

О Л И М П И А Д А
по геометрии и топологии
кафедры дифференциальной геометрии и приложений
27 ноября 2012 (время: 3 часа)

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что для любого плоского выпуклого многоугольника площади S и периметра P выполнено неравенство $\frac{S}{P^2} < \frac{1}{4\pi}$, причем эта оценка является наилучшей.

2. Кубик, стоящий на плоскости на некотором отмеченном квадрате (сторона которого равна ребру кубика), может занимать одно из 24 возможных положений. Какие из этих 24 положений кубика можно получить, начав с некоторого заданного положения и “покатав” кубик по плоскости так, чтобы в конце он опять стоял на исходном отмеченном квадрате? [“Катанием” кубика по плоскости мы называем последовательность “перекатываний” его через некоторое ребро.]

3. а) В трехмерном пространстве расположен выпуклый многогранник. Каково минимальное количество “лампочек”, которые можно расположить так, чтобы осветить всю его поверхность? [Лампочки считаем точками, свет из которых идет по всем направлениям, а точку на поверхности многогранника считаем освещенной, если отрезок, один конец которого — эта точка, а другой — лампочка, не содержит других точек многогранника.]

б) Сколько лампочек понадобится, если в предыдущем пункте заменить “выпуклый многогранник” на “выпуклое замкнутое тело”?

4. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), соседние стороны которого перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины s (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону “угол падения равен углу отражения”. Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.

5. План нового шоссе представляет из себя гладкую замкнутую самопересекающуюся кривую (все точки самопересечения двойные и трансверсальные, т.е. имеют вид \times). В каждой точке самопересечения планируется построить мост, чтобы развести пересекающиеся отрезки шоссе.

а) Доказать, что шоссе можно построить так, чтобы при движении по нему автомобиль поочередно проезжал то по мосту, то под мостом.

б) Верно ли утверждение предыдущего пункта, если шоссе строится на планете, поверхность которой представляет из себя не сферу, а тор?

6. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $f(x) = 4x(1-x)$. Найти количество неподвижных точек для отображения $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $F_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ (т.е. $F_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_n$).

РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1. Поскольку величина $\frac{S}{P^2}$ не меняется при гомотетии, для решения задачи достаточно показать, что площади всех выпуклых многоугольников данного периметра P ограничены сверху числом $\frac{P^2}{4\pi}$, причем это число есть точная верхняя грань для множества площадей всех таких многоугольников.

Рассмотрим функцию f , определенную на множестве всех выпуклых многоугольников данного периметра P , которая равна площади многоугольника. Отметим, функция f не достигает максимума, т.е. число $\frac{P^2}{4\pi}$ для функции f именно супремум, а не максимум (это будет видно из приведенных ниже рассуждений). Поэтому рассмотрим для каждого натурального $n \geq 3$ ограничение функции f на множество всех выпуклых n -угольников периметра P (обозначим это ограничение через f_n) и докажем, что функция f_n достигает максимума (при каждом $n \geq 3$).

Имеется известная теорема из математического анализа: *непрерывная функция, заданная на замкнутом и ограниченном подмножестве евклидова пространства, достигает максимума.* Чтобы применить эту теорему для доказательства того, что функция f_n достигает максимума, сделаем следующее. Во-первых, выберем некоторую точку O и будем рассматривать только те выпуклые n -угольники, одной из вершин которых является эта точка. Ясно, что при этом лишь уменьшится область определения функции f_n (сохраним для функции с этой новой областью определения обозначение f_n), а множество значений функции f_n не изменится. Во-вторых, будем задавать каждый из рассматриваемых n -угольников как последовательность вершин A_1, A_2, \dots, A_n , получающуюся при обходе его границы, начиная с точки $O = A_1$. Введем на плоскости декартовы координаты x, y с началом в точке O . Тогда каждый из рассматриваемых n -угольников задается набором чисел $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, где (x_i, y_i) — координаты вершины A_i (в частности, $x_1, y_1 = 0$). Поэтому область определения функции f_n можно рассматривать как некоторое подмножество M евклидова пространства \mathbb{R}^{2n} с координатами $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$.

