу не на плоскости, а на какой-нибудь двумерной поверхности?

Хочется, чтобы формулировка теоремы о классификации кривых на поверхности M была примерно такой же, как и для плоскости: *Две замкнутые регулярные кривые на поверхности M регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их «инварианты» ..., ... совпадают.*

Надо понять, что такое здесь «инварианты». Ответ будет разным для разных поверхностей. Рассмотрим отдельно некоторые простые поверхности.

сфера

Случай сферы самый простой. Мы его уже обсуждали (см. предыдущий листок). Здесь каждая кривая регулярно гомотопна либо "окружности", либо "восьмерке". Таким образом, для сферы: «инвариант» принимает всего два значения.

цилиндр

Предыдущий пример показывает, что для кривых на сфере нет чего-то похожего на "число вращения". По крайней мере, нет никакого числового «инварианта» (т.е. числа, сопоставляемого кривой, которое сохраняется при регулярной гомотории), принимающего различные целочисленные значения (как было для кривых на плоскости).

Чтобы понять, почему так происходит, надо еще раз подумать о том, как определялось число вращения на плоскости. При движении точки вдоль кривой (на плоскости) мы следили за изменением угла между вектором скорости кривой и некоторым фиксированным направлением (осью x), т.е., фактически, мы использовали то, что на плоскости это фиксированное направление задано во всех точках плоскости. На сфере этого сделать нельзя. Это не очевидная теорема (она будет доказываться в курсе дифференциальной геометрии). Ее можно сформулировать так: *если в каждой точке двумерной сферы выбрать касательный вектор так, чтобы он непрерывно зависел от точки, то в некоторой точке он будет равен нулю.*

На цилиндре выбрать такое "фиксированное направление" во всех точках можно. Например, можно представить цилиндр как часть плоскости (здесь, конечно, "цилиндр" мы понимаем как что-то гомеоморфное цилиндру — например, кольцо на плоскости).

Задача 2. *Определите "число вращения" для кривой на цилиндре.*

Задача 3. *Нарисуйте на цилиндре две кривые без самопересечений, которые не являются регулярно гомотопными. Каким «инвариантом» они различаются?*

Задача 4. *Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни для кривых на цилиндре.*

лист Мёбиуса

На листе Мёбиуса, как и на цилиндре, можно выбрать "фиксированное направление" во всех точках. Но, на самом деле, для определения "число вращения" этого мало.

Задача 5. *Подумайте, что еще необходимо (кроме выбора "фиксированного направления" во всех точках), чтобы "число вращения" было корректно определено.*

Задача 6. *Приведите примеры кривых без самопересечений на листе Мёбиуса, которые не являются регулярно гомотопными. Сколько таких кривых попарно неэквивалентных (т.е. являющихся регулярно гомотопными) существует?*

Задача 7. *Рассмотрим кривую γ_1 на листе Мёбиуса, которая идет вдоль его оси и имеет одну "маленькую петельку". Пусть γ_2 — такая же кривая, но с петелькой в другую сторону. Будут ли эти кривые регулярно гомотопны?*

Задача 8. *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых (с точностью до регулярной гомотопии) на листе Мёбиуса.*

тор

В случае тора полезно сначала получить ответ на следующий вопрос: когда две замкнутые кривые на торе гомотопны (без условия регулярности!)?.

***Задача 1.** *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых (с точностью до гомотопии — не обязательно регулярной) на торе. «Инвариантом» здесь являются два целых числа — их и надо определить.*

Задача 9. *Определите число вращения для регулярной кривой на торе.*

***Задача 2.** *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых с точностью до регулярной гомотопии на торе.*

проективная плоскость

Продумайте следующие два способа классификации кривых на проективной плоскости (с точностью до регулярной гомотопии).

I. Можно, как и в случае тора, сначала разобраться с кривыми, рассматривая их с точностью до гомотопии (не обязательно регулярной), а затем "учесть маленькие петельки".

II. Можно, как и в случае сферы, использовать то, что мы знаем ответ для проективной плоскости без точки (вспомните, чему гомеоморфна проективная плоскость с выброшенной точкой).

***Задача 3.** *Сформулируйте и докажите теорему классификации кривых с точностью до регулярной гомотопии на проективной плоскости.*