кафедры Дифференциальной геометрии и приложений

($13.04.2006$, 16^{30}–20^{00})

1. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC. Докажите, что для любой точки M плоскости треугольника выполнено неравенство $AM + BM + CM \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(BC + CA)$.

2. Найдите наибольшее натуральное n, для которого на плоскости существует кривая второго порядка, имеющая в точке $(0, 1)$ касание n-го порядка с графиком функции $y = \cos x$.

3. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, для которого образ $K + a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K, т.е. $K \cap (K + a) = \emptyset$. Докажите, что два воза (т.е. круга диаметра $|a|$) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, так что возы не сталкиваются.

4. а) Пусть $\gamma(t)$ — плоская кривая, где t — натуральный параметр. Рассмотрим в точке $P = \gamma(0)$ касательную прямую $\alpha(\tau)$, где τ — натуральный параметр на прямой и $P = \alpha(0)$. Докажите, что кривизна кривой γ в точке P равна $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \|\gamma(s) - \alpha(s)\|$.

б) Определим кривизну кривой $\gamma(t)$ на плоскости Лобачевского в точке $P = \gamma(0)$ аналогичной формулой: $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \rho(\gamma(s), \alpha(s))$, где α — прямая в смысле геометрии Лобачевского, а ρ — расстояние на плоскости Лобачевского. Вычислите кривизну горизонтальной линии на плоскости Лобачевского (в модели — верхняя полуплоскость).

5. Для каждой пары целых положительных чисел n и k выясните, сколько имеется (с точностью до движений и гомотетий) неупорядоченных наборов из k (ненулевых) векторов в n-мерном евклидовом пространстве, сумма которых равна нулю и все попарные углы между которыми равны.