# Дополнения к семинару 8

# Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

**Упражнение 8.1.** Пусть $W$ — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$, а также на многоугольники $G_1, \ldots, G_m$. Докажите следующее утверждение: многоугольник $W$ можно разрезать на многоугольники $W_i$ так, что каждый $W_i$ лежит в некотором $F_j$ и $G_k$. В частности, каждый $F_j$ и $G_k$ разрезается на некоторые из многоугольников $W_i$.

**Упражнение 8.2.** Выведите из упражнения 8.1, что из равносоставленности многоугольников $A$ и $B$, а также многоугольников $B$ и $C$, вытекает равносоставленность многоугольников $A$ и $C$. Покажите, что отношение равносоставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

**Упражнение 8.3.** Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

**Упражнение 8.4.** Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

**Упражнение 8.5.** Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равносоставлены.

**Упражнение 8.6.** Из упражнения 8.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равносоставлены.

**Упражнение 8.7.** Докажите, что конечный набор прямоугольников равносоставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

**Упражнение 8.8.** Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

**Упражнение 8.9.** Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равносоставлен с кубом.

⊛ **Определение 8.1.** Пусть $W$ — многогранник с множеством ребер $E$, и $M$ — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из $E$. Пусть $f$ — произвольная функция Дена для $W$, и $g\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника* $W$, соответствующим паре $(f, g)$, назовем число $\sum_{e\in E} g\big(|e|\big)f(\alpha_e)$, где $|e|$ и $\alpha_e$ — длина ребра $e$ и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

**Упражнение 8.10.** Докажите, что у равносоставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

**Упражнение 8.11.** Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравносоставленные с равновеликим кубом.

Для решения этой задачи, нам нужно будет построить функцию Дена $f$ и аддитивную функцию $g$ на всем $\mathbb{R}$. Аддитивность этих функций, на самом деле, является не чем иным, как $\mathbb{Q}$-линейностью, т.е. сохранением конечных рациональных линейных комбинаций. Покажем это на примере функции $f$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} x_i$, где $p_i$ и $q_i$ — целые числа, причем $q_i \neq 0$. Приведя все числа $p_i/q_i$ к общему знаменателю и умножив правую и левую часть на этот знаменатель, получим $Q\,x = \sum_{i=1}^{n} P_i\,x_i$, где $P_i$ и $Q$ — целые числа, $Q \neq 0$, $P_i/Q = p_i/q_i$. Если $f$ сохраняет соотношения, то $Q\,f(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i\,f(x_i) = 0$, откуда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} f(x_i).$$

Таким образом, аддитивность $f$ влечет $\mathbb{Q}$-линейность. Обратно, $\mathbb{Q}$-линейность, в частности, означает и линейность над целыми числами, т.е. аддитивность.

Чтобы эффективно строить $\mathbb{Q}$-линейные отображение с нужными свойствами, мы введем понятие базиса Гамеля. Начнем с ряда понятий, относящихся к произвольным векторным пространствам.

Пусть $V$ — произвольное линейное пространство над некоторым полем. Линейная комбинация векторов из $V$ называется *финитной*, если все коэффициенты этой комбинации, кроме конечного их числа, равны нулю. Система векторов из $V$ называется *независимой*, если равенство нулю любой финитной линейной комбинации векторов этой системы равносильно тому, что все коэффициенты такой линейной комбинации равны нулю. Система векторов из $V$ называется *полной*, если любой вектор из $V$ выражается в виде некоторой финитной линейной комбинации векторов этой системы. *Базисом Гамеля пространства* $V$ называется полная линейно независимая система векторов из $V$.

Оказывается, базис Гамеля всегда существует. Для доказательства этого факта, а также для изучения различных, нужных в дальнейшем, свойств таких базисов, нам понадобится одно фундаментальное утверждение из теории множеств, называемое леммой Цорна. Чтобы его сформулировать, напомним некоторые определения.

Пусть $X$ — произвольное множество. Отношение "$\preceq$" на $X$ называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно (при каждом $x \in X$ выполняется $x \preceq x$), транзитивно (если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$) и антисимметрично (если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$). При этом, если $x \preceq y$, то будем говорить, что $x$ *подчиняется* $y$. Примером частичного порядка, определенного на множестве $X$ всех подмножеств множества его, может служить принадлежность одного подмножества другому.

Пары элементов из $X$, для которых определено отношение, называются *сравнимыми*, а все остальные — *несравнимыми*. Частичный порядок, для которого все пары сравнимы, называется *линейным порядком*. Примером линейного порядка может служить стандартное отношение $\leq$ на вещественных числах. Если множество $X$ состоит более чем из одного элемента, то приведенный выше пример отношения на множестве всех его подмножеств линейным не является (убедитесь).

Подмножество $Z$ частично упорядоченного множества $X$ называется *цепью в* $X$, если индуцированный на нем частичный порядок линеен. Элемент $m$ частично упорядоченного множества $X$ называется *верхней гранью* множества $Z \subset X$, если для всех $z \in Z$ выполняется $z \preceq m$. Элемент $m$ частично упорядоченного множества $X$ называется *максимальным*, если в $X$ не существует большего чем $m$ элемента, т.е. такого $m' \neq m$, что $m \preceq m'$. Вообще говоря, максимальных элементов может быть несколько. Кроме того, максимальных элементов может вообще не быть (приведите примеры, иллюстрирующие все описанные только что определения и утверждения).

**★ Лемма 8.2** (Цорн)**.** *Если в частично упорядоченном множестве $X$ каждая цепь имеет верхнюю грань, то каждый элемент из $X$ подчинен некоторому максимальному.*

Покажем, как отсюда вытекает существование базиса Гамеля. Пусть $V$ — произвольное векторное пространство. В качестве $X$ рассмотрим всевозможные независимые семейства $S$ векторов из $V$, а в качестве частичного порядка — отношение принадлежности. Пусть $C$ — произвольная цепь в $X$. Рассмотрим объединение $\cup C$ всех элементов этой цепи. Покажем, что $\cup C$ является независимой системой векторов из $V$.

Действительно, рассмотрим произвольную финитную линейную комбинацию векторов из $\cup C$, и пусть $e_1$, $\ldots$, $e_n$ — все векторы, при которых коэффициенты этой комбинации отличны от нуля. Каждый $e_i$ принадлежит некоторому $S_i \in C$. Так как $C$ — цепь, то все $S_i$ сравнимы между собой, поэтому их можно упорядочить $S_{i_1} \preceq \cdots \preceq S_{i_n}$, так что все $e_i$ принадлежат $S_{i_n}$ и, значит, входят в независимую систему, поэтому и сами образуют независимую систему. Таким образом, рассматриваемая финитная линейная комбинация равна нулю, если и только если все ее коэффициенты равны нулю, так что $\cup C$ — независимая система. Ясно также, что любой элемент цепи $C$ подчиняется $\cup C$, так что $\cup C$ — верхняя грань для $C$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что применима лемма Цорна, поэтому каждый элемент из $X$ подчинен максимальному. Что представляют собой максимальные элементы в $X$? Это такие независимые системы векторов из $W$, которые нельзя расширить до больших, т.е. добавление любого вектора приводит к зависимой системе. Отсюда мгновенно вытекает, что каждый добавленный вектор к максимальному $S \in X$ выражается в виде финитной линейной комбинации векторов из $S$, поэтому $S$ является полной системой и, значит, базисом Гамеля. Итак, лемма Цорна приводит нас к следующему результату.

★ **Следствие 8.3.** *В любом векторном пространстве любая независимая система векторов содержится в некотором базисе Гамеля.*