16-я проблема Гильб.:
пусть X – гладкая плоская вещ. кривая, т.е. кривая в $\mathbb{R}P^2$ (1)
($\Rightarrow$ она состоит из кон. числа „овалов", т.е. связных компактных кривых $\sim S^1$). Каково взаимное располож. овалов относительно друг друга?

Т.-Харнака: Если X – кривая степени n, то max. число овалов $= \frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$. Эта оценка не улучшаема.

Мн-е в ал. геометрии: мн-ва точек аффинного или проективного пр-ва, удовл. системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$ – афф. мн-е ($F_1,\dots,F_n$) – произвольн. мн-ны от n переменных (и не обязат. конечно)

$$\begin{cases} F_1(x_0,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ F_n(x_0,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$ – проективное многообр-е.

Аффинные мн-я (афф. ал. мн-ва): $Y=\overset{\text{мн-во нулей}}{Z}(T)$, где $T\subset k[x_1,\dots,x_n]$
k – алг. замкнутое поле.

Зад. 1 $\cup$ кон. числа ал. мн-в – ал. мн-во, $\cap$ любого числа ал. мн-в – ал. мн-во, $\emptyset$ и все пр-во A^n – ал. мн-ва

Опр. Задать топологию – задать мн-во откр. (замкн.) мн-в, уд. аксиомам: ...

Опр. Топол. Зарисского: замкн. мн-ва в A^n – алгебр. мн-ва

Пример. Топология в $A^1_{\mathbb{C}}$ $\forall$ ал. мн-во – мн-во нулей 1 мн-на (доказать!). Но $f(x)=c(x-a_1)\dots(x-a_n) \Rightarrow Z(f)=\{a_1\},\dots,\{a_n\}$
$\Rightarrow$ замкн. мн-ва – вся прямая, $\emptyset$ и кон. мн-ва точек.

Опр. Не $\emptyset$ подмн-во Y топ. пр-ва X **неприводимо**, если $Y \neq Y_1 \cup Y_2$, где Y_1, Y_2 – замкн. собств. подмн-ва ②

Пример: 1. $\mathbb{A}^1$ неприв.

2. $\forall$ ~~подмн~~ не $\emptyset$ открытое подмн-во неприв. пр-ва неприводимо и плотно.

3. Если Y – неприв. подмн-во пр-ва X, то $\overline{Y} = (\bigcap \text{замкн. мн-в} \supset Y)$ тоже неприв.

Пусть $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $Y \subset \mathbb{A}^n_e$ $I(Y) = \{f \in A \mid f(P) = 0 \ \forall P \in Y\}$.

Предл.-задача. a.) Если $T_1 \subset T_2$ – подмн-ва в A, то $Z(T_1) \supset Z(T_2)$.

б.) Если $Y_1 \subset Y_2$ – подмн-ва в $\mathbb{A}^n$, то $I(Y_1) \supset I(Y_2)$

c.) $\forall$ двух подмн-в Y_1, Y_2 из $\mathbb{A}^n$ $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$

d.)* $\forall$ идеала $\mathfrak{a} \subset A$ имеем: $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

e.) $\forall$ подмн-ва $Y \subset \mathbb{A}^n$ $Z(I(Y)) = \overline{Y}$

$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid f^r \in \mathfrak{a}$ для некот. целого $r > 0\}$.

* d) – т-ма Гильберта о нулях: Если k – алг. замкн. поле, $\mathfrak{a} \triangleleft A$, $f \in A$, $f \in I(Z(\mathfrak{a})) \Rightarrow f^r \in \mathfrak{a}$

Сл-е. $\exists$ взаимно-однозначное и обращающее включение соответствие между алгебраическими мн-вами в $\mathbb{A}^n$ и радикальными идеалами.

Алг. мн-во неприводимо $\Leftrightarrow$ его идеал прост.

Д-во. $f, g \in I(Y) \Rightarrow Y \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. $\Rightarrow Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$

$\Rightarrow Y = Y \cap Z(f)$ либо $Y = Z(g) \cap Y$. $\Rightarrow$ или $f \in I(Y)$ или $g \in I(Y)$.

Если p – простой ид. и $Z(p) = Y_1 \cup Y_2$. $\Rightarrow p = I(Y_1) \cap I(Y_2) \Rightarrow$ $p = I(Y_1)$ или $p = I(Y_2)$. $\Rightarrow Z(p)$ – неприв., т.к $Z(p) = Y_1$ или Y_2.

Прим. 1. $\mathbb{A}^n$ – неприв.

2. Если f – неприв. мн-н в $\mathbb{C}[x, y]$, то $Y = Z(f)$ – неприв.

Это – ~~афф~~ кривая.

