Дополнения к семинару 7

Жесткие и изгибаемые многогранники

Комментарий к лекции 7.1. Приведем некоторые обобщения результатов из лекции 6. Они позволят более глубоко освоить материал лекции 7.

★ **Предложение 7.1.** *Пусть W — выпуклый сферический многоугольник и ℓ — сферическая прямая, проходящая через ребро многоугольника W. Положим $\sigma = W \cap \ell$, тогда σ равно*

(1) *или ℓ, когда W — подразбитый сферический одноугольник или подразбитый двуугольник с углом π,*

(2) *или сферическому отрезку величины π, когда W — подразбитый двуугольник с углом, меньшим π,*

(3) *или малому сферическому отрезку величины меньшей π во всех остальных случаях.*

Доказательство. Пункты (1) и (2) очевидны. Проверим пункт (3). Пусть W не является ни подразбитым одноугольником, ни подразбитым двуугольником. Мы должны показать, что тогда σ — малый сферический отрезок величины меньше π. По следствию 6.24 из лекции, W не содержит диаметрально противоположных точек. Покажем, что σ — замкнутое линейно связное подмножество окружности, т.е. σ — сферический отрезок. Замкнутость вытекает из того, что σ является пересечением двух замкнутых подмножеств сферы — сферического многоугольника и сферической прямой. Выберем произвольные точки $P, Q \in \sigma$, тогда, в силу следствия 6.29 из лекции, $PQ \subset W$, поэтому $PQ \subset W \cap \ell = \sigma$, откуда и вытекает линейная связность. Осталось заметить, что если величина σ больше или равна π, то σ а, значит, и W содержат диаметрально противоположные точки, противоречие. $\square$

⊛ **Определение 7.2.** Пусть W — выпуклый сферический многоугольник и ℓ — сферическая прямая, проходящая через ребро многоугольника W. Тогда $W \cap \ell$ назовем *объединенной стороной* многоугольника W.

Пусть выпуклый многоугольник W отличен от подразбитого одноугольника или подразбитого двуугольника. Перестроим его границу, выбрав в качестве ребер ломаной ∂W объединенные стороны. Тогда так перестроенный W содержит не меньше трех вершин и все его углы меньше π, поэтому, в силу предложения 6.36, многоугольник W — эйлеров. Таким образом, имеет место следующий результат.

★ **Следствие 7.3.** *Каждый выпуклый сферический многоугольник является или подразбитым одноугольником, или подразбитым двуугольником, или подразбитым эйлеровым многоугольником.*

Доказательство следующего утверждения практически дословно повторяет доказательство следствия 6.38 из лекции.

★ **Предложение 7.4.** *Пусть A и B — точки выпуклого сферического многоугольника $W \subset S^2$, не являющиеся диаметрально противоположными и не лежащие на одной объединенной стороне, тогда* $\operatorname{Int} AB \subset \operatorname{Int} W$.

★ **Следствие 7.5.** *Пусть W — выпуклый сферический многоугольник, отличный от подразбитого одноугольника. Пусть $A, B \in \partial W$, $A \neq B$, причем A и B не диаметрально противоположны и не лежат на одной и той же объединенной стороне многоугольника W. Тогда AB разбивает W на два подразбитых эйлеровых многоугольника. В частности, если A и B — внутренние точки разных сторон двуугольника с углом, меньшим π, то AB делит этот двуугольник на два эйлеровых треугольника.*

Доказательство. Для подразбитого эйлерова многоугольника это утверждение вытекает из леммы 6.1, содержащейся в дополнении к лекции 6. Осталось, в силу леммы 7.3, рассмотреть случай, когда W — выпуклый двуугольник с углом, меньшим π.

Обозначим через P и Q вершины двуугольника W. Так как A и B лежат на разных сторонах W, и угол W меньше π, то A, B, P не лежат на одной сферической прямой, и A, B, Q — тоже, поэтому, в силу предложения 6.47 из лекции, эти тройки являются вершинами эйлеровы треугольников ABP и ABQ соответственно.

По следствию 6.29 из лекции, $AB \subset W$; кроме того, точки A и B разбивают стороны W на малые сферические отрезки, поэтому $\partial(ABP) \subset W$ и $\partial(ABQ) \subset W$.