Множество M ограничено, что следует, например, из очевидной оценки $|x_i|, |y_i| < P$.

Множество M не замкнуто, но, как легко понять, предельные точки множества M , которые не принадлежат M , соответствуют “вырожденным” выпуклым n -угольникам, т.е. тем, у которых длины некоторых сторон равны нулю, или тем, у которых некоторые углы равны нулю (а значит, и площадь равна нулю). Поэтому, добавив такие “вырожденные” n -угольники к множеству M (обозначим полученное множество через \bar{M}), можно считать, что функция f_n задана на замкнутом подмножестве \bar{M} евклидова пространства.

Наконец, то, что функция $f_n: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, следует из ее явного выражения через координаты. Действительно, так как площадь параллелограмма, натянутого на два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$, равна $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$, то, суммируя площади треугольников $\triangle OA_2 A_3, \triangle OA_3 A_4, \dots, \triangle OA_{n-1} A_n$, имеем

$$f_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} |x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}|.$$

В результате, применяя сформулированную выше теорему, мы получаем, что функция f_n достигает максимума на каком-то выпуклом n -угольнике L_n периметра P (возможно, вырожденном).

Докажем теперь, что L_n — правильный n -угольник. Для этого достаточно показать, что для любого выпуклого n -угольника, отличного от правильного, существует другой выпуклый n -угольник того же периметра, но большей площади.

Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ — выпуклый n -угольник, у которого не все стороны равны, причем все его углы меньше 180° (т.е. нет углов, равных 180°), а также у него нет “нулевых” сторон. Тогда есть пара соседних неравных сторон $A_{i-1} A_i$ и $A_i A_{i+1}$. Покажем, что точку A_i можно заменить на такую точку A'_i (см. рис. 1), что треугольник $\triangle A_{i-1} A'_i A_{i+1}$ будет иметь тот же периметр, что и треугольник $\triangle A_{i-1} A_i A_{i+1}$, но большую площадь, причем новый n -угольник $A_1 A_2 \dots A_{i-1} A'_i A_{i+1} \dots A_n$ также будет выпуклым. Действительно, пусть $|A_i A_{i+1}| = a$, $|A_i A_{i-1}| = b$ и $|A_{i-1} A_{i+1}| = c$. Тогда (по формуле Герона)

$$(\text{площадь } \triangle A_{i-1} A_i A_{i+1})^2 = \frac{1}{16} ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2).$$

Поэтому, если $a > b$, то уменьшая a на ε и увеличивая b на ε , где $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$, мы сохраняем периметр и увеличиваем площадь треугольника $\triangle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ (а значит, и всего n -угольника). Поскольку углы треугольника непрерывно зависят от длин сторон (теорема косинусов), ε можно выбрать настолько малым, что углы в вершинах A_{i-1} и A_{i+1} у нового n -угольника $A_1 A_2 \dots A_{i-1} A'_i A_{i+1} \dots A_n$ также будут меньше 180° , т.е. он будет выпуклым.

В случае, когда в некоторых вершинах углы n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$ равны 180° или у него есть совпадающие вершины, можно поступить следующим образом: удалим эти “лишние” вершины,

а потом добавим их, например, на одной из сторон. Ясно, что при этом ни периметр, ни площадь не изменятся. Ясно также, что сделать это можно так, что для нового n -угольника станет возможна описанная выше процедура увеличения площади при сохранении периметра (см. пример на рис. 2).

