Дополнения к семинару 9

Кратчайшие кривые и геодезические

★ **Лемма 9.1.** *Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма, заданная на $\mathbb{R}^n$, и*

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 1, \ldots, |x_n| \le 1\}.$$

Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что для любого $x \in K$ имеем $\|x\| \le \lambda$. Иными словами, норма ограничена на кубе K.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ обозначает стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (у вектора e_i единственная ненулевая компонента расположена на i-ом месте и равна 1). Положим $\lambda = n \max_i \|e_i\|$, тогда λ — искомое. Действительно, для любого $x \in K$ имеем $x = \sum_i x_i e_i$, где $|x_i| \le 1$ при всех i, поэтому

$$\|x\| \le \sum_i |x_i| \cdot \|e_i\| \le n \max_i \|e_i\| = \lambda,$$

что и требовалось. □

★ **Следствие 9.2.** *Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма, заданная на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto \|x\|$, — непрерывна в стандартной топологии.*

Доказательство. Покажем сначала, что f непрерывна в $0 \in \mathbb{R}^n$. Действительно, по лемме 9.1, функция f ограничена на кубе K, определенном в условии этой леммы и, значит, она также ограничена некоторой постоянной λ на содержащемся в этом кубе единичном евклидовом открытом шаре $U = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_i x_i^2 < 1\}$. Для $\delta > 0$ положим $\delta U = \{\delta x : x \in U\}$, тогда, в силу $\|\delta x\| = \delta\|x\|$, функция f ограничена на δU числом $\delta\lambda$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $\delta\lambda < \varepsilon$, откуда, в силу $f(0) = 0$, и вытекает непрерывность f в 0.

Докажем теперь непрерывность f в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Мы должны показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытый шар $U_\delta(x)$ такой, что при всех $y \in U_\delta(x)$ выполняется $\big|f(y) - f(x)\big| < \varepsilon$. Заметим, что для любых $u, v \in \mathbb{R}^n$ имеем $\|u\| = \|u + v - v\| \le \|u + v\| + \|v\|$ и $\|v\| = \|u + v - u\| \le \|u + v\| + \|u\|$, откуда

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u + v\|.$$

Следовательно, если положить $u = y$, $v = -x$, то $\big|f(y) - f(x)\big| \le f(y - x)$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для $\xi \in \delta U$ выполнялось $f(\xi) < \varepsilon$, тогда $\big|f(y) - f(x)\big| < \varepsilon$ для всех $y \in U_\delta(x)$, что и требовалось. □

✠ **Соглашение 9.3.** Часто бывает удобно не вводить специальное обозначение для метрики, а писать $|xy|$ для расстояния между точками x и y рассматриваемых метрических пространств.

⊛ **Определение 9.4.** Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *изометричным*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых $x, x' \in X$ выполняется $\big|f(x)f(x')\big| = |xx'|$. Биективное изометричное отображение называется *изометрией*. Метрические пространства, между которыми существует изометрия, называются *изометричными*.

▶ **Замечание 9.1.** У изометричных пространств все метрические свойства одинаковы, в частности, у них одинаково устроены семейства кратчайших кривых.

▶ **Замечание 9.2.** Тривиально проверяется, что тождественное отображение, обратное отображение к изометрии и композиция изометрий являются изометриями.

★ **Лемма 9.5.** *Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы на $\mathbb{R}^n$, задающие два метрических пространства X_1 и X_2. Обозначим через B_i единичный шар с центром в нуле O в пространстве X_i. Предположим, что существует линейное отображение $f\colon X_1 \to X_2$ такое, что $f(B_1) = B_2$. Тогда пространства X_1 и X_2 изометричны.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что отображение f невырождено. Действительно, если бы f было вырожденным, то его образ содержался бы в собственном линейном подпространстве $\mathbb{R}^n$ и, значит, для некоторого вектора $e \neq 0$ все векторы λe, $\lambda \neq 0$, не лежали бы в этом образе и, поэтому, не принадлежали бы $f(B_1) = B_2$. Однако, в силу непрерывности функции $g(x) = \|x\|_2$ (упражнение 9.2) и условия $g(O) = 0$, заключаем, что при достаточно малых $\lambda \neq 0$ выполняется $g(\lambda e) < 1$, откуда $\lambda e \in B_2$, противоречие.

Из невырожденности f и условия $f(B_1) = B_2$, в частности, вытекает, что f биективно отображает B_1 на B_2, а также биективно отображает $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ на $\mathbb{R}^n \setminus B_2$.

Пусть $x \in X_1$ — такая точка, что $\|x\|_1 = 1$. Покажем, что $\big\|f(x)\big\|_2 = 1$. Предположим противное. Так как $x \in B_1$, то $f(x) \in B_2$, поэтому, с учетом предположения, имеем $\lambda := \big\|f(x)\big\|_2 < 1$. Так как f невырождено, то $\lambda \neq 0$, поэтому определен вектор $y = x/\lambda$, и для него имеем $\|y\|_1 > 1$ и $\big\|f(y)\big\|_2 = 1$. Но это противоречит тому, что f биективно отображает $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ на $\mathbb{R}^n \setminus B_2$.

Из только что доказанного и свойств нормы вытекает, что для любого $x \in X_1$ имеем $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$. Выведем отсюда, что для любых $x, y \in X_1$ выполняется $\big|f(x)f(y)\big| = |xy|$. Из линейности f и свойств нормы заключаем следующее:

$$\big|f(x)f(y)\big| = \big\|f(x) - f(y)\big\|_2 = \big\|f(x-y)\big\|_2 = \|x-y\|_1 = |xy|,$$

что и требовалось. □

Упражнение 9.1. Опишите кратчайшие кривые на плоскости с нормой $\|(x,y)\| = \max\big\{|x|, |y|\big\}$.

Упражнение 9.2. Дайте полное описание кратчайших кривых на прямом круговом цилиндре.

Упражнение 9.3. Опишите кратчайшие кривые и геодезические на (бесконечном) прямом круговом конусе.

Упражнение 9.4. Приведите пример геодезической, являющейся замкнутой кривой, но не являющейся замкнутой геодезической.

Упражнение 9.5. Докажите, что в каждой компоненте, на которые замкнутая геодезическая без самопересечений делит границу выпуклого многогранника, сумма кривизн всех попавших в компоненту вершин многогранника равна 2π.

Упражнение 9.6. Постройте пример замкнутой геодезической на выпуклом многограннике, являющейся пространственным треугольником.

Упражнение 9.7. Докажите, что на тетраэдре не может быть геодезических, представляющих собой треугольник в евклидовом пространстве.

Упражнение 9.8. Докажите, что все четырехугольные замкнутые геодезические на правильном тетраэдре являются прямоугольниками.

Упражнение 9.9. Постройте пример восьмиугольной геодезической на правильном тетраэдре.

Упражнение 9.10. Найдите на поверхности куба замкнутую геодезическую, являющуюся

(1) квадратом;

(2) правильным шестиугольником;

(3) неплоским шестиугольником.

Упражнение 9.11. Докажите, что правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро не равно стороне основания, не содержит замкнутых геодезических без самопересечений.