Дополнения к семинару 8

Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта

Упражнение 8.1. Пусть W — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$, а также на многоугольники $G_1, \ldots, G_m$. Докажите следующее утверждение: многоугольник W можно разрезать на многоугольники W_i так, что каждый W_i лежит в некотором F_j и G_k. В частности, каждый F_j и G_k разрезается на некоторые из многоугольников W_i.

Упражнение 8.2. Выведите из упражнения 8.1, что из равносоставленности многоугольников A и B, а также многоугольников B и C, вытекает равносоставленность многоугольников A и C. Покажите, что отношение равносоставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

Упражнение 8.3. Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

Упражнение 8.4. Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

Упражнение 8.5. Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равносоставлены.

Упражнение 8.6. Из упражнения 8.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равносоставлены.

Упражнение 8.7. Докажите, что конечный набор прямоугольников равносоставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

Упражнение 8.8. Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

Упражнение 8.9. Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равносоставлен с кубом.

⊛ **Определение 8.1.** Пусть W — многогранник с множеством ребер E, и M — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из E. Пусть f — произвольная функция Дена для W, и $g\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника* W, соответствующим паре (f, g), назовем число $\sum_{e\in E} g\big(|e|\big)f(\alpha_e)$, где $|e|$ и α_e — длина ребра e и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

Упражнение 8.10. Докажите, что у равносоставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

Упражнение 8.11. Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравносоставленные с равновеликим кубом.

Для решения этой задачи, нам нужно будет построить функцию Дена f и аддитивную функцию g на всем $\mathbb{R}$. Аддитивность этих функций, на самом деле, является не чем иным, как $\mathbb{Q}$-линейностью, т.е. сохранением конечных рациональных линейных комбинаций. Покажем это на примере функции f. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} x_i$, где p_i и q_i — целые числа, причем $q_i \neq 0$. Приведя все числа p_i/q_i к общему знаменателю и умножив правую и левую часть на этот знаменатель, получим $Q\,x = \sum_{i=1}^{n} P_i\,x_i$, где P_i и Q — целые числа, $Q \neq 0$, $P_i/Q = p_i/q_i$. Если f сохраняет соотношения, то $Q\,f(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i\,f(x_i) = 0$, откуда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i} f(x_i).$$

Таким образом, аддитивность f влечет $\mathbb{Q}$-линейность. Обратно, $\mathbb{Q}$-линейность, в частности, означает и линейность над целыми числами, т.е. аддитивность.

Чтобы эффективно строить $\mathbb{Q}$-линейные отображение с нужными свойствами, мы введем понятие базиса Гамеля. Начнем с ряда понятий, относящихся к произвольным векторным пространствам.

Пусть V — произвольное линейное пространство над некоторым полем. Линейная комбинация векторов из V называется *финитной*, если все коэффициенты этой комбинации, кроме конечного их числа, равны нулю. Система векторов из V называется *независимой*, если равенство нулю любой финитной линейной комбинации векторов этой системы равносильно тому, что все коэффициенты такой линейной комбинации равны нулю. Система векторов из V называется *полной*, если любой вектор из V выражается в виде некоторой финитной линейной комбинации векторов этой системы. *Базисом Гамеля пространства* V называется полная линейно независимая система векторов из V.

Оказывается, базис Гамеля всегда существует. Для доказательства этого факта, а также для изучения различных, нужных в дальнейшем, свойств таких базисов, нам понадобится одно фундаментальное утверждение из теории множеств, называемое леммой Цорна. Чтобы его сформулировать, напомним некоторые определения.

Пусть X — произвольное множество. Отношение "$\preceq$" на X называется *частичным порядком*, если оно рефлексивно (при каждом $x \in X$ выполняется $x \preceq x$), транзитивно (если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$) и антисимметрично (если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$). При этом, если $x \preceq y$, то будем говорить, что x *подчиняется* y. Примером частичного порядка, определенного на множестве X всех подмножеств некоторого множества, может служить принадлежность одного подмножества другому.

Пары элементов из X, для которых определено отношение, называются *сравнимыми*, а все остальные — *несравнимыми*. Частичный порядок, для которого все пары сравнимы, называется *линейным порядком*. Примером линейного порядка может служить стандартное отношение $\leq$ на вещественных числах. Если множество X состоит более чем из одного элемента, то приведенный выше пример отношения на множестве всех его подмножеств линейным не является (убедитесь).

Подмножество Z частично упорядоченного множества X называется *цепью в* X, если индуцированный на нем частичный порядок линеен. Элемент m частично упорядоченного множества X называется *верхней гранью* множества $Z \subset X$, если для всех $z \in Z$ выполняется $z \preceq m$. Элемент m частично упорядоченного множества X называется *максимальным*, если в X не существует большего чем m элемента, т.е. такого $m' \neq m$, что $m \preceq m'$. Вообще говоря, максимальных элементов может быть несколько. Кроме того, максимальных элементов может вообще не быть (приведите примеры, иллюстрирующие все описанные только что определения и утверждения).

★ **Лемма 8.2** (Цорн)**.** *Если в частично упорядоченном множестве X каждая цепь имеет верхнюю грань, то каждый элемент из X подчинен некоторому максимальному.*

Покажем, как отсюда вытекает существование базиса Гамеля. Пусть V — произвольное векторное пространство. В качестве X рассмотрим всевозможные независимые семейства S векторов из V, а в качестве частичного порядка — отношение принадлежности. Пусть C — произвольная цепь в X. Рассмотрим объединение $\cup C$ всех элементов этой цепи. Покажем, что $\cup C$ является независимой системой векторов из V.

Действительно, рассмотрим произвольную финитную линейную комбинацию векторов из $\cup C$, и пусть e_1, $\ldots$, e_n — все векторы, при которых коэффициенты этой комбинации отличны от нуля. Каждый e_i принадлежит некоторому $S_i \in C$. Так как C — цепь, то все S_i сравнимы между собой, поэтому их можно упорядочить $S_{i_1} \preceq \cdots \preceq S_{i_n}$, так что все e_i принадлежат S_{i_n} и, значит, входят в независимую систему, поэтому и сами образуют независимую систему. Таким образом, рассматриваемая финитная линейная комбинация равна нулю, если и только если все ее коэффициенты равны нулю, так что $\cup C$ — независимая система. Ясно также, что любой элемент цепи C подчиняется $\cup C$, так что $\cup C$ — верхняя грань для C.

Из проведенных рассуждений вытекает, что применима лемма Цорна, поэтому каждый элемент из X подчинен максимальному. Что представляют собой максимальные элементы в X? Это такие независимые системы векторов из W, которые нельзя расширить до больших, т.е. добавление любого вектора приводит к зависимой системе. Отсюда мгновенно вытекает, что каждый добавленный вектор к максимальному $S \in X$ выражается в виде финитной линейной комбинации векторов из S, поэтому S является полной системой и, значит, базисом Гамеля. Итак, лемма Цорна приводит нас к следующему результату.

★ **Следствие 8.3.** *В любом векторном пространстве любая независимая система векторов содержится в некотором базисе Гамеля.*