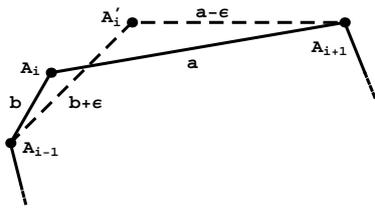


Рис. 1. Сдвиг вершины, увеличивающий площадь

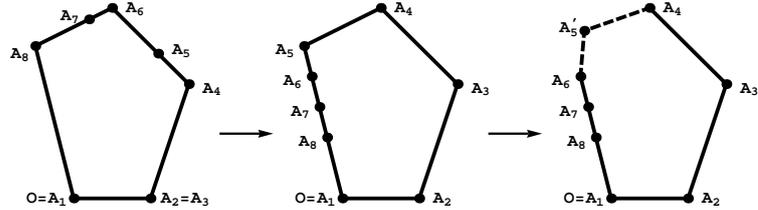


Рис. 2. Случай “вырожденных” вершин

Мы доказали, что n -угольник с неравными сторонами не может быть точкой максимума для функции f_n . Докажем теперь, что n -угольник, у которого стороны равны, но имеются разные углы, также не может быть точкой максимума для f_n .

Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ — выпуклый n -угольник, у которого все стороны равны (при этом, как и выше, предположим сначала, что у него нет углов, равных 180° , и нет совпадающих вершин). Пусть A_i и A_{i+1} — две соседние вершины с неравными углами. Покажем, что тогда можно так “сдвинуть” вершины A_i и A_{i+1} (не меняя остальные), что площадь многоугольника увеличится, но он останется выпуклым и будет иметь тот же периметр (см. рис. 3).

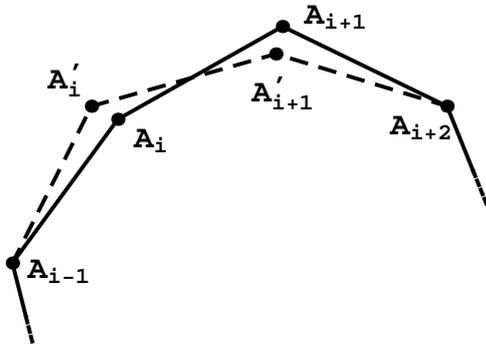
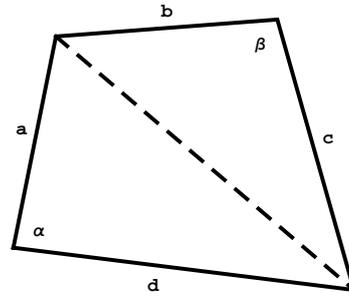


Рис. 3. Сдвиг пары вершины, увеличивающий площадь



$$s^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Рис. 4. Площадь четырехугольника

Для доказательства последнего утверждения выведем удобную формулу для площади произвольного выпуклого 4-угольника. Обозначим длины сторон 4-угольника через a, b, c, d и два противоположных угла через α и β (см. рис. 4). Записывая диагональ двумя способами по теореме косинусов, получаем равенство $a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta$, которое можно переписать так:

$$\frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = ad \cos \alpha - bc \cos \beta.$$

Для площади четырехугольника имеем равенство

$$2S = ad \sin \alpha + bc \sin \beta.$$

Возводя два полученных соотношения в квадрат и складывая, имеем

$$\frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4S^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \beta).$$

Последнее соотношение показывает, что если $\alpha + \beta \neq \pi$, то площадь 4-угольника можно увеличить, не меняя длин сторон. Действительно, увеличивая (если $\alpha + \beta < \pi$) или уменьшая (если $\alpha + \beta > \pi$) угол α , мы при этом соответственно увеличиваем или уменьшаем угол β , а значит и сумму $\alpha + \beta$. (Отметим, что полученное выражение для площади 4-угольника можно также преобразовать к красивому виду, указанному на рис. 4.)

Применяя указанную процедуру к 4-угольнику $A_{i-1} A_i A_{i+1} A_{i+2}$ (см. рис. 3), мы можем увеличить его площадь, сохранив длины сторон. При этом изменение угла можно выбрать настолько малым, что многоугольник $A_1 A_2 \dots A_n$ останется выпуклым (в случае, если он не имел углов, равных 180° , и совпадающих вершин). В случае, когда есть углы, равные 180° или совпадающие вершины, можно поступить так же, как и выше при рассмотрении “сдвига” одной вершины.