3. Максим. идеал прост, $m \subset A$ ~ точке $P = (a_1, \dots, a_n)$ $\Rightarrow$
$\forall$ макс. идеал в A имеет вид $m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ (упражнение!)

~~Упр.~~ Прим. Если $k = \mathbb{R}$, то у кривой $x^2 + y^2 + 1 = 0$ нет точек $\Rightarrow$ Т-ма Гильберта неверна.

Упр. Привести пример неприв. мн-на $f \in \mathbb{R}[x, y]$: $Z(f)$ в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ привод.

Опр. Нётерово кольцо: уд-ет усл-ю обрыва возраст. цепочек или
$\forall$ идеал кон. порождён

Т-ма Гильберта о базисе: A - нётерово кольцо

Св-ва: Фактор-кольцо нётерова кольца - нётерово.

Топология аффинн. многообразий

Опр. Топ. пр-во X - нётерово, если для его замкн. подмн-в выполн. усл. обрыва уб. цеп.

Прим. $\mathbb{A}^n$ - нётерово.

Предл. В нётеровом топ. пр-ве X каждое непустое замкн. подмн-во Y $= \cup$ кон. числа неприв. замкн. мн-в. Y_i. Если $Y_j \not\supset Y_i$ $\forall i, j$, то неприв. компоненты опред-ся однозначно

Опр. Размерность топ. пр-ва X ($\dim X$) $= \max\limits_n \{\exists Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$, где Z_i - неприв. замкн. мн-ва$\}$

Прим. $\dim \mathbb{A}^1 = 1$

Опр. Афф. коорд. кольцо $A(X) := A/I(X)$. Если X - неприв. $\Rightarrow$
$A(X)$ - без дел. 0. $A(X)$ - кон. пор. кольцо над $k = \mathbb{C}$

Опр. Высота простого идеала p (обозн.: $ht\, p$) $= \max\limits_n \{\exists\, p_0 < \dots < p_n = p\}$
Размерность кольца $B = \max\limits_{p\text{-прост}} ht\, p$

Предл. Размерность афф. ал. мн-я $Y = \dim A(Y)$.

T. (из комм. алг-ры) Пусть k – нек. поле и B – целостное к., кот. явл. кон. пор. k-алг-ра. Тогда

a) $\dim B = \operatorname{tr deg} K(B)$

b) $\forall$ прост. ид. p имеем: $\operatorname{ht} p + \dim B/p = \dim B$.

Сл-е. $\dim A^n = n$

Т-ма (Крулль) Если A – нётерово к. и $f \in A$ – не делитель нуля и не обр. $\Rightarrow$ высота каждого миним. простого ид. $p \supset f$ $= 1$.

Предл. Нётерово целостное к. A факториально $\Leftrightarrow$ $\forall$ его простой ид. высоты 1 – главный.

Сл-е Мн-е (неприв.) $Y \subset A^n$ имеет размерность $n-1$ $\Leftrightarrow$ Y – мн-во нулей $Z(f)$ некот. непост. неприв. мн-на f из $A = k[x_1, \dots, x_n]$.

Д-во. f – неприв. $\Rightarrow$ $p = (f)$ – прост $\Rightarrow$ $Z(f)$ – неприв. мн-е. $\operatorname{ht}(p) = 1 \Rightarrow$ $\dim A/f = n-1$.

Обратно, ~~...~~ $Y = Z(p)$ и $\operatorname{ht} p = 1$ $\Rightarrow$ $p = (f)$

Проективн. мн-я

Теперь вместо к. A – $S = k[x_0, \dots, x_n]$ (работаем с $\mathbb{P}^n$)

$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, S_d – одноp. мн-ны степ. d. Имеем: $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ $\forall d, e \geq 0$

Опр. Идеал $\mathfrak{a} \subset S$ – однородный, если $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$

Лемма. 1) $\mathfrak{a}$ – одноp. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ порождается одноp. элементами

2) Σ, произв-е, $\cap$ одноp. ид. – одноp. ид.

3.) радикал одноp. ид. – одноp.

4.) одноp. ид. $\mathfrak{a}$ – прост $\Leftrightarrow$ $\forall$ двух одноp. эл-тов f и g из усл-я $f \cdot g \in \mathfrak{a}$ следует, что либо $f \in \mathfrak{a}$, либо $g \in \mathfrak{a}$.

Топ. Зар. в $\mathbb{P}^n$: все замкн. мн-ва – нули одноp. идеалов.

Размерность – как в афф. сл-е

Одноp. коорд. кольцо: $S(Y) := S/I(Y)$

Одноp. т-ма о нулях: если $\mathfrak{a}$ – одноp. ид. и $f \in S$ – одноp. с $\deg f > 0$: $f(P) = 0$ $\forall$ $P \in Z(\mathfrak{a})$ $\Rightarrow$ $f^q \in \mathfrak{a}$