Олимпиада кафедры дифференциальной геометрии и приложений

1. Рассмотрим в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}(x, y, z, t)$ множество точек, полученное при соединении каждой точки куба $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, t = -1\}$ отрезком с каждой точкой правильного октаэдра, вписанного в такой же куб, но расположенный в гиперплоскости $t = 1$. Опишите многогранники, получающиеся при пересечении этого множества точек с гиперплоскостями $-1 \leq t \leq 1$.

2. В четырехгранном угле противоположные грани попарно перпендикулярны. Доказать, что диагональные плоскости тоже перпендикулярны.

3. На сфере дан (сферический) треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что площадь ABC равна площади ABM.

4. Поверхность планеты Альфа имеет форму тора, т.е. получается вращением окружности (меридиана) вокруг прямой, лежащей в плоскости исходной окружности. На поверхности Альфа проведены две кольцевые дороги, каждая из которых имеет постоянный угол с меридианами, проведенными через любую точку дороги. При этом первая и вторая дороги делают a и c витков вдоль меридиана и b и d витков вдоль параллели соответственно. В скольких точках пересекаются эти дороги? (Дороги имеют нулевую толщину.)

5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое ограниченное множество, содержащее внутренние точки. Доказать, что существуют 3 прямые, проходящие через 1 точку, каждая из которых делит площадь A пополам.

Решения.

1. Иллюстрацию того, какие многогранники получаются при разных t, см. в файле zadacha1.nb

Заметим сначала, что множество точек, получающееся в пересечении с гиперплоскостью $t = t_0$, имеет вид $(1+t_0)x/2 + (1-t_0)y/2$, где x — точка из куба, y — точка из октаэдра. Таким образом, чтобы понять, какая фигура получается в пересечении, надо понять, что представляет из себя множество точек вида $(1+t_0)x/2 + (1-t_0)y/2$, где x — точка из куба $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ и октаэдра, вписанного в этот же куб.

Далее вспомним, что куб и октаэдр являются выпуклыми оболочками своих вершин, т.е. $x = x_1e_1 + \ldots + x_8e_8$, $y = y_1w_1 + \ldots y_6w_6$, где $e_1, \ldots, e_8$ — вершины куба, $w_1, \ldots, w_6$ — вершины октаэдра, $x_i, y_j \geq 0$ для всех i, j и $x_1 + \ldots + x_8 = y_1 + \ldots + y_6 = 1$. Пусть $\alpha = (1+t_0)/2$. Тогда имеем:

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha(x_1e_1 + \ldots + x_8e_8) + (1-\alpha)(x_1y + \ldots + x_8y) = x_1(\alpha e_1 + (1-\alpha)y) + \ldots + x_8(\alpha e_8 + (1-\alpha)y) =$$

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{6} x_iy_j(\alpha e_i + (1-\alpha)w_j),$$

откуда следует, что всякая точка нашей фигуры лежит в выпуклой оболочке точек вида $\alpha e_i + (1-\alpha)w_j$, $i = 1, \ldots, 8$, $j = 1, \ldots 6$. Нарисовав эти точки, получим вид этой выпуклой оболочки:

это многогранник, нарисованный в программе zadacha1.nb.

(А.Жеглов, Г.Шарыгин)

2. Проще всего решить эту задачу аналитически. Например, рассмотрим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, направленные вдоль ребер четырехгранного угла. Пусть где $[\vec{x},\, \vec{y}]$ –векторное, а $(\vec{x},\, \vec{y})$ – скалярное произведение двух векторов. Тогда условие задачи эквивалентно равенствам:

$$([\vec{a},\, \vec{b}],\, [\vec{c},\, \vec{d}]) = 0,$$
$$([\vec{a},\, \vec{d}],\, [\vec{c},\, \vec{b}]) = 0,$$

а требуемое утверждение – равносильно уравнению $([\vec{a},\, \vec{c}],\, [\vec{d},\, \vec{b}]) = 0$. Но, как известно для любых трех векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ выполнено равенство

$$(\vec{x},\, [\vec{y},\, \vec{z}]) = \langle \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}\rangle,$$

где справа стоит смешанное произведение трех векторов (ориентированный объем параллелепипеда). Пользуясь этим равенством и известным уравнением

$$[\vec{a},\, [\vec{b},\, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\, \vec{b}),$$

получаем

$$\begin{aligned}([\vec{a},\, \vec{c}],\, [\vec{d},\, \vec{b}]) = \langle \vec{a},\, \vec{c},\, [\vec{d},\, \vec{b}]\rangle = (\vec{a},\, [\vec{c},\, [\vec{d},\, \vec{b}]]) &= \\ = (\vec{a},\, \vec{d}(\vec{c},\, \vec{b})) - (\vec{a},\, \vec{b}(\vec{c},\, \vec{d})) &= \\ = (\vec{c},\, \vec{b})(\vec{a},\, \vec{d}) - (\vec{a},\, \vec{b})(\vec{c},\, \vec{d}).&\end{aligned}$$

Но, действуя точно так же, мы получим равенства

$$0 = ([\vec{a},\, \vec{b}],\, [\vec{c},\, \vec{d}]) = (\vec{b},\, \vec{d})(\vec{a},\, \vec{c}) - (\vec{a},\, \vec{d})(\vec{b},\, \vec{c}),$$
$$0 = ([\vec{a},\, \vec{d}],\, [\vec{c},\, \vec{b}]) = (\vec{b},\, \vec{d})(\vec{a},\, \vec{c}) - (\vec{a},\, \vec{b})(\vec{d},\, \vec{c}).$$

Как несложно заметить, разность этих выражений в точности равна правой части предыдущего равенства.