Итак, мы доказали, что максимум функции f_n достигается на правильном n -угольнике, а значит, он равен площади правильного n -угольника периметра P , т.е. $\frac{P^2}{4n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Для завершения решения задачи осталось лишь показать, что $\sup_n \left(\frac{P^2}{4n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right) = \frac{P^2}{4\pi}$. Последнее следует из того, что функция $\frac{1}{x} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ при $x > \frac{1}{\pi}$ непрерывна, монотонно возрастает и стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$.

ЗАДАЧА 2. Рассмотрим “простейшую” нетривиальную последовательность из четырех перекачиваний кубика, после которой он возвращается на исходный квадрат (см. рис. 5). Ясно, что при этом вершина A все время остается на месте. Проследив за вершиной B , убеждаемся, что она при этом перейдет в вершину C . Это означает, что после совершения указанных четырех перекачиваний “вокруг вершины A ” кубик займет положение, получающееся из исходного вращением на 120° вокруг диагонали, проходящей через точку A .

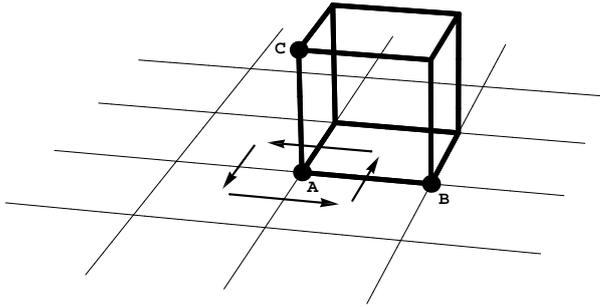


Рис. 5. Перекачивание кубика вокруг вершины A

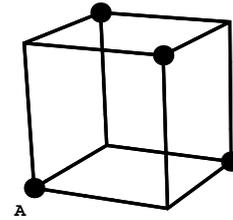


Рис. 6. Возможные перемещения вершины A

Рассматривая аналогичные последовательности из четырех перекачиваний кубика вокруг других вершин, получаем, что так можно реализовать все вращения кубика вокруг любой из четырех диагоналей (и их композиции). Это дает 12 положений кубика, которые можно получить в результате его перекачиваний с возвращением на исходный квадрат, поскольку данную вершину A (см. рис. 6) при помощи вращений вокруг диагоналей можно переместить в любую из четырех вершин, отмеченных на рис. 6 жирными точками, а для каждой из этих четырех точек вращения вокруг содержащей ее диагонали дают три возможных положения кубика.

Докажем теперь, что только эти 12 положений кубика можно получить в результате его перекачиваний с возвращением на исходный квадрат.

Рассмотрим декартову систему координат, у которой оси направлены вдоль ребер начального положения кубика (а начало координат находится в вершине кубика). Можно считать, что длина ребра кубика равна 1, т.е. в начальном положении все его вершины имеют координаты (x, y, z) , где $x, y, z \in \{0, 1\}$.

Ясно, что тогда в процессе перекачивания кубика его вершины всегда попадают в точки с целочисленными координатами. Осталось заметить, что для любой вершины кубика четность суммы ее координат $x + y + z$ не меняется в процессе перекачивания (надо просто посмотреть, как при перекачивании через ребро изменяются координаты каждой из его 8 вершин). Отсюда следует, что, например, вершина A на рис. 2 может перейти только в отмеченные жирные вершины, а это и означает, что другие 12 положений кубика (когда вершина A расположена в других четырех вершинах) нельзя получить в результате перекачиваний кубика с возвращением на исходный квадрат.

ЗАДАЧА 3а. Докажем, что для выпуклого многогранника достаточно двух лампочек, чтобы осветить всю его поверхность.

Рассмотрим любую грань F данного многогранника. Так как многогранник выпуклый, то он содержится в одном из двух полупространств, определяемых плоскостью, содержащей грань F . Отсюда ясно, что если лампочка расположена в другом полупространстве (из этих двух), то она освещает грань F .