Обозначим через ℓ сферическую прямую, проходящую через AB, а через S_1 и S_2 — замкнутые полусферы, ограниченные ℓ. Так как P и Q — диаметрально противоположны и не лежат на ℓ, они расположены в разных открытых полусферах, ограниченных ℓ. По следствию 6.23 из лекции, каждый из треугольников ABP и ABQ лежит а одной из полусфер S_i, но вершины P и Q этих треугольников не лежат в одной и той же S_i, поэтому и сами треугольники лежат в разных S_i, скажем, $ABP \subset S_1$, а $ABQ \subset S_2$. Так как, по предложению 6.30 из лекции, $\ell \cap ABP = AB = \ell \cap ABQ$, то $ABP \cap ABQ = AB$.

Нам осталось показать, что $W = ABP \cup ABQ$. Начнем с включения $ABP \cup ABQ \subset W$. Границы треугольников лежат в W, поэтому осталось проверить, что и все их внутренние точки содержатся в W. Проверим это для ABP. Возьмем произвольную точку $R \in \operatorname{Int}(ABP)$, и пусть $R' \in S^2$ диаметрально противоположна R. Рассмотрим произвольную сферическую прямую ℓ', проходящую через R и R', тогда точки R и R' разбивают ℓ' на два сферических отрезка e и e'. Точка R' лежит вне треугольника ABP, поэтому и e, и e' пересекают $\partial(ABP)$. Точки из $\partial(ABP) \cap e$ и $\partial(ABP) \cap e'$, встречающиеся первыми при движении по e и e', начинающемся в точке R, обозначим через S и S' соответственно. Пусть σ — та часть сферической прямой ℓ' между точками S и S', которая содержит R. По следствию 6.29 из лекции, имеем $RS \subset ABP$, $RS' \subset ABP$, поэтому $\sigma = SR \cup RS' \subset ABP$, так что σ — малый сферический отрезок величины меньшей π. Но так как $S, S' \in W$, то, в силу того же следствия 6.29 из лекции, $R \in \sigma \subset W$, что и требовалось. Включение $ABP \cup ABQ \supset W$ доказывается точно так же. □

Комментарий к лекции 7.2. Дадим более аккуратное определение обхода грани плоского графа в случае, когда все ребра графа — ломаные.

Пусть L — произвольная незамкнутая ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, не имеющая самопересечений и соединяющая точки A и B. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы

(1) все ребра ломаной L оказались длиннее 2ε;

(2) $L \cap U_\varepsilon(A)$ и $L \cap U_\varepsilon(B)$ представляли собой радиусы этих круговых окрестностей;

(3) для ломаной $L_\varepsilon = L \setminus \big(U_\varepsilon(A) \cup U_\varepsilon(B)\big)$ и каждой точки $P \in L_\varepsilon$ множество $L \cap U_\varepsilon(P)$ представляло собой два радиуса открытого круга $U_\varepsilon(P)$.

Каждое такое ε будем называть *допустимым* для ломаной L. Кроме того, определенную выше ломаную L_ε будем называть *ε-усеченной ломаной* L, а открытое множество $U(L \mid \varepsilon) := U_\varepsilon(L_\varepsilon)$ — *ε-усеченной окрестностью ломаной* L.

▶ **Замечание 7.6.** Если $\varepsilon > 0$ — допустимое для L, то и каждое $0 < \delta < \varepsilon$ допустимо для L.

Ровно так же, как мы поступали при доказательстве теоремы Жордана, а также с использованием идей из решения упражнения 4.8, проверяется следующий результат.

★ **Лемма 7.7.** *Пусть L — произвольная незамкнутая ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$, не имеющая самопересечений и соединяющая точки A и B. Тогда для произвольного допустимого $\varepsilon > 0$ открытое множество $U = U(L \mid \varepsilon) \setminus L$ состоит из двух компонент — открытых множеств U_1 и U_2. Более того, каждое из открытых множеств $U_i \cap U_\varepsilon(A)$ и $U_i \cap U_\varepsilon(B)$ линейно связно, причем любые точки $X \in U_i \cap U_\varepsilon(A)$ и $Y \in U_i \cap U_\varepsilon(B)$ соединяются ломаной без самопересечений, лежащей в U_i, в частности, не пересекающей L.*

⊛ **Определение 7.8.** Компоненты U_1 и U_2 из леммы 7.7 назовем *ε-сторонами ломаной* L, а открытые множества $U_i \cap U_\varepsilon(A)$ и $U_i \cap U_\varepsilon(B)$ — *концевыми областями ε-стороны U_i ломаной* L.

