

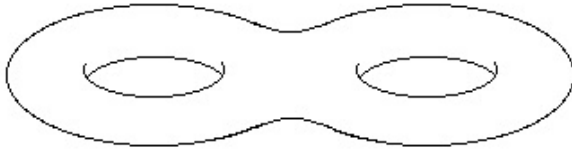
# О Л И М П И А Д А ПО ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

(для студентов 1-2 курсов)

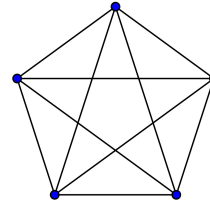
кафедры дифференциальной геометрии и приложений

1 марта 2019

1. На сколько областей может делить “крефель” (т.е. сферу с 2 ручками, см. рис. а) вложенный в него полный граф  $K_5$  (см. рис. б)?



(a) “Крефель”



(b) Полный граф  $K_5$

2. Рассмотрим пространство  $L$  вещественных  $n \times m$ -матриц (где  $m > n$ ), у которых первые  $n$  и последние  $n$  столбцов образуют симметричные  $n \times n$ -подматрицы. Найти размерность пространства  $L$ .

3. а) Какие связные графы можно вложить в 3-мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  так, чтобы все ребра были отрезками, а расстояние (евклидово в  $\mathbb{R}^3$ ) между образами любых двух вершин было равно числу ребер в кратчайшем пути, соединяющем эти вершины?

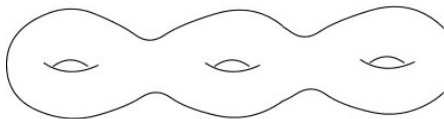
б) Тот же вопрос для вложений графов не в  $\mathbb{R}^3$ , а в двумерную сферу  $S^2$  (какого-то радиуса), где вместо “отрезков” рассматриваются “дуги больших кругов” на сфере, а вместо евклидова расстояния между точками в  $\mathbb{R}^3$  — расстояния по сфере, т.е. длины кратчайших дуг больших кругов, соединяющих эти точки.

4. Додекаэдр, лежащий на плоскости, несколько раз перекатили через ребра так, что после перекатывания он лежит на том же месте, что и в начале.

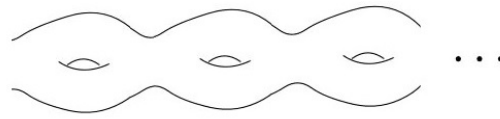
а) Сколько различных граней додекаэдра могло стать новым основанием?

б) Может ли он лежать на той же грани, но с поворотом (вокруг вертикальной оси)? Если да, то за какое минимальное число перекатываний этого можно достичь?

5. Гомеоморфны ли поверхности, изображенные на рис. с и d?



(c)



(d)

Можно считать, что данные поверхности вложены в  $\mathbb{R}^3$  и являются объединением “стандартных блоков”, изображенных на рис. е и f. Первая поверхность — объединение блоков вида А (тор с двумя дырками), расположенных в точках оси  $x$  с целыми координатами, а вторая — объединение блоков вида А, расположенных в точках оси  $x$  с натуральными координатами, и одного блока вида В (тор с одной дыркой), расположенного в начале координат.



(e) Блок А



(f) Блок В