Теперь рассмотрим любую прямую l , которая не параллельна ни одной из граней данного многогранника. Так как число граней конечно, то пересечения прямой l со всеми плоскостями, содержащими грани многогранника, образуют конечный набор точек на ней. Выберем на прямой l две точки A и B так, чтобы все эти точки пересечения лежали между ними. Тогда для любой грани F данного многогранника точки A и B лежат в разных полупространствах, определяемых плоскостью, содержащей грань F . Поэтому, если разместить две лампочки в точках A и B , то одна из них будет освещать грань F , а значит, две эти лампочки вместе будут освещать всю поверхность многогранника.

Одной лампочкой осветить всю поверхность многогранника не получится, так как прямая, проходящая через точку, где расположена эта лампочка, и любую внутреннюю точку многогранника, пересекает многогранник по отрезку, а значит один из его концов не будет освещен.

ЗАДАЧА 36. Докажем, что для выпуклого замкнутого тела достаточно четырех лампочек.

Поместим 4 лампочки в вершины тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, содержащего целиком данное тело (т.е. любая точка тела является внутренней для тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$). Предположим, что некоторая точка M , лежащая на границе тела, не освещена этими четырьмя лампочками. Это означает, что на каждом отрезке A_iM ($i = 1, 2, 3, 4$) есть какая-то точка A'_i (отличная от точки M), которая принадлежит телу. Тогда точка M является внутренней точкой для тетраэдра $A'_1A'_2A'_3A'_4$, а значит, и для рассматриваемого выпуклого тела, поскольку тетраэдр $A'_1A'_2A'_3A'_4$ целиком в нем содержится. Получаем противоречие с тем, что M — граничная точка тела. Тем самым доказано, что для выбранного расположения четырех лампочек вся граница тела освещена.

Докажем, что трех лампочек недостаточно, например, для освещения поверхности сферы. При любом расположении трех лампочек, они лежат в одной плоскости Π (будем считать эту плоскость “горизонтальной”). Рассмотрим пару плоскостей, параллельных плоскости Π и касающихся сферы (в верхней точке N и в нижней точке S). Ясно, что если плоскость Π расположена ниже точки N , то отрезок, соединяющий точку N с любой точкой плоскости Π , пересекает сферу, а значит, точка N в этом случае не освещена выбранными тремя лампочками. Аналогично, если плоскость Π расположена выше точки S , то точка S не освещена. Таким образом, при любом расположении плоскости Π хотя бы одна из точек N и S не будет освещена.

ЗАДАЧА 4. Отметим сначала следующее общее свойство траекторий бильярдного шара: если шар, выпущенный из точки A с начальной скоростью \vec{v} , пройдя по траектории γ , пришел в точку B со скоростью \vec{w} , то шар, выпущенный из точки B с начальной скоростью $-\vec{w}$, будет идти по той же траектории γ , но в обратном направлении, и, в частности, придет в точку A со скоростью $-\vec{v}$. Это свойство “обратимости траекторий” (выполненное, кстати, для бильярда любой формы) сразу следует из закона отражения “угол падения равен углу отражения”.

Рассмотрим теперь бильярд, описанный в задаче, т.е. бильярд, у которого все стенки занимают лишь два перпендикулярных положения. Поскольку при отражении шара от любой стенки его вектор скорости заменяется на симметричный относительно прямой, содержащей эту стенку, ясно, что вектор скорости шара при движении по некоторой бильярдной траектории может принимать лишь 4 значения (если ввести координатные оси, параллельные стенкам, то координаты этих четырех векторов имеют вид $(\pm v_1, \pm v_2)$). Значит, если шар выпущен из вершины многоугольника с внутренним углом 90° с начальной скоростью \vec{v} , то вернуться в эту вершину он может только со скоростью $-\vec{v}$ (в частности, конечный отрезок траектории, по которой шар возвращается, должен совпадать с начальным отрезком).

