О Л И М П И А Д А
ПО ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ
(для студентов 1-2 курсов)
кафедры дифференциальной геометрии и приложений
20 февраля 2015

1. Доказать, что на двумерной сфере нельзя расположить три дуги больших кругов величины 300° так, чтобы они попарно не имели общих точек. [*Большой круг — это сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр.*]

2. Сколько неподвижных точек может иметь гомеоморфизм $f : S^1 \to S^1$ (отличный от тождественного), для которого $f \circ f$ — тождественное отображение. [*Здесь через S^1 обозначена окружность. Гомеоморфизм определяется как непрерывное взаимно-однозначное отображение, для которого обратное отображение также непрерывно.*]

3. Найти определитель линейного отображения пространства матриц размера $n \times n$ в себя, заданного формулой
а) $f_A : X \to AXA^{-1}$, где A — данная невырожденная матрица размера $n \times n$;
б) $f_{A,B} : X \to AXB$, где A, B — данные матрицы размера $n \times n$.

4. Пусть для гладкой регулярной двумерной поверхности M в $\mathbb{R}^3$ выполнено следующее свойство: для каждой точки $P \in M$ существует по крайней мере три различные прямые, которые проходят через точку P и содержатся в поверхности M. Верно ли, что поверхность M является плоскостью? [*Регулярность поверхности означает, что у нее в каждой точке существует касательная плоскость. В частности, можно считать, что она задана в виде графика некоторой гладкой функции $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$.*]

5. [*Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ — это пересечение некоторого числа замкнутых полупространств, при котором получается ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее внутренние точки. Выпуклый многогранник можно также определить как выпуклую оболочку конечного набора точек в $\mathbb{R}^n$.*] Доказать, что любой выпуклый n-мерный многогранник с точностью до аффинного преобразования есть сечение N-мерного единичного куба (для какого-то N) некоторой гиперплоскостью (какой-то размерности). Другими словами, для любого выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^n$ существует такое аффинное вложение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, что образ многогранника $\varphi(P)$ совпадает с пересечением образа всего пространства $\varphi(\mathbb{R}^n)$ и единичного куба $I^N \subset \mathbb{R}^N$.

6. [*Проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ можно определить как двумерный диск, у которого отождествлены пары диаметрально противоположных точек на граничной окружности. Другое описание: $\mathbb{R}P^2$ получается после склейки двумерного диска и листа Мёбиуса по их граничным окружностям.*] Доказать, что $\mathbb{R}P^2$ можно (непрерывно) вложить в $\mathbb{R}^4$, т.е. что существует непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, для которого $f(x) \neq f(y)$ для любых различных точек $x, y \in \mathbb{R}P^2$.

Решения задач, результаты олимпиады, информацию о награждении победителей ищите на сайте кафедры

dfgm.math.msu.su