(Г.Шарыгин)

3. Ответ: Две сферические окружности: одна из них проходит через точку C и точки P и Q, диаметрально противоположные A и B, другая – симметричная первой относительно AB, причем сами точки P и Q нужно выкинуть. Решение: Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим двойственный сферический треугольник $A'B'C'$ (он получится, если взять точку O' внутри трехгранного угла $OABC$, соответствующего треугольнику ABC и опустить из нее перпендикуляры на грани этого угла, а затем сместить точку O' в центр O сферы; при этом перпендикуляр, соответсвтующий грани OAB соответсвует точке C' и т.д.). Как нетрудно показать, длины сторон двойственного треугольника $A'B'C'$ следующим образом выражаются через углы исходного треугольника:

$$|A'B'| = \pi - \angle C,\ \ |B'C'| = \pi - \angle A,\ \ |C'A'| = \pi - \angle B.$$

То же самое верно и для любых двух двойственных треугольников. С другой стороны, площадь сферического треугольника может быть вычислена по формуле

$$S = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

Поэтому, когда точка C пробегает искомое ГМТ, все двойственные треугольники $A'B'C'$ будут постоянного периметра, и наоборот: если двойственный треугольник имеет периметр, равный $2\pi - S$, то исходный треугольник принадлежит искомому ГМТ.

С другой стороны, как нетрудно видеть, вершина C' треугольника, двойственного любому треугольнику из нашего ГМТ, – фиксирована, также как и лучи (в сферическом смысле) $C'A'$ и $C'B'$ (так как вершины двойственного треугольника однозначно восстанавливаются по сторонам исходного и наоборот). Поэтому, с точки зрения двойственного треугольника наша задача сводится к следующему: найти все треугольники $A'B'C'$ с данным углом $\angle A'C'B'$ (не величиной угла, а углом!), имеющие данный периметр. Эта задача решается на сфере точно так же, как и на плоскости. напомним, что несложно показать, что для любого такого треугольника сторона $A'B'$ касается фиксированной окружности, вписанной в угол $\angle A'C'B'$, или, с точки зрения трехгранных углов, грань $OA'B'$ касается фиксированной конической поверхности. Но из этого следует, что луч OC в свою очередь описывает коническую поверхность, и следовательно точка C пробегает по некоторой сферической окружности (из которой надо выкинуть точки, соответствующие вырожденному треугольнику $A'B'C'$ – т.е. тем случаям, когда отрезок $A'B'$ попадает на стороны данного угла). Теперь эту окружность несложно восстановить: достаточно заметить, что кроме точки C на ней должны лежать точки, диаметрально противоположные A и B, соответствующие как раз вырожденным положениям отрезка $A'B'$. Чтобы закончить решение, достаточно добавить окружность, симметричную данной относительно AB (так как саму точку C можно отразить относительно этой сферической прямой).

(Г.Шарыгин)

4. Точкам тора с угловыми координатами (φ, ψ) поставим в соответствие точки (u, v) единичного квадрата на плоскости, где $u = \frac{\varphi}{2\pi}, v = \frac{\psi}{2\pi}$. Покроем плоскость такими единичными квадратами и отметим на них точки дорог. Получатся прямые с тангенсами углов $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где числа $(a, b) = 1$ и $(c, d) = 1$ взаимно просты. Длины дорог (как отрезков на плоскости) равны $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{c^2 + d^2}$, а расстояния между соседними витками дорог (расстояния между соседними прямыми на плоскости) равны $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}$ (т.к. площадь единичного квадрата равна произведению длины дороги на расстояние между ее витками на плоскости). Если $ad = bc$, то различные дороги не имеют точек пересечения. Пусть $ad \neq bc$. Синус угла между дорогами в любой их точке пересечения равен $\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$. Поэтому расстояние на плоскости между соседними точками пересечения первой дороги с соседними витками второй дороги равно $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ad-bc|}$. Откуда следует, что дороги пересекаются в $|ad - bc|$ точках.

(И. Шнурников)

5. Пусть ω - окружность, внутри которой содержится A. Так как A содержит внутренние точки, то для каждого $\phi \in \mathbb{R}$ существует единственная прямая $l(\phi)$, коллинеарная вектору $(cos\phi, sin\phi)$ и делящая площадь A пополам.
Рассмотрим тройку прямых $l_1 = l(t)$, $l_2 = l(t + \pi/3)$ и $l_3 = l(t + 2\pi/3)$, здесь $t \in [0, \pi]$ - параметр. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ - точки пересечения прямой l_1 с ω (выберем их так, чтобы они были непрерывными функциями параметра t), а $C(t)$ - точка пересечения прямых l_2 и l_3.
Имеем $A(\pi) = B(0)$, $B(\pi) = A(0)$ и $C(\pi) = C(0)$, поэтому ориентированные площади треугольников $A(t)B(t)C(t)$ при $t = 0$ и π имеют разные знаки. По непрерывности получаем, что существует такое значение $t_1 \in [0, \pi]$, при котором площадь треугольника $A(t)B(t)C(t)$ равна нулю, т.е. $C(t) \in l_1$. Так как в каждый момент все три прямые l_i различны, то в момент времени t_1 они

проходят через одну точку. Требуемое доказано.

Замечание. Видно, что мы доказали даже чуть больше - мы доказали, что эти три прямые можно выбрать так, чтобы они находились под равными углами друг к другу.

(В. Шмаров)