Пусть $\gamma(t)$ (где $0 \leq t \leq L$) — траектория шара, возвращающаяся в начальную вершину. Тогда из свойства обратимости бильярдных траекторий следует, что $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(L - t)$ — тоже бильярдная траектория, причем, как мы только что показали, начальные условия у траекторий $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ одинаковы. Значит, эти траектории совпадают, т.е. $\gamma(t) = \gamma(L - t)$ при всех t , но это означает, что траектория $\gamma(t)$ устроена следующим образом: половину пути (при $0 \leq t \leq \frac{L}{2}$) шар движется из начальной точки A до некоторой точки B , а затем (при $\frac{L}{2} \leq t \leq L$) он движется из точки B в точку A по тому же пути, но в обратном направлении. Такое могло бы произойти только в случае, когда шар в точке B отразился от стенки, причем, его скорость изменилась на противоположную, но тогда его скорость в момент отражения должна быть перпендикулярна стенке. Последнее невозможно, поскольку в начальный момент угол между вектором скорости шара и стенками должен быть ненулевым (иначе он попадет в ближайшую лузу).

ЗАДАЧА 5а. Требуемое в задаче расположение мостов в перекрестках дороги можно легко указать, если план, на котором изображено шоссе, раскрашен “в шахматном порядке”, т.е. каждая из областей, на которые дорога разбивает плоскость, покрашена в черный или белый цвет так, что любые две области, которые примыкают с разных сторон к некоторому участку шоссе (ненулевой длины), покрашены в разные цвета. Действительно, если такая раскраска задана, то в каждом перекрестке будем строить мост на том отрезке шоссе, при подъезде по которому к перекрестку черная область остается слева.

Таким образом, осталось показать, что для любой гладкой замкнутой самопересекающейся кривой на плоскости (с двойными трансверсальными точками самопересечения) существует шахматная раскраска.

Рассмотрим следующую операцию изменения кривой в малой окрестности ее точки самопересечения: замена двух пересекающихся в этой точке отрезков кривой на две (непересекающиеся) дуги

(см. рис. 7). Как показано на рис. 7, такую замену можно сделать двумя способами. Легко понять, что для одного способа мы получим в результате одну кривую, а для другого — две кривые. Выберем тот способ, для которого получается одна кривая. Тогда после применения описанной операции в некоторой точке самопересечения кривой мы получим новую кривую, у которой на одну точку самопересечения меньше.

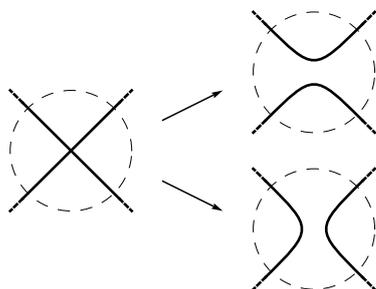


Рис. 7. Перестройка в точке самопересечения

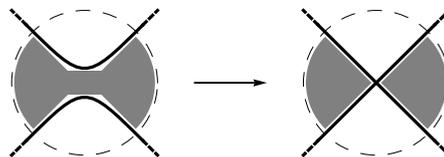


Рис. 8. Восстановление раскраски

Заметим, что если для новой кривой, полученной применением описанной операции, существует шахматная раскраска, то она существует и для исходной кривой (см. рис. 8). Применяя указанную операцию последовательно ко всем точкам самопересечения, мы в результате придем к гладкой вложенной замкнутой кривой (т.е. без точек самопересечения). Замкнутая вложенная кривая разбивает плоскость на две области (по теореме Жордана), а значит для нее существует шахматная раскраска. “Восстанавливая” последовательно исходную кривую (как на рис. 8), получаем шахматную раскраску для исходной кривой.

ЗАДАЧА 5б. Для тора аналогичное утверждение неверно, что легко показать, построив соответствующий пример кривой на торе. Один из возможных примеров приведен на рис. 9.



Рис. 9. Контрпример для утверждения о кривой на торе

ЗАДАЧА 6. Сначала покажем, что вне отрезка $[0, 1]$ у отображения F_n нет неподвижных точек. Действительно, если $x < 0$, то $f(x) = 4x(1 - x) < x$, так как $4(1 - x) > 1$. Значит, при $x < 0$ последовательность $x, f(x), f(f(x)), \dots, f(\underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_n), \dots$ монотонно убывает. Аналогично, если $x > 1$, то $f(x) < 0$ и последовательность $x, f(x), f(f(x)), \dots, f(\underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_n), \dots$ также монотонно убывает. Таким образом, все неподвижные точки отображения F_n лежат на отрезке $[0, 1]$.

