

О Л И М П И А Д А
по геометрии и топологии
кафедры дифференциальной геометрии и приложений
27 ноября 2012

1. Доказать, что для любого плоского выпуклого многоугольника площади S и периметра P выполнено неравенство $\frac{S}{P^2} < \frac{1}{4\pi}$, причем эта оценка является наилучшей.

2. Кубик, стоящий на плоскости на некотором отмеченном квадрате (сторона которого равна ребру кубика), может занимать одно из 24 возможных положений. Какие из этих 24 положений кубика можно получить, начав с некоторого заданного положения и “покатав” кубик по плоскости так, чтобы в конце он опять стоял на исходном отмеченном квадрате? [“Катанием” кубика по плоскости мы называем последовательность “перекачиваний” его через некоторое ребро.]

3. а) В трехмерном пространстве расположен выпуклый многогранник. Каково минимальное количество “лампочек”, которые можно расположить так, чтобы осветить всю его поверхность? [Лампочки считаем точками, свет из которых идет по всем направлениям, а точку на поверхности многогранника считаем освещенной, если отрезок, один конец которого — эта точка, а другой — лампочка, не содержит других точек многогранника.]

б) Сколько лампочек понадобится, если в предыдущем пункте заменить “выпуклый многогранник” на “выпуклое замкнутое тело”?

4. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), соседние стороны которого перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону “угол падения равен углу отражения”. Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.

5. План нового шоссе представляет из себя гладкую замкнутую самопересекающуюся кривую (все точки самопересечения двойные и трансверсальные, т.е. имеют вид $\times$). В каждой точке самопересечения планируется построить мост, чтобы развести пересекающиеся отрезки шоссе.

а) Доказать, что шоссе можно построить так, чтобы при движении по нему автомобиль поочередно проезжал то по мосту, то под мостом.

б) Верно ли утверждение предыдущего пункта, если шоссе строится на планете, поверхность которой представляет из себя не сферу, а тор?

6. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $f(x) = 4x(1-x)$. Найти количество неподвижных точек для отображения $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $F_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ (т.е. $F_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_n$).

*Решения задач, результаты олимпиады, информацию
о награждении победителей ищите на сайте кафедры*
dfgm.math.msu.su