

**О Л И М П И А Д А**  
**ПО ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ**  
(для студентов 1-2 курсов)

**кафедры дифференциальной геометрии и приложений**

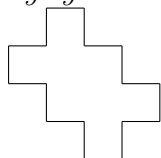
25 апреля 2016

1. Из бумаги вырезан треугольник  $ABC$ , на котором отмечены точки  $K, L, M$  — середины сторон  $AB, BC, AC$ . Для каких треугольников можно склеить следующие отрезки их сторон так, чтобы в результате получилась поверхность выпуклого многогранника:  $AK$  с  $BK$ ,  $BL$  с  $CL$ ,  $CM$  с  $AM$ ? [Склейка должна происходить с сохранением расстояний, т.е. треугольник можно перегибать по некоторым отрезкам, но нельзя растягивать или рвать.]

2. Описать все подмножества  $A$  прямой  $\mathbb{R}$  (с обычной топологией), для которых не существует непрерывных отображений  $f : A \rightarrow A$  без неподвижных точек (т.е. таких, что  $f(x) \neq x$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ ).

3. Можно ли разрезать прямой угол (т.е. подмножество плоскости  $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ ) на конечное число частей так, чтобы сложить затем из них полуплоскость (т.е. подмножество плоскости  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$ )? Разрезы разрешается делать только прямыми линиями, соединять части — по границе, т.е. без перекрытий. Изменится ли ответ, если “конечное” заменить на “счетное”?

4. Бильярдный стол имеет форму 16-угольника, изображенного на рисунке (длины всех сторон равны 1). В каждом из 16 углов расположены лузы. В каждую ли лузу можно попасть, запустив шар из центра этого бильярда? [От сторон шар отражается по закону “угол падения равен углу отражения”, а попадая в любую лузу, остается там.]



5. Шар с отмеченной на нем точкой  $P$  положили на плоскость с отмеченной на ней точкой  $A$  так, что точки  $P$  и  $A$  совпали (как точки касания). Затем этот шар прокатили последовательно по четырём сторонам некоторого прямоугольника, одной из вершин которого является точка  $A$ . Известно, что в результате точка  $P$  шара опять совпала с точкой  $A$  плоскости. На какой угол (вокруг вертикальной оси) может повернуться шар после этой процедуры относительно его начального положения? [По каждой из сторон прямоугольника шар катится без проскальзывания и без подкручивания, т.е. в каждый момент скорость точки контакта равна нулю, а вектор угловой скорости параллелен плоскости.]

*Решения задач, результаты олимпиады, информацию  
о награждении победителей ищите на сайте кафедры*

**dfgm.math.msu.su**