Пусть теперь $G = (V, E)$ — произвольный плоский (геометрический) граф, ребра которого — ломаные. Выберем $0 < \varepsilon$ и $0 < \delta < \varepsilon$ и таким, чтобы

(1) все отрезки, составляющие ломаные — ребра графа G, оказались длиннее 2ε;

(2) для каждой вершины A графа G множество $G \cap U_\varepsilon(A)$ представляло собой объединение радиусов круговой окрестности $U_\varepsilon(A)$ (в количестве $\deg A$ штук);

(3) для каждого ребра L графа G и каждой точки P ломаной L_ε множество $G \cap U_\delta(P)$ представляло собой два радиуса открытого круга $U_\delta(P)$ (и, поэтому, имело бы место равенство $G \cap U_\delta(P) = L \cap U_\delta(P)$; отметим, что такое δ является допустимым для $L_{\varepsilon-\delta}$).

Каждую такую пару (ε, δ) будем называть *допустимой* для графа G. Кроме того, открытое множество

$$U(G \mid \varepsilon, \delta) := \Big(\bigcup_{A \in V} U_\varepsilon(A)\Big) \cup \Big(\bigcup_{L \in E} U(L_{\varepsilon-\delta} \mid \delta)\Big)$$

назовем (ε, δ)-*усеченной окрестностью графа* G.

Конструкция 7.9. Пусть G — плоский граф, ребра которого — ломаные. Выберем произвольную пару (ε, δ), допустимую для G, и для каждого ребра L графа G, каждой δ-стороны U_i ломаной $L_{\varepsilon-\delta}$ выберем в концевых областях U_i по одной точке и соединим их ломаной без самопересечений L_i, лежащей в U_i. Таким образом, для каждой вершины A графа G, в каждой компоненте S множества $U_\varepsilon(A) \setminus G$ содержатся ровно две концевых точки построенных ломаных L_i. Соединим эти точки ломаной L_S, лежащей в S, и так же, как это было проделано при решении упражнения 4.8, избавимся от самопересечений ломаной L_S и ее неконцевых пересечений с ломаными L_i (эту перестройку мы делаем в открытом секторе S). Перестроенную ломаную также обозначим через L_S. Выберем на L_S некоторую точку A_S, тогда объединение ломаных L_i и L_S разбивается выбранными точками A_S на ломаные, которые мы возьмем в качестве ребер геометрического графа с вершинами A_S. Полученный плоский граф назовем *графом обходов для* G и обозначим через C_G.

★ **Лемма 7.10.** *Граф обходов C_G представляет собой несвязное объединение простых циклов (фактически, подразбитых вершинами графа C_G замкнутых ломаных без самопересечений). Каждая компонента графа C_G лежит внутри некоторой грани графа G, и каждая грань графа G содержит не меньше одной компоненты графа C_G. Если граф G связный, то в каждой грани графа G лежит ровно одна компонента графа C_G, что задает естественное взаимно однозначное соответствие между гранями графа G и связными компонентами графа C_G.*

⊛ **Определение 7.11.** Объединение всех связных компонент графа C_G, содержащихся в данной грани F графа G, будем называть *обходом грани* F, а число ребер в обходе — *длиной* этого обхода.

★ **Следствие 7.12.** *Длина обхода грани F графа G равна числу ребер, примыкающих к этой грани, плюс число ребер, примыкающих только к грани F. Таким образом, сумма длин обходов всех граней графа G равна удвоенному числу ребер графа G.*

★ **Следствие 7.13.** *Для простого графа G, множество всех пар ребер из G, последовательных при обходе вершин графа G, равно множеству пар ребер, смежных в обходах графа G.*

Упражнение 7.1. Докажите, что правильные многогранники определены однозначно с точностью до подобия.

Упражнение 7.2. Изобразите граф и двойственный граф октаэдра Брикара в виде плоских графов.

Упражнение 7.3. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — тетраэдр, а $q_{ij} = q_{ji}$ обозначает квадрат расстояния между A_i и A_j. Докажите, что квадрат объема V этого тетраэдра может быть вычислен как многочлен от величин q_{ij} по следующей формуле:

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 1 \\ q_{21} & 0 & q_{23} & q_{24} & 1 \\ q_{31} & q_{32} & 0 & q_{34} & 1 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 7.4. Используя результаты предыдущего упражнения, докажите, что не существует тетраэдра, основание которого — правильный треугольник со стороной 1, а боковые стороны равны 3/2, 2/3 и 3/4.