На отрезке $[0, 1]$ график функции $f(x) = 4x(1 - x)$ имеет вид, изображенный на рис. 10, т. е. f отображает отрезок $[0, 1]$ на себя. Поэтому мы можем ограничить отображение F_n на отрезок $[0, 1]$ (сохраним для этого ограничения прежнее обозначение F_n) и искать неподвижные точки уже для этого отображения $F_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Вид графика функции $F_n(x) = \underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_n$ описан в следующем утверждении (см. также пример для $n = 3$ на рис. 11).

ЛЕММА 1. Функция $F_n(x)$ имеет 2^{n-1} точек максимума $a_1, \dots, a_{2^{n-1}}$, в которых $F_n(a_i) = 1$, и $2^{n-1} + 1$ точек минимума $b_0, b_1, \dots, b_{2^{n-1}}$, в которых $F_n(b_i) = 0$, где

$$0 = b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{2^{n-1}} < b_{2^{n-1}} = 1,$$

причем на каждом отрезке $[b_i, a_{i+1}]$ функция $F_n(x)$ монотонно растет, а на каждом отрезке $[a_i, b_i]$ она монотонно убывает.

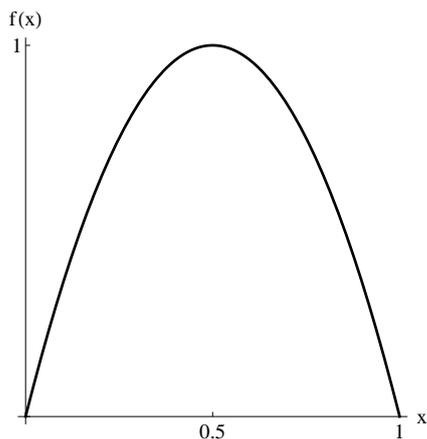


Рис. 10. Функция $f(x)$

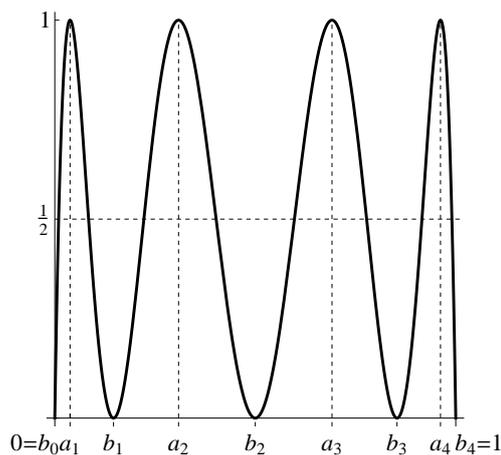


Рис. 11. Функция $F_3(x) = f(f(f(x)))$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно (см. рис. 10). Для произвольного n доказательство легко получается по индукции. Действительно, если для некоторого n график функции $F_n(x)$ имеет указанный в лемме вид, то график функции $F_{n+1}(x) = f(F_n(x))$ на каждом из отрезков $[b_i, a_{i+1}]$, $[a_i, b_i]$ будет иметь вид, “похожий” на график функции $f(x)$, т.е. на каждом таком отрезке функция $F_{n+1}(x)$ будет иметь два минимума (равные 0) в его концах и максимум (равный 1) в некоторой его внутренней точке (в которой $F_n(x) = \frac{1}{2}$). \square

Из доказанной леммы следует, что на каждом из отрезков $[b_i, a_{i+1}]$, $[a_i, b_i]$ уравнение $F_n(x) = x$ имеет по крайней мере одно решение (по теореме о промежуточном значении). Значит, неподвижных точек у отображения $F_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ не меньше, чем количество таких отрезков, т.е. 2^n . С другой стороны, уравнение $F_n(x) = x$ не может иметь больше, чем 2^n решений, так как $F_n(x)$ — многочлен степени 2^n .

Таким образом, отображение $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ровно 2^n неподвижных точек.